

Universidad Nacional de Cuyo - Facultad de Ingeniería

Hidráulica General

UNIDAD III

Líquidos en Movimiento

Profesora Titular: Patricia Susana INFANTE

Profesor Adjunto: Luis Enrique GUIASOLA

Profesora Adjunta: Sara RODRIGUEZ

Ayudante de Primera: Alejandra PUNTA

Estudiante Colaborador: Tomás Dionisio CARDOZO

Año 2021

Contenido. Movimiento laminar: frotamientos, número de Reynolds, tensión de corte hidráulico y pérdida de carga, ecuaciones del movimiento laminar, distribución de velocidad, factor de resistencia. **Movimiento turbulento:** rugosidad, tensión tangencial, cambio de régimen, experiencias de Nikuradse, estudio analítico de la turbulencia, experiencias de Fristch, longitud de mezcla, capa laminar parietal, teoría de Prandtl-Von Karman, ecuación universal de la velocidad, tuberías lisas y rugosas. **Capa límite:** concepto y aplicaciones.

ÍNDICE

III.	UNIDAD III	3
1.	Conceptos Generales.....	3
1.1	Clasificación del movimiento del agua según las fuerzas que predominan.....	3
1.2	Frotamientos	4
1.3	Viscosidad dinámica	4
1.4	Viscosidad cinemática.....	6
1.5	Número de Reynolds.....	6
1.6	Tensión de corte hidráulico y pérdida de carga	7
2.	Movimiento laminar	11
2.1	Distribución de velocidad	11
2.2	Cálculo del caudal.....	12
2.3	Cálculo de la velocidad media.....	13
2.4	Cálculo de la pérdida de energía unitaria J	13
2.5	Cálculo del factor de resistencia λ	14
2.6	Cálculo de la tensión tangencial parietal	15
2.7	Ejercitación sobre movimiento laminar	16
3.	Movimiento turbulento	22
3.1	Introducción	22
3.2	Estudio del movimiento turbulento.....	23
3.3	Rugosidad o aspereza de la pared de la tubería	25
3.4	Tensión tangencial en movimiento turbulento	28
3.5	Cambio de régimen	32
3.6	Experiencias de Nikuradse.....	34
3.7	Longitud de mezcla	36
3.8	Experiencias de Fristch	37
3.9	Estudio analítico de la turbulencia. Ecuación Universal de la velocidad	38
3.10	Capa laminar parietal	41
3.11	Teoría de Prandtl Von Karman.....	43
3.12	Ejercitación sobre Movimiento Turbulento.....	46
4.	Tablas	50
5.	Capa límite.....	51
6.	Referencias y Bibliografía	55

III. UNIDAD III

En un fluido en movimiento aparecen fuerzas que se oponen al mismo, cuya resultante tiene la misma dirección y, por supuesto, sentido contrario a dicho movimiento. Estas fuerzas son tangenciales y su magnitud está en función de la velocidad, se las denomina frotamientos hidráulicos (por similitud a los frotamientos en sólidos). Si el movimiento es laminar, de escurrimiento ordenado, es fácilmente aplicable esta analogía de frotamientos, mientras que, para el movimiento turbulento o desordenado, no resulta correcto emplear el concepto de rozamiento hidráulico, en este caso el estudio se basa en la energía perdida debido a la energía cinética en los remolinos típicos de este movimiento.

Se analiza, en el caso de movimiento laminar y turbulento, las características físicas y las ecuaciones que rigen a cada uno.

Además, se incluye el estudio del movimiento de un fluido respecto de un sólido en reposo, o viceversa, el movimiento de un sólido en el fluido en reposo (concepto de capa límite).

El objetivo de esta unidad de estudio, es preparar al estudiante en la comprensión del fenómeno físico del escurrimiento de fluidos en general, y en tuberías en particular, en el análisis de las fuerzas intervinientes en dicho movimiento, y en la influencia que tiene la viscosidad y el frotamiento en el mismo. También, formar el marco conceptual adecuado en los distintos tipos de movimientos que se producen en una canalización cerrada, con la finalidad de que pueda identificarlos, e identificar las variables independientes características de cada uno.

1. Conceptos Generales

1.1 Clasificación del movimiento del agua según las fuerzas que predominan

Según las fuerzas que predominan, existen dos regímenes de escurrimiento de los fluidos: laminar y turbulento.

El primero es característico de pequeñas corrientes y de bajas velocidades, es un escurrimiento ordenado. Las líneas de corriente, o superficies de corriente dividen el escurrimiento en una serie ordenada de láminas fluidas o capas, que se ajustan a la configuración del contorno.

El movimiento turbulento, en cambio, es totalmente desordenado.

Las experiencias de Reynolds (1883) permiten visualizar claramente estos dos tipos de movimientos. Básicamente el equipo utilizado por Reynolds consta de un depósito con agua en reposo, una tubería con una válvula en su extremo que permite regular el caudal de salida, y una boquilla para inyectar líquido colorante, ver Figura 3.1.

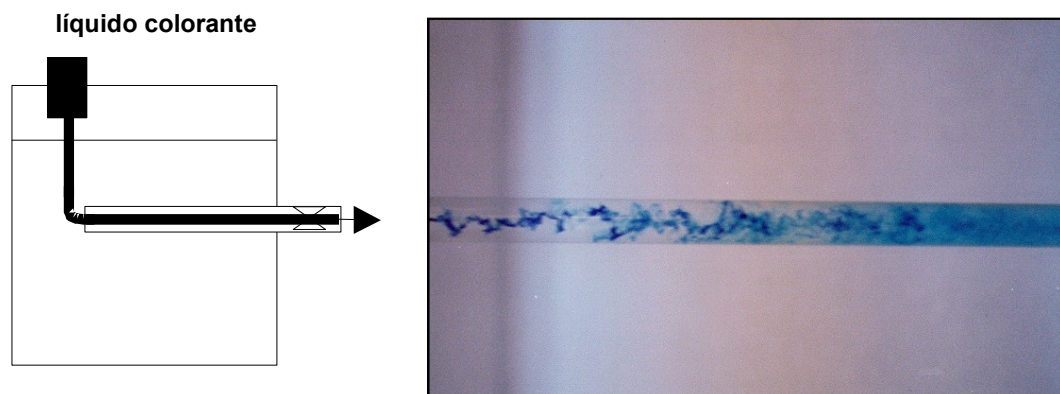


Figura 3.1. Experiencias de Reynolds (http://fluidos.eia.edu.co/hidraulica/laminar_turbulento.htm).

Al abrir la válvula, durante la salida de caudales bajos, y por lo tanto a bajas velocidades también, se observa un filamento coloreado, que pasa por el tubo sin ninguna perturbación. Este régimen continúa hasta que, al aumentar el caudal y la velocidad de salida, el filamento sufre pequeñas perturbaciones. Si la velocidad sigue creciendo las fluctuaciones aumentan también hasta que el líquido coloreado se difunde en todo el tubo, presentando entonces régimen turbulento.

1.2 Frotamientos

Si un fluido se deforma por la acción de una fuerza, aparecen fuerzas tangenciales de igual dirección a la primera, pero de sentido contrario que se oponen al movimiento. Estas fuerzas tangenciales son directamente proporcionales a la velocidad y se denominan frotamientos hidráulicos por la similitud conceptual con los frotamientos de los cuerpos sólidos.

Cuando el régimen de escurrimiento es ordenado, por capas, se puede hablar de frotamientos, que es el caso del movimiento laminar.

En el caso del movimiento turbulento, no se puede hablar de frotamientos, debido a que las pérdidas de energía se producen por los remolinos ubicados en toda la corriente. Estos remolinos varían de un punto a otro de la corriente y en tiempo. Las partículas siguen trayectorias sinuosas, sin una ley ni orden, es imposible seguir a una partícula, y la que un instante después ocupa el lugar de la primera seguirá una trayectoria diversa de aquélla. El vector velocidad, en un punto cualquiera, cambia de dirección y magnitud, en el espacio y en tiempo, pero coincide con la dirección y sentido general del movimiento.

1.3 Viscosidad dinámica

Viscosidad es la propiedad física de los líquidos de oponerse a su deformación. O también, la resistencia que oponen los fluidos a la variación de la velocidad de sus líneas de corriente.

Se utilizará la definición dada por Newton.

Isaac Newton: (4 de enero de 1643 Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra - 31 de marzo de 1727 (84 años) Kensington, Londres, Inglaterra) fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Autor de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en su obra *Opticks*) y el desarrollo del cálculo matemático.



Is. Newton

Newton desarrolló la siguiente hipótesis: Si se colocan dos placas paralelas (ver Figura 3.2), separadas una distancia "z" determinada, con líquido entre ambas, una fija y la otra es capaz de moverse en su plano, la fuerza necesaria para desplazar la placa móvil, a una velocidad determinada "u", se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$F = \omega \frac{u}{z} \mu \quad (3.1)$$

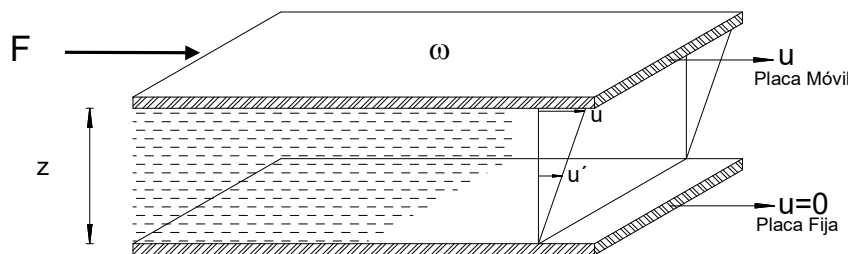


Figura 3.2. Definición de Viscosidad

Donde:

- F es la fuerza necesaria para el desplazamiento de la placa móvil
- u es la velocidad de la placa móvil
- z es la separación entre la placa móvil y la placa fija
- μ es la viscosidad del líquido encerrado por los dos planos
- ω es la superficie de los planos considerados

La Ecuación 3.1 indica que la fuerza es proporcional a la viscosidad del fluido, a la magnitud de la superficie y a la velocidad e inversamente a la distancia.

De la Ecuación 3.1 resulta que la viscosidad es igual a:

$$\mu = \frac{F z}{\omega u} \quad (3.2)$$

Entonces, la viscosidad resulta ser la fuerza necesaria a aplicar a una placa de superficie unitaria, para que ésta adquiera una velocidad unitaria cuando está separada una distancia unitaria de otra placa. Por lo tanto, si $z=1$, $\omega=1$, $u=1$, $\mu=F$.

Haciendo un análisis dimensional expresado en término de masa y de fuerza:

$$[\mu] = \frac{M L}{T^2} \frac{1}{L^2} \frac{L}{L} = \frac{M}{T L} = M T^{-1} L^{-1}$$

$$[\mu] = \frac{F L}{L^2 \frac{L}{T}} = \frac{F T}{L^2} = F T L^{-2}$$

Las unidades para cada sistema son:

En el Sistema CGS: $[\mu] = \frac{g}{cm s} = Poise$

En el Sistema Internacional: $[\mu] = \frac{N}{m^2 s} = Pa s$

En el Sistema Técnico: $[\mu] = \frac{kg}{m^2 s}$

La viscosidad varía con la temperatura, a mayor temperatura menor viscosidad, o sea que, es inversamente proporcional. Hagembach encontró la relación entre viscosidad y temperatura para el agua, en función de las experiencias de Poiseuille, Domínguez (1999):

$$\mu = \frac{0,0001814}{1 + 0,0337 t + 0,00022 t^2} \quad (3.3)$$

Expresada en $[\mu] = \frac{kg}{m^2 s}$, siendo t la temperatura en °C.

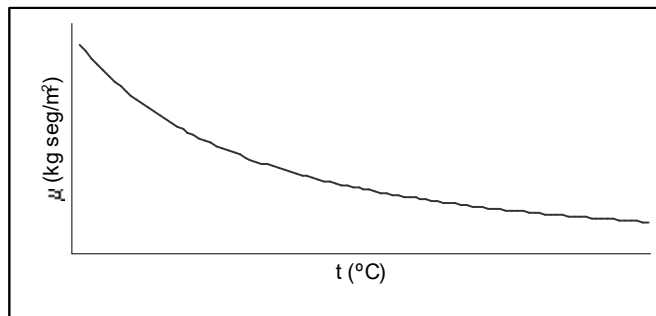


Figura 3.3. Variación de viscosidad respecto a temperatura en líquidos

La Figura 3.3 muestra como la viscosidad varía inversamente proporcional a la temperatura. Esto es válido sólo para los líquidos, pues en los gases la viscosidad aumenta con la temperatura.

