

Universidad Nacional de Cuyo - Facultad de Ingeniería

Hidráulica General

UNIDAD II

Fundamentos de la Hidráulica

Profesora Titular: Patricia Susana INFANTE

Profesor Adjunto: Luis Enrique GUIASOLA

Profesora Adjunta: Sara RODRIGUEZ

Ayudante de Primera: Alejandra PUNTA

Estudiante Colaborador: Tomás Dionisio CARDOZO

Año 2020

Contenido. Cinemática: partícula, sistemas de Lagrange y Euler, trayectorias, líneas de corriente, filetes. Tipos de movimientos. Clasificación de los escurrimientos. Deformaciones, campo de velocidades y aceleraciones. **Hidrodinámica del agua:** ecuaciones de Euler, movimiento permanente del líquido perfecto, ecuación de la continuidad, Teorema de Bernoulli. Gasto, generalización del Teorema de Bernoulli, Teorema de Bernoulli en líquidos reales, aplicaciones. Bernoulli a caudal constante. Ecuación de la continuidad. Escurrimiento crítico, número de Froude. **Corrientes bidimensionales:** trazado de redes de corriente.

INDICE

II. UNIDAD II.....	3
1. Cinemática del agua.....	3
1.1. Método de Lagrange	3
1.2. Método de Euler:.....	5
1.3. Tipos de escurrimiento	8
1.4. Campo de velocidades.....	10
1.5. Campo de aceleraciones.....	15
2. Hidrodinámica del agua	17
2.1. Ecuaciones fundamentales de la Hidrodinámica	17
2.2. Ecuación de la continuidad.	18
2.3. Fuerzas intervinientes.	19
2.4. Teorema de Bernoulli.....	20
2.5. Generalización del teorema de Bernoulli para toda la corriente.....	25
2.6. Movimiento permanente variado	31
2.7. Teorema de Bernoulli en líquidos reales	34
2.8. Curva Energía – Altura a caudal constante	36
2.9. Escurrimiento crítico.....	37
2.10. Interpretación gráfica del escurrimiento crítico:	40
2.11. Relación de Froude.....	42
3. Ejercitación y casos de aplicación	44
4. Corrientes bidimensionales. Rouse (1960).....	59
4.1. Redes de Corriente.....	61
4.2. Movimiento Irrotacional	63
4.3. Trazado de redes de corriente	64
4.4. Corriente divergente.....	65
4.5. Propiedades de la red de corriente	66
4.6. Número de Euler.....	66
4.7. Ejemplos de trazado de redes de corriente para singularidades comunes	67
4.8. Aplicación práctica del trazado de una red de corriente. Rouse (1960).....	70
5. Referencias y Bibliografía	72

II. UNIDAD II

Hasta este momento se ha estudiado el comportamiento del agua en reposo, es decir, no hay transporte de partículas líquidas, el fluido sólo ejerce presión sobre la superficie que la contiene, o ejerce un empuje sobre un sólido que se encuentra inmerso en él.

A partir de este Capítulo y en adelante, el estudio se centrará en el agua en movimiento, es decir que, no sólo actúa la presión (como magnitud a tener en cuenta) sino también la velocidad y la aceleración, que son magnitudes netamente cinemáticas, o sea, relacionadas al movimiento del agua.

El objetivo principal de este tema es el entendimiento del fenómeno físico del agua en movimiento, que permite identificar cuáles son las variables a tener en cuenta. Utilizando las expresiones analíticas que se verán a continuación, se identificará el tipo de movimiento que se produce, bajo qué circunstancias y cuáles son las variables independientes del mismo.

El estudio comienza con el movimiento del agua sin tener en cuenta qué origen tiene ese movimiento, y para lo cual se requiere definir el concepto de cinemática.

1. Cinemática del agua

Recordando lo aprendido en la Materia Física I, se podrán contestar las siguientes preguntas que se refieren a cinemática de una partícula en movimiento.

¿Qué es y qué estudia la cinemática? ¿Qué es la velocidad? ¿Qué es la aceleración? ¿Cuáles son las variables que se estudian en la cinemática?

Recordando esos conceptos, es posible decir que la cinemática *estudia el movimiento de una partícula sin tomar en cuenta las fuerzas que lo originan, ni las masas que intervienen.*

Para empezar con el estudio analítico del movimiento del agua es necesario definir primero el concepto de CAMPO DE FLUJO: que es cualquier región del espacio donde existe fluido en movimiento y donde pueden determinarse magnitudes físicas tanto escalares, vectoriales como tensoriales.

La velocidad es una magnitud vectorial, que en los fluidos resulta distinta entre partícula y partícula, y puede expresarse como una función del espacio y del tiempo: $V = f(x; y; z; t)$

Para el estudio del movimiento de las partículas líquidas referidas a una terna cartesiana de coordenadas, existen dos métodos: el de **Lagrange** y el de **Euler**

A continuación, se detallan ambos.

1.1. Método de Lagrange

Joseph-Louis Lagrange, (25 de enero de 1736, Turín - 10 de abril de 1813 en París) fue un físico, matemático y astrónomo italiano que después vivió en Prusia y Francia. Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Lagrange demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.



Este método estudia el movimiento de las partículas a través del tiempo, mientras recorren una trayectoria en el espacio, es decir que, estudia sucesivas posiciones de una determinada partícula a través del tiempo.

Para interpretar este método, se adopta un sistema de ejes cartesianos (x, y, z) y se refiere la posición de la partícula a través del vector de posición \vec{r} .

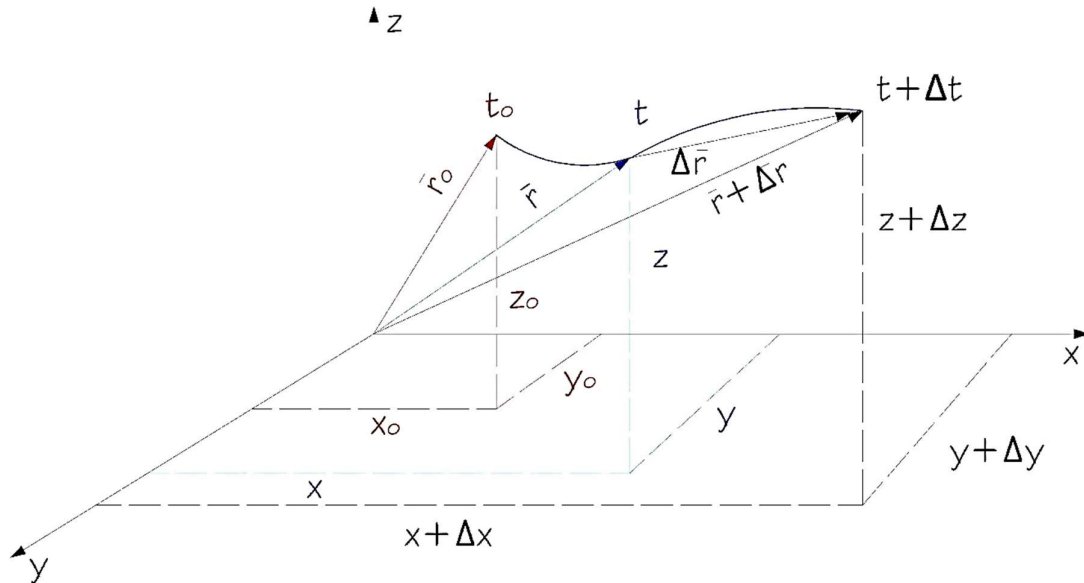


Figura 2.1

En función de la Figura 2.1 se puede responder a la siguiente pregunta: ¿cuál es el vector que identifica el instante t_0 , o sea, la posición inicial de la partícula, y cuáles son sus variables independientes?

La partícula en su posición inicial, es decir en t_0 , estará identificada por el vector posición \vec{r}_0 , que será: $\vec{r}_0 = \langle x_0; y_0; z_0 \rangle$, o sea, que la posición inicial de la partícula es una función de las coordenadas $(x_0; y_0; z_0)$.

Cuando pasa un tiempo t , la partícula queda posicionada por el vector \vec{r} , siendo $\vec{r} = \langle x; y; z \rangle$, o sea una función de $(x; y; z)$.

Si se determina la nueva posición de la partícula en función de la posición inicial \vec{r}_0 y del tiempo transcurrido a partir de t_0 , se tendrá un vector posición \vec{r} que es función de: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0; t - t_0)$, o sea que es una función de la posición inicial de la partícula y del tiempo transcurrido. Lo que puede expresarse según las componentes $x; y; z$ de la terna cartesiana de la manera siguiente:

$$x = x(x_0; y_0; z_0; t - t_0)$$

$$y = y(x_0; y_0; z_0; t - t_0)$$

$$z = z(x_0; y_0; z_0; t - t_0)$$

Si transcurre un Δt , la nueva posición quedará identificada por el vector $\vec{r} + \Delta \vec{r}$, de coordenadas: $(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.

Para expresar la función velocidad instantánea, se tiene en cuenta que la velocidad es un vector con cualquier orientación en el espacio, y se lo puede descomponer en las tres direcciones de los ejes cartesianos (x; y; z). La componente según el eje x se denomina con \vec{u} , la componente según el eje y se denomina con \vec{v} , y la componente según el eje z se denomina con \vec{w} . De modo que la suma vectorial de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , resulta ser el vector $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Las componentes ($u; v; w$) pueden calcularse en función de la proyección del espacio recorrido en cada uno de los ejes considerados: la variación de la posición de la partícula en el eje x es $d\vec{x}$, mientras que en el eje y es $d\vec{y}$, y por último en el eje z es $d\vec{z}$. Por lo tanto, y considerando que la velocidad conceptualmente es la variación del espacio en el tiempo, las componentes mencionadas se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
 u &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial x}{\partial t} \\
 v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial y}{\partial t} \\
 w &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

En el Método de Lagrange la velocidad de una partícula queda expresada por las derivadas parciales de las coordenadas con respecto al tiempo, porque la velocidad depende de la posición inicial y del tiempo.

Si se quiere expresar la velocidad instantánea, el espacio está dado por la variación del vector posición \vec{r} de la partícula en el tiempo, la expresión matemática será:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\partial r}{\partial t}
 \tag{2.2}$$

Como puede observarse en la Figura 2.1, la variación del vector posición $\Delta \vec{r}$ tiende a ser tangente a la trayectoria, y por lo tanto el vector velocidad \vec{V} , resulta también tangente a ella.

Con respecto al campo de las aceleraciones, considerando que, conceptualmente hablando, la aceleración es la variación de la velocidad en el tiempo, y recordando que también es un vector, por tanto, también se lo puede proyectar sobre los ejes (x,y,z), y obtener las componentes sobre el eje x como \mathbf{a}_x , la componente sobre el eje y como \mathbf{a}_y y sobre el eje z, \mathbf{a}_z . Las ecuaciones de las componentes de la aceleración son las 2.3.

$$\begin{aligned}
 a_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\
 a_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
 a_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

1.2. Método de Euler:

Leonhard Paul Euler (Basilea, Suiza, 15 de abril de 1707 - San Petersburgo, Rusia, 18 de setiembre de 1783), conocido como Leonhard Euler, fue un matemático y físico suizo. Fue el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos.

Trabajó con los dos hijos de Johann Bernoulli, Daniel y Nicolás, en la Academia de las ciencias de Rusia en San Petersburgo. También fue miembro de la Academia de Ciencias de Berlín.

Alumno destacado: Joseph-Louis de Lagrange.



A diferencia del método anterior, éste toma un punto fijo de la corriente y estudia las velocidades de las infinitas partículas que pasan por él en un tiempo t.

Tendremos entonces que el vector posición es una función de tres variables $\vec{r} = \vec{r}(x; y; z)$, y por lo tanto la velocidad que conceptualmente es la variación del espacio en el tiempo, tiene cuatro variable independientes, tres del espacio y el tiempo $\vec{V} = \vec{V}(r; t)$, o bien $\vec{V} = \vec{V}(x; y; z; t)$.

Como puede observarse en la Figura 2.2, por el punto cuyo vector de posición es \vec{r} , pasarán numerosas partículas con distintas velocidades \vec{V} .

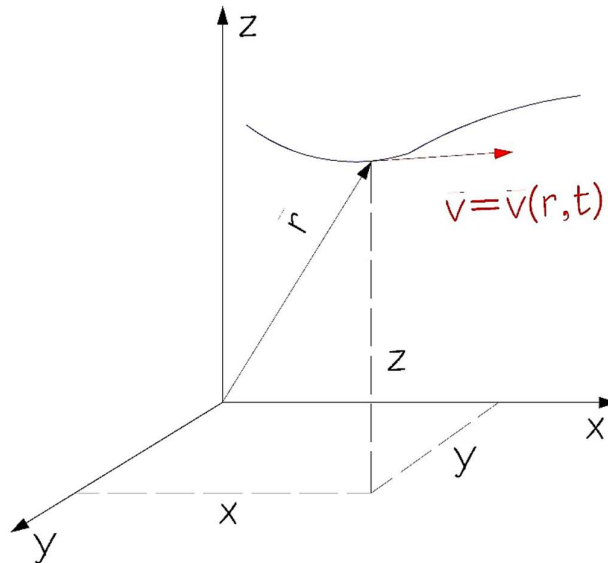


Figura 2.2

Recordando que la velocidad \vec{V} se puede descomponer según los ejes coordenados: x ; y ; z ; se obtienen las componentes \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} . De modo que las componentes son funciones de cuatro variables independientes, tres corresponden al espacio y la cuarta es el tiempo.

$$\begin{aligned} V_x &= u = u(x, y, z, t) \\ V_y &= v = v(x, y, z, t) \\ V_z &= w = w(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si se diferencian las tres componentes (u ; v ; w), recordando que para obtener el diferencial total de una función se suman las derivadas parciales de la función respecto de cada variable, se obtienen las Ecuaciones (2.5), Domínguez (1999).

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

La componente de la aceleración en el eje x , \mathbf{a}_x , se obtiene como la variación de la velocidad en ese eje respecto del tiempo (\mathbf{du}/dt), al ser la velocidad $\bar{u} = \bar{u}(x; y; z; t)$ la derivada total de la función es la suma de las derivadas parciales de la misma respecto de cada una de sus variables. De idéntica manera se puede extrapolar a los otros dos ejes. Y teniendo en cuenta las Ecuaciones (2.4), se puede obtener las Ecuaciones (2.6) siguientes, Domínguez (1999):

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w \\a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w \\a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w\end{aligned}\tag{2.6}$$

Considerando que x , y , z no dependen de las condiciones iniciales, son sólo funciones del tiempo, las derivadas son totales.

¿Cómo se podría relacionar un sistema con otro?

Un ejemplo muy simple puede demostrar la relación entre ambos, y es el siguiente. Cuando un observador se sitúa en un automóvil que está circulando por la Calle San Martín el estudio del movimiento de dicho vehículo a lo largo de su trayectoria (Calle San Martín), es decir, a lo largo de las sucesivas posiciones del mismo, se realiza a través del Método de Lagrange, en el cual se elige una partícula y se estudia el comportamiento de la misma a través de su trayectoria.

Mientras que, si en lugar de que el observador se mueva, el observador está fijo y ubicado en un punto, por ejemplo, la intersección de calles San Martín y Sarmiento, y el mismo estudia las infinitas partículas, o vehículos para el caso del ejemplo, que pasan por ese punto. Ésta es una aplicación del uso del Método de Euler para el estudio del movimiento.

Se introducirán algunos conceptos que serán de mucha utilidad en el desarrollo de este tema.

Líneas características de los movimientos.

Líneas de corriente o de flujo: Es toda línea trazada idealmente, de manera que la tangente cada uno de sus puntos proporciona la dirección del vector velocidad. Por lo tanto, son las envolventes de los vectores velocidad de una partícula. Estas líneas pueden ser convergentes, divergentes o paralelas, pero nunca cortarse, ya que implicaría que un punto posee dos vectores velocidad, y eso representa una discontinuidad en el líquido perfecto que estamos estudiando.

Trayectoria: Es el camino que en el espacio y el tiempo recorre una partícula, o también el lugar geométrico ocupado por las sucesivas posiciones de una partícula en el tiempo. La trayectoria interpreta el movimiento según el Método de Lagrange.

Tubo de flujo: Es el conjunto de líneas de corriente que pasan por una sección transversal determinada, constituyendo una superficie cilíndrica o cónica en el espacio, y que encierra una porción de volumen de líquido de magnitud diferencial ($dVol$). Figura 2.3.

Por lo anterior, es un volumen cilíndrico que está limitado por cierta cantidad de líneas de corriente distribuidas en la superficie lateral del cilindro. La variación de la velocidad en su interior es despreciable.

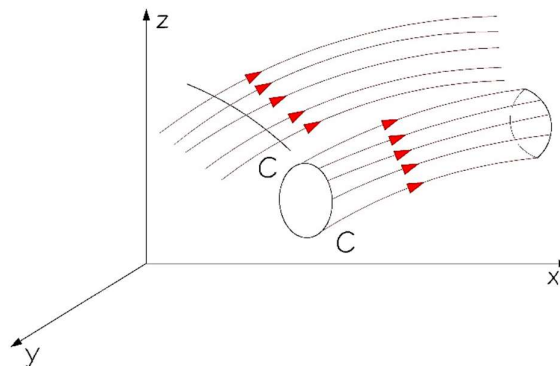


Figura 2.3 Tubo de flujo

Filete: se lo define como el lugar geométrico de los puntos que ocupan las partículas que han pasado, están pasando y pasarán por un punto determinado del espacio, a través del tiempo. Se lo suele designar en la bibliografía como "líneas de humo".

Para una mejor comprensión, si suponemos que todas las partículas que han pasado por un punto tienen un color característico, y que en un instante tomamos una fotografía del escurrimiento, en ella se distinguirán las partículas coloreadas en la posición correspondiente al momento en que fueron fotografiadas. Uniendo las posiciones instantáneas, se determina un filete líquido.

En un análisis considerando que las condiciones son constantes en el tiempo, los conceptos de línea de corriente, trayectoria y filete coinciden en el espacio.

Corriente líquida: es un conjunto de tubos de flujo, de modo que se puede considerar que un conjunto de volúmenes diferenciales ($dVol$) forman un volumen discreto ΔVol , y éste último forma una corriente líquida en movimiento.

1.3. Tipos de escurrimiento

Los distintos tipos de escurrimiento que se pueden presentar se clasifican de distintas maneras a saber, Sotelo Ávila (1997):

Clasificación según el comportamiento de las corrientes: según el comportamiento se definen dos tipos de movimientos: *Movimiento Permanente* y *Movimiento Impermanente*.

Esta clasificación surge en función de las variaciones o no de las características del escurrimiento tales como velocidad, caudal, altura de agua, en el espacio y en el tiempo.

Movimiento Permanente es aquél en el que los parámetros del escurrimiento no varían a lo largo del tiempo, es decir son constantes. Pero pueden ser variables o constantes en el espacio, y es entonces que dentro del Movimiento Permanente, pueden existir dos tipos: *Movimiento Permanente Uniforme (MPU)*: cuando los parámetros no varían ni en el tiempo ni en el espacio, es decir que, no hay variables independientes; y *Movimiento Permanente Variado (MPV)*: cuando no hay variación de los parámetros hidráulicos en el tiempo, pero sí existe modificación de los mismos en el espacio, y por lo tanto hay una variable independiente, que es el espacio.

Movimiento Impermanente (MI): varían los parámetros hidráulicos en el tiempo y en el espacio. Y a su vez se puede clasificar en *Movimiento Lentamente Impermanente (MLI)*: cuando existe una baja velocidad en la variación de los parámetros hidráulicos en el tiempo. *Movimiento Rápidamente Impermanente (MRI)*: cuando la velocidad de variación de los parámetros hidráulicos es alta.

Ésta última clasificación es muy útil para simplificar el estudio del MI, ya que si se trata de un MLI puede casi asimilarse a un MPV.

Clasificación según la fuerza predominante en el movimiento: según este criterio se pueden distinguir dos tipos de corrientes líquidas: *Corrientes abiertas* y *Corrientes cerradas*.

Las *Corrientes Abiertas* son aquéllas que presentan altura de agua en contacto con la presión atmosférica, y pueden tener una conducción de sección transversal de escurrimiento abierta o cerrada. Éste último es el caso de las secciones de las alcantarillas de desagüe de las rutas y caminos que tienen sección transversal con un perímetro cerrado, pero la sección no está totalmente llena de agua, la altura de la misma es menor que el diámetro y está en contacto con la presión atmosférica.



Figura 2.4 Corrientes abiertas

Las *Corrientes Cerradas* son aquéllas que se desarrollan en secciones transversales cuyo perímetro está totalmente cerrado, y el fluido moja totalmente a éstas. El escurrimiento tiene una presión de trabajo mayor que la presión atmosférica.



Figura 2.5 Corriente cerrada

Clasificación según el tipo de escurrimiento: según el tipo de escurrimiento los movimientos se pueden clasificar en: *Movimiento Laminar* y *Movimiento Turbulento*.

El *Movimiento Laminar* es aquél que presenta escurrimiento ordenado, de líneas de flujo paralelas, que sólo se da en el caso de bajo caudales y velocidades pequeñas, y en el cual predominan las fuerzas tangenciales producto de la viscosidad del agua por encima de las de gravedad.

El *Movimiento Turbulento* es aquél que se presenta cuando el escurrimiento es desordenado con trayectorias tortuosas, existe pasaje de partículas de un tubo de flujo a otro, y en el cual predominan las fuerzas tangenciales debidas al frotamiento del agua con las paredes de la tubería y entre tubos de flujo entre sí.



Figura 2.6 Movimiento laminar (izquierda) – Movimiento turbulento (derecha)

Clasificación según el comportamiento de las partículas líquidas: según el comportamiento de las partículas líquidas en el espacio y en escurrimientos de líquidos perfectos, puede hablarse de *Movimientos Rotacionales* o *Movimientos Irrotacionales*.

El *Movimiento Rotacional* se produce cuando las partículas líquidas poseen componente de la velocidad que produce una rotación alrededor de su centro de gravedad.

Mientras que es **Movimiento Irrotacional** cuando dichas partículas no rotan alrededor de su centro de gravedad.

Clasificación según el comportamiento en el espacio: según el comportamiento en el espacio, el movimiento del agua se puede clasificar en: **Movimiento Tridimensional**, **Movimiento Bidimensional** y **Movimiento Unidimensional**.

El **Movimiento Tridimensional** se produce cuando los parámetros hidráulicos varían en el espacio, es decir que existen gradientes de los mismos en las tres direcciones (x; y; z).

El **Movimiento Bidimensional** se produce cuando dichas variaciones se verifican en dos direcciones únicamente, es decir, en un plano, que puede ser: (x; z) o (y; z).

El **Movimiento Unidimensional** se produce cuando las variaciones de las magnitudes hidráulicas se verifican a lo largo de una dirección, que coincide con la dirección del escurrimiento.

Clasificación según las condiciones hidráulicas: según las condiciones hidráulicas, los escurrimientos se pueden clasificar en: **Régimen de Río o Subcrítico**, y **Régimen de Torrente o Supercrítico**.

El **Régimen de Río o Subcrítico** es aquél en el cual la velocidad de escurrimiento resulta menor que la velocidad crítica (que es la que corresponde a la canalización cuando ésta se conduce con la mínima energía), y además la altura de agua es mayor que la altura crítica. Predomina la energía potencial sobre la energía cinética, y tiene un comportamiento más tranquilo y estable que el de torrente.

El **Régimen de Torrente o Supercrítico** es aquél en el cual la velocidad de la canalización resulta mayor que la velocidad crítica, y la altura de agua menor que la altura crítica. Predomina la energía cinética, y por lo tanto su comportamiento es más inestable que el anterior.

1.4. Campo de velocidades

En función de los conceptos ya vertidos anteriormente se comenzará a analizar las magnitudes hidráulicas puestas en juego dentro de la cinemática del agua, usando el Método de Euler.

La finalidad de este análisis es determinar la expresión analítica que interprete las variaciones que tiene la velocidad en un campo de flujo, es decir, cuando se pasa de un punto a otro en el espacio.

La expresión general de la velocidad, según se analizó en el punto 2.2., está dada por una función cuyas variables son el espacio en sus tres dimensiones y el tiempo, o sea, con cuatro variables independientes: $\vec{V} = \vec{V}(x; y; z; t)$. Si se analiza dicha función en un instante determinado, la misma queda reducida a $\vec{V} = \vec{V}(x; y; z)$.

Observando la Figura 2.7, y considerando dos puntos en el espacio: A y B, conociendo el valor de la velocidad en A, a través de sus componentes, se determinará la velocidad en B.

Referido a un sistema de tres ejes de coordenadas y llamando a las componentes de la velocidad: u, v y w, la componente en el eje x es u, en el eje y es v, y en el eje z es w.

