Análisis Matemático II

TP4b: Ejercicio 3 agregado

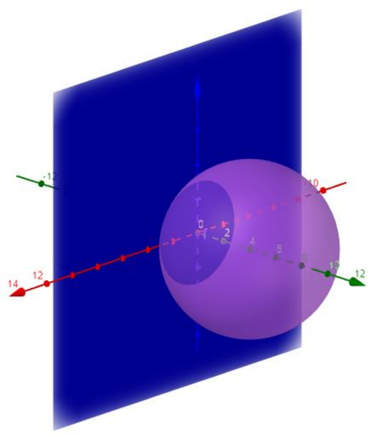
3. La superficie S es la parte de la esfera de ecuación $x^2 + z^2 + (y-4)^2 = 25$ para la cual $y \geq 0$, orientada en la dirección que se aleja del centro de la esfera. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$.

   a) Calcule el flujo a través de S del rotacional de $\mathbf{F}$.

   b) Indique si $\mathbf{F}$ es o no solenoidal.

   c) Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de *cualquier* superficie suave cerrada orientada positivamente.

a) El ejercicio nos pide calcular el flujo del rotacional de F a través de la superficie S (graficada en la figura). Podríamos parametrizar S y evaluar la integral de superficie.



Sin embargo, si planteamos el teorema de Stokes, vemos que podríamos obtener el mismo resultado evaluando la circulación del campo vectorial F a lo largo de la curva C, frontera de S.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

Observando la gráfica, vemos que la curva frontera es una circunferencia de radio 3 en el plano x z. Podemos obtenerla haciendo y = 0 en la ecuación de la esfera:

$$x^2 + z^2 + (0-4)^2 = 25$$

$$x^2 + z^2 = 9$$

Parametricemos esta curva. Vamos a elegir, por ejemplo, que tenga sentido antihorario vista desde el eje positivo de las y:

$$\vec{r}(t) = (3\,sen\,t; 0\,; 3\cos t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

Calculamos la velocidad de la curva:

$$\vec{r}'(t) = (3\,cos\,t; 0\,; -3\,\text{sen}\,t)$$

Reemplazamos las componentes del vector posición de la curva en el campo F:

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2;\ z^2; x^2)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (0;\ 9\,cos^2 t; 9\,sen^2 t)$$

Evaluamos la circulación de F a lo largo de la curva C:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_t \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (0;\ 9\,cos^2 t; 9\,sen^2 t) \cdot (3\,cos\,t; 0\,; -3\,\text{sen}\,t)dt$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -27 \int_0^{2\pi} sen^3 t\,dt$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Concluimos que parametrizar la curva C y evaluar la integral de línea, resulta más sencillo que parametrizar la superficie S y calcular la integral de superficie de campo vectorial.

b) Un campo vectorial F es solenoidal si tiene divergencia nula en todo su dominio.

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial(y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2)}{\partial z} = 0$$

El campo F es solenoidal.

c) Para calcular el flujo de F a través de cualquier superficie suave, cerrada, orientada positivamente, haremos uso del teorema de la divergencia, y del hecho de que el campo F es solenoidal.

Planteamos el teorema de la divergencia:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \iiint_V div\, F\, dV$$

Como el campo F es solenoidal:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \iiint_V 0\, dV$$

Podemos concluir que el flujo del campo vectorial F a través de cualquier superficie S suave, cerrada y orientada positivamente, será nulo por propiedad de campo solenoidal.

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = 0$$