1.4 Viscosidad cinemática

Para el cálculo de los parámetros hidráulicos del escurrimiento en tuberías es muy útil el uso de la viscosidad cinemática, la que se define como el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad del líquido.

$$\nu = \frac{\mu}{\delta} \quad (3.4)$$

Donde:

ν es la viscosidad cinemática del líquido
 μ es la viscosidad dinámica del líquido
 δ es la densidad del líquido

Para el análisis dimensional en función de la masa y de la fuerza:

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\delta]} = \frac{\frac{M}{TL}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{L^2}{T} = L^2 T^{-1}$$
$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\delta]} = \frac{\frac{FT}{L^2}}{\frac{FT^2}{L^4}} = \frac{L^2}{T} = L^2 T^{-1}$$

Se observa que ν es independiente del sistema de unidades en el cual se está trabajando, y es la principal ventaja de su uso frente a la viscosidad dinámica.

En el Sistema CGS: $[\nu] = \frac{cm^2}{s} = Stoke$

En el Sistema Internacional: $[\nu] = \frac{m^2}{s}$

En el Sistema Técnico: $[\nu] = \frac{m^2}{s}$

En los movimientos laminares o estratificados la “pérdida de energía”, o también llamada pérdida de carga, se debe a la viscosidad, mientras más viscoso sea un fluido pierde más energía a igualdad del resto de las condiciones de escurrimiento.

En cambio, en los movimientos turbulentos, la agitación de las partículas es mayor, la pérdida de energía depende de la energía cinética y la viscosidad pierde importancia relativa en dicho movimiento.

1.5 Número de Reynolds

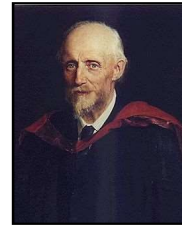
Resumiendo lo anterior, el movimiento laminar se caracteriza por poseer velocidades bajas, desarrollarse en pequeñas canalizaciones, manifestarse como un movimiento ordenado, poseer condiciones hidráulicas invariables en el tiempo y en el espacio y las pérdidas de energía o carga se deben a la viscosidad del fluido.

En cambio, el movimiento turbulento se desarrolla en canalizaciones de mayores dimensiones, con altas velocidades, se manifiesta como un movimiento desordenado y la inercia de la masa en movimiento es significativa.

De acuerdo a la condición que predomine, viscosidad o inercia, es el tipo de movimiento que presentará el fluido.

De esta manera nace el concepto de Número de Reynolds (Re), como el cociente entre la inercia de la masa fluida (movimiento turbulento) y de los frotamientos hidráulicos por viscosidad (movimiento laminar).

Osborne Reynolds (1842-1912), fue un ingeniero y físico irlandés que realizó importantes contribuciones en los campos de la hidrodinámica y la dinámica de fluidos, siendo la más notable la introducción en 1883, de un parámetro adimensional que permite diferenciar el movimiento laminar del turbulento, el cual en su honor, se lo ha bautizado como Número de Reynolds.



La importancia de las fuerzas de inercia se representa como el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad:

$$\underbrace{\delta L^3}_{\text{masa}} U^2$$

Siendo:

δ la densidad
U la velocidad media de la corriente
L longitud característica de la canalización
Dimensionalmente resulta así: $M L^2 T^{-2}$

Las fuerzas de viscosidad son proporcionales al producto de la viscosidad por la superficie por la velocidad. La energía perdida por la viscosidad del líquido, se obtiene multiplicando la fuerza de Newton (Ecuación 3.1) por la distancia:

$$F y = \omega U \mu$$

El segundo miembro se puede expresar como $L^2 U \mu$, dimensionalmente: $M L^2 T^{-2}$

El Reynolds (Re) se obtiene como el cociente entre ambas y se calcula como:

$$Re = \frac{\delta L^3 U^2}{\mu L^2 U} = \frac{L U}{\nu}$$
$$Re = \frac{L U}{\nu} \quad (3.5)$$

Un número de Reynolds grande indica el predominio del numerador (inercia de la masa fluida), en cambio un número de Reynolds pequeño, un denominador grande debido a la importancia de la viscosidad.

En la Ecuación 3.5 la dimensión "L" implica una dimensión característica de la canalización, que para el caso de las tuberías es el diámetro de la misma, "D".

La expresión del Número de Reynolds para tuberías es:

$$Re = \frac{U D}{\nu} \quad (3.6)$$

El Número de Reynolds se calcula como el producto de la velocidad media de la canalización, por el diámetro de la tubería y dividido la viscosidad cinemática del fluido.

1.6 Tensión de corte hidráulico y pérdida de carga

Recordando la definición de viscosidad según Newton (Ecuación 3.1), la fuerza de frotamiento debida a la viscosidad es una fuerza que actúa en la superficie de separación de los tubos de corriente y es proporcional a la superficie de dicho tubo de corriente.

La fuerza por unidad de superficie da origen a la “Tensión de Corte Hidráulico”, que es una tensión tangencial contenida en el plano bajo estudio:

$$\tau = \frac{F}{\omega}$$

La Figura 3.4 representa un esquema de las tensiones tangenciales.

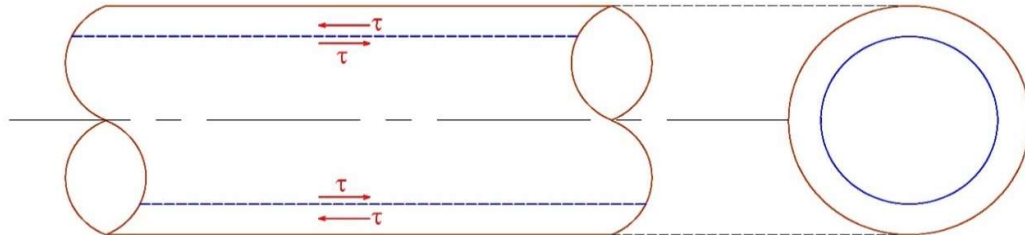


Figura 3.4. Tensiones tangenciales en un tubo de corriente

El siguiente análisis muestra la relación entre la tensión tangencial y la pérdida de carga. Ya que la tensión tangencial es la evidencia de la resistencia del fluido, y la pérdida de carga es la consecuencia de la misma, se necesita encontrar una expresión matemática que relacione la causa y el efecto.

Se realiza un análisis de las fuerzas que actúan en una corriente cerrada de forma cualquiera, en movimiento permanente y uniforme. Para lo cual, se analiza una porción de una tubería con un líquido en su interior en movimiento, y al separar esa porción del total, para que se encuentre en equilibrio, se deben colocar las acciones que el resto de la tubería ejerce sobre esa parte, así aparecen las presiones en cada una de las secciones extremas que indican la acción del resto del fluido sobre esa porción de tubería.

Los vectores velocidad media “U” actuando en el baricentro de cada sección transversal y el peso propio de esa porción fluida encerrada entre las dos secciones extremas. Todas estas magnitudes pueden verse en la Figura 3.5.

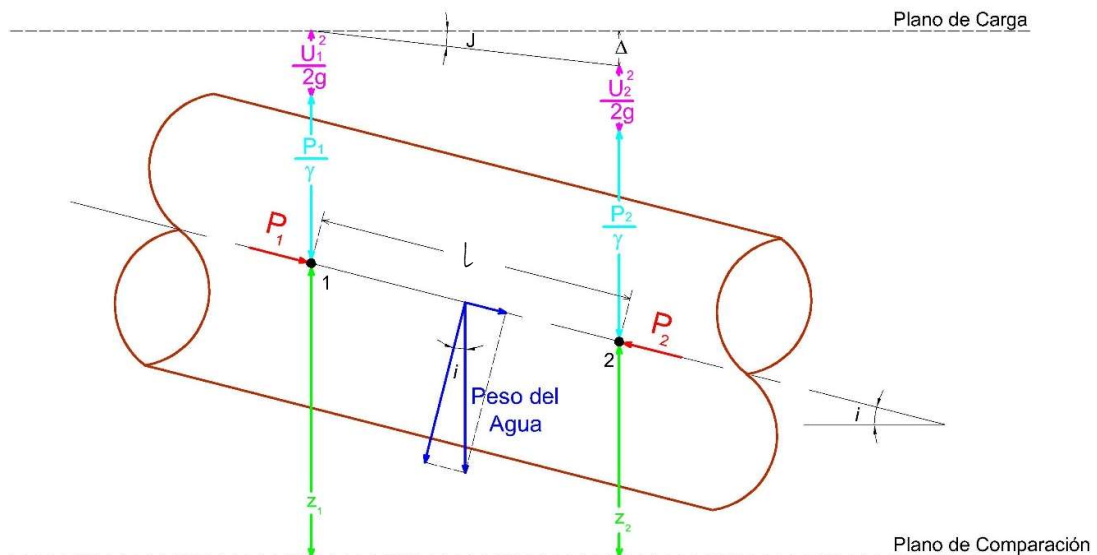


Figura 3.5. Fuerzas en una tubería

Aplicando el Teorema de Bernoulli entre las dos secciones dadas, la ecuación es la siguiente:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta$$

Donde:

z es la cota de posición de ambas secciones

p/γ es la cota de presión de ambas secciones

$U^2/2g$ es la altura de velocidad de ambas secciones

Δ es la pérdida de energía entre las dos secciones dadas, para que pueda circular el caudal Q

La pérdida de energía se expresa también con el producto de una pérdida de carga uniformemente distribuida, por unidad de peso y longitud multiplicada por la longitud del tramo:

$$\Delta = J l$$

Como $U_1 = U_2 = U = \text{constante}$, por ser Movimiento Permanente Uniforme (M.P.U.), entonces la diferencia de las cotas piezométricas es la pérdida de carga.

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = J l \quad (3.7)$$

Se realiza la sumatoria de fuerzas actuantes paralelas al eje hidráulico de la canalización. El eje hidráulico es la línea que une los baricentros de las sucesivas secciones transversales. Las distintas fuerzas actuantes son:

- La componente del peso propio del agua en la dirección del movimiento.
- Las fuerzas originadas por las presiones en cada una de las dos secciones transversales extremas, son fuerzas colineales y de sentido contrario.
- Fuerzas que se oponen al movimiento tratando de retardarlo, causadas por el frotamiento del líquido.

El peso del líquido encerrado por las dos secciones transversales dadas, tiene dirección vertical descendente, el valor es el producto del peso específico por el volumen de agua (la longitud del tramo por la sección transversal de la tubería):

$$\text{Peso} = \gamma l \Omega$$

La componente del peso en la dirección del movimiento es el producto del peso por el seno del ángulo del eje hidráulico de la tubería respecto de la horizontal (i).

$$\text{Componente Peso en dirección movimiento} = \gamma l \Omega \text{ sen } i \cong \gamma l \Omega i$$

Donde:

γ es el peso específico del agua

Ω es la sección transversal de la canalización cerrada

i es la inclinación de la canalización cerrada

l es la separación entre las secciones a analizar

Si p_1 y p_2 son las presiones que actúan en las caras terminales, aplicadas en los centros de gravedad de las mismas. Las fuerzas resultan igual al producto de la presión por la superficie de la sección en la que están aplicadas.

$$F_1 = p_1 \Omega_1 \text{ y } F_2 = p_2 \Omega_2$$

Como es MPU, la sección se mantiene constante:

$$\Omega_1 = \Omega_2$$

En cuanto a las fuerzas retardadoras debidas al frotamiento, en cada tubo de flujo aparecen estas fuerzas de frotamiento, pero entre filete y filete se anulan por ser de igual intensidad y dirección, pero de distinto sentido, como lo muestra la Figura 3.4. La única fuerza de

frotamiento no equilibrada es la que actúa en la pared de la tubería. La fuerza se calcula como el producto de la tensión de corte hidráulico (τ) por la superficie donde actúa.

Esta superficie es la superficie mojada de la tubería en el tramo analizado, y es el área lateral de un cilindro de sección transversal Ω y longitud "l". Se calcula como el perímetro mojado de la sección transversal por la longitud del cilindro: χl , siendo χ el perímetro mojado, que en el caso de la tubería es la circunferencia interior.