Para encontrar la velocidad instantánea V se realiza la suma vectorial de sus componentes en cada uno de los ejes coordenados, de la manera siguiente: $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

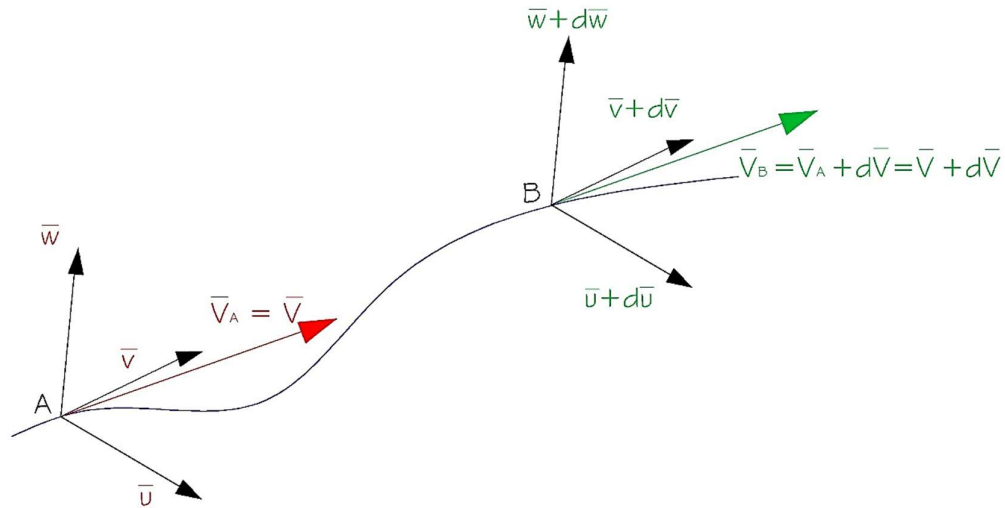


Figura 2.7

La variación de la velocidad \vec{V} en el espacio, desde el punto A hasta el punto B, estará dada por la variación de sus componentes respecto del espacio recorrido $(x; y; z)$: $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y, \partial v/\partial z, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial w/\partial z$.

Conocido el valor inicial de la velocidad \vec{V} en el punto A e igual a \vec{V}_A , en el punto B se incrementará respecto de A un valor $d\vec{V}$, y expresándolas en función de sus componentes en los tres ejes $(u; v; w)$, y teniendo en cuenta que se trata de vectores, el incremento de velocidad $d\vec{V}$ también resulta ser la composición vectorial de tres componentes: $\langle d\vec{u}, d\vec{v}, d\vec{w} \rangle$. Luego:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + d\vec{V} = \vec{V} + d\vec{V} \rightarrow \text{Pero} \rightarrow \vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad (2.7)$$

Entonces:

$$\vec{V}_B = \vec{u}_B + \vec{v}_B + \vec{w}_B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_B = \vec{u} + d\vec{u} \\ \vec{v}_B = \vec{v} + d\vec{v} \\ \vec{w}_B = \vec{w} + d\vec{w} \end{array} \right\} \Rightarrow d\vec{V} = d\vec{u} + d\vec{v} + d\vec{w} \quad (2.8)$$

El vector \vec{V}_B se puede expresar como:

$$\vec{V}_B = \vec{u}_B + \vec{v}_B + \vec{w}_B = \vec{u} + d\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v} + \vec{w} + d\vec{w} = \underbrace{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}_{\vec{V}} + \underbrace{d\vec{u} + d\vec{v} + d\vec{w}}_{d\vec{V}} \quad (2.9)$$

Si se desea expresarla en función de las componentes en cada eje, recordando las Ecuaciones (2.5), el vector de variación de velocidad, $d\vec{V}$, queda expresado a través de nueve sumandos. Las ecuaciones serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_B = \vec{u} + d\vec{u} = \vec{u} + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ \vec{v}_B = \vec{v} + d\vec{v} = \vec{v} + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ \vec{w}_B = \vec{w} + d\vec{w} = \vec{w} + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{array} \right\} \rightarrow \vec{V}_B = \underbrace{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}_{\vec{V}} + d\vec{V} \Rightarrow$$

$$d\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (2.10)$$

La Ecuación (2.10) representa el caso más general de escurrimiento, en que las componentes a derivadas parciales tienen valor distinto de cero.

Se podrían analizar casos particulares de acuerdo a cuáles son las componentes distintas de cero de los nueve sumandos del $d\vec{V}$.

A continuación, veremos algunos ejemplos más sencillos, considerando siempre la ecuación más genérica, la cual es:

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (2.11)$$

Líquido en reposo: los 12 sumandos de la expresión de la Ecuación (2.11), son nulos. Es decir que no existe componente de velocidad, y por lo tanto no hay cambio en la posición de la partícula.

Traslación pura: en este caso, los tres primeros sumandos son los únicos distintos de cero, mientras que no hay incremento de los vectores velocidad componentes de \vec{V} , o sea que se está en presencia de un movimiento de líquido cuyas características son constantes en el espacio y en el tiempo (MPU).

Si se toman 4 puntos del sistema que conforma un rectángulo en el plano o un paralelepípedo en el espacio, tal como muestra la Figura (2.8):

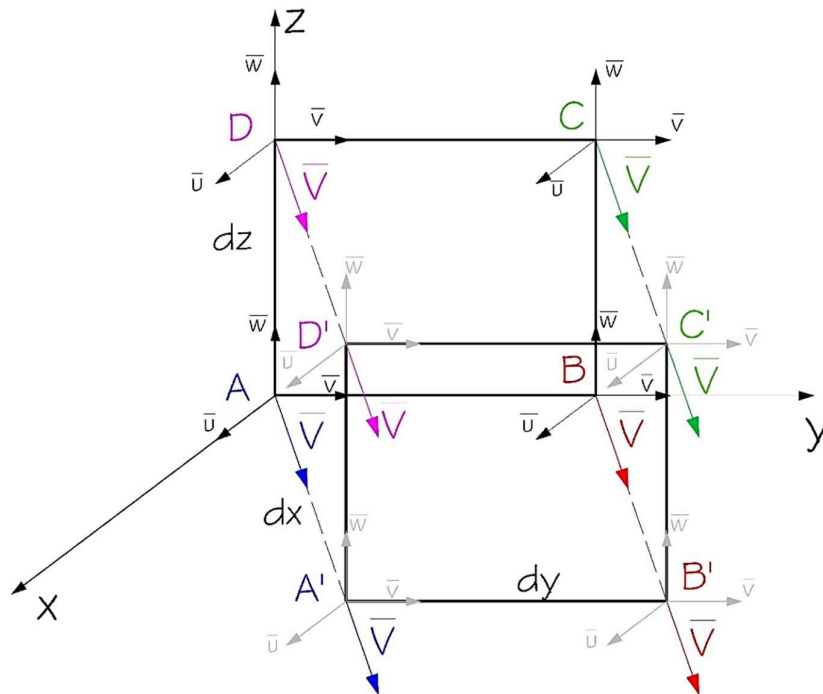


Figura 2.8

Los puntos A, B, C, D se ubican por traslación en A', B', C' y D'. El rectángulo formado por las partículas que ocupaban una posición ABCD, en otro instante se ubican en una posición paralela a la anterior, por lo que no se habrá experimentado ninguna deformación, ni cambio de tamaño, sólo una traslación pura.

Deformación lineal pura: en este caso las únicas derivadas distintas de cero son aquellas que están contenidas en el eje correspondiente, o sea v respecto de y , w respecto de z .

$$\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \wedge \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$$

En la Figura 2.9 se observa que el paralelogramo se ha trasladado $w dt$ hacia arriba, y $v dt$ hacia la derecha, esto corresponde a la traslación pura. Pero también se ha dilatado, porque existen las variaciones de las componentes en los ejes respectivos, y esas variaciones de velocidad en el tiempo también producen traslado de partículas, la Ecuación (2.11) queda:

$$\vec{V} = \bar{v} + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \bar{w} + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Una vez trasladado desde ABCD hasta A'B'C'D', se deforma en el plano zy, porque tiene incrementos de velocidad en cada uno de dichos ejes (eje z - eje y). Dando lugar a los puntos D'', C'' y B''. La distancia entre D' y D'' está dada por el espacio recorrido por el incremento de velocidad del eje z en el tiempo dt, y lo mismo para la distancia entre B' y B''.

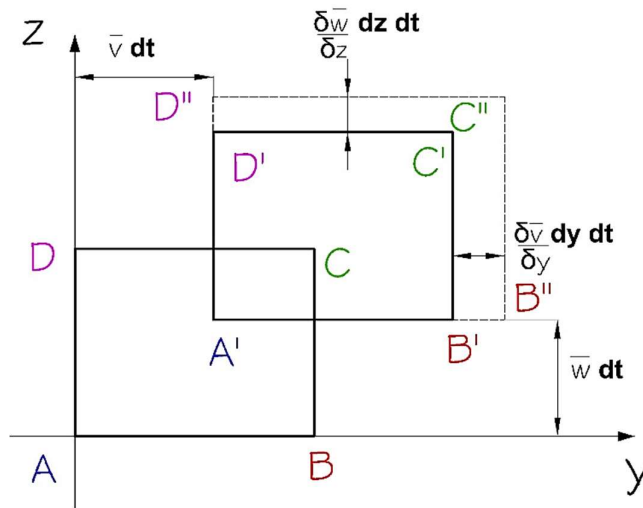


Figura 2.9

Las deformaciones lineales de cada lado (AB, AC) serán:

$$\begin{aligned} \overline{D'D''} &= \frac{\partial w}{\partial z} dz dt \Rightarrow \Delta z = dz = \frac{\partial w}{\partial z} dz dt \\ \overline{B'B''} &= \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \Rightarrow \Delta y = dy = \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

La deformación es la variación de la longitud de los lados del cubo, en los tres ejes coordenados (x; y; z).

$$\Delta x = dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

Los valores de velocidad de deformación serán:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Si llamamos deformación específica a la relación entre la deformación y la longitud inicial:

$\varepsilon = \Delta l / l$, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} dt \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} dt \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} dt \quad (2.13)$$

En tanto que las velocidades de deformación específica resultan como la deformación específica en la unidad de tiempo:

$$u\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow w\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.14)$$

Si cada uno de estos gradientes resultan positivos, se tendrá un alargamiento o dilatación, mientras que si son negativos se tendrá un acortamiento o contracción.

Rotación en su plano: en este caso no resultan nulos:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial z} \neq 0$$

Existe rotación cuando la cara del paralelepípedo rota sin deformarse o sea que las aristas cambian de orientación en ángulos iguales y del mismo signo.

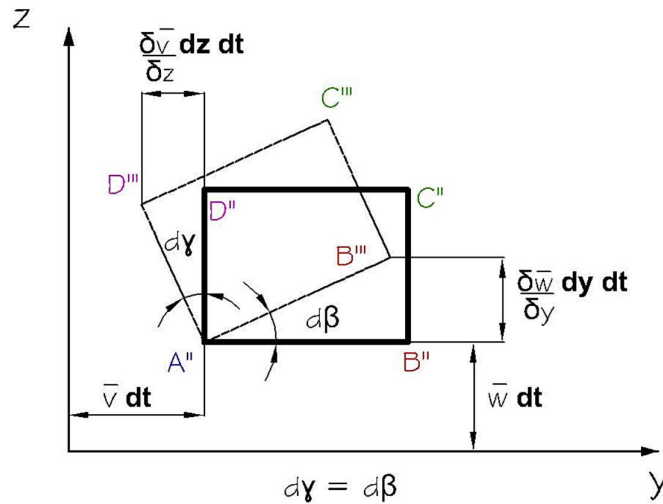


Figura 2.10

Deformación angular simple: tiene lugar cuando las aristas del paralelepípedo cambian de dirección, girando ángulos iguales, pero de sentido contrario. Esto se observa en la siguiente figura:

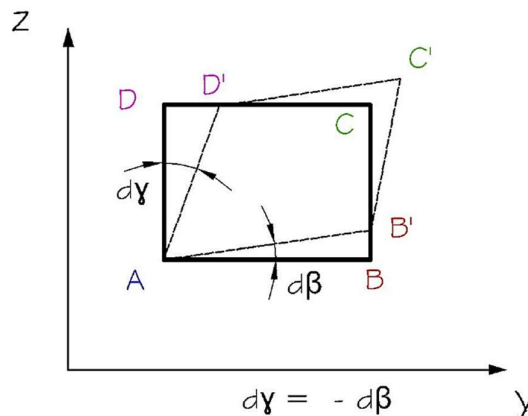


Figura 2.11

Desplazamiento completo: un movimiento sin restricciones de una masa líquida puede considerarse como la suma de la traslación, la deformación lineal, la deformación angular y la rotación.

Entonces en un punto A de coordenadas (x,y,z), la partícula fija su posición inicial, y luego de un tiempo t la misma partícula ocupa la posición de otro punto A' de coordenadas (x+dx, y+dy, z+dz). Se puede admitir que en el punto A las componentes del vector velocidad instantánea V son u,v,w, mientras que en A' dichas componentes se ven incrementadas en u+du, v+dv, w+dw, y se puede decir que: $V_A = V_A + dV$, y las componentes de la velocidad en A' serán:

$$\begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w + dw &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.15)$$

En el tiempo (t+dt) el punto A tendrá como coordenadas:

$$\begin{aligned} x + dx + udt \\ y + dy + vdt \\ z + dz + wdt \end{aligned}$$

Mientras que las coordenadas del punto A' son:

$$\begin{aligned} x + dx + udt + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) dt \\ y + dy + vdt + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) dt \\ z + dz + wdt + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

A continuación, comenzaremos a estudiar el campo de las aceleraciones, es decir, que de la misma manera que vimos las expresiones para las velocidades, estudiaremos las aceleraciones.

1.5. Campo de aceleraciones

Recordando el concepto de aceleración, que es la variación de la velocidad con respecto del tiempo, aplicándolo del campo de Euler en el cual la velocidad resulta una función de (x; y; z; t), podemos obtener la velocidad a través de la siguiente expresión:

$$a = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{a_{total}} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{a_{local}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{a_{convectiva}}$$

Aceleración Total= Aceleración Local + Aceleración convectiva

En la aceleración local, la variación de la velocidad no proviene del cambio de posición de la partícula, sino de la variación de la velocidad en la posición ocupada por la partícula cuando transcurre el tiempo. La aceleración local es la que provoca la variación en el módulo del vector aceleración.

La aceleración convectiva provocará la variación en dirección y sentido del vector aceleración.

La aceleración se puede descomponer en sus 3 componentes sobre x, y, z.

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Según exista o no la aceleración local tendremos: $a_{\text{local}} = 0$, movimiento permanente y $a_{\text{local}} \neq 0$ movimiento impermanente.

En cuanto a la existencia o no de la aceleración convectiva: $a_{\text{convectiva}} = 0$, movimiento permanente y uniforme y $a_{\text{convectiva}} \neq 0$, movimiento permanente variado.

¿Cómo se analizan las componentes del vector velocidad?

Cuando se presentan vectores velocidad con distintos módulo, dirección y sentido, estamos en presencia del *movimiento impermanente*.

Mientras que, si el sentido y dirección del vector velocidad permanecen constantes, y el mismo presenta módulos variables, estamos en presencia del *movimiento permanente variado*. De la misma manera podemos decir que es movimiento permanente variado cuando el módulo y sentido resultan constantes, pero no así la dirección del vector velocidad.

Y, por último, cuando el vector velocidad tiene módulo, dirección y sentido constantes, entonces el movimiento es permanente y uniforme.

Aceleración en la terna intrínseca: en cada punto de una línea de corriente (curva) se puede distinguir una dirección tangente a la misma que se indica con la letra T, y una dirección normal a la tangente que se indica con la letra N, que junto con la anterior definen el plano que contiene a la línea de corriente, y una tercera dirección que se llama binormal y que resulta normal al plano formado por la tangente y la normal, y que se indica con la letra B (Figura 2.12). Así queda conformado un nuevo sistema de referencia, de modo que cualquier punto de la curva se puede referir a este sistema local de coordenadas.

Donde:

$$\hat{T} = \frac{\vec{r}'}{\|\vec{r}'\|} \quad \hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|} \quad \hat{B} = \hat{T} \hat{N}$$

Si \hat{T} es el versor tangente que tiene la dirección y el sentido del vector de velocidad \vec{V} , se puede escribir que:

$$\vec{V} = V \hat{T}$$

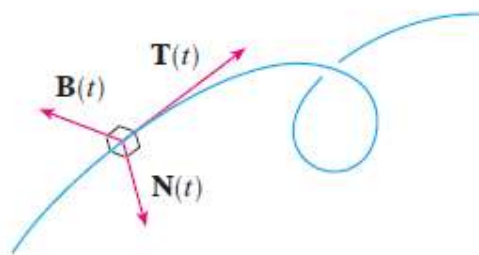


Figura 2.12

Como la aceleración resulta de la derivada de la velocidad en el tiempo:

$$\bar{a} = \bar{V}' = (V \hat{T})' = V' \hat{T} + V \hat{T}'$$

Utilizando la expresión de la curvatura de flexión o curvatura principal:

$K = \frac{\|\hat{T}'\|}{\|\hat{T}\|} = \frac{\|\hat{T}'\|}{V}$ puede despejarse $\|\hat{T}'\| = K V$ y recordando la expresión del versor normal resulta:

$$\hat{T}' = \|\hat{T}'\| \hat{N} = K V \hat{N}$$

Reemplazando en la ecuación de la aceleración:

$$\bar{a} = V' \hat{T} + K V^2 \hat{N}$$

En la ecuación puede apreciarse que la aceleración tiene dos componentes (ambas en el plano de la línea de corriente), es decir:

$$\bar{a} = a_t \hat{T} + a_n \hat{N} \quad (2.18)$$

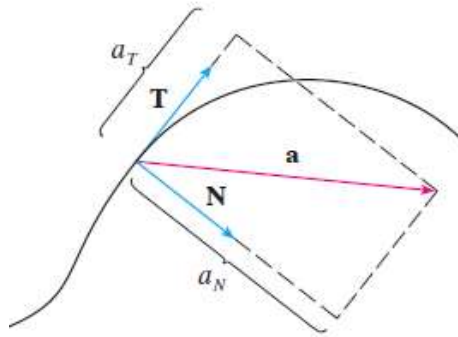


Figura 2.13

No hay componente en la dirección de la binormal B. La componente tangencial mide la variación en el módulo de la velocidad y la normal en su dirección y sentido.

Pero también se puede obtener el vector aceleración como la suma de las derivadas respecto de la longitud de curva "s" y del tiempo "t", quedando la ecuación siguiente:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial s} \Rightarrow a = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial s} \right] \hat{T} + \frac{V^2}{r} \hat{N}$$

2. Hidrodinámica del agua

2.1. Ecuaciones fundamentales de la Hidrodinámica

Se pretende obtener las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica, para lo cual se recurre a las ecuaciones de la aceleración de Euler (2.17):

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

A su vez, las ecuaciones de la hidrostática o sea las Ecuaciones de Euler para líquidos en reposo son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} + Y &= 0 \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

Si el líquido está en movimiento, las fuerzas por unidad de volumen del primer miembro se igualan a las fuerzas por unidad de volumen que producen el movimiento, considerando el segundo principio de la mecánica $F=m \times a$; las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial x} + X &= \delta a_x \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} + Y &= \delta a_y \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} + Z &= \delta a_z\end{aligned}\quad (2.21)$$

Es decir, que existe una componente de fuerza en cada eje igual al producto de la masa por unidad de volumen por la aceleración correspondiente.

Reemplazando los valores de a_x , a_y , a_z , las ecuaciones se transforman en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_x}{\partial x} + X &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} + Y &= \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} + Z &= \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Éstas son las **ECUACIONES DE LA HIDRODINÁMICA** obtenidas a partir de las Ecuaciones de la Hidrostática, pero este sistema es de 3 ecuaciones y tiene 4 incógnitas (p , u , v , w).

La cuarta ecuación se obtendrá a partir de la condición de incompresibilidad (líquido perfecto), es decir, la invariabilidad de volumen o sea la Ecuación de la Continuidad.

2.2. Ecuación de la continuidad.

Suponemos un paralelepípedo diferencial ubicado a través de las coordenadas x , y , z .

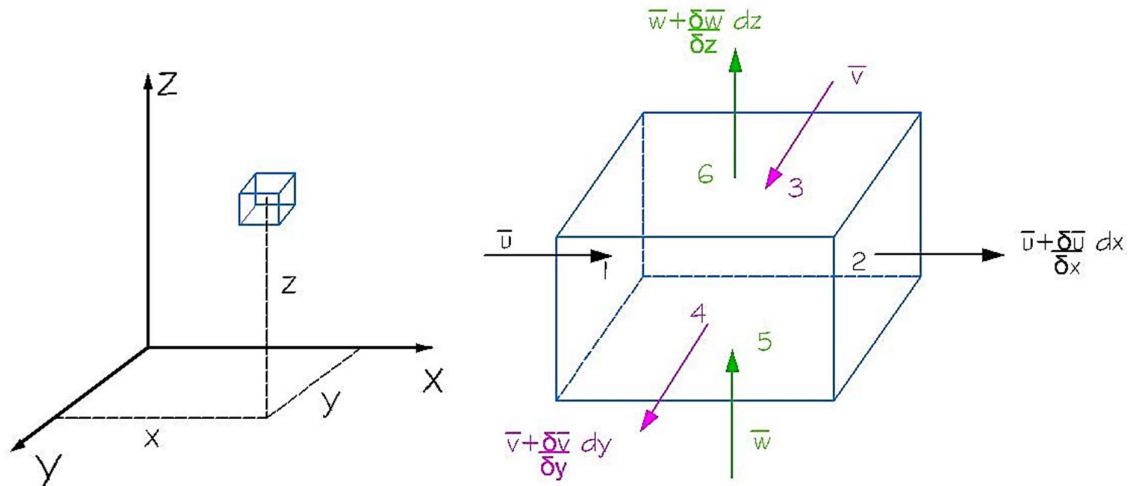


Figura 2.14

En el centro de gravedad del elemento, la velocidad tiene proyecciones u , v , w .

El volumen que circula en dirección de u entrará por la cara 1 y saldrá por la cara 2, y como es un líquido incompresible, lo que ingresa es igual a lo que egresa.

El producto de la velocidad por el área será el volumen por unidad de tiempo que está pasando por esa sección transversal.

Volumen de ingreso: $\text{Ingreso} = u dz dy$

Volumen de egreso: $\text{Egreso} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dz dy$

Debido a la incompresibilidad del agua: Volumen de egreso – Volumen de ingreso = 0

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dz \right) dz dy - u dz dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} dz dx dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

En forma análoga: $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$
 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Se puede expresar en forma definitiva, la **ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD** como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

Esta es la cuarta Ecuación que sumada a las otras tres, conforma un sistema de ecuaciones válido para la hidrodinámica en un líquido perfecto.

2.3. Fuerzas intervinientes.

A diferencia de la Cinemática, la Hidrodinámica estudia el movimiento de los fluidos teniendo en cuenta las fuerzas intervinientes, ya que son estas las causas que lo producen. Las fuerzas pueden agruparse en:

- ◆ Fuerzas de superficie debidas a: presión (F_p), viscosidad (F_μ) y tensión superficial.

- ◆ Fuerzas de masa debidas a la acción de la gravedad (Fm) y la inercia (Fi).
- ◆ Fuerzas Elásticas debidas a la compresibilidad del fluido.

Si se desprecian las fuerzas debidas al trabajo de deformación elástica y las fuerzas de energía superficial, la ecuación de equilibrio dinámico resultaría:

$$F_m + F_\mu + F_p - F_i = 0$$

Es decir, las fuerzas de masa más las fuerzas de viscosidad más las fuerzas de presión deben ser igual a las fuerzas de inercia.

2.4. Teorema de Bernoulli.

Recordando las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} + X &= \delta a_x \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} + Y &= \delta a_y \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} + Z &= \delta a_z \end{aligned} \quad (2.24)$$

Y la ecuación de la continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

Si se estudia un Movimiento Permanente, las variables son constantes en el tiempo, y por lo tanto todas las derivadas parciales respecto del tiempo son cero.

Si se toman las Ecuaciones 2.24, y se multiplican por dx, dy, dz a cada una de ellas, reemplazando el valor de a_x , a_y , a_z , se obtienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} dx + X dx &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx \\ \frac{\partial P_y}{\partial y} dy + Y dy &= \delta \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \\ \frac{\partial P_z}{\partial z} dz + Z dz &= \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \end{aligned}$$

Si reemplazamos u, v, w, con sus expresiones respectivas obtenemos:

$$\begin{aligned} &\delta \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u}{\partial z} dx \right) \\ &\delta \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{dy}{dt} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{dz}{dt} \frac{\partial v}{\partial z} dy \right) \\ &\delta \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} dz + \frac{dy}{dt} \frac{\partial w}{\partial y} dz + \frac{dz}{dt} \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \end{aligned}$$

Luego reagrupando las derivadas nos queda:

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} u dx + \frac{\partial u}{\partial y} u dy + \frac{\partial u}{\partial z} u dz \right) = \delta u du$$

$$\delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} v dx + \frac{\partial v}{\partial y} v dy + \frac{\partial v}{\partial z} v dz \right) = \delta v dv$$

$$\delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} w dx + \frac{\partial w}{\partial y} w dy + \frac{\partial w}{\partial z} w dz \right) = \delta w dw$$

Reemplazando en las ecuaciones originales:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} dx + X dx = \delta u du$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial y} dy + Y dy = \delta v dv$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} dz + Z dz = \delta w dw$$

Si sumamos miembro a miembro:

$$\underbrace{\frac{\partial P_x}{\partial x} dx + \frac{\partial P_y}{\partial y} dy + \frac{\partial P_z}{\partial z} dz}_{dp} + X dx + Y dy + Z dz = \delta(u du + v dv + w dw)$$

$$dp + X dx + Y dy + Z dz = \delta(u du + v dv + w dw)$$

Considerando que el vector velocidad instantánea V es la suma vectorial de sus componentes: u, v y w, podemos considerar el cuadrado de la velocidad instantánea, aplicando el Teorema de Pitágoras en el espacio, como un escalar de la siguiente manera:

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$d(V^2) = 2(u du + v dv + w dw) \Rightarrow \frac{1}{2} d(V^2) = (u du + v dv + w dw)$$

Reemplazando queda:

$$\underbrace{\frac{\partial P_x}{\partial x} dx + \frac{\partial P_y}{\partial y} dy + \frac{\partial P_z}{\partial z} dz}_{dp} + X dx + Y dy + Z dz = \delta \left(\frac{1}{2} d(V^2) \right)$$

$$dp + X dx + Y dy + Z dz = \delta(u du + v dv + w dw)$$

La única acción es la gravitatoria y el eje z es ascendente, por lo tanto, el valor de las fuerzas másicas es: $X = Y = 0$; $Z = -\delta g$

Por aplicación, debe cambiarse el signo de p:

$$-dp - \delta g dz = \delta \left(\frac{1}{2} d(V^2) \right)$$

Integrando a lo largo de la línea de corriente, que en el movimiento permanente son coincidentes:

$$-p - \delta g z = \delta \frac{1}{2} V^2 + \text{constante}$$

$$p + \delta gz + \delta \frac{1}{2} V^2 = \text{constante}$$

Dividiendo por γ (peso específico) y despejando la constante:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{\delta gz}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{2} V^2 = \text{constante}$$

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{1}{2g} V^2 = \text{constante} = \text{Bernoulli}$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{constante} = \text{Bernoulli} \quad (2.26)$$

La Ecuación 2.26 es el **TEOREMA DE BERNOULLI** para líquidos perfectos y válido para una línea de corriente.

Interpretación energética del Teorema de Bernoulli: si se observan cada uno de los términos de la ecuación precedente, se aprecia que las unidades son de longitud [L]; es decir que tienen unidades de energía por unidad de peso [F L / F]. Los términos se interpretan de la manera siguiente:

z : representa la energía potencial por unidad de peso referida a un plano de comparación.

$$z = [E.Potencial] = \left[\frac{Mgz}{Mg} \right] = [z] = [L]$$

p/γ = representa la energía de presión por unidad de peso

$$\frac{p}{\gamma} = [E.Pr esión] = \left[\frac{\gamma h}{\gamma} \right] = [h] = [L]$$

$V^2 / 2g$ = representa la energía cinética o de velocidad por unidad de peso

$$\frac{V^2}{2g} = [E.Velocidad] = \left[\frac{MV^2}{Mg} \right] = \left[\frac{V^2}{g} \right] = \left[\frac{L^2 T^2}{T^2 L} \right] = [L]$$

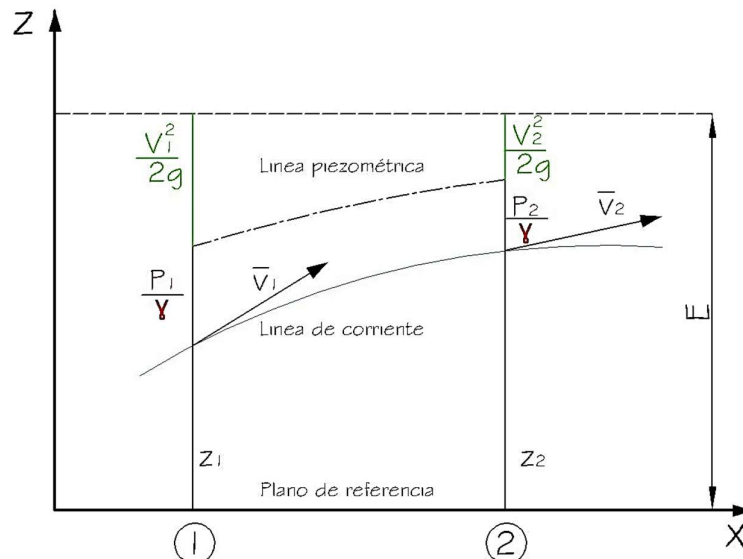


Figura 2.15

De esta manera, gráficamente se observa la constancia energética del Teorema de Bernoulli que responde al Principio de Conservación de la Energía. Por lo tanto, cada una de las energías podrá aumentar, disminuir o permanecer constante a lo largo de la trayectoria, de modo que se cumpla el Teorema de Bernoulli, o sea que la suma de las energías permanece constante.

Caudal, gasto o descarga: definiremos como gasto, caudal o descarga de una corriente líquida a la cantidad de líquido que circula en la unidad de tiempo.

Para encontrar la expresión matemática del caudal, suponemos un tubo de flujo de sección diferencial, por el cual circula un caudal elemental "dQ", el cual será la razón entre el volumen elemental que circula y el tiempo que demora en hacerlo.

$$dQ = \frac{dVol}{dt}$$

Si el fluido circula con una velocidad instantánea V, el volumen encerrado por el tubo de flujo resulta del producto de la longitud del mismo por su sección transversal.

$$dVol = \underbrace{Vdt}_{longitud} d\omega = dQdt$$

$$dQ = Vd\omega$$

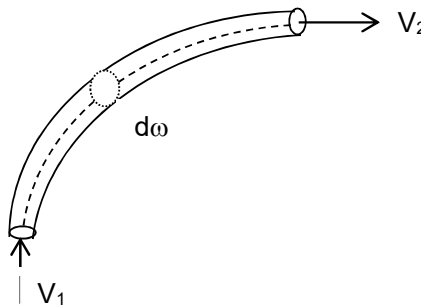


Figura 2.16

Si se quiere calcular el caudal total, se integra el dQ a toda la sección transversal de la corriente:

$$Q = \int_{\omega} Vd\omega$$

Para resolver la integral se debe conocer la función matemática de la velocidad instantánea V en toda la sección transversal. También se puede definir la velocidad media de la corriente U, definida como la velocidad que multiplicada por la sección transversal total nos da el caudal Q, o sea que:

$$Q = U\Omega$$

Y ya que el caudal también se puede calcular en función de la integración de la función velocidad en la sección transversal, también se pueden igualar las expresiones matemáticas y encontrar una expresión de la velocidad media U:

$$Q = \int_{\omega} Vd\omega = U\Omega \Rightarrow U = \frac{\int_{\omega} Vd\omega}{\Omega} = \frac{Q}{\Omega}$$

Si se quiere calcular el caudal en dos secciones transversales del tubo de flujo de la figura, se puede expresar lo siguiente:

$$Q_1 = U_1\Omega_1$$

$$Q_2 = U_2\Omega_2$$

Si no existen entregas o aportes de caudal, el volumen que entra en la sección 1 debe salir en la sección 2, por lo que el caudal permanece constante:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = \text{constante}$$

Esta última ecuación es la llamada *Ecuación de la Continuidad para movimiento permanente (MPU y MPV)* y líquido incompresible. Para el MPV un aumento de la velocidad implica una disminución de la sección transversal líquida, y viceversa.

Ahora analizaremos la Ecuación de la Continuidad para movimiento impermanente (MI), la expresión de la Ecuación 2.23 ya obtenida considerando que los volúmenes en peso permanecen constantes (principio de conservación de la materia), válida para cualquier movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

Si se analizan dos secciones de un tubo de flujo, que definen un volumen encerrado entre las mismas, que llamaremos volumen de control, y si consideramos positiva la masa que sale y negativa la masa de agua que entra al volumen de control, la expresión matemática del principio de la conservación de la materia es la siguiente:

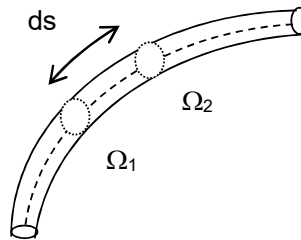


Figura 2.17

$$m_{\text{sale}} - m_{\text{entra}} + \Delta m_i = 0$$

La diferencia entre la masa que entra y la masa que sale debe ser igual a la contenida en el volumen de control. Si expresamos las masas en función de la densidad y el volumen del agua, las expresiones matemáticas para dos secciones próximas en las cuales el caudal varía con el espacio entre las mismas, son las siguientes:

$$m_{\text{entra}} = \delta Q dt$$

$$m_{\text{sale}} = \delta \left(\underbrace{Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds}_{\text{Incremento } Q} \right) \times dt$$

Si la distancia entre las secciones es suficientemente pequeña, la sección variará en el tiempo y no en el espacio, entonces la variación será: $\frac{\partial \omega}{\partial t} dt$

La variación del volumen de control será entonces: $\frac{\partial \omega}{\partial t} dt \underbrace{ds}_{\text{sección longitud}}$

La masa del volumen de control será: $\Delta m_i = \delta \frac{\partial \omega}{\partial t} dt ds$

Remplazando las expresiones queda:

$$m_{sale} - m_{entra} + \Delta m_i = 0 \Rightarrow \delta \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds \right) dt - \delta Q dt + \delta \frac{\partial \omega}{\partial t} dt ds = 0$$

$$\delta \frac{\partial Q}{\partial s} ds dt + \delta \frac{\partial \omega}{\partial t} dt ds = 0 \Rightarrow \delta = \text{constante}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \text{ Ecuación de la continuidad para MI y fluidos incompresibles}$$

Para el caso que el fluido sea compresible la densidad no es constante, sino que es función de la presión, y no puede simplificarse en la expresión:

$$\frac{\partial(Q\delta)}{\partial s} + \frac{\partial(\omega\delta)}{\partial t} = 0 \text{ Ecuación de la continuidad para MI y fluidos compresibles}$$

Si hay MP y fluido incompresible: $\left\langle \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \end{array} \right\rangle Q = \text{constante} = U\Omega$

2.5. Generalización del teorema de Bernoulli para toda la corriente

Se procederá a la generalización del Teorema de Bernoulli a toda la corriente, no sólo a una línea de corriente, para un líquido perfecto y movimiento permanente uniforme:

Partiendo de la siguiente expresión:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{constante} = \text{Bernoulli}$$

El Bernoulli es la energía por unidad de peso, si se multiplica y divide por ($dq \times \gamma$), se obtiene la energía por unidad de tiempo asociada a un dq que corresponde a una línea de corriente.

Si se desea obtener la energía por unidad de tiempo de toda la corriente integramos en la sección transversal total y para el caudal total, y obtendremos la energía total de la corriente, tal como se puede observar en la Figura 2.18:

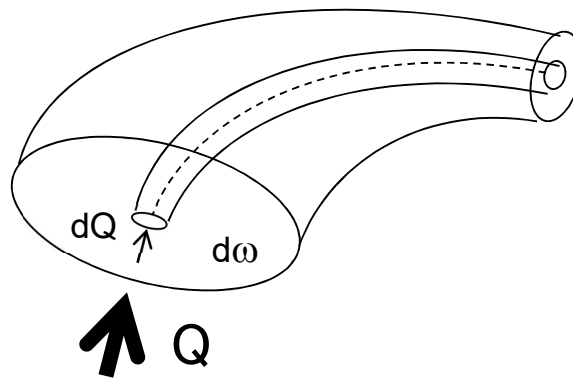


Figura 2.18

$$\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) \gamma dQ$$

$$\int_Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) \gamma dQ = \text{Constante}$$

El valor medio de la energía a lo largo de la sección será:

$$\frac{1}{Q\gamma} \int_Q \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) \gamma dQ = B_{medio}$$

O bien, reemplazando el caudal por la ecuación de la continuidad:

$$Q = U\Omega \Rightarrow dq = Vd\omega$$

$$\frac{1}{U\Omega} \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) V d\omega = B_{medio}$$

Hay que recordar, que cuando las líneas de corrientes son paralelas o de pequeña curvatura, en la sección transversal es válida la Ley Hidrostática y podemos aplicar las Ecuaciones de Euler de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como se estudia el líquido en movimiento, en lugar de estar en reposo, el segundo miembro de las ecuaciones 2.28 debe igualarse a las fuerzas que provocan el movimiento, que por el Segundo Principio de la Mecánica resulta igual al producto de la masa por la aceleración, si considerando la fuerza por unidad de volumen, la expresión queda como:

$$F = ma \Rightarrow \frac{F}{\underbrace{Vol}_{p,X,Y,Z}} = \frac{m}{\underbrace{Vol}_{\delta}} a \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \delta a_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \delta a_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \delta a_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

Estas ecuaciones son las denominadas **“ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRODINÁMICA”**.

Y son las que se aplican para el estudio del agua en movimiento.

En la Figura 2.19 puede verse un tubo de flujo, en el cual se fija una sección transversal de un tubo de flujo y en el centro de gravedad de la misma se ubican los ejes x, y, z, donde x resulta perpendicular a la sección de escurrimiento, y por lo tanto en la dirección del movimiento.

Aplicando las Ecuaciones de la Hidrodinámica, y considerando movimiento unidimensional, la fuerza másica por unidad de volumen en el eje x: "X" se debe a la componente del peso en la dirección del movimiento, mientras que la fuerza másica por unidad de volumen en el eje y: "Y" es igual a cero; y la fuerza másica por unidad de volumen en el eje z: "Z" es el peso del agua en movimiento. La aceleración sólo tiene componente en la dirección del eje x, las otras dos son cero. Cambiando de signo del "dp" ya que cuando fue deducido se consideraron los vectores presión saliendo de las caras del cubo elemental y en realidad entran a las caras.

Remplazando dichas componentes en las ecuaciones 2.29:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \delta a_x &\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \delta g \text{sen } i = \delta a_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} + Y = \delta a_y &\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial y} + 0 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + Z = \delta a_z &\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \delta g \text{cos } i = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

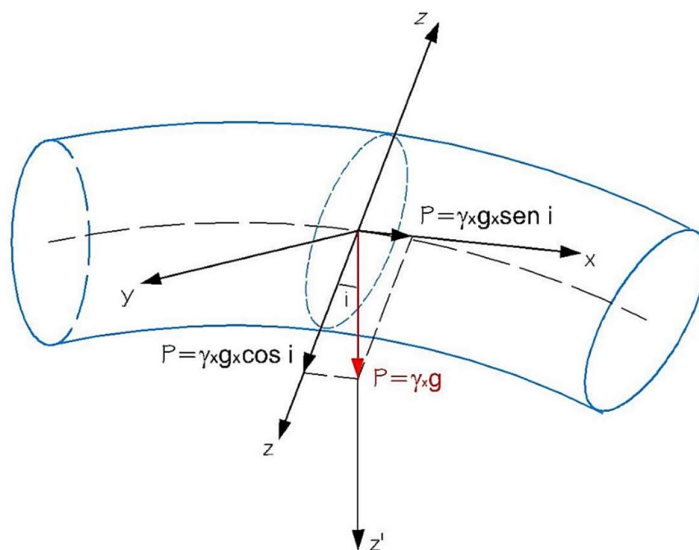


Figura 2.19

El vector velocidad tiene 3 componentes: u, v, w, como el movimiento es en el sentido del eje x: v=w= 0, por lo que a_y = a_z= 0. Se puede pasar de derivadas parciales a derivadas totales, ya que la presión varía sólo en función de "z", y por lo tanto, es posible sólo considerar la tercer ecuación, la que se integra en forma indefinida, multiplicando por "dz", y luego remplazando el peso específico γ:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} + \delta g \cos i &= 0 \\ \frac{dp}{dz} dz + \delta g \cos i dz &= 0 \\ dp + \delta g \cos i dz &= 0 \\ \int dp + \int \delta g \cos i dz &= 0 \\ p + \delta g \cos i z &= \text{Constante} \\ p + \gamma z \cos i &= \text{Constante} \end{aligned}$$

Si se considera: $\cos i z = z'$

$$p + \gamma z' = \text{Constante} \quad (2.31)$$

Volviendo a la integral original de la generalización del Teorema de Bernoulli, y aplicando propiedad distributiva en la integral, reemplazando la validez de la Ley Hidrostática, y resolviendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U\Omega} \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) V d\omega &= B_{medio} \\ \frac{1}{U\Omega} \left[\underbrace{\int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) V d\omega}_{\text{Constante}} + \int_{\omega} \left(\frac{V^2}{2g} \right) V d\omega \right] &= B_{medio} \\ \frac{1}{U\Omega} \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_{\omega} \frac{V d\omega}{dq} + \int_{\omega} \left(\frac{V^2}{2g} \right) V d\omega \right] &= B_{medio} \\ \frac{1}{U\Omega} \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \int_{\omega} \left(\frac{V^2}{2g} \right) V d\omega \right] &= B_{medio} \\ \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q \underbrace{\frac{1}{U\Omega}}_{\frac{Q}{\Omega}} + \frac{1}{U\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V^2}{2g} \right) V d\omega \right] &= B_{medio} \\ \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{U\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V^2}{2g} \right) V d\omega \right] &= B_{medio} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si se considera que U es la velocidad media de la corriente, es decir, la velocidad que multiplicada por la sección transversal total provee el caudal total de escurrimiento, por lo tanto:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\int_{\omega} dq}{\Omega} = \frac{\int_{\omega} V d\omega}{\Omega}$$

La velocidad instantánea V puede expresarse en función de la velocidad media U, mediante la expresión siguiente:

$$V = U \pm \Delta U$$

$$\frac{V}{U} = 1 + \frac{\Delta U}{U}$$

Elevando la expresión al cuadrado y al cubo resulta:

$$\text{Cuadrado: } \left(\frac{V}{U}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^2 = 1 + 2\frac{\Delta U}{U} + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2$$

$$\text{Cubo: } \left(\frac{V}{U}\right)^3 = \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^3 = 1 + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right) + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3$$

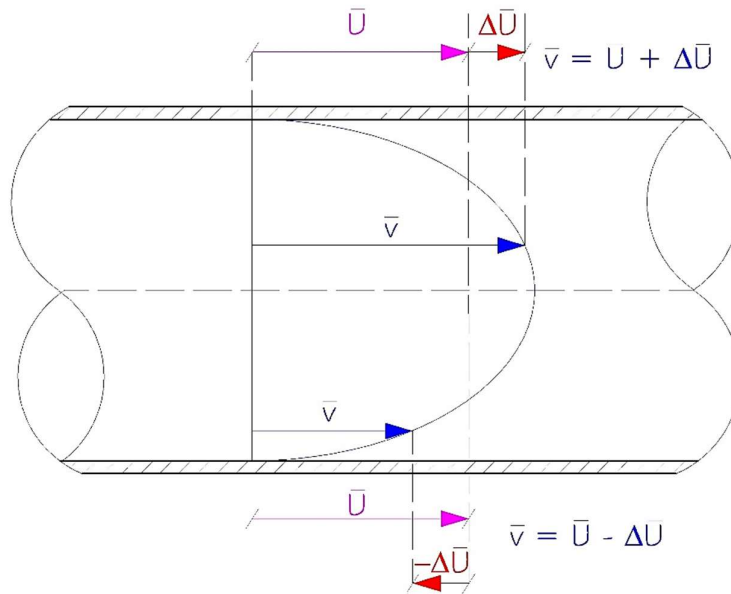


Figura 2.20

Si se resuelven las integrales de la función velocidad instantánea en la sección transversal para los tres exponentes anteriores, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{V}{U} d\omega &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right) d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} (d\omega) + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega = \\ &= \frac{1}{\Omega} \times \Omega + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega = 1 + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega \end{aligned}$$

Considerando la definición de velocidad media U, la integral de los incrementos ΔU en toda la sección transversal debe ser cero, ya que el área del diagrama de velocidades instantáneas debe coincidir con el producto de la velocidad media U y la sección transversal total ω y, por lo tanto, la integral del segundo sumando resulta ser cero. Esto implica que la suma de todos los ΔU positivos se compensan con la suma de todos los ΔU negativos.

Por lo que: $\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{\Delta V}{U} d\omega = 0$, la ecuación resulta:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{V}{U} d\omega = 1 \quad (2.33)$$

Para la segunda potencia de la integral la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U}\right)^2 d\omega &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(1 + 2\frac{\Delta U}{U} + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2\right) d\omega \\ \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U}\right)^2 d\omega &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} (d\omega) + \underbrace{\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(2\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega}_0 + \underbrace{\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega}_{\eta} \end{aligned}$$

Definiendo el coeficiente de velocidad: $\eta = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega$, puede definirse otro coeficiente de velocidad (β):

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U}\right)^2 d\omega = 1 + 0 + \eta \\ \beta &= 1 + \eta \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para la tercera potencia de la integral la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(1 + \frac{\Delta U}{U}\right)^3 d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(1 + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right) + 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3\right) d\omega \\ \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} (d\omega) + \underbrace{\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(3\frac{\Delta U}{U}\right) d\omega}_0 + \underbrace{\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} 3\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 d\omega}_{3\eta} + \underbrace{\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^3 d\omega}_{\xi} \end{aligned}$$

Se define, a su vez, un nuevo coeficiente de velocidad, llamado "Coeficiente de Coriolis", " α "

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U}\right)^3 d\omega = 1 + 0 + 3\eta + \xi \\ \alpha &= 1 + 3\eta + \xi \end{aligned} \quad (2.35)$$

El coeficiente α , "Coeficiente de Coriolis", mide la mayor o menor diferencia que tiene la función velocidad instantánea respecto de una distribución uniforme de velocidad en la sección transversal. Los valores que puede tomar el Coeficiente de Coriolis son 1, si la distribución de velocidades adopta una forma rectangular, muy parecida al Movimiento Turbulento y, 2, si el movimiento es Laminar, con una distribución parabólica. El entorno de variación de α será:

$$\alpha \in [1, 2]$$

Recordando la Ecuación 2.32:

$$\left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{U\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V^2}{2g} \right) V d\omega \right] = B_{medio}$$

$$\left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{U\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V^3}{2g} \right) d\omega \right] = B_{medio}$$

De la Ecuación 2.35 se despeja la integral de V^3 :

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U} \right)^3 d\omega = 1 + 0 + 3\eta + \xi = \alpha \Rightarrow \int_{\omega} V^3 d\omega = \alpha U^3 \omega$$

Reemplazando en la ecuación del Bernoulli medio:

$$\left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{U\Omega} \frac{1}{2g} \alpha U^3 \Omega \right] = B_{medio}$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = B_{medio} \quad (2.36)$$

Esta última expresión nos representa la **“GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI A TODA LA CORRIENTE”**, para líquidos ideales y en movimiento permanente uniforme.

A continuación, se presentan algunos valores experimentales de α y β , cuya fuente es Apuntes de Hidráulica II, de Gilberto Sotelo Ávila, de la Universidad Autónoma de Méjico, Facultad de Ingeniería, 1997:

Tabla 1. Valores de α y β propuestos por Kolupaila. Sotelo Ávila (1997)

Tipo de canalización	Valores de α			Valores de β		
	Mínimo	Medio	Máximo	Mínimo	Medio	Máximo
Canales rectangulares, acueductos, vertederos	1,10	1,15	1,20	1,03	1,05	1,07
Ríos naturales y torrentes	1,15	1,30	1,50	1,05	1,10	1,17
Ríos bajo una cubierta de hielo	1,20	1,50	2,00	1,07	1,17	1,33
Ríos de valle con cauce de inundación	1,50	1,75	2,00	1,17	1,25	1,33

2.6. Movimiento permanente variado

En el Movimiento Permanente Variado, las condiciones de escurrimiento varían en el espacio.

La Ecuación 2.26, expresión del Teorema de Bernoulli en una línea de corriente:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{constante} = \textit{Bernoulli}$$

Derivando respecto del camino:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} + \frac{2V}{2g} \frac{dV}{dx} = 0$$

Si se integra en la sección transversal, para obtener la energía total por unidad de peso:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{dz}{dx} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} d\omega = 0$$

Considerando la validez de la Ley Hidrostática en la sección transversal, los dos primeros sumandos pueden sacarse de la integral:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{constante}$$

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) \times \int_{\omega} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} d\omega = 0$$

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) \Omega + \frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \frac{V}{g} \frac{dV}{dx} d\omega = 0$$

Si se tiene en cuenta que:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}(V)$$

Aplicando la propiedad de cambiar la integral de la derivada, por la derivada de la integral, podemos expresar la anterior ecuación como:

$$\left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{1}{\Omega g} \frac{d}{dx} \int_{\omega} V d\omega = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{1}{\Omega g} \frac{d}{dx} \int_{\omega} V^2 d\omega = 0$$

En esta última ecuación la integral del segundo sumando se puede remplazar con la Ecuación 2.34:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{U} \right)^2 d\omega = \beta \Rightarrow \int_{\omega} V^2 d\omega = \beta \Omega U^2$$

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) \Omega + \frac{1}{\Omega g} \frac{d(\beta \Omega U^2)}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{1}{\Omega g} \frac{d \left(\beta \overbrace{\Omega U^2}^Q \right)}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{1}{\Omega g} \frac{d(\beta Q U)}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{Q}{\Omega g} \frac{d(\beta U)}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{U}{g} \frac{d(\beta U)}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{U}{g} \frac{d(\beta U)}{dx} = 0 \quad (2.37)$$

Si se recuerda la Ecuación del Teorema de Bernoulli para Movimiento Permanente Uniforme generalizado a toda la corriente, Ecuación 2.36:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = B_{medio}$$

Derivando respecto del camino el resultado puede igualarse a la Ecuación 2.37:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{U}{g} \frac{d(\beta U)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{U}{g} \frac{d(\beta U)}{dx}$$

$$d \left(\alpha \frac{U^2}{2} \right) = U d(\beta U)$$

Considerando:

$$\alpha = 1 + 3\eta + \xi$$

$$\beta = 1 + \eta$$

$$\frac{1}{2} d((1 + 3\eta + \xi)U^2) = U d((1 + \eta)U)$$

$$\frac{1}{2} d(U^2 + 3\eta U^2 + \xi U^2) = U d(U + \eta U)$$

Considerando: $\xi \cong 0$

$$(2UdU + 3d\eta U^2 + 3\eta 2UdU) \frac{1}{2} = U(dU + d\eta U + \eta dU)$$

$$\frac{2}{2} U dU + \frac{3}{2} d\eta U^2 + \frac{6}{2} \eta U dU - U dU - d\eta U^2 - U \eta dU = 0$$

$$U dU (3\eta - \eta) + d\eta \left(\frac{3}{2} U^2 - U^2 \right) = 0$$

$$2U dU \eta + \frac{1}{2} d\eta U^2 = 0 \Rightarrow 2U dU \eta = -\frac{1}{2} d\eta U^2 \Rightarrow 4 \frac{dU}{U} = -\frac{d\eta}{\eta}$$

Al integrar esta última expresión se encuentra la relación entre U y η :

$$\int 4 \frac{dU}{U} = - \int \frac{d\eta}{\eta}$$

$$4 \ln U = - \ln \eta + \text{Constante} \Rightarrow 4 \ln U + \ln \eta = \text{Constante} \Rightarrow U^4 \eta = \text{constante}$$

$$U^4 \eta = \text{constante} \quad (2.38)$$

La Ecuación 2.38 se denomina “Ecuación de la Continuidad para Movimiento Permanente Variado”.