Entre la sección 1 y 2 se toma una tensión tangencial de frotamiento medio τ_0 . El subíndice "0" indica que es la tensión ubicada en la pared de la tubería. La fuerza resultante es entonces igual a: $\tau_0 \chi l$

La sumatoria de las fuerzas en el eje hidráulico de la tubería se iguala a cero para verificar el equilibrio de las fuerzas actuantes, obteniendo la siguiente expresión:

$$(p_1 - p_2) \Omega + \gamma l \Omega \text{sen } i - \tau_0 \chi l = 0$$

Si se observa la Figura 3.5, el producto de la longitud del tramo por el "sen i" es la diferencia de cotas entre los baricentros de las dos secciones transversales analizadas, de modo que se puede reemplazar la siguiente expresión: $l \text{sen } i = z_1 - z_2$

Además si dividimos por $\gamma \times \Omega$, queda:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{\tau_0 \chi l}{\gamma \Omega}$$

Recordando Ecuación 3.7, se puede reemplazar el primer miembro de la igualdad por el producto de la pérdida de energía unitaria por la longitud de la tubería, obteniendo la ecuación siguiente:

$$Jl = \frac{\tau_0 \chi l}{\gamma \Omega}$$

El cociente entre la superficie y el perímetro mojado se denomina "Radio Hidráulico" y se simboliza " R_H ": $R_H = \frac{\Omega}{\chi}$

Reemplazando:

$$\tau_0 = R_H \gamma J \tag{3.8}$$

Expresión que indica el valor de la tensión tangencial por frotamientos hidráulicos, o Tensión de Corte Hidráulico, en la vecindad con la pared de la tubería.

Si reemplazamos el valor del radio hidráulico para el caso de tuberías:

$$R_H = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4 \pi D} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

Entonces la Ecuación 3.8 se expresa como:

$$\tau_0 = \frac{R}{2} \gamma J \tag{3.9}$$

Si se hace un análisis análogo para encontrar la expresión de la tensión de corte hidráulico por los frotamientos hidráulicos en un tubo de flujo de radio r , se llega a la expresión siguiente:

$$\tau = \frac{r}{2} \gamma J \tag{3.10}$$

Comparando las Ecuaciones 3.9 y 3.10, se obtiene la relación entre la tensión de corte hidráulico en la pared de la tubería (τ_0) y la tensión de corte hidráulico en cualquier tubo de flujo de radio genérico "r" (τ):

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} \quad (3.11)$$

La expresión anterior indica que las tensiones de corte hidráulico siguen una ley de variación lineal, presentando el máximo valor en las paredes, y cero en el eje hidráulico de la tubería, según puede observarse en la Figura 3.6.

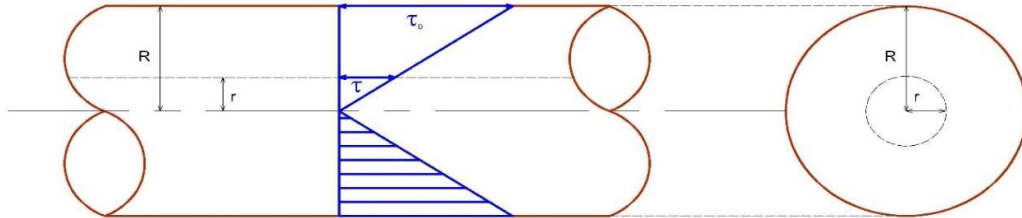


Figura 3.6. Variación de la Tensión de Corte hidráulico en la sección transversal de una tubería

En función de la ecuación de la tensión de corte hidráulico (Ecuación 3.10), se deducen las ecuaciones que rigen el movimiento laminar y todos sus parámetros característicos.

2. Movimiento laminar

Ya definidas las características físicas del movimiento laminar y las magnitudes predominantes, se procede a encontrar las ecuaciones que relacionan las distintas variables de cálculo.

2.1 Distribución de velocidad

Para encontrar la ley de variación de la velocidad en la sección transversal de una tubería bajo régimen laminar, se trabaja con dos ecuaciones, la Ecuación 3.10 y la Ecuación 3.1.

$$F = \omega \frac{u}{z} \mu \quad (3.1)$$

$$\tau = \frac{r}{2} \gamma J \quad (3.10)$$

La Ecuación 3.1 se puede expresar en función de la tensión de corte hidráulico:

$$\tau = \frac{F}{\omega} = \frac{u}{z} \mu \quad (3.12)$$

Aplicada en una tubería y considerando la nomenclatura utilizada, la variable “z” (distancia de la línea de corriente al centro de la tubería) debe reemplazarse por el radio de un tubo de flujo estudiado, simbolizado con la letra “r”. Además, la variación de la velocidad respecto del radio, debe expresarse como la derivada respecto de “r”, entonces la ecuación se transforma en:

$$\tau = -\frac{du}{dr} \mu$$

El signo negativo, indica que al aumentar el radio la velocidad disminuye, a medida que nos alejamos del centro de la tubería el radio aumenta y la velocidad disminuye.

Igualando las tensiones de corte hidráulico de Ecuación 3.10 y 3.12:

$$-\frac{du}{dr} \mu = \frac{r}{2} \gamma J$$

Al despejar “du” e integrar para encontrar la función velocidad en cada línea de corriente, deben definirse los límites de integración.

El extremo inferior de integración se encuentra en una línea de corriente genérica dentro de la tubería, la cual se encuentra ubicada en el radio r y tiene una velocidad u , o sea que, cuando $u=u$, el radio $r=r$.

El extremo superior de integración se da en el borde interno de la tubería, la cual se encuentra ubicada en el radio de la tubería y allí la velocidad es cero, o sea que, cuando $u=0$, el radio $r=R$. Remplazando estos extremos en la ecuación nos queda:

$$\int_u^0 du = \frac{\gamma J}{2\mu} \int_r^R r dr$$

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (3.12)$$

Expresión que indica una ley de variación cuadrática de la velocidad en función del radio de una canalización cerrada bajo movimiento laminar.

Para encontrar la velocidad máxima, se reemplaza $r=0$, o sea, el centro de la tubería, ubicación en la cual la velocidad es máxima:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{\gamma J}{4\mu} R^2 \quad (3.13)$$

La Figura 3.7 a) muestra la distribución de velocidades cuadrática o parabólica. Mientras que en la figura b) se observa el desplazamiento relativo de un tubo de flujo respecto del siguiente en tres dimensiones, es un movimiento "telescópico". Puede verse fácilmente que en las superficies de contacto entre filetes que no intercambian partículas, es donde se producen los frotamientos debido a las fuerzas de viscosidad y, por lo tanto, las pérdidas de energía.

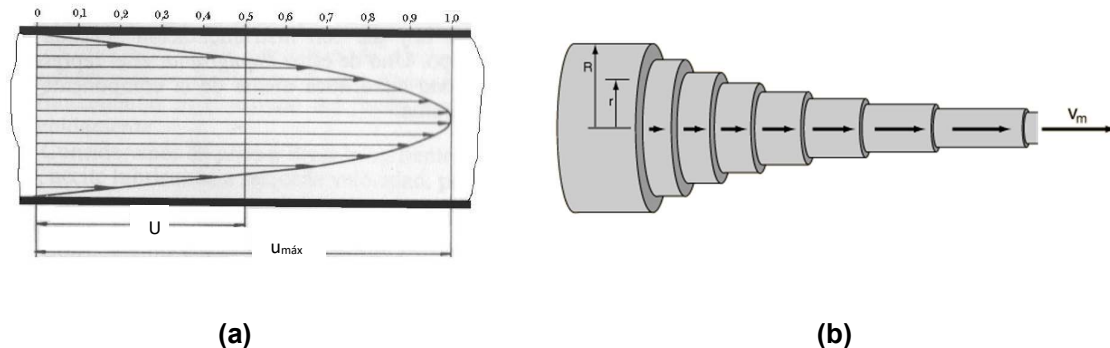


Figura 3.7. a) Distribución parabólica de velocidades, U es la velocidad media y $u_{m\acute{a}x}$ la velocidad máxima. Fuente: (Mataix, 1986, pág. 192), b) desplazamiento ordenado en capas anulares concéntricas. Fuente: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/pfric.html>

2.2 Cálculo del caudal

El caudal se calcula como el producto de la velocidad instantánea por la sección transversal. En el caso de una tubería circular la sección transversal es la sección de un círculo de radio genérico "r":

$$\Omega = \pi r^2$$

Entonces el diferencial de superficie resulta de diferenciar la expresión anterior:

$$d\Omega = 2\pi r dr$$

El caudal se calcula con el producto de la velocidad instantánea por el diferencial de superficie.

$$Q = u d\Omega$$

Reemplazando la velocidad instantánea (Ecuación 3.13):

$$Q = 2\pi \frac{\gamma J}{4\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi \gamma J}{128\mu} D^4$$

$$Q = \frac{\pi \gamma J}{128\mu} D^4 \quad (3.14)$$

2.3 Cálculo de la velocidad media

Para el cálculo de la velocidad media U , se hace el cociente entre el caudal y la sección total de la tubería, obteniéndose la expresión siguiente:

$$U = \frac{\pi \gamma J}{128\mu} D^4 \frac{4}{\pi D^2} = \frac{\gamma J}{32\mu} D^2$$

$$U = \frac{\gamma J}{32\mu} D^2 \quad (3.16)$$

Expresado en función del radio de la tubería:

$$U = \frac{\gamma J}{8\mu} R^2 \quad (3.17)$$

Comparando la Ecuación 3.14 con la Ecuación 3.17, se puede concluir que la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima.

$$U = \frac{u_{m\acute{a}x}}{2} \quad (3.18)$$

La Figura 3.7 muestra la velocidad media en el perfil de velocidades y su relación con la velocidad máxima.

La ubicación de la velocidad media en la sección transversal se obtiene igualando las Ecuaciones 3.13 y 3.17, y despejando el valor de "r" correspondiente:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\gamma J}{4\mu} (R^2 - r^2) \\ U &= \frac{\gamma J}{8\mu} R^2 \end{aligned} \right\} \frac{(R^2 - r_U^2)}{4} = \frac{1}{2} R^2$$

$$r_U = \sqrt{\frac{1}{2}} R = 0,707 R \quad (3.19)$$

O sea que, la velocidad media se encuentra a una distancia del 0,71 R desde el centro de la tubería hacia afuera, ó 0,29 R desde el borde de la tubería hacia el interior de la misma.

2.4 Cálculo de la pérdida de energía unitaria J

De la Ecuación 3.16, expresada en función del diámetro, se despeja el valor de J y se obtiene la expresión siguiente:

$$U = \frac{\gamma J}{32\mu} D^2$$

$$J = 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} = \frac{32}{g} \frac{\nu U}{D^2} = 3,27 \frac{\nu U}{D^2}$$

$$J = 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} \quad (3.20)$$

2.5 Cálculo del factor de resistencia λ

La pérdida de carga o de energía Δ , también puede expresarse como el producto de un factor de resistencia adimensional “ λ ” multiplicado por la altura de velocidad de la tubería.

$$\Delta = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (3.21)$$

Realizando el análisis dimensional de la Ecuación 3.21, la altura de velocidad tiene dimensiones de longitud, mientras que Δ también, de modo que se concluye que λ es adimensional.

La ecuación que relaciona el factor de resistencia λ con la pérdida de energía unitaria J es la Ecuación de Darcy-Weisbach.

Esta ecuación tiene sus antecedentes en los trabajos de Gaspard Clair François Marie Riche de Prony matemático e ingeniero francés (1755-1839) que trabajó en hidráulica. En 1798 sucedió a Chézy en la dirección de la École Nationale des Ponts et Chaussées (Escuela Nacional de Puentes y Caminos). En 1812 recibió la medalla de oro del papa León XII por su trabajo en el saneamiento de la marisma Pontins (en Italia).

La ecuación empírica de Prony es una ecuación históricamente importante empleada en hidráulica para calcular la pérdida de carga de un fluido debida a la fricción dentro de una tubería cuya expresión era:

$$h_f = \frac{l}{D} (aU + bU^2)$$

Donde h_f es la pérdida de carga debida a la fricción, l/D es la relación entre la longitud y el diámetro de la tubería, U es la velocidad del fluido por la tubería siendo “a” y “b” dos factores empíricos. En la hidráulica moderna esta ecuación ha perdido importancia siendo sustituida por la ecuación de Darcy-Weisbach, quienes la utilizaron como punto de partida.