En síntesis, existen dos ecuaciones útiles para resolver casos específicos, la Ecuación 2.38 y la 2.39:

$$U\Omega = Q = \text{constante} \quad (2.39)$$

La Ecuación 2.39 se denomina “Ecuación de la Continuidad para Movimiento Permanente”.

2.7. Teorema de Bernoulli en líquidos reales

El estudio que realiza la hidrodinámica es aplicable a líquidos perfectos, que son homogéneos, isotrópicos e incompresibles. La hidráulica, en cambio aplica los conocimientos obtenidos en la hidrodinámica a los líquidos reales. Estos últimos son homogéneos (existe una continuidad en el líquido, no hay fisuras en toda la masa), pero debido a la viscosidad del agua (resistencia al movimiento), se generan tensiones tangenciales que hacen que la resultante no sea normal a la superficie. Por lo tanto, se generan frotamientos entre los tubos de flujo y las paredes de la canalización, tal como aparece en la Figura 2.21.

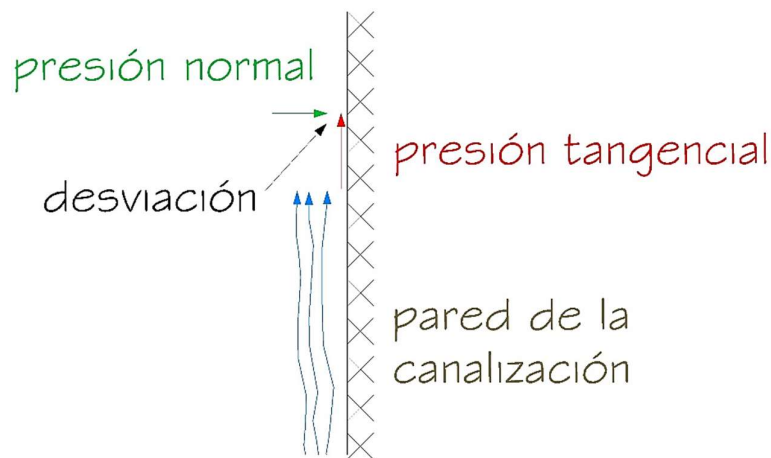


Figura 2.21

La otra condición que no cumplen los líquidos reales es la compresibilidad, es decir que, si se aplica un esfuerzo, se deforma, pero si se retira dicho esfuerzo recupera su forma inicial.

Esto es posible gracias a la energía potencial elástica, ya que al deformarse el cuerpo se modifica la distancia relativa entre puntos, produciéndose un trabajo de deformación y que se traduce en energía acumulada para el caso de los sólidos, que es la que permite la restitución inicial. En los sólidos esta energía es considerable, pero en el caso de los líquidos resulta despreciable.

Con respecto a la viscosidad, que se ha definido como la oposición al movimiento, es la responsable de las pérdidas de energía.

Pérdidas de carga o pérdidas de energía: se clasifican en:

- ◆ continuas (originadas por la viscosidad del agua y la aspereza de las paredes de la canalización).
- ◆ localizadas o singulares (originadas por distorsiones del escurrimiento normal puntuales).

A su vez las pérdidas de carga continuas pueden ser generadas por frotamientos internos o bien por frotamientos parietales.

A efectos de lograr una cuantificación se identificará como J a la pérdida de carga por unidad de peso y por unidad de longitud. Por consiguiente la pérdida de carga continua (Δc) será:

$$\Delta c = \int_0^l J ds \quad (2.40)$$

En cuanto a las pérdidas de carga localizadas, serán calculadas en función del cuadrado de la velocidad, a través de un factor de resistencia λ , que es característico de la singularidad. Por lo tanto:

$$\Delta s = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (2.41)$$

Por lo tanto, la generalización del Teorema de Bernoulli a líquidos reales (por unidad de peso) resulta:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \int_0^l J ds + \sum_{i=1}^n \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (2.42)$$

La Ecuación 2.42 se denomina "Teorema de Bernoulli generalizado a toda la corriente y para líquidos reales".

El Bernoulli se aplica a lo que se conoce habitualmente como eje hidráulico, el cual depende de:

- ◆ **Canalizaciones abiertas:** es el lugar geométrico de los puntos medios de la traza que el nivel del agua va originando en las sucesivas secciones transversales, o sea que, es la superficie del agua a lo largo de la canalización.
- ◆ **Canalizaciones cerradas:** el eje hidráulico coincide con el baricentro de las sucesivas secciones transversales de la tubería, y puede ascender o descender porque está sometido a presión.

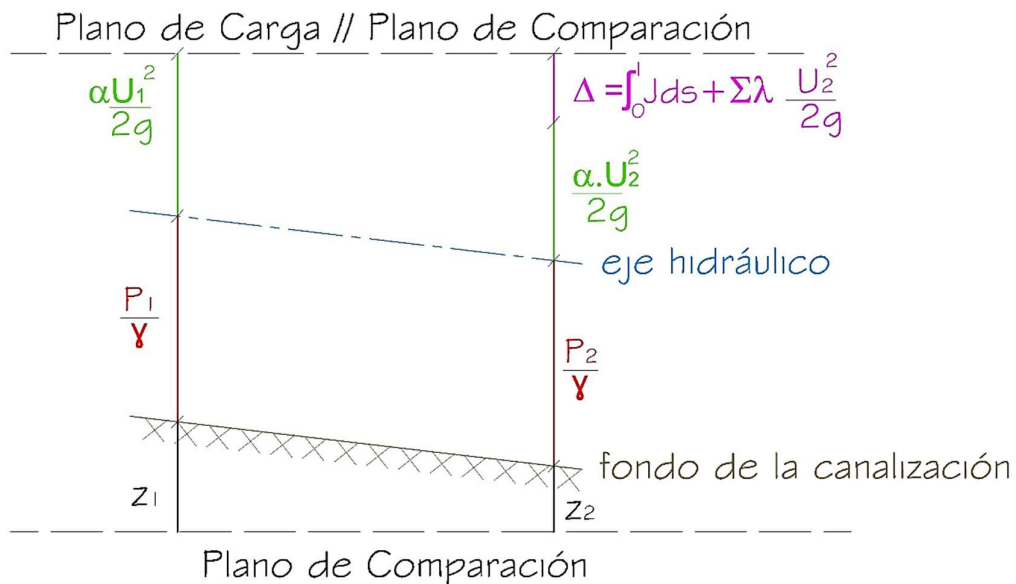


Figura 2.22

Observando la Figura 2.22, para mantener la constancia del Bernoulli habrá que sumar las pérdidas de carga, tanto las singulares como las continuas (frotamiento).

En realidad, las alturas de agua deberían ser perpendiculares al fondo de la canalización, pero se toman verticales porque es muy poca la diferencia debido a las bajas pendientes. A modo de ejemplo las pendientes de las canalizaciones naturales son del 1% = 0.01 y como máximo se

tendrá pendientes del 10% = 0.10. Por lo tanto, el error es despreciable, considerando la altura h en vertical y h' perpendicular al fondo de la canalización, la relación que las une es la siguiente:

$$\operatorname{tgi} = 0,01 \Rightarrow \cos i = 0,99995$$

$$h' = h \cdot \cos i = 0,99995 \cdot h$$

De modo que, la altura en vertical “ h ” tiene casi el mismo valor que la altura perpendicular al fondo “ h' ” de la canalización.

Por eso es que se toman las alturas de agua en vertical directamente, simplificando las alturas de referencia.

2.8. Curva Energía – Altura a caudal constante

Recordando la Ecuación 2.36 que provee la “GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI A TODA LA CORRIENTE”, para líquidos ideales y en movimiento permanente uniforme:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = B_{medio}$$

Para el escurrimiento en canalizaciones abiertas, tales como las utilizadas para las actividades agrícolas, cuyas pendientes son bajas, por lo que el escurrimiento será de río o subcrítico, frente al cual, la altura de agua y su masa, representan el mayor componente de la energía frente a la energía de velocidad, la ecuación anterior para una sección rectangular (de ancho b y altura h) tomando la energía (Bernoulli) al fondo de la canalización se transforma en:

$$B_{fondo} = h + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

Al ser el movimiento turbulento α será sensiblemente igual a 1, por lo que

$$B_{fondo} = h + \frac{U^2}{2g} ; Q = U\Omega = Ubh \Rightarrow U = \frac{Q}{bh}$$

Reemplazando la velocidad media en la ecuación de Bernoulli respecto del fondo se tiene:

$$B_{fondo} = h + \frac{Q^2}{b^2 h^2 2g} = h + \frac{Q^2}{2gb^2} \frac{1}{h^2}$$

$$B_{fondo} = h + \text{cte} \frac{1}{h^2}$$

Esta última ecuación es la suma de dos expresiones. La primera es h , que es una recta a 45° y la segunda corresponde a una hipérbola equilátera. La suma de ambas corresponde a la energía por unidad de peso, con respecto al fondo del canal, para un caudal constante. Debido a que, de la representación y resolución de la expresión, para cada elemento del dominio le corresponde dos imágenes, por lo que la expresión estudiada, no es una función matemática, sino una expresión matemática:

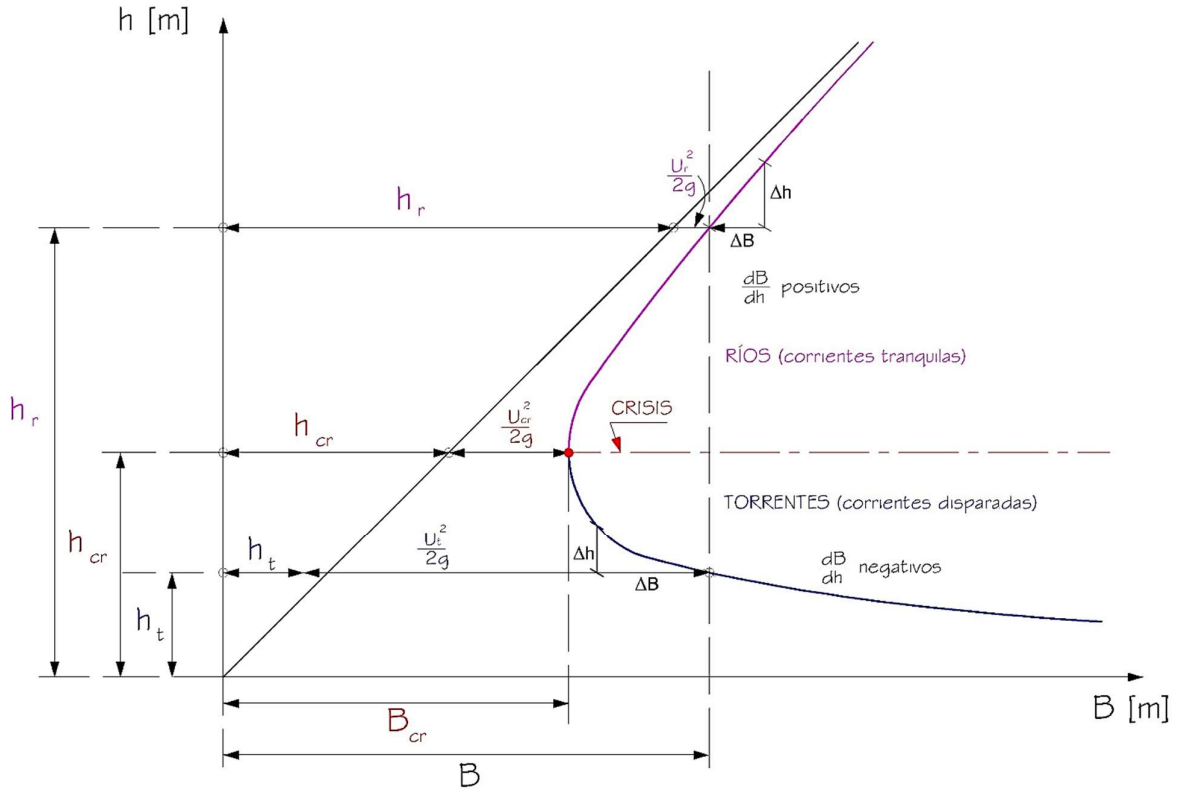


Figura 2.23

De la ecuación anterior, puede observarse que si h tiende a infinito, B tiende también a infinito. Para el caso que h tienda a cero, B vuelve a tender a infinito.

Esto implica, de acuerdo a lo estudiado en Análisis Matemático I, que existe un extremo relativo de B respecto de h . Este punto es el que se identifica como "Escorrentamiento Crítico". En este caso, se deberá buscar el valor de h para que la derivada de B respecto de h sea nula.

2.9. Escorrentamiento crítico

Para una sección genérica: dada una sección genérica, tal como la mostrada por la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** Figura 2.24.

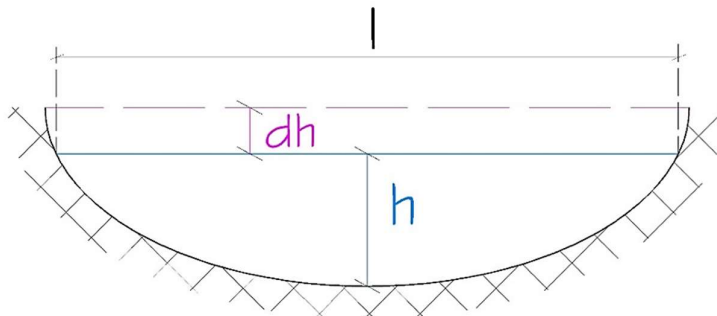


Figura 2.24

Llamando " l " al ancho superficial de la canalización:

$$\begin{aligned}d\omega &= l dh \\ \frac{d\omega}{dh} &= l\end{aligned}\tag{2.43}$$

Entonces el Bernoulli de fondo será:

$$Bf = h + \frac{U^2}{2g} = B$$

Derivando la ecuación anterior respecto de la altura h:

$$\frac{dBf}{dh} = 1 + \frac{2U}{2g} \frac{dU}{dh} = 0\tag{2.44}$$

Para el movimiento permanente la ecuación de la continuidad es:

$$Q = U\Omega = \text{constante}$$

Derivando el caudal e igualando a cero, ya que es constante, y considerando que:

$$U = f(h) \text{ y } \omega = f(h)$$

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{dU}{dh} \Omega + U \frac{d\omega}{dh} = 0$$

Reemplazando por la Ecuación 2.43:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dh} &= \frac{dU}{dh} \Omega + U l = 0 \\ \frac{dU}{dh} &= -\frac{Ul}{\omega}\end{aligned}\tag{2.45}$$

Reemplazando la Ecuación 2.45 en la 2.44 y considerando que el extremo del Bernoulli de fondo se da para las condiciones críticas:

$$\begin{aligned}\frac{dBf}{dh} &= 1 - \frac{U_c}{g} \frac{U_c l_c}{\Omega_c} = 0 \\ 1 - \frac{U_c}{g} \frac{U_c l_c}{\Omega_c} &= 0 \\ 1 &= \frac{U_c^2 l_c}{g \Omega_c}\end{aligned}\tag{2.46}$$

La Ecuación 2.46 permite calcular la velocidad crítica para una sección genérica.

Para una sección rectangular: de ancho b y altura h, tal como la mostrada por la figura siguiente, aplicando la ecuación de continuidad al escurrimiento que se da en esa sección:

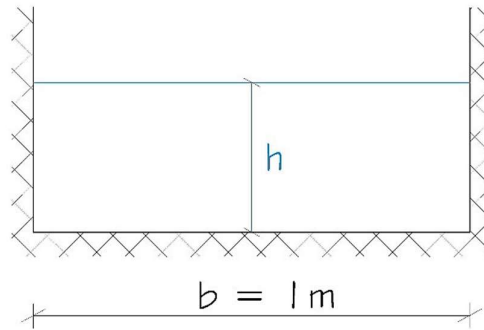


Figura 2.25

$$U\Omega = Q = Ubh$$

Si se define con la letra “q” el caudal por unidad de ancho, la ecuación del mismo queda:

$$q = \frac{Q}{b} = Uh = \text{constante} \quad (2.47)$$

El Bernoulli referido al fondo de la canalización se indica con Bf, y su valor será:

$$Bf = h + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

Considerando que $\alpha=1$, y reemplazando la velocidad despejada de la Ecuación 2.47:

$$Bf = h + \frac{\left(\frac{q}{h}\right)^2}{2g} = h + \frac{1}{2g} \left(\frac{q}{h}\right)^2$$

Si se deriva respecto de h, y se iguala la expresión a cero para encontrar el valor máximo o mínimo de la función:

$$\frac{dBf}{dh} = 1 - \frac{1}{2g} \frac{2q^2}{hc^3} = 1 - \frac{q^2}{ghc^3} = 0$$

Despejando la altura de agua que hace mínimo el valor del Bernoulli, obtenemos la “**altura crítica**”:

$$1 = \frac{q^2}{gh^3} \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (2.48)$$

La altura crítica, entonces, es aquella a la que le corresponde el Bernoulli mínimo, que también se llama “**Bernoulli Crítico**”. El Bernoulli crítico (Bc) es la mínima energía con la que puede circular el agua para el caudal Q dado.

También se puede calcular la velocidad crítica que es la que corresponde a una altura crítica, usando la ecuación de la h_c (2.48):

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \Rightarrow q^2 = h_c^3 g$$

$$U_c^2 = \frac{q^2}{h_c^2} = \frac{h_c^3 g}{h_c^2} = h_c g$$

$$U_c = \sqrt{gh_c} \quad (2.49)$$

La Ecuación 2.49 es la que permite calcular el valor de la velocidad crítica para sección transversal rectangular y un caudal constante Q. U_c es la velocidad crítica cuando el agua escurre con una altura crítica h_c .

2.10. Interpretación gráfica del escurrimiento crítico:

Recordando que:

$$\frac{dBf}{dh} = 1 - \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} = 0$$

Remplazando la U_c en dicha expresión nos queda:

$$1 - \underbrace{UU \frac{l}{g\Omega}}_{U_c^2} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{U^2}{U_c^2} = 0 \Rightarrow \frac{dBf}{dh} = 1 - \frac{U^2}{U_c^2}$$

Considerando una canalización de ancho unitario que escurre con movimiento permanente y caudal constante $Q = cte$.

Si se varía la altura y se calcula el Bernoulli de fondo correspondiente, se puede graficar:

$$h = f(B); \text{ o bien } B_f = f(h).$$

Si se llevan a ordenadas los distintos valores de h y en abscisas los valores de B_f , se obtiene la Figura 2.26.

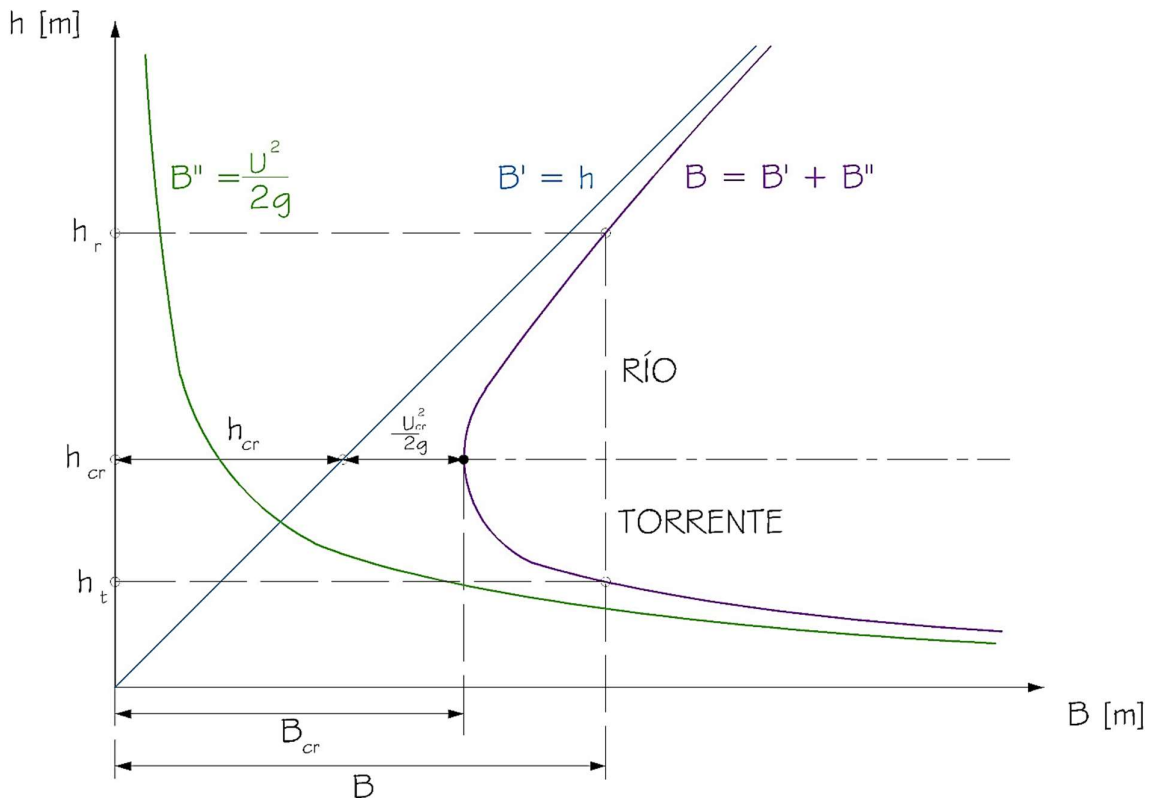


Figura 2.26

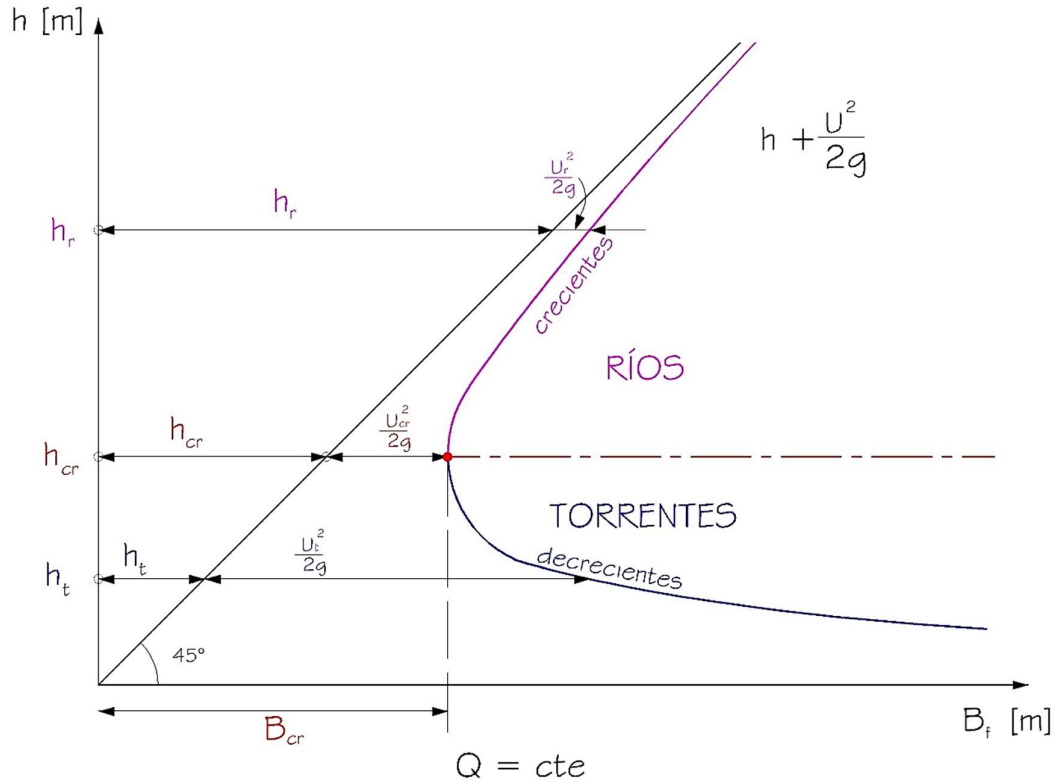


Figura 2.27

El menor valor de la energía resulta ser:

$$Bc = h_c + \frac{U_c^2}{2g}$$

Para una sección rectangular la ecuación queda:

$$Bc = h_c + \frac{(\sqrt{gh_c})^2}{2g} = \frac{3}{2}h_c \quad (2.50)$$

La función $Bf=f(h)$ resulta ser una parábola equilátera asintótica al eje de las abscisas y a una recta a 45° que representa la ecuación: $Bf=h$. De modo que trazando una horizontal por una altura genérica h , la parte del segmento formado comprendida entre el eje de ordenadas y la recta a 45° mide la altura de agua, mientras que la parte comprendida entre la recta a 45° y la función $Bf=h$ mide la altura de velocidad.

Si se traza una recta horizontal por el punto de mínima energía, los escurrimientos tendrán 2 alturas posibles con la misma energía Bf :

- ◆ h_r (altura de río), mayor que la altura crítica, y velocidad menor que la velocidad crítica.
- ◆ h_t (altura de torrente), menor que la altura crítica, y velocidad mayor que la velocidad crítica.

Por encima de dicha recta horizontal, se ubica el régimen de río, con baja velocidad y gran altura, por el contrario, el ubicado por debajo resulta de gran velocidad y baja altura, llamado régimen de torrente.

Por encima de la horizontal de h_c la parábola equilátera ($Bf=f(h)$) se acerca a la recta a 45° , haciendo que la energía cinética (o sea las velocidades) disminuyan; mientras que por debajo de

la horizontal mencionada la función $Bf=f(h)$ se aleja de la recta a 45° , haciendo que la energía cinética y por consiguiente la velocidad aumente.

2.11. Relación de Froude

William Froude fue el primero a establecer leyes confiables respecto a la resistencia que el agua ejerce al avance de los navíos, y a calcular su estabilidad. En la mecánica de los fluidos un parámetro adimensional lleva su nombre: el **Número de Froude** (Fr).

La Relación de Froude es adimensional y relaciona el efecto de las fuerzas de inercia y las fuerzas de gravedad que actúan sobre un fluido. Como ya se dijo, debe su nombre al ingeniero hidrodinámico y arquitecto naval inglés William Froude (28/11/1810, Dartington, Devon, Inglaterra-04/05/1879, en Simonstown, Sudáfrica).

De esta forma la Relación de Froude se puede escribir como:

$$Fr^2 = \frac{\text{Fuerzas de Inercia}}{\text{Fuerzas de Gravedad}}$$



Ing. William Froude

Las fuerzas de inercia (F_i), en base al segundo principio de la dinámica, se definen como el producto entre la masa por la aceleración (a), aplicado a un fluido se entiende como el producto de la densidad por el volumen. En forma dimensional se escribe:

$$[F_i] = [m(a)] = [\delta(Vol)a] = \left[\frac{ML^4}{L^3T^2} \right] = \left[\frac{ML}{T^2} \right]$$

Para simplificar la definición de fuerzas de inercia en el Sistema Internacional, puede expresarse como:

$$F_i = ma = \frac{\delta L^3 L}{T^2} = \frac{\delta L^4}{T^2}$$

Donde L y T serán, respectivamente, una distancia y un tiempo característicos del sistema.

El peso (P) resulta ser el producto entre la masa y la aceleración de la gravedad.

$$[P] = [\delta g(Vol)] = \left[\frac{ML}{T^2} \right]$$

Que igualmente, para simplificar puede expresarse así:

$$[P] = [\delta g L^3]$$

Entonces la relación entre las fuerzas de inercia y de gravedad se puede escribirse:

$$Fr^2 = \frac{\text{Fuerzas de Inercia}}{\text{Fuerzas de Gravedad}} = \frac{\delta L^4}{T^2 \delta g L^3} = \frac{F}{P} = \frac{L}{g T^2}$$
$$Fr^2 = \frac{V^2}{gL}$$

En donde:

δ es la masa volumétrica o densidad [kg/m³]

“L” es el parámetro de longitud [m]

T es el parámetro temporal [s]

V es el parámetro de velocidad [m/s]

g es la aceleración de la gravedad [m/s²]

De esta relación se deduce el número de Froude que, en canales abiertos informa del estado del flujo hidráulico. El Fr en un canal se define como:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g l''}}$$

O también:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g \frac{\Omega}{l''}}} \quad (2.51)$$

Siendo:

U: velocidad media de la sección del canal [m/s]

Ω : sección transversal del flujo para la velocidad del numerador, [m²]

“l'': ancho superficial de la lámina libre para la velocidad del numerador, [m]

Es claramente visible que todas las magnitudes se refieren al escurrimiento que se produce en una circunstancia específica y no respecto de dos situaciones distintas. Ello lleva a poder calificar a la relación entre las Fuerzas de Inercia y las Fuerzas de Gravedad para un mismo estado de escurrimiento y no para dos distintos.

Si se recuerda la Ecuación 2.46, el denominador puede llegar a convertirse en la velocidad crítica U_c , UNICA Y EXCLUSIVAMENTE SI EL ESCURRIMIENTO ES CRÍTICO y, por lo tanto, el Fr resulta igual a la unidad.

Repitiendo el concepto anterior: para el cálculo del Número de Froude se efectúa mediante el cociente entre la velocidad media del escurrimiento y una expresión que puede parecerse, en magnitud de una velocidad, que incluye a la sección normal y el ancho superficial normal, pareciéndose solamente, en apariencia, a la crítica.

Es por lo anterior que, si se realiza la operación indicada, se puede concluir qué tipo de régimen tiene la canalización y, consecuentemente relacionarlo al valor del Fr:

$$Fr = \frac{U_n}{\sqrt{g \frac{\Omega_n}{l_n}}}$$

$$Fr > 1 \Rightarrow U > \sqrt{g \frac{\Omega}{l}} \Rightarrow \text{TORRENTE}$$

$$Fr < 1 \Rightarrow U < \sqrt{g \frac{\Omega}{l}} \Rightarrow \text{RÍO}$$

SOLO:

$$Fr = 1 \Rightarrow U_c = \sqrt{g \frac{\Omega_c}{l_c}} \Rightarrow \text{CRÍTICO}$$

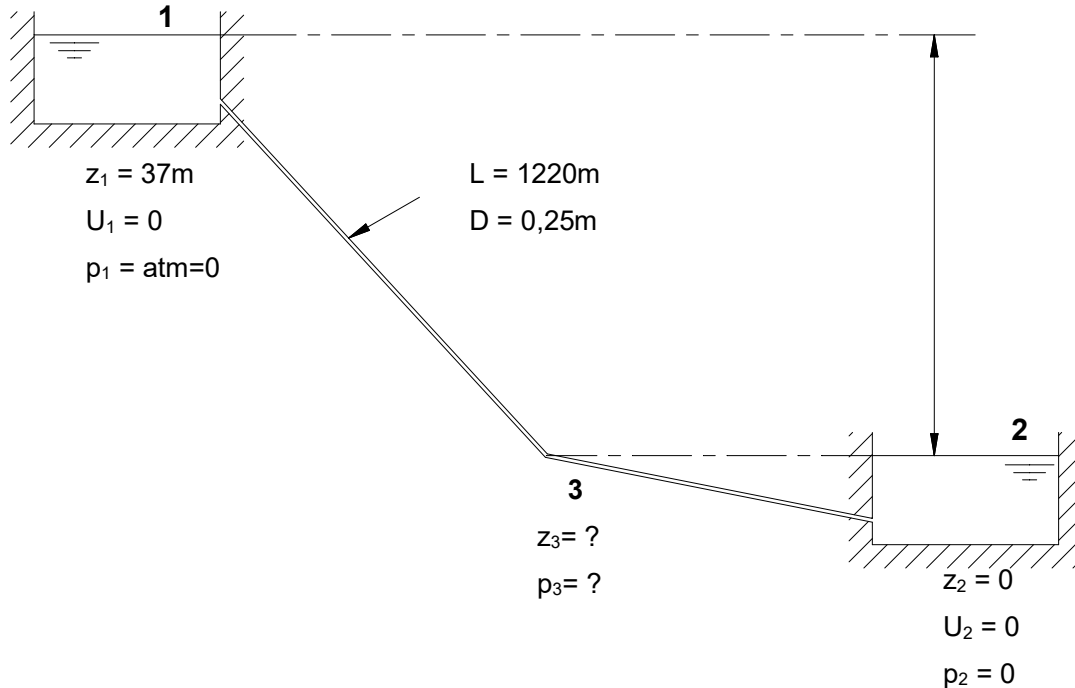
(2.52)

3. Ejercitación y casos de aplicación

Ejercicio 2.1. Sotelo Ávila (1997)

Los tanques de la figura están conectados por una tubería de 1220m de longitud y 0,25 m de diámetro. El nivel del recipiente del tanque inferior está a 37 m por encima del nivel del tanque inferior. El gasto que transporta la tubería es de 0,128 m³/s. Determinar:

- La energía disponible, para ser disipada, entre los extremos de la tubería.
- La presión que existe en la sección 3 ubicada a la mitad de la longitud de la tubería, si dicha sección se encuentra a la misma elevación que el nivel del tanque inferior.



- 1) Considerando que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la ecuación de la energía se puede aplicar entre los puntos 1 y 2, considerando el plano de referencia coincidente con la superficie libre del tanque 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \sum h_r$$

$$37+0+0=0+0+0+\sum_1^2 h_r \Rightarrow \sum_1^2 h_r = 37m$$

El desnivel de 37m puede ser consumido por las pérdidas de energía del escurrimiento de agua.

2) La velocidad media en el tubo vale

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{0,128 \frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}(0,25m)^2} = \frac{0,128 \frac{m^3}{s}}{0,0491m^2} = 2,607 \frac{m}{s}$$

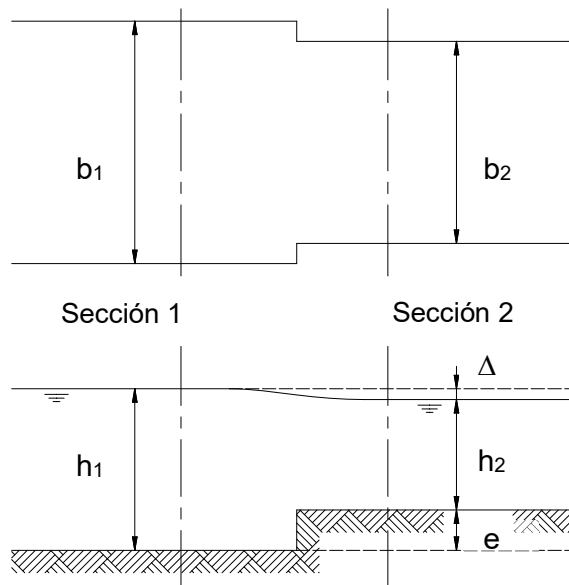
Se aplica la ecuación de energía de la misma forma que en el ítem anterior, ahora entre el tanque 1 y la sección 3. Como la sección 3 se ubica a la mitad de la longitud de la tubería L, y la pérdida de energía resulta proporcional a la longitud recorrida por el agua, entonces desde la sección 1 y hasta la sección 3 se pierde la mitad de la energía disponible entre las secciones 1 y 2, y por lo tanto, $\Delta h_r=18,50$ m. La expresión matemática es la siguiente, que permite calcular p_3 :

$$37+0+0=0+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{\left(2,607 \frac{m}{s}\right)^2}{2\left(9,81 \frac{m}{s^2}\right)}+\frac{\Delta h_r}{18,50m} \Rightarrow p_3 = 18,153 \frac{kg}{m^2} \frac{9,8N}{1kg} = 177,9N/m^2$$

Esta presión, obviamente, cambia si se modifica z_3 .

Ejercicio 2.2. Sotelo Ávila (1997)

El ancho de un canal rectangular abierto se reduce de 1,8 a 1,5 m y el fondo se eleva en 30 cm, de la primera a la segunda sección. El tirante en la primera sección es de 1,2 m y la caída de nivel piezométrico es de 0,08 m. Determinar el caudal de agua en el canal, despreciando las pérdidas de energía.



Si se calcula el Bernoulli de fondo en las secciones 1 y 2:

$$\left. \begin{aligned} B_{1f} &= h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \\ B_{2f} + e &= B_{1f} \\ B_{2f} &= h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \end{aligned} \right\} h_2 + \frac{U_2^2}{2g} + e = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \Rightarrow h_1 - (h_2 + e) = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}$$

Además $h_1 = e + h_2 + \Delta \Rightarrow h_1 - (h_2 + e) = \Delta \Rightarrow \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} = \Delta$

Calculando h_2 , se puede encontrar la relación entre U_1 y U_2 usando la ecuación de continuidad:

$$h_2 = h_1 - \Delta - e = 1,20m - 0,08m - 0,30m = 0,82m$$

$$Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 \Rightarrow U_1 = U_2 \frac{h_2 b_2}{h_1 b_1} = U_2 \frac{0,82m \cdot 1,5m}{1,2m \cdot 1,8m} = 0,570 U_2$$

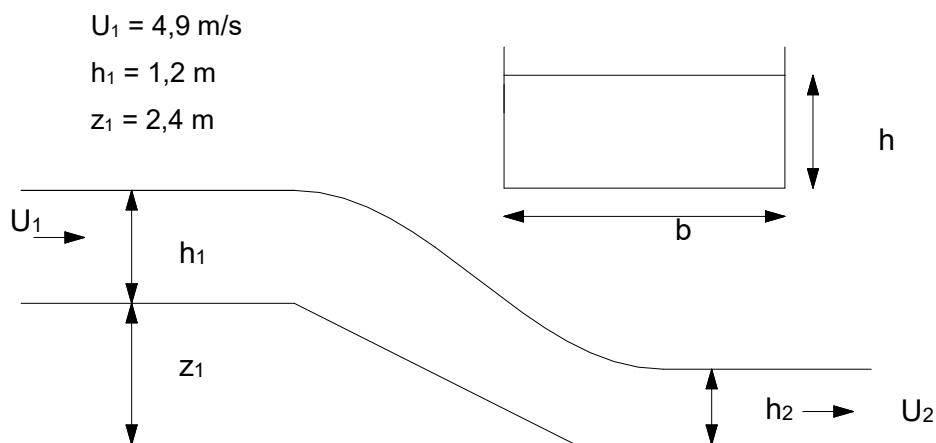
$$U_2^2 - (0,57 U_2)^2 = 2g \Delta \Rightarrow U_2 = \sqrt{2 \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 0,08m}{1 - 0,57^2}} = 1,525 \frac{m}{s}$$

Una vez conocida la velocidad se puede calcular el caudal.

$$Q = \Omega_2 U_2 = h_2 b_2 U_2 = 0,82m \cdot 1,5m \cdot 1,525 \frac{m}{s} = 1,876 \frac{m^3}{s} \Rightarrow Q = 1,88 \frac{m^3}{s}$$

Ejercicio 2.3. Sotelo Ávila (1997)

El agua fluye en un canal rectangular de 3 m de ancho, tal como lo muestra la figura. Sin considerar las pérdidas, calcule el tirante en la sección 2.



$$B_1 = B_2$$

$$z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{b h_1 U_1}{b h_2} = \frac{h_1}{h_2} U_1$$

$$z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\left(\frac{h_1}{h_2} U_1\right)^2}{2g}$$

$$2,4m + 1,2m + \frac{1}{2} \frac{\left(4,9 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} = h_2 + \frac{1}{2} \frac{\left(4,9 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} \frac{(1,2m)^2}{h_2^2}$$

$$4,82m = h_2 + \frac{1,76m^3}{h_2^2} \Rightarrow h_2 = \begin{cases} h_2 = -0,5714 \text{ m} \\ h_2 = 0,6496 \text{ m} \\ h_2 = 4,7417 \text{ m} \end{cases}$$

$$h_2^3 - 4,82m h_2^2 + 1,76m^3 = 0$$

La raíz negativa del polinomio de tercer grado no tiene significado físico, la altura menor corresponde al régimen de torrente y la altura mayor al régimen de río.

Ejercicio 2.4. Streeter&Wylie (1986)

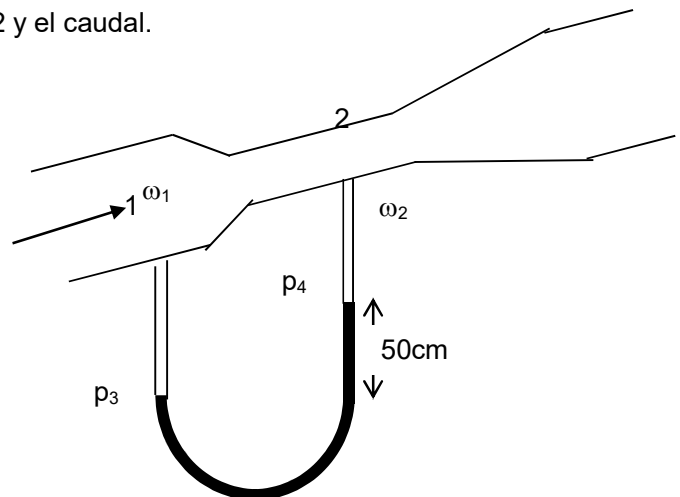
En la figura siguiente se indican las características de un tubo Venturi por el que circula nafta, y el manómetro conectado al mismo es de mercurio. Despreciando las pérdidas de carga, calcular:

La velocidad en la sección 1, en la sección 2 y el caudal.

$$\gamma_{NAFTA} = 6470 \text{ N/m}^3$$

$$\gamma_{MERCURIO} = 133000 \text{ N/m}^3$$

$$d_1 = 10\text{cm} \text{ y } d_2 = 5\text{cm}$$



Aplicando Bernoulli a las secciones 1 y 2:

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma_N} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma_N} + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma_N}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma_N}\right) = \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g}$$

$$\left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma_N}\right) - (z_2 - z_1) = \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma_N}\right) - \Delta z$$

$$Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 \Rightarrow U_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = U_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \Rightarrow U_1 = U_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = U_2 \left(\frac{5}{10} \right)^2 = \frac{1}{4} U_2 = U_1$$

Por otro lado, trabajando con las presiones

$$p_3 = p_1 + (z + 0.5m)\gamma_N = p_2 + (z + \Delta z)\gamma_N + 0.5m\gamma_M \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = (z + \Delta z)\gamma_N + 0.5m\gamma_M - (z + 0.5m)\gamma_N = 0.5m(\gamma_M - \gamma_N) + \Delta z\gamma_N$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_N} - \Delta z = 0.5m \left(\frac{\gamma_M - \gamma_N}{\gamma_N} \right) = 0.5m \left(\frac{133000 - 6470}{6470} \right) = 9.78m$$

$$9.78m = \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left[U_2^2 - \left(\frac{1}{4} U_2 \right)^2 \right] = \frac{U_2^2}{2g} \left[1 - \frac{1}{16} \right] = 0.94 \frac{U_2^2}{2g} = 9.78m \Rightarrow$$

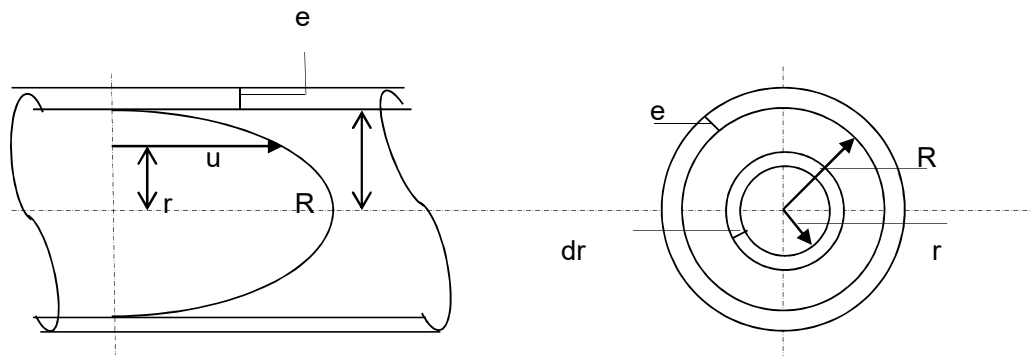
$$U_2 = \sqrt{\frac{9.78m(2g)}{0.94}} = 14.29m/s$$

$$\frac{1}{4} U_2 = U_1 = 3.57m/s \Rightarrow Q = U_1 \Omega_1 = 3.57 \frac{m}{s} \frac{\pi(0.1m)^2}{4} = 0.028m^3/s$$

$$U_2 = 14.29m/s \quad U_1 = 3.57m/s \quad Q = 0.028 \frac{m^3}{s}$$

Ejercicio 2.5. Giles (1969) y Sotelo Ávila (1997)

En una tubería circular se conoce la ley de variación de la velocidad. Calcular la velocidad media y los coeficientes de velocidad.



$$u = \frac{u_{máx}}{R^2} (R^2 - r^2) \quad \text{Distribución parabólica}$$

Velocidad media:

$$U = \frac{Q}{\Omega} \quad Q = \int_{\Omega} u d\omega$$

$$Q = \int_{\Omega} \frac{u_{máx}}{R^2} (R^2 - r^2) d\omega \quad \omega = \pi r^2 \quad d\omega = 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R \frac{u_{\max}}{R^2} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{2\pi u_{\max}}{R^2} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$Q = \frac{2\pi u_{\max}}{R^2} \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{2\pi u_{\max}}{R^2} R^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2\pi u_{\max}}{4} R^2$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{u_{\max} R^2}{2\pi r} \quad U = \frac{u_{\max}}{2}$$

Cálculo de los coeficientes de velocidad:

$$\alpha = 1 + 3\eta + \xi \quad \alpha = \frac{1}{\omega U^3} \int_{\Omega} u^3 d\omega$$

$$\eta = \beta - 1 \quad \beta = \frac{1}{\omega U^2} \int_{\Omega} u^2 d\omega$$

$$\beta = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \frac{u^2}{U^2} d\omega = \frac{1}{\omega U^2} \int_{\Omega} u^2 d\omega = \frac{1}{\pi R^2 \frac{u_M}{2^2}} \int_0^R \frac{u_M^2}{R^4} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$\beta = \frac{8}{R^6} \int_0^R (R^4 - 2R^2 r^2 + r^4) r dr = \frac{8}{R^6} \int_0^R (rR^4 - 2R^2 r^3 + r^5) dr$$

$$\beta = \frac{8}{R^6} \left[\frac{R^2}{2} R^4 - 2R^2 \frac{R^4}{4} + \frac{R^6}{6} \right]$$

$$\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\eta = \beta - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \eta = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega} \frac{u^3}{U^3} d\omega = \frac{1}{\omega U^3} \int_{\Omega} u^3 d\omega = \frac{1}{\pi R^2 \frac{u_M}{8}} \int_0^R \frac{u_M^3}{R^6} (R^2 - r^2)^3 2\pi r dr$$

$$\alpha = \frac{16}{R^8} \int_0^R (R^2 - r^2)^3 r dr = \frac{16}{R^8} \int_0^R (R^6 r - 3R^4 r^2 r + 3R^2 r^4 r - r^6) dr$$

$$\alpha = \frac{16}{R^8} \left[\frac{R^2}{2} R^6 - 3R^4 \frac{R^4}{4} + 3R^2 \frac{R^6}{6} - \frac{R^8}{8} \right] = 16 \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \right]$$

$$\alpha = 16 \left[\frac{12 - 18 + 12 - 3}{24} \right] = 16 \frac{3}{24} \quad \alpha = 2$$

$$\xi = \alpha - 1 - 3\eta = 2 - 3 \frac{1}{3} - 1 \quad \xi = 0$$

En casos como el presente, donde la distribución de velocidades en la sección transversal es parabólica (escurrimiento laminar) los valores de α y β alcanzan los valores máximos de 2 y 1,33 (4/3). En cambio, cuando el escurrimiento es turbulento la distribución de velocidades se aproxima a la media α y β tienden a 1.

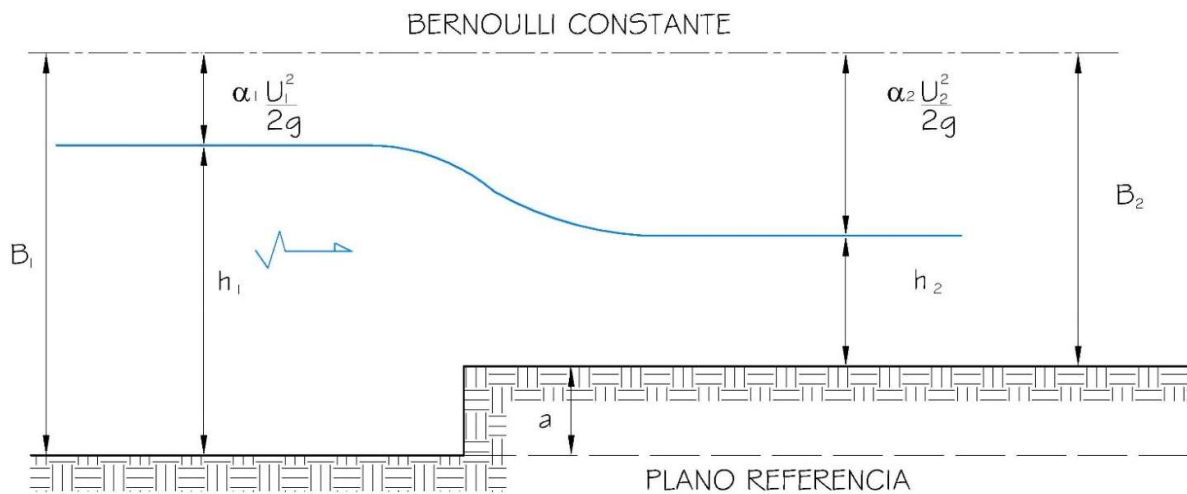
La evaluación de los coeficientes requiere el conocimiento previo de la distribución de velocidades en cada sección, en la mayoría de los problemas de la hidráulica el escurrimiento es turbulento y es común considerar $\alpha \approx \beta \approx 1$.

Ejercicio 2.6.

En un canal rectangular de ancho b la ley de variación de la velocidad en la altura de agua es lineal. La altura aguas arriba es h_1 . Se coloca en el mismo una grada (o escalón) de subida, calcular la altura de agua aguas abajo h_2 , recordando que se produce un movimiento permanente variado. Calcular los coeficientes: α , β , ξ y η . Indicar el tipo de régimen y dibujar a escala la curva de energía a caudal constante.