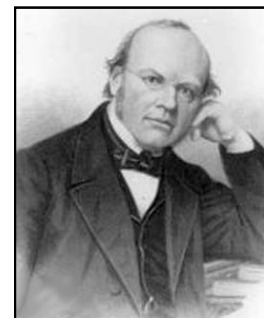
La Ecuación de Darcy-Weisbach tiene la expresión siguiente:

$$JD = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (3.22)$$

Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858), más conocido como Darcy, fue un especialista en Hidráulica francés, graduado como ingeniero de Puentes y Caminos. Es uno de los pioneros modernos en el abastecimiento de agua potable. Transformó a la ciudad de Dijon en la segunda ciudad europea en lo que se refiere a abastecimiento de agua, después de Roma. La Ley de Darcy describe, con base en experimentos de laboratorio, las características del movimiento del agua a través de un medio poroso.



Julius Weisbach (1806-1871). Nació en Alemania, y durante su juventud quiso estudiar, pero la pobreza de su familia no se lo permitió, fue por eso que comenzó a trabajar con Friedrich Mohs en la universidad de Göttingen, Mohs fue un famoso mineralogista alemán que descubrió una escala para medir la dureza de un mineral, cuando Mohs se trasladó a Viena, Weisbach lo siguió, allí pudo estudiar matemáticas, física y mecánica. A lo largo de su vida fue profesor de matemáticas y mineralogía, a mediados de 1835, empieza a interesarse por la hidráulica, ciencia que abarcó sus más importantes trabajos. Sus escritos aparecen en más de 40 libros, pero los de mayor influencia fueron los de la hidráulica, que tienen tanta importancia que se siguieron usando sus descubrimientos a través del siglo XX y XXI



La Ecuación 3.22 también permite expresar la pérdida de carga total (h_f) de la longitud l de la tubería:

$$h_f = \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (3.23)$$

Reemplazando el valor de J de la Ecuación 3.20 en la Ecuación 3.22, se puede despejar el factor de resistencia λ , considerando la expresión del Re:

$$\begin{aligned} \left(32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2}\right) D &= \lambda \frac{U^2}{2g} \\ \lambda &= \frac{64 \mu}{D U \delta} = \frac{64}{Re} \\ \lambda &= \frac{64}{Re} \end{aligned} \quad (3.24)$$

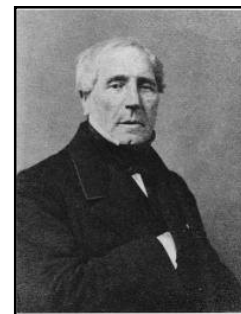
En movimiento laminar, el factor de resistencia λ es inversamente proporcional al número de Reynolds.

Esta fórmula también se puede reemplazar en la Ecuación 3.23, considerando que la pérdida de energía h_f para una tubería horizontal es la diferencia de energía de presión entre dos puntos de la tubería:

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{\Delta p}{\gamma} = \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{64}{UD} \nu \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} \\ \Delta p &= \frac{64}{D^2} \frac{\gamma}{g} \nu l \frac{U}{2} = \frac{64}{2D^2} \frac{\delta \nu l}{\mu} \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{32}{D^4} \mu l \frac{4Q}{\pi} \\ \Delta p &= \frac{32}{(2R)^4} \mu l \frac{4Q}{\pi} \\ \Delta p &= \frac{8}{R^4} \mu l \frac{Q}{\pi} \end{aligned} \quad (3.25)$$

La Ecuación 3.25 se conoce como "Ecuación de Poiseuille".

Jean Léonard Marie Poiseuille (1799-1869) fue un médico fisiólogo francés que experimentó un largo periodo de su vida durante la transición de la primera revolución industrial a la segunda revolución industrial. Es considerado como uno de los científicos de Francia más influyentes después de Antoine Lavoisier y Louis Pasteur. En 1838 demostró experimentalmente y formuló subsiguientemente en 1840 y 1846 el modelo matemático más conocido atribuido a él. La ley de Poiseuille, que posteriormente llevaría el nombre de otro científico (Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen) que paralelamente a él, también enunció la misma ecuación.



2.6 Cálculo de la tensión tangencial parietal

Se puede calcular la tensión tangencial parietal (τ_0) reemplazando la pérdida de carga unitaria J y el R_H en la Ecuación 3.8:

$$\tau_0 = \gamma R_H J = \gamma \frac{D}{4} 32 \frac{\mu U}{\gamma D^2}$$

$$\tau_0 = 8\mu \frac{U}{D} \quad (3.26)$$

2.7 Ejercitación sobre movimiento laminar

Ejercicio 3.1

Calcular la velocidad media, la pérdida de carga unitaria, el factor de resistencia, el caudal, la velocidad máxima, la expresión general de la tensión de corte y la tensión de corte en la pared, de un Movimiento Laminar con un $Re = 1350$, en un conducto de 3 mm de diámetro y con agua a 5 °C ($\nu = 1,519 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$)

Cálculo de la velocidad media U

$$Re = \frac{D U}{\nu}$$

$$U = \frac{Re \nu}{D} = \frac{1350 \times 1,519 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{0,003 \text{ m}} = 0,68 \text{ m/s}$$

$$U = 0,68 \text{ m/s}$$

Cálculo de la pérdida de carga J

$$J = 32 \frac{\mu U}{\gamma D^2} = 32 \frac{\mu U}{\delta g D^2} = 3,27 \frac{\nu U}{D^2} = 3,27 \frac{1,519 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times 0,684 \text{ m/s}}{(0,003 \text{ m})^2} = 0,38 \text{ m/m}$$

$$J = 0,38 \text{ m/m}$$

Cálculo de Factor de resistencia λ

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1350} = 0,047$$

$$\lambda = 0,047$$

Cálculo de Caudal Q

$$Q = \frac{\pi \gamma J}{128 \mu} D^4 = \frac{\pi \delta g J}{128 \delta \nu} D^4 = \frac{\pi g J}{128 \nu} D^4 = \frac{\pi \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0,38}{128 \times 1,519 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \times (0,003 \text{ m})^4 = 4,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 4,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,0049 \frac{\text{l}}{\text{s}} = 4,9 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Cálculo de velocidad máxima u_{max}

$$u_{m\acute{a}x} = 2 U = 0,68 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 2 = 1,37 \text{ m/s}$$

$$u_{m\acute{a}x} = 1,37 \text{ m/s}$$

Cálculo de la tensión de corte hidráulico

$$\tau_0 = \frac{R}{2} \gamma J = \frac{D}{4} \gamma J = \frac{0,003 \text{ m}}{4} \times 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times 0,38 = 0,28 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} = 0,28 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^2} \times \frac{r}{0,0015m} = 187 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^3} \times r$$

$$\tau_0 = 0,28 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^2} \quad \tau = 187 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^3} \times r$$

Verificación del caudal por medio de la Ecuación de Continuidad

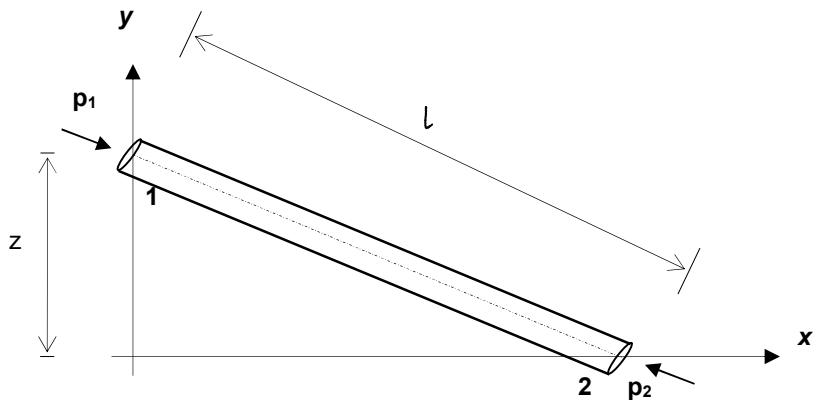
$$Q = U \Omega = \frac{0,68m}{s} \times \frac{\pi \times (0,003m)^2}{4} = 4,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{s}$$

Verificación de la velocidad media por medio de la ecuación en función de J

$$U = \frac{\gamma J}{32 \mu} D^2 = \frac{g J}{32 \nu} D^2 = \frac{9,81 \frac{m}{s^2} \times 0,38}{32 \times 1,519 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} \times (0,003 m)^2 = 0,68 m/s$$

Ejercicio 3.2

Determinar la dirección del flujo laminar de agua que circula por un tubo de 3 mm de diámetro, como el que se muestra en la figura. El desnivel entre el punto 1 y 2 es de 2,30 m, y la longitud entre estos puntos es de 50 m. La presión en el punto 1 es de 4,7 kgf/cm² y en el punto 2 de 5,7 kgf/cm². La temperatura del agua



es de 27 °C, la densidad es de 996,57 kg/m³. Determinar también la pérdida de carga unitaria, el caudal, la velocidad media, Re y el factor de resistencia λ .

Cálculo de la dirección de flujo

Aplicando Bernoulli entre las secciones 1 y 2

$$B_1 = z_1 + \underbrace{\frac{p_1}{\gamma}}_{CP_1} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$$

$$B_2 = z_2 + \underbrace{\frac{p_2}{\gamma}}_{CP_2} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}$$

Como el caudal es constante:

$$U_1 = U_2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$CP_1 = 2,3 + \frac{4,7 \frac{\overrightarrow{kgf}}{cm^2} \times 10^4 cm^2}{996,57 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^3} \times 1 cm^2} = 49,46 m$$

$$CP_2 = 0 + \frac{5,7 \frac{\overrightarrow{kgf}}{cm^2} \times 10^4 cm^2}{996,57 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^3} \times 1 cm^2} = 57,20 m$$

como $CP_2 > CP_1 \therefore B_2 > B_1$ el FLUJO ES ASCENDENTE

$$\Delta B = CP_2 - CP_1 = 7,7 m$$

Verificación de Movimiento Laminar

Cálculo de pérdida de carga unitaria J

$$J = \frac{\Delta h}{l} = \frac{7,7m}{50m} = 0,15$$

Cálculo de velocidad media U

Si es movimiento laminar, la velocidad media se calcula como:

$$U = \frac{\gamma J}{32 \mu} D^2 = \frac{996,57 \frac{\overrightarrow{kgf}}{m^3} \times 0,154}{32 \times 0,0000876 \frac{\overrightarrow{kg s}}{m^2}} \times (0,003m)^2 = 0,49 m/s$$

El valor de la viscosidad puede adoptarse de tablas o calcularse mediante ecuaciones de $\mu = f(T)$, ver página 4.

$$\mu = \frac{0,0001814}{1 + 0,0337 (27) + 0,00022 (27)^2} = 8,76 \cdot 10^{-5} \overrightarrow{kgf s/m^2}$$

$$v = \frac{\mu}{\delta} = \frac{8,76 \cdot 10^{-5} \frac{\overrightarrow{kgf s}}{m^2} \times \frac{1 kg \times 9,81 \frac{m}{s^2}}{\overrightarrow{kg}}}{996,57 \frac{kg}{m^3}} = 8,62 \cdot 10^{-7} m^2/s$$

$$Re = \frac{D U}{v} = \frac{0,003m \times 0,493m/s}{8,62 \cdot 10^{-7} m^2/s} = 1722$$

Como Re es menor a 2000 el movimiento es Laminar, entonces:

$$J = 0,15 m/m$$

$$U = 0,49 m/s$$

Cálculo de Caudal

$$Q = U \Omega = 0,493 \frac{m}{s} \times \frac{\pi \times (0,003m)^2}{4} = 3,48 \cdot 10^{-6} \frac{m^3}{s}$$

Cálculo de factor λ

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1715} = 0,037$$

$$\lambda = 0,037$$

Se verifica el caudal con la fórmula de movimiento laminar.

$$Q = \frac{\pi \gamma J}{128 \mu} D^4 = \frac{\pi \times 996,57 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times 0,154}{128 \times 8,76 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}} \times (0,003\text{m})^4 = 3,48 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Ejercicio 3.3

Considerando que el movimiento de aceite en una tubería es laminar con una viscosidad de $1,73\text{Ns/m}^2$ y el diámetro es de $0,20\text{m}$, con una distribución parabólica y una $u_{\text{máx}}=3,6\text{m/s}$ en el centro de la tubería. Calcular la tensión de corte hidráulico en la pared de la tubería y la tensión a una distancia de 5 cm desde la pared hacia el interior de la tubería ($z=0,05\text{m}$).