DATOS:

$h_1 = 1,5 \text{ m}$ $a = 0,30 \text{ m}$
 $b = 3 \text{ m}$ $V = 1,8 \text{ h}_1 - 1,2 \text{ z} \text{ [m/s]}$



Cálculo del caudal Q

$dq = Vdz$

$q = \frac{Q}{b} = \int_0^{h_1} Vdz$

$q = \int_0^{h_1} (1,8h_1 - 1,2z)dz = \int_0^{h_1} 1,8h_1 dz - \int_0^{h_1} 1,2z dz = 1,8h_1 z \Big|_0^{h_1} - 1,2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{h_1}$

$q = 1,8h_1^2 - \frac{1,2}{2} h_1^2 = 1,2h_1^2 \frac{m^3}{ms} = 2,7 \frac{m^3}{ms}$ $Q = qb = 2,7 \frac{m^3}{ms} 3m = 8,1 \frac{m^3}{s}$

Cálculo de la velocidad media U en la sección 1

$U_1 = \frac{Q}{bh_1} = \frac{8,1m^3/s}{3m \cdot 1,5m} = 1,8m/s$

Cálculo del coeficiente de velocidad de la sección 1 (α_1).

$\alpha = 1 + 3\eta + \xi$

$\alpha = \frac{1}{\Omega U^3} \int_{\Omega} V^3 d\omega$

$\beta = \frac{1}{\Omega U^2} \int_{\Omega} V^2 d\omega$

$$\beta_1 = \frac{1}{\Omega} \int_0^\omega \frac{V^2}{U^2} d\omega = \frac{1}{bh_1} \int_0^{h_1} \frac{V^2}{U^2} b dz = \frac{1}{h_1 U^2} \int_0^{h_1} V^2 dz$$

$$V^2 = (1,8h_1 - 1,2z)^2 = 1,8^2 h_1^2 - 2(1,8h_1)(1,2z) + 1,2^2 z^2$$

$$\eta_1 = \beta_1 - 1 = 1,083 - 1 = 0,083 \Rightarrow \eta_1 = 0,083$$

$$\beta_1 = \frac{1}{U_1^2 h_1} \left\{ 1,8h_1^2 z \Big|_0^{h_1} - 2(1,8h_1)1,2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{h_1} + 1,2^2 \frac{z^3}{3} \Big|_0^{h_1} \right\}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{U_1^2 h_1} \left[1,8h_1^2 - 1,8(1,2h_1^2) + \frac{1,2^3}{3} h_1^3 \right] = 1,083$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Omega} \int_0^\omega \frac{V^3}{U^3} d\omega = \frac{1}{bh_1 U_1^3} \int_0^{h_1} (1,8h_1 - 1,2z)^3 b dz$$

$$V^3 = (1,8h_1 - 1,2z)^3 = 1,8^3 h_1^3 - 3(1,8h_1)^2 (1,2z) + 3(1,8h_1)(1,2z)^2 - 1,2^3 z^3$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{U_1^3 h_1} \int_0^{h_1} \left[1,8^3 h_1^3 - 3(1,8h_1)^2 (1,2z) + 3(1,8h_1)(1,2z)^2 - 1,2^3 z^3 \right] dz$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{U_1^3 h_1} \left[1,8^3 h_1^4 - 3(1,8^2) \frac{1,2}{2} h_1^4 + 3(1,8) \frac{1,2^2}{3} h_1^4 - \frac{1,2^3}{4} \times h_1^4 \right] = 2,16 \frac{h_1^3}{U_1^3}$$

$$\alpha_1 = 1,25$$

$$\xi_1 = \alpha_1 - 1 - 3\eta_1 = 1,25 - 3(0,083) - 1 = 0,001$$

Cálculo del Bernoulli de la sección 2 (B₂) y la altura h₂.

$$B_1 = B_2 + a \Rightarrow B_2 = B_1 - a$$

$$B_1 = h_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = 1,5m + 1,25 \frac{1,8^2}{2g} m = 1,706m \cong 1,71m$$

$$B_2 = h_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} = 1,71m - 0,30m = 1,41m$$

$$h_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} = 1,41m \Rightarrow \text{BERNOULLI}$$

La altura crítica es:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{2,7^2 m^6 s^2}{9,81 s^2 m^3}} = 0,906m$$

En el planteo hay tres incógnitas (α_2 , h_2 y U_2), de modo que se necesitan tres ecuaciones para resolverlas. La primera surge de aplicar el teorema de Bernoulli entre las secciones 1 y 2, la segunda de aplicar la ecuación de la continuidad en movimiento permanente y la tercera de aplicar la ecuación de la continuidad al movimiento permanente variado entre las mismas dos secciones 1 y 2. El escalón de subida en el fondo del canal implica una singularidad, lo que significa que el movimiento que se produce allí es movimiento permanente variado.

$$Q = U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 \Rightarrow U_2 = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{Q}{bh_2} \Rightarrow \text{ECUACIÓN CONTINUIDAD}$$

$$U^4 \eta = \text{constante} \Rightarrow \text{ECUACIÓN CONTINUIDAD MPV}$$

$$U_1^4 \eta_1 = U_2^4 \eta_2 \Rightarrow \eta_2 = \frac{U_1^4 \eta_1}{U_2^4}$$

$$\alpha_2 = 1 + 3\eta_2 + \frac{\xi_2}{0}$$

Los cálculos se ordenan en la tabla siguiente, aplicando el método de aproximaciones sucesivas, se adoptan valores de h_2 para luego calcular U_2 , los coeficientes η_2 y α_2 y el Bernoulli B_2 , para luego comparar con $B_2 = 1,41\text{m}$. Se usan valores de h_2 por encima y por debajo de h_c . Los mismos se ordenan a través de una tabla de cálculo.

h_2 (m)	U_2 (m/s)	η_2	α_2	B_2 (m)	Fr	OBSERVACIONES
1,20	2,25	0,034	1,102	1,46	0,66	
1,15	2,35	0,029	1,086	1,43	0,70	
1,10	2,45	0,024	1,072	1,41	0,75	REGIMEN RÍO
1,05	2,57	0,020	1,060	1,39	0,80	
1,00	2,70	0,016	1,049	1,37	0,86	
0,95	2,84	0,013	1,040	1,36	0,93	
0,90	3,00	0,011	1,032	1,36	1,01	
0,85	3,18	0,009	1,026	1,36	1,10	
0,80	3,38	0,007	1,020	1,38	1,20	
0,75	3,60	0,005	1,016	1,41	1,33	RÉGIMEN TORRENTE
0,70	3,86	0,004	1,012	1,46	1,47	

Se han encontrado dos valores de h_2 que cumplen el valor de B_2 , uno es mayor que h_c y el otro es menor. El valor a adoptar, dependerá de las condiciones de aguas abajo

Por ejemplo, si el régimen es subcrítico o de río, entonces la altura h_2 , será la más alta, es decir 1,10m para este caso, en tanto que si el régimen es supercrítico o de torrente, la altura h_2 será la menor, o sea 0,75m.

Nota: Que α_2 sea menor que α_1 , significa que la distribución de velocidades es más uniforme en la sección 1-1, que en la 2-2. Al aumentar α la distribución de velocidades se asemeja más a la parabólica, y por dicha razón $\xi \rightarrow 0$, o sea que hemos supuesto bien. Al acelerarse la corriente $\alpha \rightarrow 1$, ello ocurre cuando hay una rápida aceleración en las zonas cercanas al escurrimiento crítico, y también cuando se presentan profundidades menores y velocidades grandes.

También se ha calculado el número de Froude para saber si es régimen de RÍO o de TORRENTE.

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g \frac{\Omega}{l}}} = \frac{U}{\sqrt{g \frac{bh}{b}}} = \frac{U}{\sqrt{gh}}$$

a) Aguas Arriba

$$Fr = \frac{1,8\text{m/s}}{\sqrt{g \cdot 1,5\text{m}}} = 0,47 < 1 \Rightarrow \text{RÍO}$$

b) Aguas Abajo

$$Fr = \frac{2,45m/s}{\sqrt{g1,10m}} = 0,75 < 1 \Rightarrow \text{RIO}$$

$$Fr = \frac{3,60m/s}{\sqrt{g0,75m}} = 1,33 > 1 \Rightarrow \text{TORRENTE}$$

O sea que aguas abajo del escalón puede producirse un escurrimiento de Río o uno de Torrente, de qué depende que se produzca uno u otro, de las condiciones aguas abajo del canal (sobre todo de la pendiente de fondo).

Cálculo de los parámetros críticos:

$$h_c = 0,91m \Rightarrow U_c = \frac{8,1m^3/s}{3m \cdot 0,91m} = 2,98 \frac{m}{s} \Rightarrow B_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g} = h_c + \frac{gh_c}{2g} = \frac{3}{2} h_c = 1,36m$$

Trazado de la curva de Energía

Derivando la función Bernoulli respecto de la altura de agua se obtiene:

$$\frac{dB}{dh} = 1 + \frac{1}{2g} 2U \frac{dU}{dh}$$

$$\frac{dB}{dh} = 1 - \frac{1}{g} \frac{U^2}{\Omega} b$$

$$Q = U\Omega$$

$$\frac{dQ}{dh} = 0 = \frac{dU}{dh} \Omega + \frac{d\Omega}{dh} U$$

$$\frac{dU}{dh} = - \frac{U}{\Omega} \frac{d\Omega}{dh}$$

pero $U_c = \sqrt{g \frac{\Omega}{b}}$

$$\frac{dB}{dh} = 1 - \frac{U^2}{U_c^2}$$

interpretación gráfica

$$B_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g} = h_c + \frac{\sqrt{gh_c}}{2g}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \sqrt[3]{\frac{U_c^2}{b^2 g} b^2 h_c^2}$$

$$B_c = h_c + \frac{h_c}{2} = \frac{3}{2} h_c$$

$$h_c^3 = U_c^2 \frac{h_c^2}{g} \Rightarrow U_c = \sqrt{gh_c}$$

- Energía mínima, escalón máximo
- $B_1 - B_c = a_{máx}$

Dibujar a escala el gráfico $h = h(B)$ para caudal constante, utilizando la siguiente expresión:

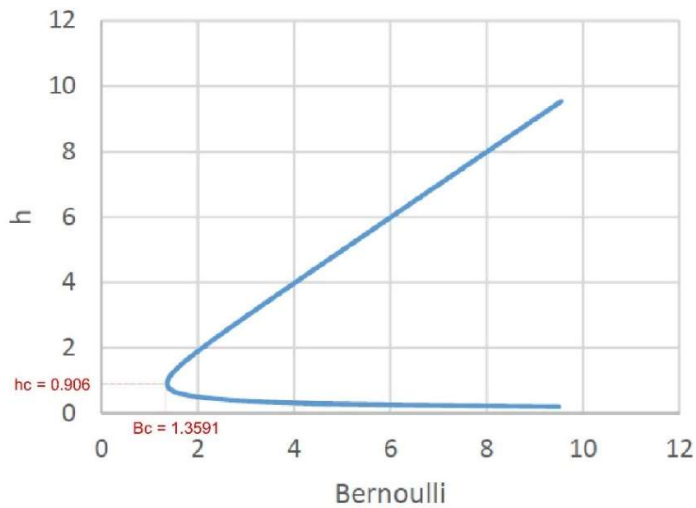
$$B = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{\Omega^2 2g}$$

$$B = h + \frac{Q^2}{2gb^2 h^2}$$

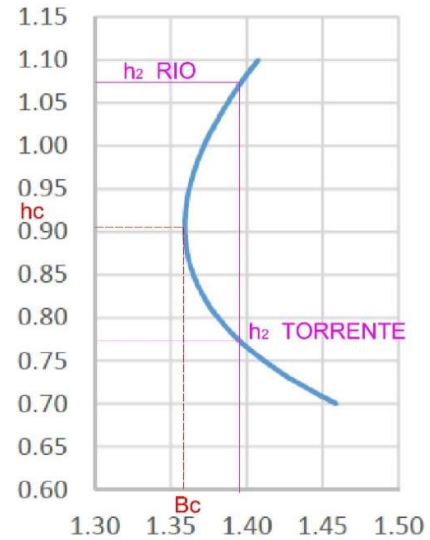
Utilizando la fórmula anterior (donde $\alpha = 1$) puede obtenerse la tabla y los gráficos siguientes:

h (m)	B (m)	h (m)	B (m)	h (m)	B (m)	h (m)	B (m)	h (m)	B (m)
1,60	1,75	3,05	3,09	4,50	4,52	5,95	5,96	7,40	7,41
1,65	1,79	3,10	3,14	4,55	4,57	6,00	6,01	7,45	7,46
1,70	1,83	3,15	3,19	4,60	4,62	6,05	6,06	7,50	7,51
1,75	1,87	3,20	3,24	4,65	4,67	6,10	6,11	7,55	7,56
1,80	1,91	3,25	3,29	4,70	4,72	6,15	6,16	7,60	7,61
1,85	1,96	3,30	3,33	4,75	4,77	6,20	6,21	7,65	7,66
1,90	2,00	3,35	3,38	4,80	4,82	6,25	6,26	7,70	7,71
1,95	2,05	3,40	3,43	4,85	4,87	6,30	6,31	7,75	7,76
2,00	2,09	3,45	3,48	4,90	4,92	6,35	6,36	7,80	7,81
2,05	2,14	3,50	3,53	4,95	4,97	6,40	6,41	7,85	7,86
2,10	2,18	3,55	3,58	5,00	5,01	6,45	6,46	7,90	7,91
2,15	2,23	3,60	3,63	5,05	5,06	6,50	6,51	7,95	7,96
2,20	2,28	3,65	3,68	5,10	5,11	6,55	6,56	8,00	8,01
2,25	2,32	3,70	3,73	5,15	5,16	6,60	6,61	8,05	8,06
2,30	2,37	3,75	3,78	5,20	5,21	6,65	6,66	8,10	8,11
2,35	2,42	3,80	3,83	5,25	5,26	6,70	6,71	8,15	8,16
2,40	2,46	3,85	3,88	5,30	5,31	6,75	6,76	8,20	8,21
2,45	2,51	3,90	3,92	5,35	5,36	6,80	6,81	8,25	8,26
2,50	2,56	3,95	3,97	5,40	5,41	6,85	6,86	8,30	8,31
2,55	2,61	4,00	4,02	5,45	5,46	6,90	6,91	8,35	8,36
2,60	2,65	4,05	4,07	5,50	5,51	6,95	6,96	8,40	8,41
2,65	2,70	4,10	4,12	5,55	5,56	7,00	7,01	8,45	8,46
2,70	2,75	4,15	4,17	5,60	5,61	7,05	7,06	8,50	8,51
2,75	2,80	4,20	4,22	5,65	5,66	7,10	7,11	8,55	8,56
2,80	2,85	4,25	4,27	5,70	5,71	7,15	7,16	8,60	8,61
2,85	2,90	4,30	4,32	5,75	5,76	7,20	7,21	8,65	8,65
2,90	2,94	4,35	4,37	5,80	5,81	7,25	7,26	8,70	8,70
2,95	2,99	4,40	4,42	5,85	5,86	7,30	7,31	8,75	8,75
3,00	3,04	4,45	4,47	5,90	5,91	7,35	7,36	8,80	8,80

$h=h(B)$



Este segundo gráfico es un detalle del primero donde pueden apreciarse los dos valores de h_2 . Debe tenerse en cuenta que tanto la tabla como los gráficos fueron desarrollados para $\alpha = 1$ por lo que los valores de Bernoulli resultantes son un poco menores a los calculados.



Ejercicio 2.7

Un tubo de 7,5 cm de diámetro y 1,20 m de longitud se llena con un aceite de peso específico relativo 0,822 y se cierra en sus dos extremos. En posición horizontal se lo gira a 27,5 rad/s alrededor de un eje que dista 30 cm de uno de sus extremos. ¿Qué presión se desarrollará en el extremo más alejado del tubo medida en kgf/cm^2 ? Graficar para mayor claridad.

$$y_2 = \frac{\omega^2}{2g} (1,5m)^2 = 86,8m$$

$$y_1 = \frac{\omega^2}{2g} (0,30m)^2 = 3,47m$$

$$p_2 = \gamma_{ac} y_2$$

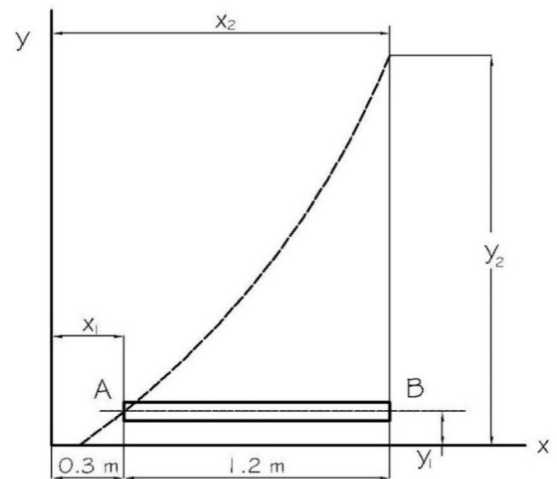
$$p_2 = 0,822 \frac{1000\text{kgf}}{m^3} 86,8m \frac{1m^2}{10^4\text{cm}^2} = 7,13 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\Delta p = \gamma_{ac} (y_2 - y_1)$$

$$\Delta p = 0,822 \frac{1000\text{kgf}}{m^3} (86,8m - 3,47m)$$

$$\Delta p = 68497 \frac{\text{kgf}}{m^2} \frac{1m^2}{10^4\text{cm}^2}$$

$$\Delta p = 6,85 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$



Ejercicio 2.8. Streeter&Wylie (1986)

El agua contenida en un depósito fluye a través de la boquilla de la figura. Calcular la velocidad de salida y el caudal que se eroga a través de la boquilla.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow$$

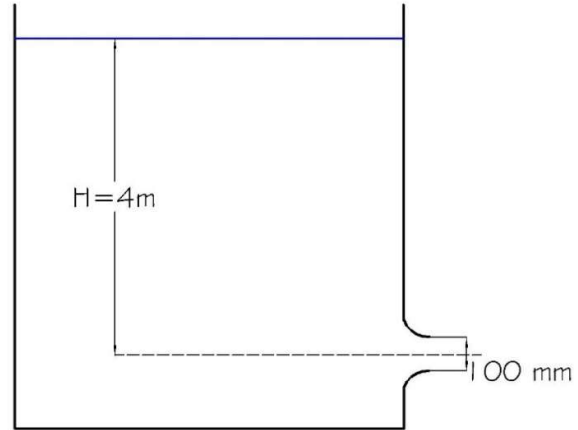
$$\underbrace{z_1 + \frac{p_1}{\gamma}}_H + \underbrace{\frac{U_1^2}{2g}}_0 = \underbrace{z_2 + \frac{p_2}{\gamma}}_0 + \frac{U_2^2}{2g}$$

$$U_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 4m} = 8,86m/s$$

$$Q = U_2 \frac{\pi D^2}{4} = 8,86 \frac{m}{s} \frac{\pi (0,1m)^2}{4}$$

$$Q = 0,0695 \frac{m^3}{s}$$

$$Q = 69,5 \frac{l}{s}$$



Ejercicio 2.9. Giles (1969)

A través de una tubería de 15cm de diámetro está fluyendo aceite de peso específico relativo 0,75 a una presión de 1,05kgf/cm². Si la energía total respecto de un plano de referencia situado a 2,40m por debajo del eje de la tubería es de 17,6kgfm/kgf. Determinar el caudal de aceite en m³/s.

$$B = \frac{\text{energía}}{\text{peso}} = 17,6 \frac{kgfm}{kgf} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \Rightarrow \gamma_R = \frac{\gamma_{ac}}{\gamma_{agua}} = 0,75 \Rightarrow \gamma_{ac} = 0,75 \gamma_{agua} = 750 \frac{kgf}{m^3}$$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1,05kgf}{cm^2} \frac{10^4 cm^2}{1m^2} \frac{m^3}{750kgf} = 14m \Rightarrow z = 2,4m \Rightarrow 17,6 \frac{kgfm}{kgf} = 2,4m + 14m + \frac{U^2}{2g} \Rightarrow$$

$$U = \sqrt{2 \left(9,81 \frac{m}{s^2} \right) (17,6 - 16,4)m}$$

$$U = 4,85m/s \Rightarrow Q = U \frac{\pi \times D^2}{4} = 4,85 \frac{m}{s} \frac{3,14(0,15m)^2}{4} = 0,086m^3/s = 86l/s$$

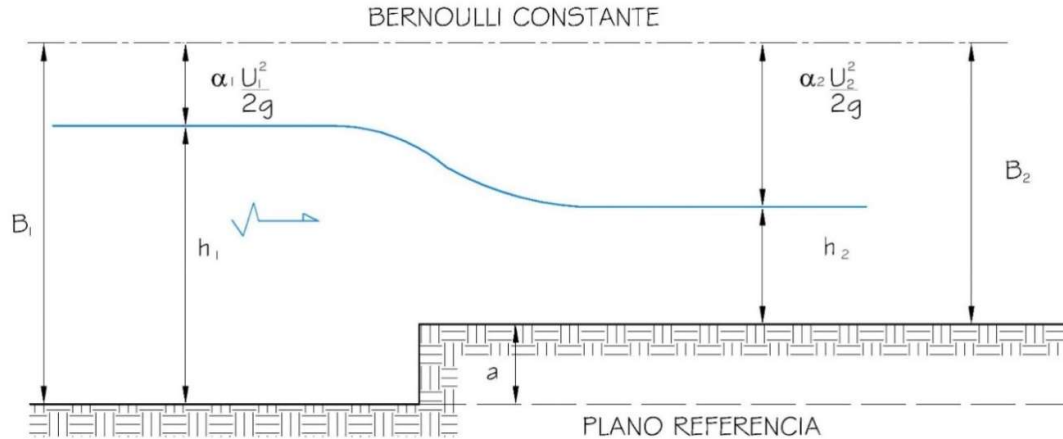
$$Q = 0,086m^3/s$$

Ejercicio 2.10

En un canal rectangular se conoce en una sección 1-1, la ley de variación de velocidades, dada por la expresión siguiente: $u = 2 - \frac{2}{3}z^2$ [m/s], la profundidad z se mide desde la superficie libre.

La profundidad en la sección 1-1 es $h_1 = 1,5$ m.

Calcular la profundidad en otra sección 2, en la que el fondo ha subido 0,4 m, considerando ancho unitario.

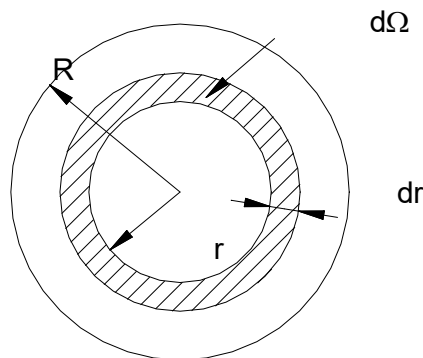


$$Q = 2,25 \frac{m^3}{sm}$$

Respuestas: $\beta = 1,089 \wedge \eta = 0,089 \wedge \xi = -0,017 \wedge \alpha = 1,25$
 $h_{21} = 0,98m \Rightarrow RÍO$
 $h_{22} = 0,66m \Rightarrow TORRENTE$

Ejercicio 2.11. Giles (1969)

Si la distribución de velocidades en un conducto circular está dada por: $\frac{u}{u_{máx}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n$ donde R es el radio de la conducción, y $u_{máx}$ es la velocidad en el centro del mismo. Calcular el caudal y la velocidad media U, como funciones de $u_{máx}$ y n.

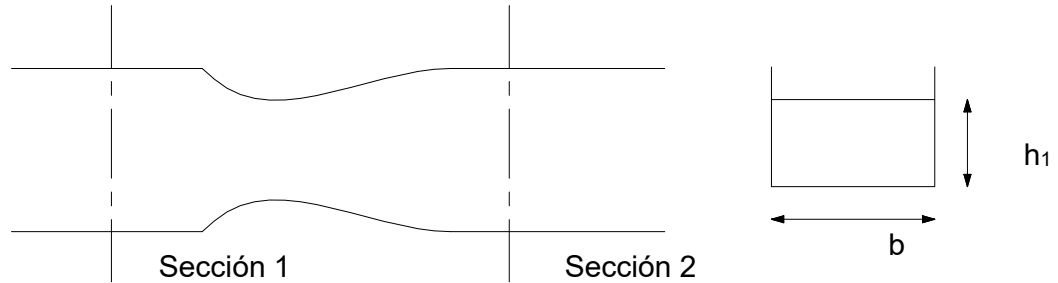


Respuestas: $Q = u_{máx} \pi \frac{n}{(n+2)} R^2$

$$U = \left(\frac{n}{n+2}\right) u_{máx}$$

Ejercicio 2.12

Un canal de sección rectangular tiene un estrechamiento como el de la figura. Conociendo $h_1 = 0,8$ m y $b_1 = b_2 = 2$ m, calcular la altura h_2 en el estrechamiento para un caudal de $1m^3/s$.