Cálculo de la tensión de corte en la pared

Se aplica la Ecuación 3.26

$$\tau_0 = 8 \mu \frac{U}{D}$$

La tensión de corte es función de la viscosidad dinámica, diámetro y velocidad media. Los dos primeros son datos, por lo tanto, debe determinarse la velocidad media:

$$U = \frac{u_{\text{máx}}}{2} = \frac{3,6 \text{ m/s}}{2} = 1,8 \text{ m/s}$$

Reemplazando:

$$\tau_0 = 8 \mu \frac{U}{D} = 8 \times 1,73 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \times \frac{1,8 \text{ m/s}}{0,20\text{m}} = 124,56 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_0 = 124,56 \text{ N/m}^2$$

Cálculo de tensión de corte a una distancia de 5cm desde la pared

Si el radio es de 10 cm y la distancia desde el borde al filete es de 5cm :

$$r = R - z = 0,10\text{m} - 0,05\text{m} = 0,05\text{m}$$

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R}$$

$$\tau_{0,05} = 124,56 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{0,05 \text{ m}}{0,10 \text{ m}} = 62,28 \text{ N/m}^2$$

$$\tau_{0,05} = 62,28 \text{ N/m}^2$$

Ejercicio 3.4. Valiente Bardera (2002)

Un aceite fluye en régimen laminar en una tubería de 2cm de diámetro con un caudal de 23l/min . La viscosidad dinámica del aceite es de $0,3\text{Pa s}$ y su densidad de $0,93\text{kg/l}$. Calcular la pérdida de carga por metro de tubería, la tensión de corte en la pared, la velocidad máxima, la velocidad a una distancia desde el eje igual a la mitad del radio y la distancia en que se produce la velocidad media. Adaptado de Ejercicio 2.27 propuesto en Problemas de Flujo de Fluidos (Valiente Bardera, 2002, pág. 86)

$$Q = 23 \frac{\text{l}}{\text{min}} = 3,83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \quad \mu = 0,3 \text{ Pa s} = 0,3 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad \delta = 0,933 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = 933 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$U = \frac{4 Q}{\pi D^2} = 1,22 \text{ m/s}$$

Cálculo de la pérdida de carga unitaria J

$$J = 32 \frac{\mu U}{\delta g D^2} = 32 \frac{0,3 \frac{kg}{m s} \times 1,22 m/s}{933 \frac{kg}{m^3} \times 9,81 \frac{m}{s^2} \times (0,02 m)^2} = 3,21$$

$$J = 3,21$$

Cálculo de la tensión de corte en la pared

$$\tau_0 = 8 \mu \frac{U}{D}$$

$$\tau_0 = 8 \times 0,3 \frac{kg}{m s} \times \frac{1,22 m/s}{0,02 m} = 146,5 \frac{kg}{s^2 m} = 146,5 \frac{N}{m^2} = 14,93 \frac{kgf}{m^2}$$

$$\tau_0 = 14,93 \frac{kgf}{m^2}$$

Cálculo de la velocidad máxima

$$u_r = \frac{\gamma J}{4 \mu} (R^2 - r^2)$$

La velocidad máxima está en el centro de la tubería $r = 0$

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{\delta g J}{4 \mu} (R^2) = \frac{933 \frac{kg}{m^3} \times 9,81 \frac{m}{s} \times 3,20}{4 \times 0,3 \frac{kg}{m s}} \times (0,01 m)^2 = 2,44 m/s$$

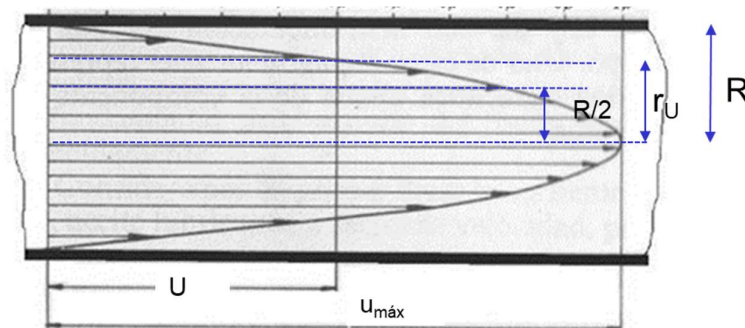
$$u_{m\acute{a}x} = 2,44 m/s$$

Cálculo de la velocidad a $R/2$

$$u_{\frac{R}{2}} = \frac{\gamma J}{4 \mu} \left(R^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) = \frac{\delta g J}{4 \mu} \times \frac{3}{4} R^2$$

$$u_{\frac{R}{2}} = \frac{933 \frac{kg}{m^3} \times 9,81 \frac{m}{s} \times 3,20}{4 \times 0,3 \frac{kg}{m s}} \times \frac{3}{4} (0,01 m)^2$$

$$u_{R/2} = 1,83 m/s$$



Cálculo de la distancia en que se produce la velocidad media (U).

$$U = \frac{\gamma J}{4 \mu} (R^2 - r_U^2)$$

$$r_U = \sqrt{R^2 - \frac{4 \mu U}{\delta g J}} = r_U = \sqrt{(0,01 \text{ m})^2 - \frac{4 \times 0,3 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \times 1,22 \text{ m/s}}{933 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3,20}} = 0,0071 \text{ m} = 7,1 \text{ mm}$$

$$r_U = 7,1 \text{ mm}$$

Ejercicio 3.5. Sotelo Ávila (1997)

Una determinada descarga de agua a 10°C es forzada a fluir por una tubería de 8mm de diámetro y 70m de longitud. La diferencia de presiones entre los extremos del tubo es de 0,02 kgf/cm^2 . Calcular la velocidad media, el caudal y el número de Re para una viscosidad cinemática de $1,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, y un peso específico de 1000 kgf/m^3 .

Cálculo de U

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\gamma} = 0,02 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \times 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^3}{1000 \text{kgf}} = 0,2 \text{ m}$$

$$J = \frac{\Delta H}{l} = \frac{0,2 \text{ m}}{70 \text{ m}} = 0,0029$$

$$U = \frac{\gamma J}{32 \mu} D^2 = \frac{\delta g J}{32 \mu} D^2 = \frac{g J}{32 \nu} D^2$$

$$U = \frac{9,81 \text{ m/s} \times 0,0029}{32 \times 1,33 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} (0,008 \text{ m})^2 = 0,042 \text{ m/s}$$

$$U = 0,042 \text{ m/s}$$

Cálculo de Q

$$Q = U \Omega = U \frac{\pi D^2}{4} = 0,042 \times \frac{\pi \times (0,008 \text{ m})^2}{4} = 2,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 2,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

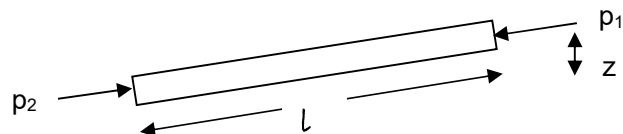
Cálculo de Re

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{0,042 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,008 \text{ m}}{1,33 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 254 < 2000$$

ES MOVIMIENTO LAMINAR $Re = 254$

Ejercicio 3.6. Sotelo Ávila (1997)

Determinar la dirección del flujo, el caudal y el factor de resistencia, suponiendo movimiento laminar para después verificarlo, en una tubería de longitud 9,20m, si el desnivel entre dos puntos (1 y 2) de la misma es de 4,6m, el diámetro es de 1,25 cm, la presión en el punto 1 es de $1,4 \text{ kgf/cm}^2$ y en el punto 2 de $2,1 \text{ kgf/cm}^2$. Considerar una viscosidad dinámica de $0,0014 \text{ kgf s/m}^2$ y un peso específico de 800 kgf/m^3



Respuesta. Flujo desde 2 a 1.

$$Q=0,15 \text{ l/s}, Re=916 \text{ y } \lambda=0,07$$

Ejercicio 3.7

Un aceite pesado fluye en una tubería horizontal de 5 cm de diámetro y 15 m de longitud. La presión en uno de sus extremos es de 1,5 atmósferas y en el otro es de 1 atmósfera. Si la viscosidad cinemática es de $1,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ y el peso específico relativo es de 0,918, calcular el caudal.

Respuesta: $U=0,2\text{m/s}$, $Re=8$, $Q=0,4\text{l/s}$

Ejercicio 3.8

Calcular la viscosidad dinámica de un aceite de peso específico relativo de 0,86 que es bombeado por una tubería horizontal de 500m de longitud y 10 cm de diámetro con un caudal de 100 l/min., si la caída de presión medida es de 1 MPa.

Respuesta: $\mu=2,94 \text{ N s/m}^2$

Ejercicio 3.9. Sotelo Ávila (1997)

Calcular la pérdida de energía por fricción en un tramo de tubo liso donde fluye aceite con una velocidad media de 0,60 m/s La longitud de la tubería es de 153m, el diámetro de 0,10m, el peso específico de 930 kgf/m^3 y la viscosidad dinámica es de $0,00486 \text{ kgf s/m}^2$.

Respuesta: la pérdida de energía por fricción es de 1,54m

Ejercicio 3.10.

Dada una tubería de diámetro 5 cm y con un caudal de 0,05 l/s. Calcular:

1. El número de Reynolds Re .
2. La pérdida de carga por unidad de longitud J .
3. El factor de resistencia λ .
4. La velocidad media y la velocidad máxima.
5. La tensión de corte hidráulico máxima.

Respuesta: $Re=1019$; $J=0,000042$; $\lambda=0,06$; $U=0,025\text{m/s}$; $u_{\text{máx}}=0,051\text{m/s}$; $\tau_o=0,0051\text{N/m}^2$

3. Movimiento turbulento

3.1 Introducción

El principal objetivo de este estudio es establecer las ecuaciones que gobiernan el movimiento turbulento en tuberías; estas ecuaciones, por lo general, relacionan la energía que se pierde en el movimiento del fluido a causa de la fricción entre la pared del ducto y el fluido. Todas las ecuaciones que describen el flujo en tuberías tienen similar naturaleza: se basan en un equilibrio de fuerzas muy elemental y sencillo, y las diferencias entre las mismas se deben a los procesos empíricos que se aplican en el manejo de las ecuaciones.

Tal como ya se explicó en la Unidad I, desde el punto de vista del comportamiento mecánico, un fluido es una sustancia que no puede resistir esfuerzo cortante; si este esfuerzo se presenta, el fluido se deforma y continúa deformándose mientras el esfuerzo exista. Aparecen esfuerzos tangenciales de igual dirección a la fuerza, o sea, tangencial, pero de sentido contrario, que se oponen al movimiento, estos esfuerzos tangenciales para el movimiento turbulento son directamente proporcionales a la velocidad y se denominan “*frotamientos hidráulicos*” por la similitud conceptual con los frotamientos de los cuerpos sólidos. En este proceso de deformación continua las diferentes partículas del fluido cambian de posición relativa en forma permanente; dando origen al movimiento del fluido.

En el caso del flujo en tuberías actúan tres fuerzas: fuerzas de presión, fuerzas gravitacionales y fuerzas de fricción. La primera siempre trata de acelerarlo, la segunda, dependiendo del sentido del escurrimiento, puede acelerar o puede retardar, mientras que la última siempre trata de retardarlo. Para el caso específico del movimiento permanente uniforme bajo estudio, existe un equilibrio entre los tres tipos de fuerzas.

Dada la importancia de las fuerzas de fricción en el problema del movimiento permanente y uniforme, el cual es básico para el cálculo de tuberías, es que se estudia analíticamente la turbulencia para poder cuantificarla a través de expresiones matemáticas.

Entonces, se trata de encontrar las ecuaciones de distribución de velocidad y de tensión de corte hidráulico en tuberías, las ecuaciones que describen la interacción fluido-paredes sólidas y las ecuaciones de fricción o frotamiento, utilizadas en el diseño de sistemas de tuberías.

3.2 Estudio del movimiento turbulento

La experiencia de Reynolds, en un tubo pequeño, en la que un filete coloreado sigue una línea recta si la velocidad de la corriente es pequeña, y, luego, aumentando la velocidad, en forma apreciable, finalmente se produce la coloración de toda la corriente del tubo (Figura 3.1), demuestra dos hechos:

- ✓ La existencia del *movimiento turbulento*.
- ✓ La existencia de la *mezcla transversal de la corriente*, es decir, componente de la velocidad instantánea contenida en el plano de la sección transversal de la tubería, que es justamente la que origina esa mezcla transversal de la corriente, característica del movimiento turbulento.

La velocidad instantánea en un punto cualquiera de la corriente turbulenta, en un sistema ortogonal de coordenadas, en que dos ejes estén contenidos en el plano de la sección transversal al escurrimiento y el tercero en la dirección y sentido de la corriente, tiene siempre una componente positiva, aunque variable en este último eje y componentes que pueden ser positivas, negativas o nulas en los otros dos ejes. ¿Cuál es la causa de este tipo de movimiento?

Si consideramos un líquido perfecto, sin viscosidad, dos líneas de corriente contiguas que tienen velocidades diferentes, y nada las altera, estas líneas de corriente seguirán rectas indefinidamente, como aparece en la Figura 3.8.

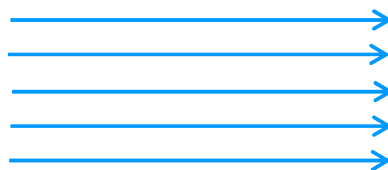


Figura 3.8. Líneas de corriente para líquido perfecto sin alteración

Si existe una alteración cualquiera en alguna de las líneas de corriente que tienen velocidades diferentes, se origina una curvatura de dicha línea, esa alteración se traslada a las líneas de corriente aledañas, originando pequeños cambios de curvatura en las mismas, amortiguando esos cambios a medida que se alejan de la misma. De todos modos, estos cambios de curvatura, originan cambios en la sección transversal encerrada en dicho movimiento bidimensional, lo que consecuentemente produce cambios inversos en la velocidad a lo largo de la línea de corriente, para mantener constante el caudal en el tubo de flujo encerrado por las mismas, tal como lo podemos observar en la Figura 3.9.

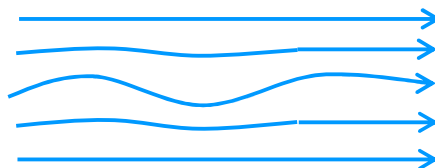


Figura 3.9. Líneas de corriente para líquido perfecto con alteración

La variación de la velocidad a lo largo de la línea de corriente, implica la variación inversa de las presiones a lo largo de la misma. Esta variación de presión origina a su vez, aumentos cada vez mayores de los cambios de curvatura de las líneas de corriente, pudiendo llegar a producirse “torbellinos”, como los que aparecen en la Figura 3.10.

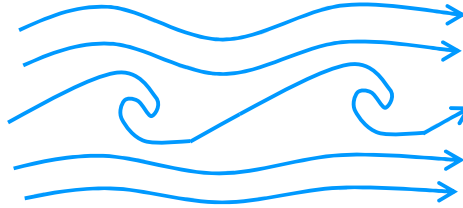


Figura 3.10. Esquema de torbellinos

Mientras mayores son las velocidades de cada una de las líneas de corriente, más fácil es la producción de este proceso.

Al considerar el líquido real viscoso, entre las líneas de corriente habrá un gradiente de velocidad, en lugar de una diferencia finita de la misma, originando el mismo proceso ya descrito, y aumentando cuando el gradiente crece. Por otro lado, cuanto más viscoso sea el líquido, habrá más dificultad en la producción de los remolinos, porque una alteración de las líneas de corriente tiende a ser amortiguada por la viscosidad del fluido; si la velocidad es grande, también se facilita la producción de torbellinos, igual que en un líquido ideal.

En el caso del movimiento turbulento, no se puede hablar de frotamientos, debido a que las pérdidas de energía se producen por los remolinos o torbellinos ubicados en toda la corriente. Estos remolinos varían de un punto a otro de la corriente y en el tiempo. Las partículas siguen trayectorias sinuosas, sin una ley ni orden, es imposible seguir a una partícula, y la que un instante después ocupa el lugar de la primera seguirá una trayectoria diversa de aquélla. El vector velocidad, en un punto cualquiera, cambia de dirección y magnitud, en el espacio y en tiempo, pero coincide con la dirección y sentido general del movimiento.

Las deformaciones de las líneas de corriente que se están analizando se originan por la presencia de irregularidades en la pared interna de la tubería, irregularidades que dependen del material con que se fabrica la misma. Estas irregularidades es lo que denominamos **rugosidad o aspereza de la pared de la tubería**.

Se ve, siguiendo estas ideas, que las deformaciones que curvan las líneas de corriente llevan a la turbulencia, pero si la velocidad es pequeña y predominan las fuerzas de viscosidad, aunque estas deformaciones existan, no se desordenará el movimiento, o sea que, en movimiento laminar la aspereza de la tubería no influye en la pérdida de carga de la misma.

Por otra parte, aunque la aspereza de la pared sea muy pequeña, cuando la inercia de la corriente es grande, es decir, su caudal, sus factores sección y velocidad, el movimiento será desordenado o turbulento. Las componentes transversales del vector velocidad en la sección transversal que originan cambios en la cantidad de movimiento, son traslados de energía cinética en dicha sección y, por lo tanto, se nivela así la energía cinética del conjunto de la corriente en la sección transversal. La velocidad media que en la corriente estratificada (laminar) es la mitad de la máxima, en la corriente turbulenta es cercana al 80% de ese valor. Si se realiza una comparación entre las condiciones de flujo laminar, Figura 3.11(a), y turbulento, Figura 3.11(b), debe tenerse en cuenta que el movimiento laminar se da en pequeñas conducciones.

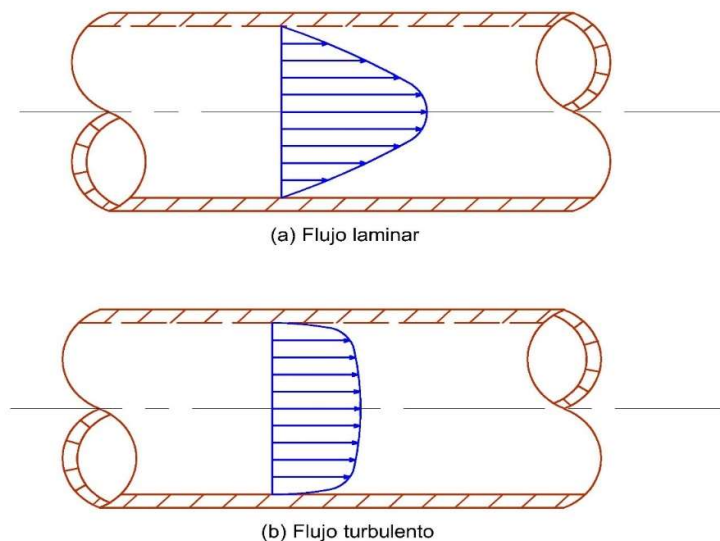


Figura 3.11. Distribución de velocidad en tuberías. Mott, 1996, pág. 225

El perfil de velocidad para flujo turbulento se puede observar en detalle en la Figura 3.12, cerca de la pared la velocidad cambia en forma rápida de cero a una distribución casi uniforme en el resto de la tubería, o sea, hay un gradiente de velocidad muy grande cerca de la pared.

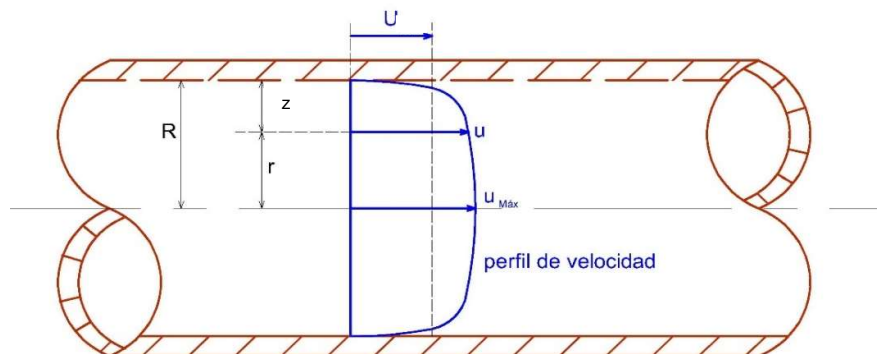


Figura 3.12. Perfil de velocidad en movimiento turbulento. Mott, 1996, pág. 225

3.3 Rugosidad o aspereza de la pared de la tubería

Las rugosidades, también llamada deformaciones o asperezas, son las irregularidades en la pared interna de la canalización, o sea, la que está en contacto con el agua. La existencia de la aspereza produce perturbaciones en la corriente líquida que se transmiten de una línea de corriente a otra hacia el interior de la tubería. O sea que, las asperezas, deformaciones o rugosidades de las paredes de una tubería producen cambios de curvatura de las líneas de corriente, los que llevan a la producción de los torbellinos ya mencionadas anteriormente, y por lo tanto a la turbulencia.

Si la viscosidad del líquido es grande, y la velocidad es baja, predominan las fuerzas de viscosidad y el movimiento es ordenado, o sea, laminar. Mientras que, por otra parte, cuando la aspereza de la pared es pequeña y la inercia es grande, es decir, caudales grandes, y por lo tanto velocidad y sección transversal también, el movimiento es desordenado o turbulento.

Hasta hace poco más de un siglo se creía que la "naturaleza" de la pared de la canalización no influía en el escurrimiento de un fluido, fue *Henry Darcy* quien demostró en forma irrefutable la

influencia que la aspereza de la pared tiene en el movimiento turbulento de un fluido, tanto en corrientes cerradas, como en abiertas.

Se decía que la pared era cubierta por una lámina de agua inmóvil, que, embebiendo las irregularidades de la misma, hacía que el escurrimiento se verificara como sobre una pared de agua. Se verá más adelante que, efectivamente, se acepta la existencia de esa lámina líquida, no inmóvil, pero tan delgada que, si bien hace desaparecer para el escurrimiento las pequeñas rugosidades embebiéndolas, no hace desaparecer las más grandes deformaciones, de dimensiones mayores que su espesor, pues la *capa parietal* se deforma suavizándolas, pero no anulando las grandes deformaciones. Luego se verá que a las que tienen asperezas que quedan totalmente embebidas en la capa parietal las llamaremos "paredes lisas" y "paredes rugosas" a las otras.

Definir en forma científica la rugosidad de las paredes de una canalización es muy difícil, aún en los casos en que ella es uniforme a lo largo de toda una corriente, y aun cuando se eliminan otras causas de incertidumbre, como sucede en tuberías circulares de diámetro constante.

En canales excavados el asunto es otro, es una cuestión que sólo se puede tomar globalmente, pues no se trata de deformaciones simétricas en su longitud, sino de irregularidades imposibles de pretender poner en una ecuación.

Es muy difícil definir la rugosidad de las paredes de una canalización, aun cuando sea uniforme a lo largo de toda la corriente. Existen factores que influyen en el comportamiento del flujo turbulento y ellos son:

- Altura media de la irregularidad en la pared de la tubería.
- Variación de la altura efectiva respecto de la media.
- De la forma de la irregularidad.
- De la distancia entre dos irregularidades vecinas.
- De la distribución geométrica de las irregularidades.

Tal como puede verse en la Figura 3.13, la distribución (a) de irregularidades da una rugosidad menor que la (b), pues esta última tiene más hileras de irregularidades por unidad de ancho de corriente que la primera, aunque contenga más unidades por metro cuadrado.