Respuestas: $h_2 = -0,117m$ $h_2 = 0,800m$ $h_2 = 0,136m$

Ejercicio 2.13

Un canal de gran ancho, y con una altura de agua $h = 2,4$ m, presenta la siguiente ley de variación de velocidades: $u = 0,6 + 1,2\sqrt{\frac{z}{h}}$ u(m/s) y h(m)

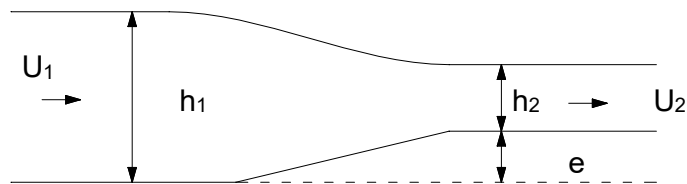
Según esta misma ecuación la velocidad superficial es de 1,8 m/s y la de fondo 0,6 m/s. Calcular:

1. El caudal por unidad de ancho q
2. La velocidad media U
3. El Bernoulli medio B_m

Respuestas: $q = 3,36 \frac{m^3}{sm}$ $U = 1,40 \frac{m}{s}$ $B_m = 2,50m$

Ejercicio 2.14. Sotelo Ávila (1997)

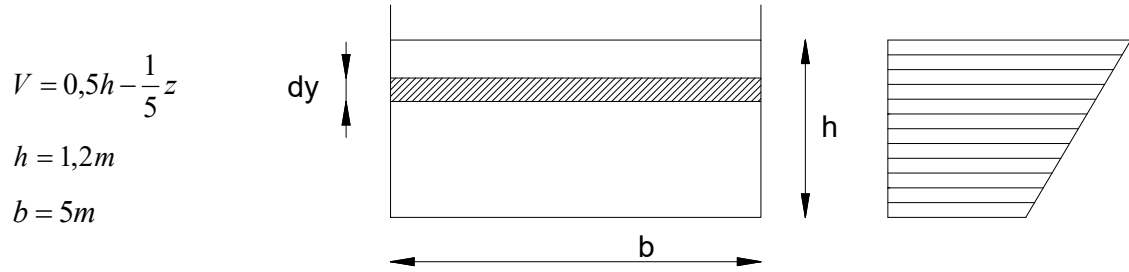
El agua fluye por una canalización abierta con un escalón de fondo de 0,15 m y un ancho constante. Las velocidades medias son $U_1 = 3$ m/s y $U_2 = 4,5$ m/s. Calcular las alturas de agua h_1 y h_2 para el movimiento permanente variado que se produce, suponiendo que no hay pérdida de energía en el escalón de fondo



Respuestas: $h_1 = 2,17m$ $h_2 = 1,45m$

Ejercicio 2.15

Calcular los coeficientes α , β , η y ξ , y determinar la energía de la corriente de las siguientes características.



Respuestas: $\alpha = 1,063$ $\beta = 1,021$ $\eta = 0,021$ $\xi = 0$ $Bm = 1,212m$

4. Corrientes bidimensionales. Rouse (1960)

Por definición las corrientes bidimensionales son aquellas que tienen dos dimensiones predominantes frente a una tercera, de modo que las magnitudes hidráulicas que se estudian serán función de dos variables espaciales y del tiempo.

Si se toma un tubo de flujo en el espacio definido por dos secciones transversales que se llaman ω_1 y ω_2 , el mismo define una superficie tubular limitada por líneas de corriente que encierran una porción elemental de la corriente, y por lo tanto la sección transversal es lo suficientemente pequeña como para que el vector velocidad instantánea V esté aplicado en el baricentro y represente la velocidad media de la misma.

El caudal que pasa por este tubo de flujo se calcula con el producto de la velocidad V y el área de la sección transversal y es válida la ecuación de la continuidad también.

$$dQ = Vd\omega = V_1d\omega_1 = V_2d\omega_2$$

La velocidad instantánea resulta inversamente proporcional a la sección transversal del tubo de flujo. Las magnitudes mencionadas son magnitudes diferenciales, mientras que en el análisis del fluido estas magnitudes tienen carácter de magnitudes finitas, muy pequeñas, pero finitas, mientras la curvatura del tubo de flujo y la variación de la velocidad instantánea en la sección transversal no sean excesivas.

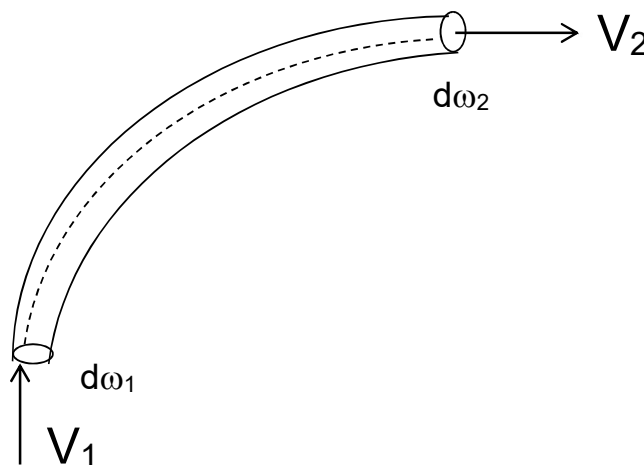


Figura 2.28

Suponiendo que en la sección transversal sólo hay variación de la velocidad instantánea en una dirección, podemos asimilar la corriente tridimensional de la figura anterior a una corriente bidimensional, y que está contenida en el plano longitudinal del escurrimiento, tal como aparece en la figura siguiente. Las secciones transversales pasan a ser distancias lineales, que se

llamaran “ Δn ”, porque están en la dirección normal de la corriente tangencial y la ecuación de la continuidad se simplifica, indicando con la letra “ q ” al caudal por unidad de ancho del tubo de flujo.

$dq = V\Delta n \Rightarrow V_1\Delta n_1 = V_2\Delta n_2$ Ecuación de la continuidad para movimientos bidimensionales

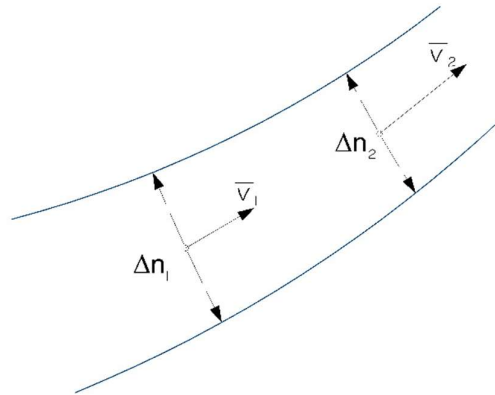


Figura 2.29

Si se supone un trazado de líneas de corriente se puede evaluar la velocidad instantánea en cada punto, referida a la de una sección inicial. Si se conoce la distribución de velocidades en la sección transversal inicial, que se indica como 0, se puede calcular la misma en la sección 1 o en cualquier sección n , aplicando la ecuación de la continuidad para movimientos bidimensionales, tal como puede verse en la Figura 2.30, midiendo las distancias normales que separan las líneas de corriente en las secciones, y por lo tanto, la ecuación queda:

$$dq = V_0\Delta n_0 = V_1\Delta n_1 = V_n\Delta n_n \Rightarrow V_n = V_0 \frac{\Delta n_0}{\Delta n_n}$$

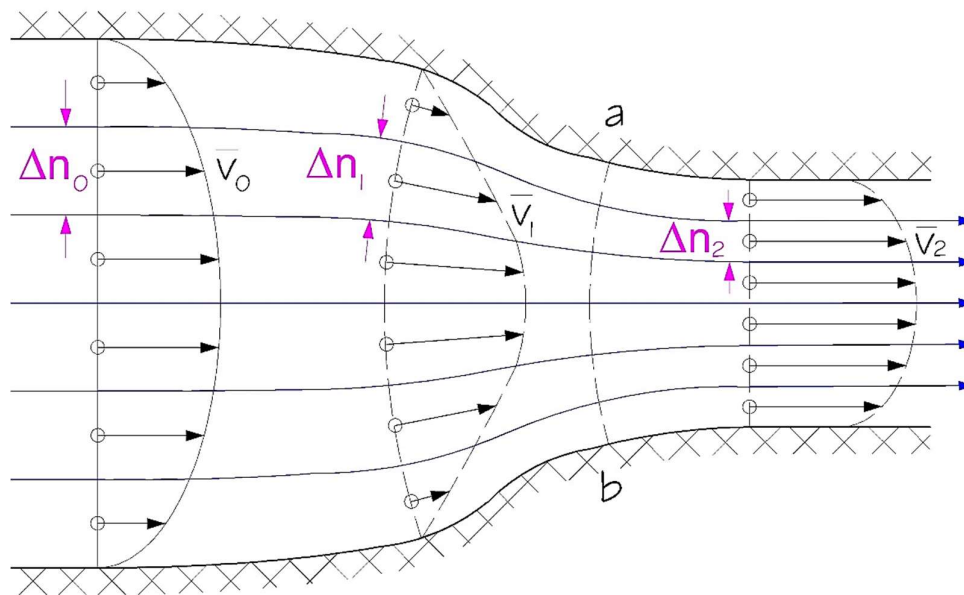


Figura 2.30. Rouse (1960)

Debe destacarse que las líneas de corriente divergentes incrementan la variación de la velocidad en la sección transversal, mientras que las convergentes tienden a igualar las velocidades en la sección, y por lo tanto la función velocidad tiende a la forma rectangular. Esto se debe a que las

corrientes convergentes incrementan la aceleración de las líneas de corriente y las más rápidas arrastran a las más lentas para uniformar el diagrama en la sección transversal, tal como puede comprobarse en la Figura 2.30.

Para el cálculo del caudal total se integra la distribución de velocidades instantáneas en la sección transversal, que para el movimiento bidimensional queda así:

$$q = \int Vdn$$

Se puede resolver la integral en forma analítica, si se tiene la expresión algebraica de la velocidad, si no, se puede resolver gráficamente por incrementos de producto ($V \times \Delta n$) cuando la distribución de velocidad es irregular, o considerar velocidad constante, o casi uniforme, en la sección transversal y se multiplica la velocidad en cada punto por el área de la sección normal.

La velocidad media U resulta el cociente entre el caudal total Q y la sección total

4.1. Redes de Corriente

Según lo visto en el apartado anterior, mediante el trazado de las líneas de corriente se puede determinar la distribución de velocidades en las mismas y en las secciones transversales. Por lo tanto, se requiere determinar la forma de dichas líneas de corriente para cada contorno geométrico dado, mediante un proceso gráfico simple basado en los principios matemáticos de la hidrodinámica clásica. Estos principios dan idea de la manera general de aproximar la forma de una red de corriente, sin necesidad de mediciones de campo, ni de laboratorio, por ello se debe tener especial cuidado en su representación gráfica.

Para un movimiento bidimensional esta representación gráfica se conoce como *red de corriente* y consiste de dos sistemas de líneas, unas son las líneas de corriente y el otro sistema es perpendicular a las líneas de corriente. Las primeras deben estar espaciadas de tal manera que la porción de caudal Δq sea la misma entre cada sucesivo par de líneas, y las segundas deben estar espaciadas de modo tal que en cualquier punto la distancia entre ellas sea igual a la distancia entre las primeras; y por lo tanto se forman mallas cuadradas entre ambos sistemas de líneas.

La velocidad sería inversamente proporcional a la distancia entre las líneas de corriente (Δn), o lo que es lo mismo a la distancia entre las líneas normales (Δs), y la ecuación de la continuidad queda así:

$$\frac{V}{V_0} \cong \frac{\Delta n_0}{\Delta n} \cong \frac{\Delta s_0}{\Delta s}$$

Entonces se puede trazar la red de corriente de un contorno físico dado, considerando que las líneas de corriente siguen la forma del mismo y las líneas normales se trazan formando mallas cuadradas entre ambos sistemas.

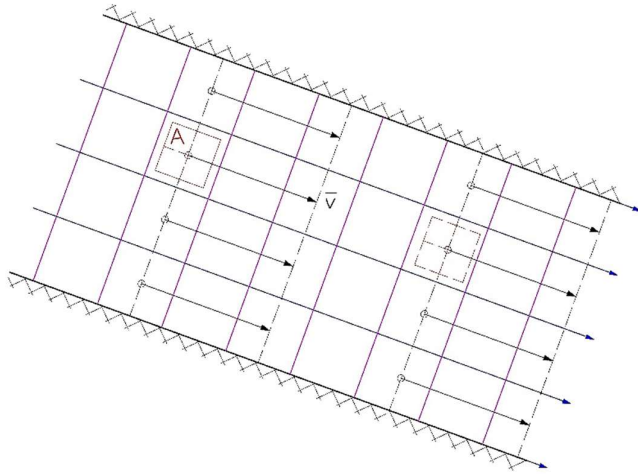


Figura 2.31

Por ejemplo, la Figura 2.31, tiene dos contornos paralelos, y siguiendo los mismos las líneas de corriente también serán paralelas entre sí y paralelas a los contornos y considerando las mallas cuadradas de tamaño constante, la velocidad será la misma en cada punto.

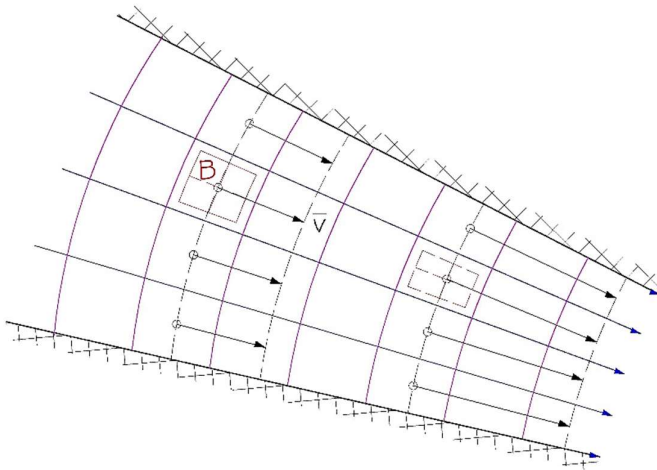


Figura 2.32

Mientras que el ejemplo de la Figura 2.32, indica que al tener contornos convergentes las mallas no serían exactamente cuadradas, sino que disminuyen sus dimensiones y por lo tanto aumenta la velocidad en el sentido del escurrimiento.

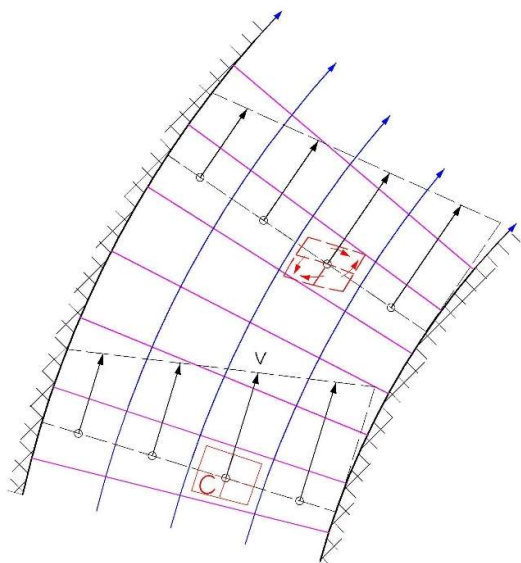


Figura 2.33

Y por último el ejemplo de la Figura 2.33 en el cual los contornos son superficies cilíndricas concéntricas y cuya red de corriente tiene mallas cuadradas decrecientes hacia el interior de la curva, lo que implica que la velocidad varía inversamente con el radio de curvatura de la línea de corriente, pero no varía a lo largo de la misma.

4.2. Movimiento Irrotacional

Cuando en el flujo el campo rotor de \vec{v} (velocidades del fluido) tiene en alguno de sus puntos valores distintos de cero el flujo es **rotacional**. En cambio, si el campo rotor de \vec{v} es cero para cualquier punto e instante el flujo es irrotacional.

Exceptuando las singularidades vorticosas (producidas fundamentalmente por la viscosidad del fluido) el movimiento de fluidos ideales puede considerarse irrotacional.

La característica principal de los modelos de flujo representados mediante redes de corriente, es que corresponden a **movimientos irrotacionales**, o sea que, no existen componentes del vector velocidad instantánea que produzcan un giro de la partícula líquida alrededor de su centro de gravedad.

Por ello es importante entender con claridad el concepto físico de irrotacionalidad.

Aun cuando el término rotación implica un giro de las partículas, esto no significa que es rotacional todo movimiento efectuado según una trayectoria curva o bien que es irrotacional cualquier movimiento rectilíneo.

Observando macroscópicamente un escurrimiento será irrotacional si la distribución de velocidades es tal que las líneas medianas o las diagonales no modifican su orientación durante el movimiento.

Para el caso de la Figura 2.31 el movimiento es irrotacional, ya que las líneas medias del elemento A (o las diagonales) no cambian de orientación en el escurrimiento. Lo mismo sucede para el elemento B de la Figura 2.32, se deforma durante el movimiento, debido al aumento de velocidad, pero las líneas medias no varían en su orientación.

Por último, el elemento C de la Figura 2.33, puede verse que rota y se deforma, sin embargo, la trayectoria de la orientación promedio de las líneas medias permanece constante y por ello el movimiento es irrotacional.

En la Figura 2.34 pueden apreciarse dos flujos de contornos paralelos. En el primero la velocidad es constante, no hay deformación ni rotación, el flujo es irrotacional; en el segundo si bien los contornos siguen siendo paralelos la velocidad decrece de arriba a abajo, no sólo se deforma el elemento cuadrado, sino que, también rota alrededor de su centro de gravedad, por lo anterior para este flujo rectilíneo rotacional es imposible la construcción de una red de mallas cuadradas, porque la velocidad cambia de tubo de flujo en tubo de flujo en la sección transversal.

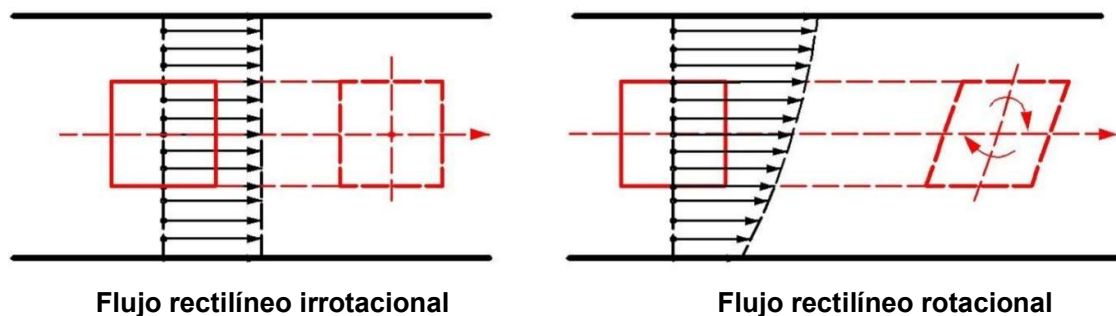


Figura 2.34

En la Figura 2.35 se muestran dos flujos curvilíneos, el de la izquierda irrotacional y el de la derecha rotacional.

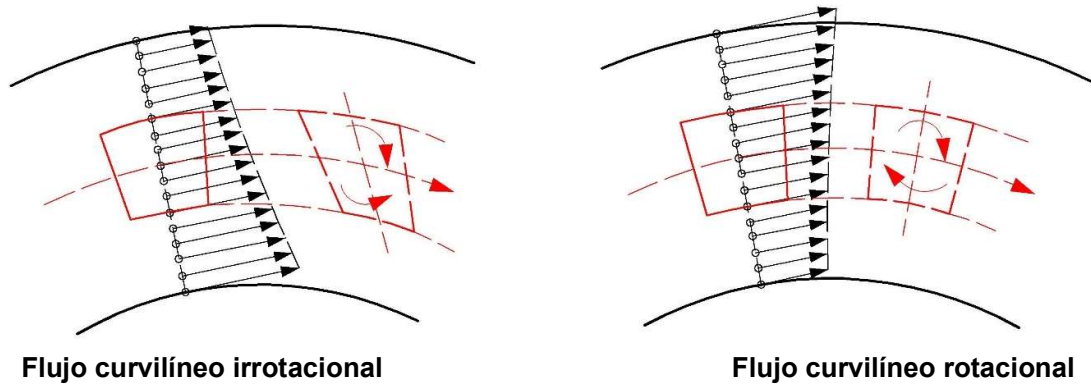


Figura 2.35

4.3. Trazado de redes de corriente

La utilidad principal de una red de corriente está en interpretar y relacionar las formas de los contornos que generalmente no están sujetas al análisis matemático. Si las líneas de corriente en los contornos coinciden con los mismos, sólo puede producirse un régimen único de movimiento irrotacional, es decir, de un movimiento cuyas componentes del vector velocidad no produzcan la rotación de la partícula líquida alrededor de su centro de gravedad.

La red de corriente bajo el movimiento irrotacional se puede obtener construyendo un sistema de líneas de corriente y un sistema de líneas normales a las de corriente, de modo que ambos sistemas formen una red de mallas cuadradas.

Suponiendo que el contorno es la primera línea de corriente, se trazan las restantes en forma paralela y se suaviza su curvatura hacia el eje de simetría, luego, tanteando gráficamente, se trazan las normales formando mallas cuadradas. Lo anterior puede verificarse mediante la ortogonalidad de las diagonales de dichas mallas, Figura 2.36.

La red de corriente de la Figura 2.36 presenta un estrechamiento de la corriente, debido a la convergencia de los contornos. Las primeras mallas son cuadrados perfectos, mientras que aquellas que se encuentran en el estrechamiento tienen más curvatura, y la ortogonalidad de sus diagonales es la que verifica la existencia de mallas cuadradas.

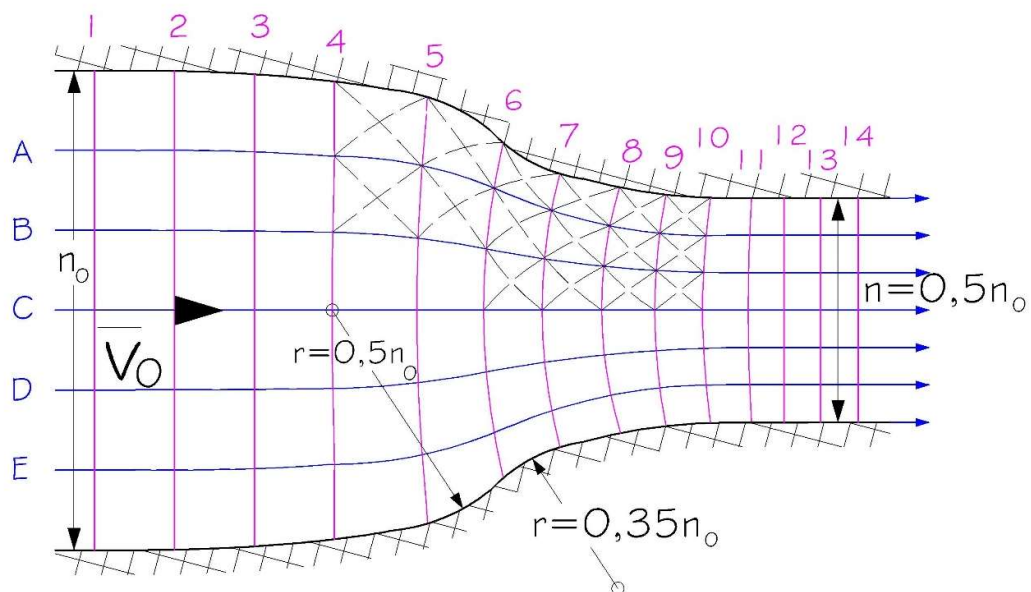


Figura 2.36. Rouse (1960)

Las velocidades mayores corresponden a las mallas más pequeñas, mientras que las velocidades menores a las mallas más grandes, mientras mayor es el cambio de curvatura de las líneas de corriente, mayor es la aceleración de las mismas y mayor será la velocidad del agua en ellas.

Si disminuyera a cero el radio de curvatura del contorno, Figura 2.37, la distancia entre las líneas de corriente de contorno exterior aumenta respecto de la distancia entre las líneas de corriente del contorno interno, lo cual significa que en el lado externo del cambio de dirección la velocidad disminuye, mientras que en el contorno interno aumenta. Un contorno anguloso como el de la Figura 2.37 produce una zona de estancamiento de agua o también denominada “aguas muertas”.

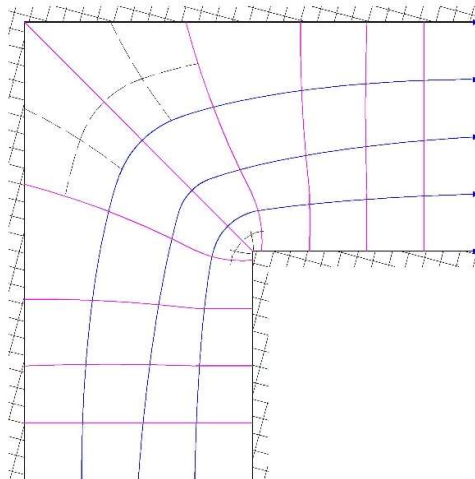


Figura 2.37. Rouse (1960)

4.4. Corriente divergente

Como se ha explicado, la red de corriente de mallas cuadradas se puede aplicar al movimiento irrotacional, pero puede usarse también en movimientos rotacionales siempre y cuando la forma de los contornos sea rápidamente convergente, entonces la distribución de velocidades será muy aproximada a la de un movimiento irrotacional, y la red de mallas cuadradas representará más aproximadamente el estado real de la corriente, Figura 2.30 y Figura 2.36.

Si se tiene una red de corriente como la de la Figura 2.38, que representa la conexión entre un depósito y un conducto, en la cual si la corriente es de izquierda a derecha los contornos son convergentes y la red de corriente es la trazada en línea llena. Mientras que, si el escurrimiento es de derecha a izquierda, la red de corriente resulta con la misma forma geométrica, pero el agua no ingresa dispersándose en el depósito, sino que lo hace en forma de chorro de entrada, tal como aparece en línea punteada de la misma figura, en este último caso no puede trazarse la red de mallas.

O sea que, cuando el movimiento es rotacional necesariamente los contornos deben ser convergentes para poder trazar la red de corriente de mallas cuadradas. Mientras que, si el movimiento es irrotacional, no hay problema con la forma de los contornos que sirven de guía para el trazado de la mencionada red.