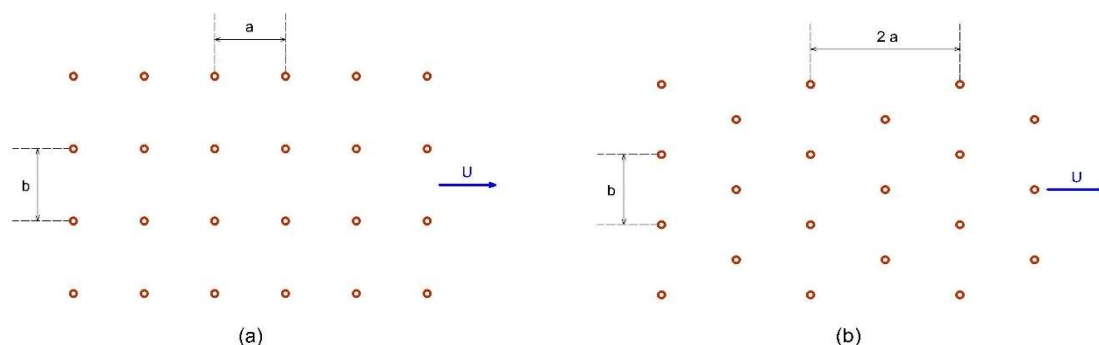


Figura 3.13. Distribución de irregularidades. (Dominguez S., 1999, pág. 128)

La experimentación hecha en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Chile por el Dr. Ing. Ramón Fuentes es más precisa en lo que se refiere a distancias entre asperezas iguales, y se resumen en el gráfico de la Figura 3.14. Es fácil observar que a cada relación h/b , entre la altura de la aspereza y su ancho, en el sentido del escurrimiento corresponde a un valor de ϵ/h , ϵ es el valor numérico de la altura de la aspereza que se tomará como variable de las ecuaciones de pérdida de energía en movimiento turbulento. El ϵ/h es además función h/s , relación entre la altura y la distancia entre asperezas; tiene un valor máximo mientras sea mayor h/b , y se puede tener el mismo valor de ϵ/h con dos h/s , uno, más pequeño, y otro grande. (Dominguez S., 1999, pág. 128)

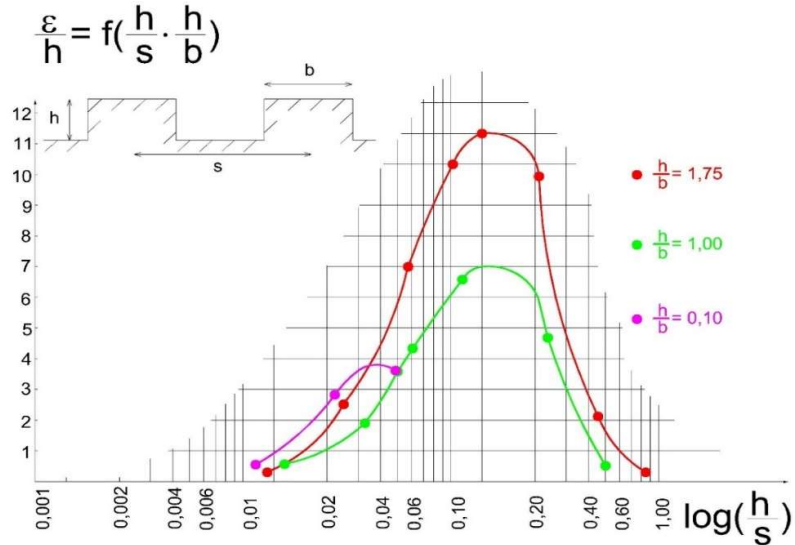


Figura 3.14. ε/h en función de h/s , expresión de la influencia de separación entre asperezas. (Dominguez S., 1999, pág. 129)

Asperezas de altura ε muy juntas, Figura 3.15 (1), equivalen a una pared continua, porque las líneas de corriente no se alcanzan a deformar por la inercia del fluido, y el espacio entre rugosidades se llena de fluido inmóvil. Si entre dientes de asperezas la distancia es comparable a su altura, Figura 3.15 (2), en el espacio se sitúa un vórtice fijo y la línea de corriente cercana al extremo de la aspereza solamente se deforma un poco, acusando si bien una mayor perturbación que en el caso 1, sin embargo, no una gran perturbación. En el caso de distancias francamente mayores, la perturbación aumenta siendo la distancia de 10ε la que produce la mayor perturbación en las líneas de corriente, Figura 3.15 (3), (Dominguez S., 1999).

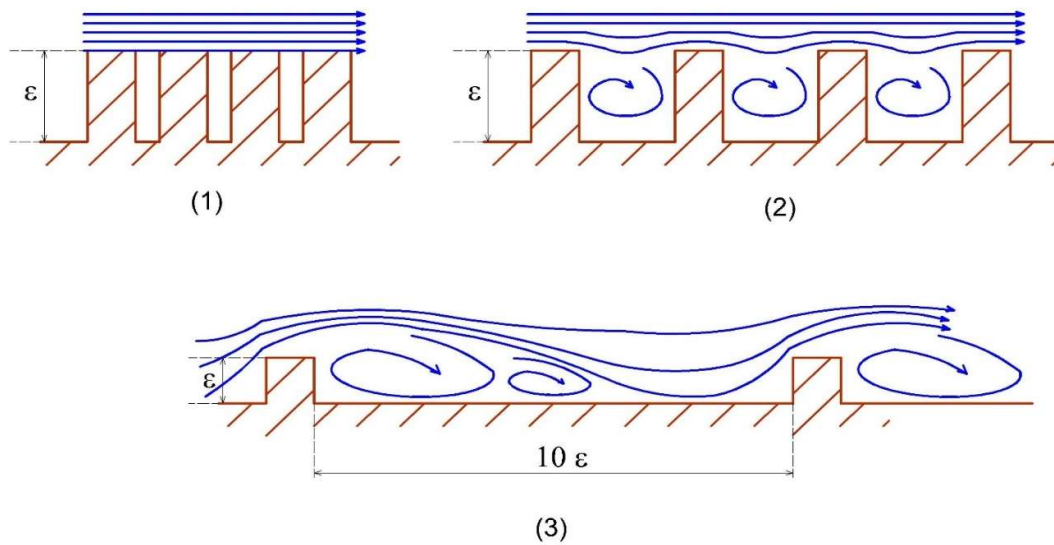


Figura 3.15. Separación entre asperezas. (Dominguez S., 1999, pág. 129)

Las experiencias de Hopf y Fromm desarrolladas en dos paredes cuya deformación tiene la misma altura ε , pero diferente forma, Figura 3.16, establecen, a través de los resultados

experimentales obtenidos, que la forma de la rugosidad ejerce una influencia sobre la pérdida de energía. La pared "ondulada" originó factores de resistencia (λ) de "pared lisa", mientras la "rugosa" los dio francamente de áspera.

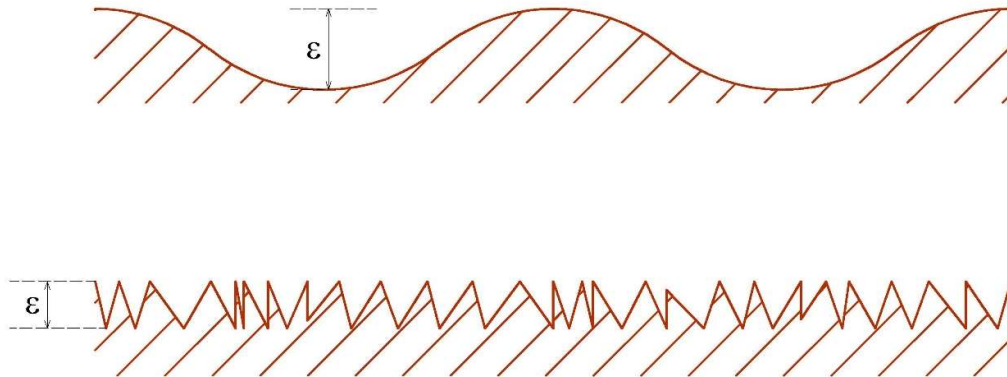


Figura 3.16. Influencia de la forma de la aspereza (Dominguez S., 1999, pág. 129)

3.4 Tensión tangencial en movimiento turbulento

Hasta hace pocos años las experiencias que se hacían en líquidos o gases en movimiento turbulento tenían por objeto dar valores numéricos o hacer fórmulas empíricas del valor de la pérdida de carga en función de la velocidad media de una corriente, o del caudal y de su dimensión característica, ya sea el diámetro, si era una tubería circular, o el radio hidráulico, si se trataba de una corriente abierta.

Boussinesq, entre 1877 y 1897, fue el que abordó el cálculo de la pérdida de carga haciendo hipótesis intuitivas del mecanismo del fenómeno, que lo llevaron a confirmar la forma de la ecuación de pérdida de carga. Este investigador creó el coeficiente de turbulencia de dimensiones iguales a la de la viscosidad, pero cuyo valor es mucho mayor, también se dio cuenta que las tensiones tangenciales del movimiento turbulento se deben al intercambio continuo de partículas entre tubos de flujo vecinos, cosa que demostró después *Reynolds* (1883) en la experiencia ya mencionada con anterioridad.

Se ha dado un paso hacia adelante gracias a *Theodore von Kármán*, entre 1921 y 1934, y *Ludwig Prandtl*, entre 1925 y 1933, que pudieron establecer las leyes que rigen la turbulencia en concordancia con la experimentación contemporánea a sus investigaciones, especialmente la de *Johann Nikuradse*, desarrollada entre 1930 y 1933, discípulo de Prandtl.

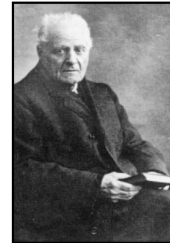
Es necesario reconocer que el punto de partida del proceso en la teoría de la turbulencia, sin embargo, arranca de *Reynolds* (1883), con el descubrimiento de la relación sin dimensiones que lleva su nombre (Re); que no solamente es la variable indispensable para fijar el criterio de la forma de escurrimiento, sino también porque ha explicado numerosas experiencias cuyos resultados eran antes desconcertantes.

La teoría de la turbulencia da resultados positivos en canalizaciones circulares cerradas; en cambio, no se puede aplicarla con igual éxito en los canales; en éstos aún se continúa con fórmulas obtenidas de resultados experimentales globales, pues, la diversidad de forma, la superficie libre y falta de uniformidad de la aspereza de la pared no ha permitido un avance científico de importancia. Esto se explica debido a que en los procesos constructivos de las canalizaciones abiertas, se emplea mano de obra, la cual no se encuentra uniformemente capacitada ni, a veces encofrados lo suficientemente adecuados o con el número de usos dentro de límites aceptables (demasiado desgastados o compuestos por demasiados retazos de tablas). A ello se agregan los efectos de las inevitables juntas constructivas, de retracción, de dilatación. Todos estos efectos contribuyen a que la teoría de la turbulencia elaborada y

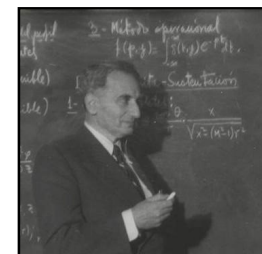
confirmada para tuberías que se construyen de manera mecanizada no pueda ser totalmente aplicada y corroborada en canalizaciones abiertas construidas en condiciones no controladas, a la intemperie y, a veces expuestas al vandalismo.

A continuación, se describen brevemente algunos datos personales de los principales investigadores que tanto realizaron y esforzaron en el campo de la hidrodinámica.

Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) fue un matemático y físico francés que hizo importantes contribuciones a la teoría de la hidrodinámica, la vibración, la luz y el calor. En 1897 publicó *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides* (Teoría de los movimientos en torbellinos y líquidos tumultuosos), obra que contribuyó en gran medida al estudio de la turbulencia y la hidrodinámica. La primera mención de la palabra "turbulencia" en la literatura científica la mecánica de fluidos Francés o Inglés (de la palabra "turbulencia" existió en otro contexto) puede encontrarse en un documento elaborado por Lord Kelvin en 1887.



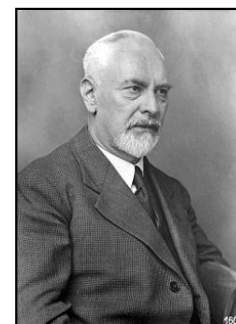
Theodore von Kármán (1881-1963) fue un ingeniero y físico húngaro-estadounidense que realizó muy importantes contribuciones en el campo de la aeronáutica y astronáutica. Es responsable por descubrimientos trascendentales en aerodinámica, particularmente sus trabajos en la caracterización de flujos de aire supersónicos e hipersónicos. Estudió ingeniería en la Universidad Técnica Real Joseph, (actualmente Universidad de Tecnología y Economía de Budapest). Se graduó en 1902, y se incorporó al grupo de Ludwig Prandtl en la Universidad de Göttingen, recibiendo su doctorado en 1908. Disconforme con los eventos que se sucedían en Europa, en 1930 aceptó la jefatura del Guggenheim Aeronautical Laboratory, el Instituto Tecnológico de California (GALCIT), y emigra a Estados Unidos. Su trabajo vanguardista en aeronáutica y astronáutica conllevó importantes contribuciones a la mecánica de fluidos, la teoría de turbulencia, el vuelo supersónico, las matemáticas en ingeniería y la estructura de aviones. Su despegue asistido por reactores (JATO/RATO – Jet Assisted Take Off), constituyó el prototipo para los motores de proyectiles de largo alcance utilizados modernos.