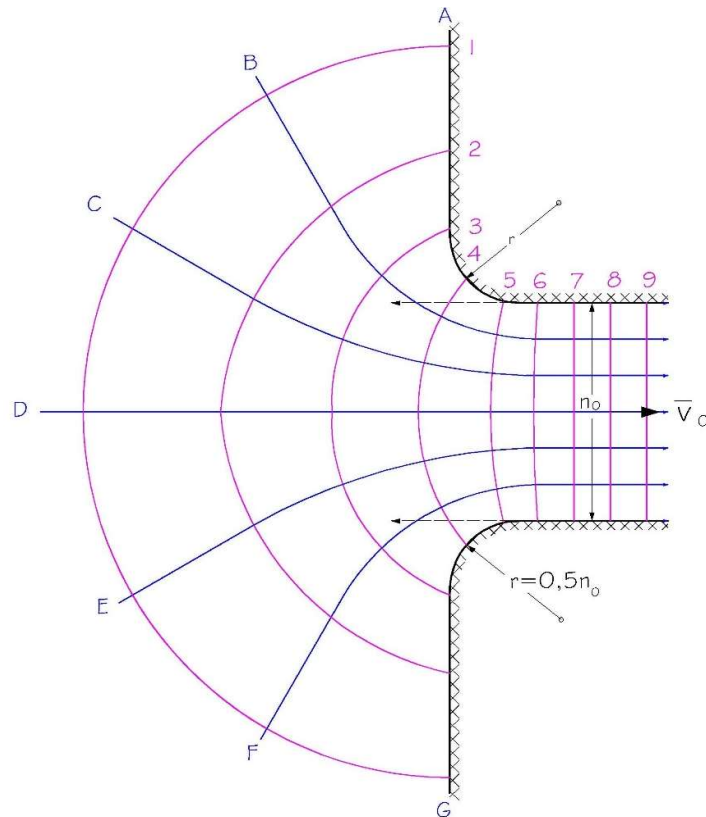


Figura 2.38. Franzini&Finnemore (1999)

4.5. Propiedades de la red de corriente

- 1) La red de corriente se aproxima bastante al régimen real, siempre y cuando las líneas de corriente no sean muy divergentes cerca del contorno.
- 2) Cuanto más uniforme sea la distribución de las velocidades en zonas de movimiento paralelo, y cuanto más rápidamente converjan los contornos, las líneas de corriente representarán más exactamente la distribución real de las velocidades.
- 3) No se puede usar la red de corriente de mallas paralelas para determinar la velocidad en los contornos divergentes, si no se conoce la forma de la superficie de separación de las aguas muertas.
- 4) La presencia de aguas muertas representa una reducción de la eficiencia hidráulica del contorno, el diseño más apropiado es aquel para el cual la red representa lo más aproximada la forma real del movimiento.

4.6. Número de Euler

Se tratará el caso del movimiento irrotacional generado por un cambio presiones en el escurrimiento del agua. Aplicando el Teorema de Bernoulli en dos secciones transversales de la Figura , en la cual el eje hidráulico de ambas secciones coincide:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} \Rightarrow z = z_0 \Rightarrow \frac{p - p_0}{\gamma} = \frac{V_0^2 - V^2}{2g}$$

$$p - p_0 = \frac{\gamma}{g} \frac{(V_0^2 - V^2)}{2} = \delta \frac{(V_0^2 - V^2)}{2} = \Delta p$$

Esta última expresión es válida para movimiento permanente e irrotacional. Si se sigue operando matemáticamente:

$$\Delta p = \frac{\delta}{2} V_0^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2} \right) \Rightarrow \frac{\Delta p}{\frac{\delta}{2} V_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2}$$

Con esta última expresión se puede calcular la distribución de presiones en función de la relación de velocidades instantáneas elevadas al cuadrado. Y tal como se explicó oportunamente, la relación de velocidades también se puede calcular mediante la relación entre el espaciamiento de las líneas de corriente (Δn) o los espaciamientos de las normales a las líneas de corriente (Δs).

Esta relación matemática $\frac{\Delta p}{\frac{\delta}{2} V_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2}$ es adimensional y caracteriza el movimiento en cada

punto del flujo, independientemente de las magnitudes absolutas que intervienen.

Entonces se puede decir que dicho cociente es un número que representa la relación entre las fuerzas de presión y las fuerzas inerciales, y la constancia de dicho número implica que predominan las fuerzas de presión. Dicho número se llama **Número de Euler**, se indica con la letra E y su expresión matemática es la siguiente:

$$\frac{1}{E^2} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2} = \frac{\Delta p}{\frac{\delta V_0^2}{2}} \Rightarrow E = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\delta}}}$$

Cuando predominan las fuerzas de presión en el escurrimiento del agua, el E permanece constante, por ejemplo, la descarga de un orificio. Mientras que si otras propiedades del agua, tal como la viscosidad, la acción de la gravedad, causan alguna influencia en el escurrimiento, el E deja de ser constante.

4.7. Ejemplos de trazado de redes de corriente para singularidades comunes

En la Figura 2.30 y Figura 2.36 se ha visto la red de corriente construida para el caso de un estrechamiento en una conducción cerrada, en la Figura 2.38 la conexión entre un depósito y una conducción de descarga. A continuación se verá la red de corriente de un orificio bidimensional (Figura 2.39), con la distribución relativa de velocidad y presión; la red de corriente para un orificio practicado en un depósito con salida libre, Figura 2.40; la red de corriente de un vertedero con descarga libre, Figura 2.41; y la red de corriente de un orificio bajo compuerta, Figura 2.42.

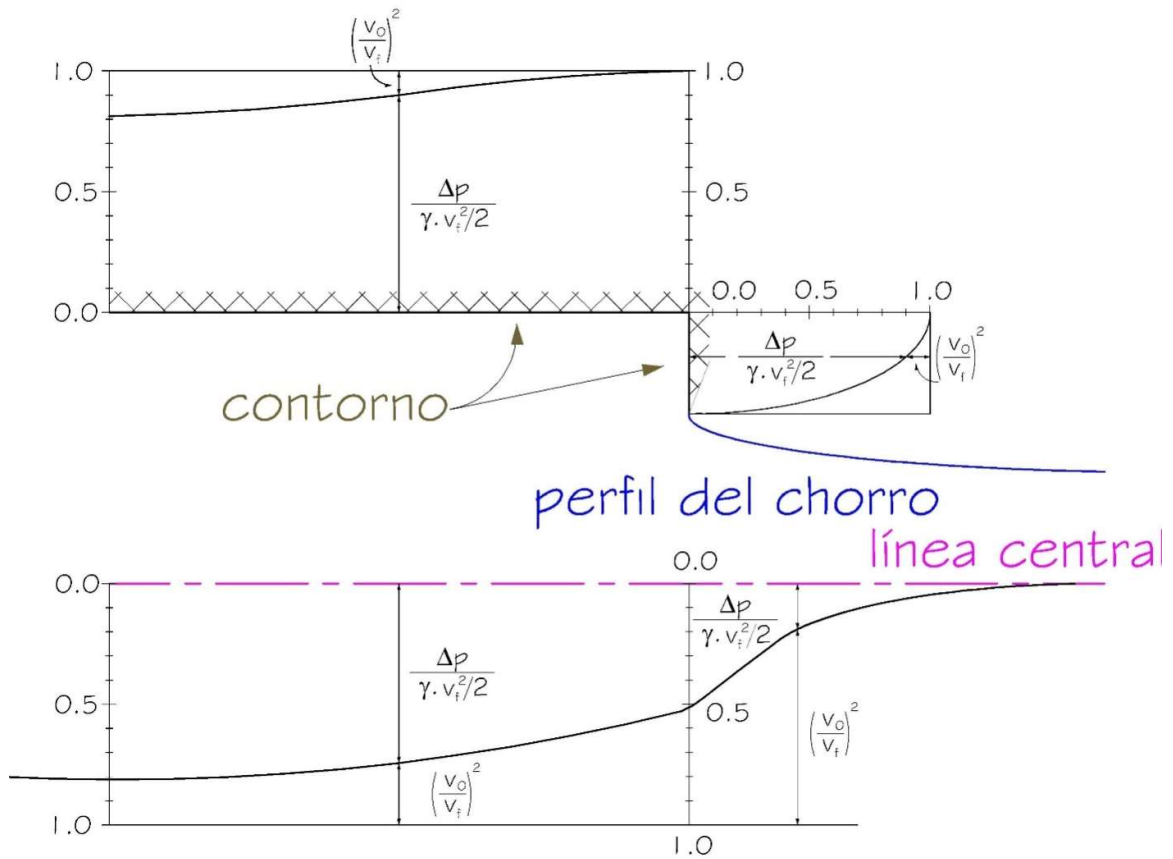
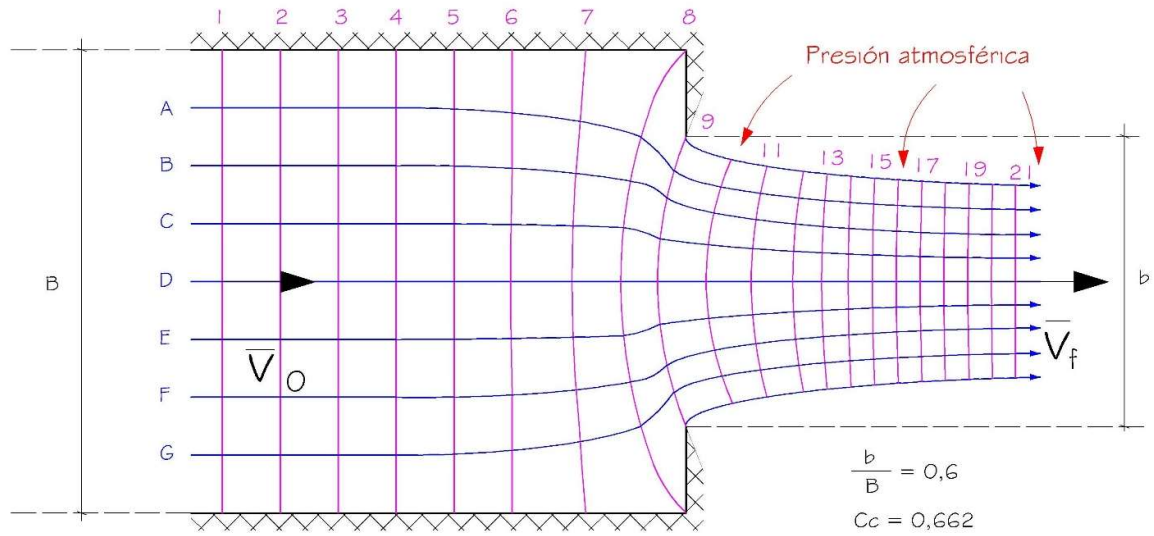


Figura 2.39

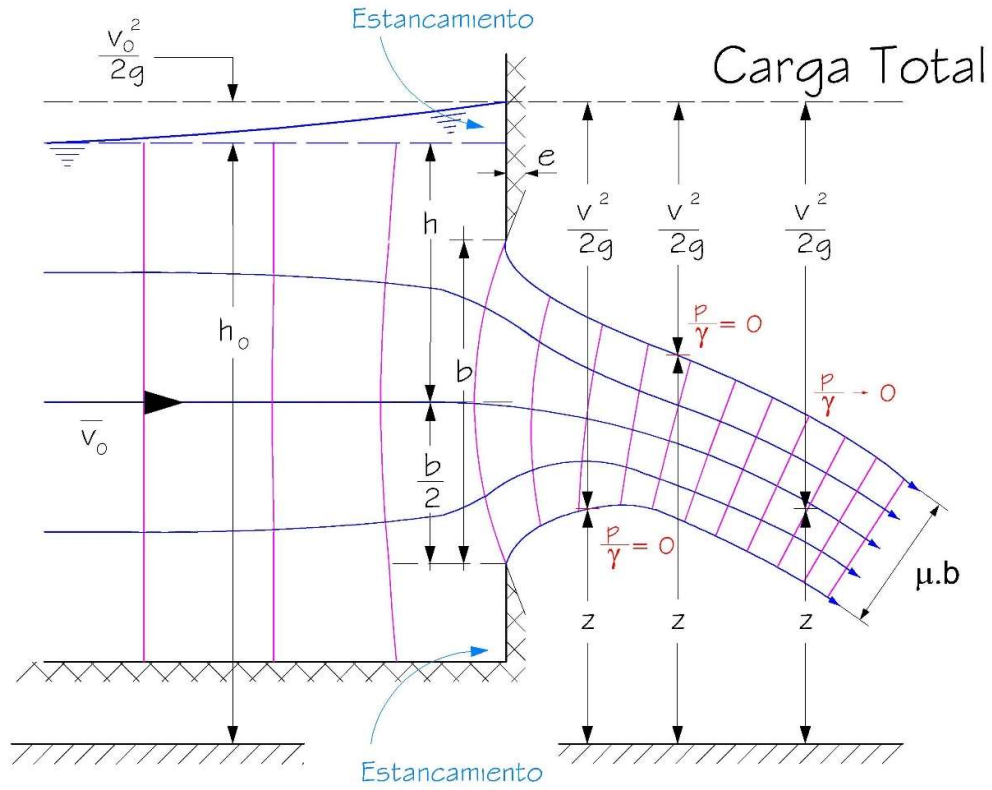


Figura 2.40

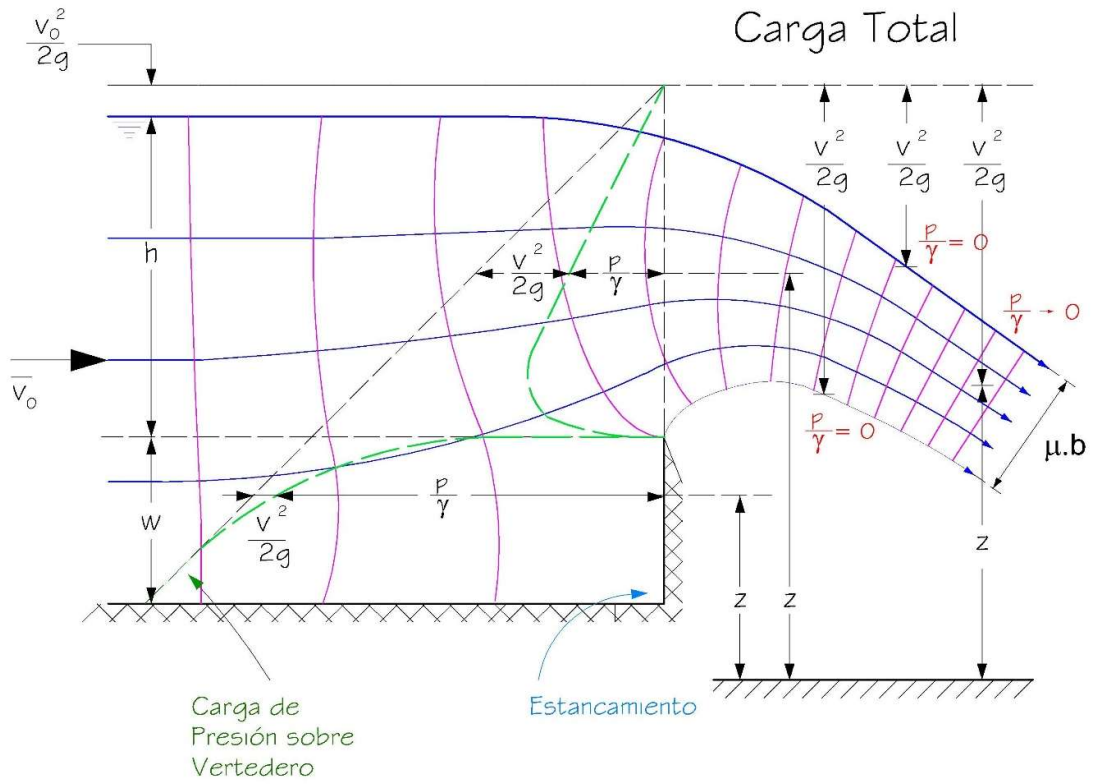


Figura 2.41

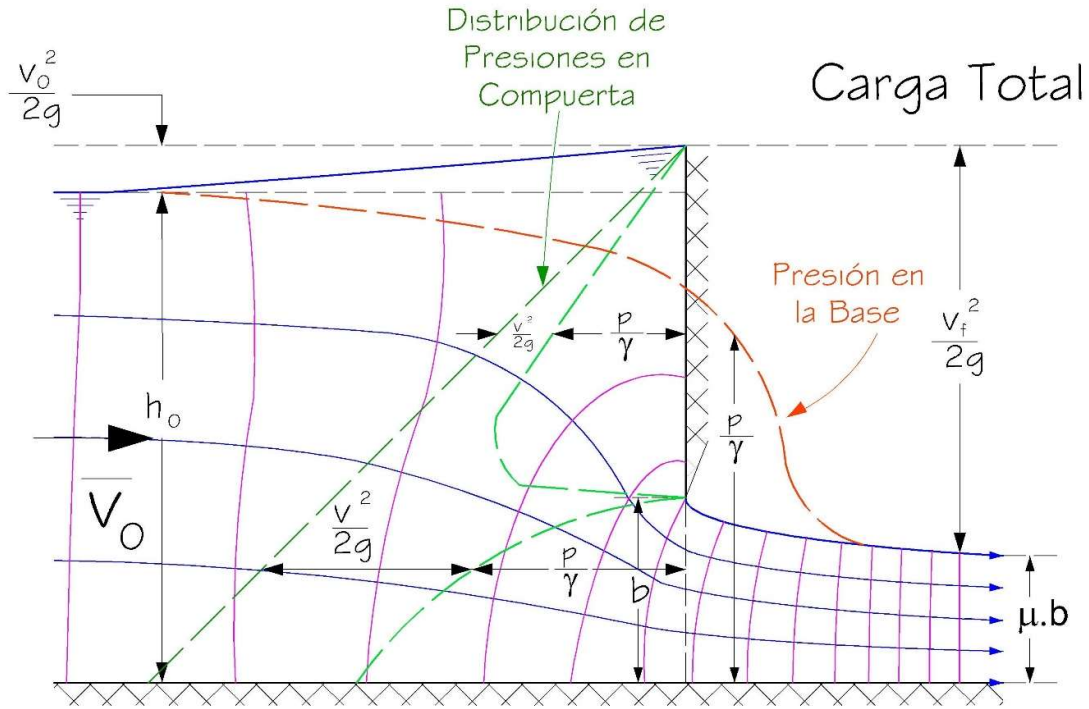


Figura 2.42. Rouse (1960)

4.8. Aplicación práctica del trazado de una red de corriente. Rouse (1960)

Si se trabaja con la red de corriente trazada en la Figura 2.36, a parte de la verificación gráfica de la ortogonalidad de las diagonales de las mallas cuadradas es posible determinar y graficar a escala el cociente entre la velocidad genérica V y la velocidad inicial V_0 para el tubo de flujo que más se deforma, que es el que experimenta mayor aceleración, tanto tangencial, como normal.

La relación de velocidades es inversamente proporcional a la relación de las distancias normales entre líneas de corriente o las distancias tangenciales entre las líneas del sistema normal.

$$\frac{V}{V_0} \cong \frac{\Delta n_0}{\Delta n} \cong \frac{\Delta s_0}{\Delta s}$$

Si se miden las sucesivas distancias Δs se pueden calcular los valores de las velocidades de acuerdo a la ecuación anterior. Tomando el tubo de flujo A de la Figura 2.36 y midiendo las distancias tangenciales entre líneas normales se obtienen los datos de la tabla siguiente:

Tubo de Flujo A	$\Delta s/\Delta s_0$	V/V_0	$(V/V_0)^2$	Tubo de Flujo A	$\Delta s/\Delta s_0$	V/V_0	$(V/V_0)^2$
1-2	1,000	1,000	1,000	8-9	0,463	2,160	4,665
2-3	1,010	0,990	0,980	9-10	0,416	2,404	5,778
3-4	1,030	0,971	0,943	10-11	0,448	2,232	4,982
4-5	1,080	0,926	0,857	11-12	0,484	2,066	4,269
5-6	1,340	0,746	0,557	12-13	0,495	2,020	4,081
6-7	1,030	0,971	0,943	13-14	0,500	2,000	4,000
7-8	0,588	1,701	2,892	14-15	0,500	2,000	4,000

Graficando la columna de la relación de velocidades elevadas al cuadrado a lo largo del tubo de flujo A, y progresivando los distintos segmentos de las mallas cuadradas que se incluyen en el mismo, se obtiene el gráfico de la Figura 2.43, el cual es adimensional, debido a que la red de corriente se determinó para cualquier caudal y tamaño de sección, ya que las proporciones del contorno no han cambiado.

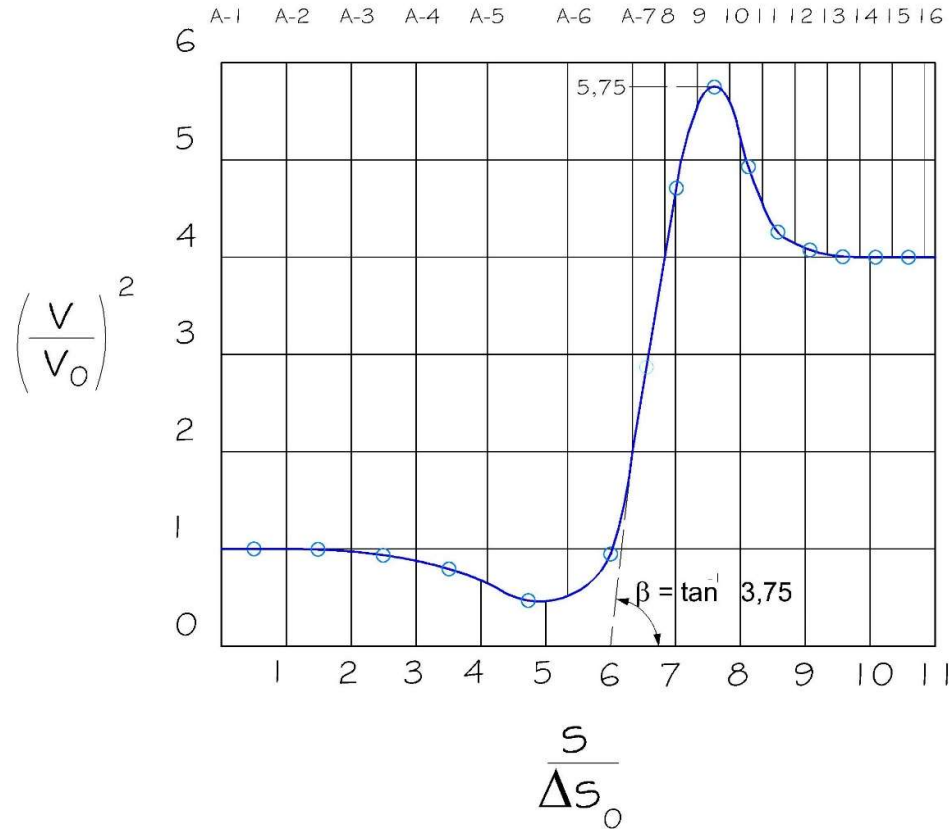


Figura 2.43. Rouse (1960)

El gráfico anterior permite calcular la aceleración tangencial máxima y la aceleración normal a lo largo del tubo de flujo A, y para ello se recuerda la ecuación de la aceleración referida a la terna intrínseca para movimiento permanente y aplicándola al gráfico, considerando que la derivada es igual a la $tg\beta$ que es la pendiente de la recta de mayor pendiente, y que da el mayor valor de la aceleración tangencial.

$$\bar{a} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} (V^2)\right) \hat{T} + \frac{V^2}{r} \hat{N}$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}{d\left(\frac{s}{\Delta s_0}\right)}\right]_{max} = \frac{\Delta s_0}{V_0^2} \left[\frac{dV^2}{ds}\right]_{max}$$

$$[a_t]_{max} = \frac{1}{2} \left[\frac{dV^2}{ds}\right]_{max} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\Delta s_0} tg\beta$$

Aplicando los valores obtenidos, suponiendo una velocidad inicial de 3m/s, un $n_0=3,6m$ y del gráfico una $tg\beta=3,75$ queda:

$$[a_t]_{MÁX.} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\Delta s_0} tg\beta = \frac{1}{2} \frac{9m^2/s^2}{n_0/6} 3,75 = 28,125m/s^2$$

Para la aceleración normal se debe medir el radio de curvatura del tubo de flujo A en la sección que más se deforma, ello ocurra entre las secciones 9 y 10, cuyo valor de relación de velocidades es de 5,75, y al cual le corresponde un radio de curvatura de 0,35 n_0

$$a_n = \underbrace{\frac{V^2}{r}}_{a_n} \hat{N} \Rightarrow V = 5,75V_0^2 \Rightarrow a_n = \frac{5,75(3m/s)^2}{0,35(3,6m)} = 41,071m/s^2$$

5. Referencias y Bibliografía

- Rouse, H. (1960). Mecánica Elemental de Fluidos. Madrid, España. Editorial Dossat SA.
- Giles, R. (1969). Mecánica de Fluidos e Hidráulica. Colombia. McGrawHill.
- Mataix y Plana, C (1986). Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas. Madrid, España. Ediciones del Castillo SA.
- Sotelo Ávila, G (1997). Hidráulica General. México. Editorial Limusa SA.
- Domínguez, F.J. (1999). Hidráulica. Santiago de Chile. Editorial Universitaria.
- Franzini, J & Finnemore, E (1999). Mecánica de Fluidos con aplicaciones en Ingeniería. España. Mc Graw Hill.
- Munson, B, Young, D & Okiishi, T (1999). Fundamentos de Mecánica de Fluidos. México. Limusa.
- Streeter, V. & Wylie, B. (1986). Mecánica de los Fluidos. México. Mc Graw Hill.