Ludwig Prandtl nació en Freising, Alemania el 4 de febrero de 1875. Estudió ingeniería mecánica en Munich. Como pocos, fue dotado con una gran visión para comprender fenómenos físicos y con una capacidad inusual de expresarlos en forma matemática simple. Prandtl era uno de los investigadores y tutores más capaces, convirtiéndose en profesor de mecánica en la universidad de Hannover en 1901. Desde 1904 hasta 1953 se desempeñó como profesor de mecánica aplicada en la universidad de Göttingen, donde estableció una escuela de aerodinámica e hidrodinámica que alcanzó gran reconocimiento a escala mundial.

El descubrimiento de Prandtl, en 1904, en relación con la *capa limite*, condujo a una comprensión de la fricción y de su reducción a través de la aerodinámica. Su trabajo inicial sobre la teoría del ala, fue conocido como la Teoría del ala de Lanchester-Prandtl.

Prandtl dio a la teoría moderna del ala su forma matemática práctica. Es considerado el padre de la teoría aerodinámica, pues la mayoría de sus conceptos fundamentales se originaron en su mente fértil y sólo una parte no es atribuible a sus estudios.



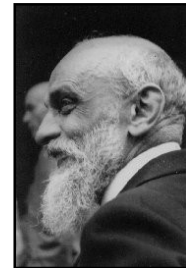
Johann Nikuradse (1894-1979) fue un físico e ingeniero alemán. En 1919 emigró al extranjero para estudios posteriores. El 1921 la sovieterización de Georgia impidió su regreso a la patria y Nikuradse se naturalizó como ciudadano alemán.

Se doctoró como estudiante de Ludwig Prandtl en 1920, más tarde trabajó como investigador en el Instituto Kaiser Wilhelm de Investigación Flow (ahora el Instituto Max Planck). Con Prandtl como Tutor, avanzó a la posición de jefe de departamento. Fue acusado ser espía para la Unión Soviética y de robar los libros del instituto. Prandtl inicialmente defendió Nikuradse, pero se vio obligado a destituirlo en 1934. Luego se desempeñó como profesor en la Universidad de Breslau (1934-1945), y profesor honorario de la Universidad Técnica de Aquisgrán desde 1945. Nikuradse vivió sobre todo en Göttingen y trabajó principalmente en la hidrodinámica. Su mejor conocido experimento en tuberías lisas y rugosas fue publicado en Alemania hacia 1933.



Paul Richard Heinrich Blasius (1883–1970) fue un ingeniero alemán especializado en mecánica de fluidos.

Fue uno de los primeros estudiantes de Prandtl, que le proporciono las bases matemáticas para el estudio del arrastre a través de la teoría de capa límite. El trabajo de Prandtl llevó al estudio en 1911 de este fenómeno en tuberías y conductos, relacionándolo con el número de Reynolds. La principal contribución de Blasius fue el estudio de la capa límite en una placa semi-infinita, ampliando los resultados de Prandtl, y sus descubrimientos en la dinámica de los fluidos



Las antiguas experiencias anteriores al conocimiento de la influencia de la rugosidad o aspereza de las paredes, y las primeras que la tomaron en cuenta, indican algunas relaciones concluyentes en la estimación de la tensión tangencial. Se puede decir que ella es función de la altura de velocidad de la corriente y de un coeficiente característico adimensional (f) denominado "coeficiente de frotamiento", que depende de la forma y magnitud de la corriente y de la aspereza de la pared de la tubería, tal como puede verse en la siguiente ecuación:

$$\tau_0 = \gamma f \frac{U^2}{2g} \quad (3.27)$$

Donde:

f es un coeficiente adimensional denominado "coeficiente de frotamiento"

γ es el peso específico del agua

$U^2/2g$ es la altura de velocidad

U es la velocidad media de la corriente

τ_0 : tensión de corte hidráulico en la pared de la tubería

El coeficiente de frotamiento (f) depende de la forma y magnitud de la corriente, y de la rugosidad del material de las paredes de la tubería.

Retomando la expresión genérica de la tensión de corte hidráulico aplicado al movimiento en tuberías (Ecuación 3.8)

$$\tau_0 = \gamma R_H J \quad (3.8)$$

E igualando ambas expresiones, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\gamma R_H J = \gamma f \frac{U^2}{2g}$$

$$R_H J = f \frac{U^2}{2g} \quad (3.28)$$

Reemplazando el radio hidráulico de tuberías:

$$R_H = \frac{D}{4}$$

$$\frac{D}{4} J = f \frac{U^2}{2g}$$

$$J = \frac{2f}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (3.29)$$

Recordando la ecuación de Darcy-Weisbach (Ecuación 3.22)

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (3.22)$$

Siendo λ el factor de resistencia función de la velocidad, diámetro, rugosidad de las paredes y viscosidad del fluido.

Para encontrar la relación entre el factor de resistencia de Darcy-Weisbach con el coeficiente de frotamiento f , se compara la ecuación 3.29 con la 3.22:

$$\frac{2f}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}$$

$$\lambda = 4f \quad (3.30)$$

Además permite introducir un concepto nuevo, el de velocidad de frotamiento v_f de la manera siguiente:

$$\tau_0 = \gamma f \frac{U^2}{2g} = \delta g f \frac{U^2}{2g} = \delta f \frac{U^2}{2}$$

$$\frac{\tau_0}{\delta} = f \frac{U^2}{2} \quad (3.31)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 3.8, 3.30 y 3.31, reemplazamos:

$$\frac{\tau_0}{\delta} = f \frac{U^2}{2} = \frac{\lambda}{4} \frac{U^2}{2} = \frac{\lambda}{8} U^2 \wedge \tau_0 = \gamma R_H J = \delta g R_H J$$

$$\frac{\tau_0}{\delta} = g R_H J \quad (3.32)$$

Dimensionalmente:

$$\left[\frac{\tau_0}{\delta} \right] = L^2 T^{-2}$$

Se ve que el cociente entre la tensión de corte hidráulico y la densidad del agua tiene dimensiones de una velocidad elevada al cuadrado, y sacando la raíz cuadrada de dicha expresión se obtiene una magnitud de velocidad a la que Prandtl denominó "velocidad de frotamiento", v_f .

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\delta}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8} U^2} = U \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \sqrt{g R_H J} \quad (3.33)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{\tau_0}{\delta}} = U \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

La velocidad de frotamiento no representa una magnitud física medible, sino que se la denomina velocidad porque tiene las mismas unidades que una velocidad, pero no es una velocidad de la tubería, sino que es uno de los parámetros de Prandtl.

Trabajando con las Ecuaciones 3.32 y 3.33, y comparando la velocidad de frotamiento en función de λ y en función de J :

$$\begin{aligned}\frac{\tau_0}{\delta} &= \frac{\lambda}{8} U^2 \\ \frac{\tau_0}{\delta} &= g R_H J \\ J &= \frac{\lambda}{R_H} \frac{U^2}{8g}\end{aligned}\tag{3.34}$$

En función de las experiencias realizadas, se puede concluir que la pérdida de energía por unidad de peso y longitud es directamente proporcional a la velocidad elevada a un exponente, el que puede considerarse igual a 2 para grandes rugosidades de la pared, en cambio para conductos lisos ese valor disminuye a 1,75.

Se llaman paredes lisas aquéllas de pequeñas irregularidades que quedan embebidas en la capa laminar parietal.

Y si se comparan estos resultados con los obtenidos para el movimiento laminar, se puede concluir que para el movimiento turbulento, tanto la pérdida de carga unitaria J , como la tensión de corte hidráulico τ_0 resultan proporcionales a la velocidad elevada al cuadrado y a la aspereza de las paredes, a través del coeficiente de frotamiento. Mientras que para el movimiento laminar ambas son proporcionales a la velocidad elevada a la primera potencia y a la viscosidad dinámica.

3.5 Cambio de régimen

Las experiencias realizadas en laboratorio por los investigadores ya mencionados, demuestran que el paso de un régimen a otro, de laminar a turbulento, no es directo, si no que existe una transición. Dicho de otra manera, que si a igualdad de condiciones se varía la velocidad del escurrimiento solamente, se podrán observar tres fases: movimiento laminar o estratificado, seguida por una fase de transición y finalmente el movimiento francamente turbulento. En estas experiencias se demostró que para:

- ✓ Movimiento laminar $J = f(U)$
- ✓ Movimiento turbulento $J = f(U^2)$, si el tubo es rugoso y $J = f(U^{1,75})$ si el tubo es liso.

Pero también se encontraron valores de dicho exponente distintos de 1 y de 2, en el pasaje de un régimen a otro, para lo cual se supone partir del movimiento laminar al turbulento aumentado la velocidad del agua, y si se grafica en forma logarítmica la velocidad U en función de la pérdida de carga unitaria J , se obtiene el gráfico de la Figura 3.17, en el cual el movimiento laminar está representado por una recta de pendiente unitaria y el turbulento por otra de pendiente igual a 2.

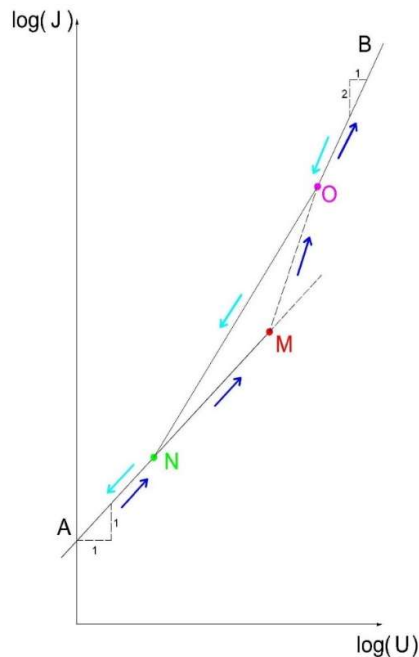


Figura 3.17. Cambio de régimen de laminar a turbulento. (Dominguez S., 1999, pág. 134)

Para el Movimiento Laminar: $J_l = k_l U$

$$\log J_l = \log k_l + \log U$$

Para el Movimiento Turbulento: $J_t = k_t U^2$

$$\log J_t = \log k_t + 2 \log U$$

Si se repite la experiencia de Reynolds en un tubo aumentando las velocidades desde valores muy pequeños, las pérdidas de carga correspondientes a baja velocidad se alinean sobre una recta cuyo coeficiente angular es la unidad hasta un punto M; a partir de ahí los resultados se ubican sobre una curva MO. Si llegado al punto O se sigue aumentando la velocidad del agua en la tubería y ésta es rugosa, los resultados se alinean en una recta de coeficiente angular 2 (si el tubo es liso en una recta de coeficiente angular 1,75).

Hay tres fases con velocidades ascendentes:

- ✓ AM: movimiento estratificado, o sea laminar.
- ✓ MO: movimiento de transición.
- ✓ OB: movimiento francamente turbulento.

Si ahora desde B disminuye la velocidad del agua en la tubería, o sea, desciende sobre la recta de coeficiente angular 2 ó 1,75 desde B hacia O, y si continúa disminuyendo la velocidad, la pérdida de carga unitaria J no sigue por la curva OM, sino por ON. En el punto N, las experiencias se alinean sobre la recta NA de coeficiente angular uno. Las tres etapas se producen disminuyendo la velocidad, se pasa del movimiento turbulento a la transición y de ésta al movimiento estratificado, pero la transición con descenso de velocidad implica pérdidas de carga unitarias de mayor valor que para el ascenso de velocidad. El punto en que aparece el movimiento estratificado, N, es de menor velocidad que el M cuando se procedió aumentando velocidades. Reynolds llamó al punto M "velocidad crítica alta" y al punto N "velocidad crítica baja". La existencia de las dos curvas NO y MO revelan que cuando el fluido se ha acomodado a un régimen necesita un esfuerzo suplementario de las condiciones para variarlo (energía), es un caso muy similar al ciclo de histéresis de los sólidos.

En el punto N , en donde se igualan los dos regímenes:

$$\begin{aligned}
 J_l &= k_l U = J_t = k_t U^2 \\
 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} &= \frac{2f}{g} \frac{U^2}{D} \\
 32 \nu \frac{1}{D} &= 2f U \\
 \frac{U D}{\nu} &= Re = \frac{16}{f} \\
 Re &= \frac{16}{f} \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Para un $f=0,008$ para tubos pequeños, el Re toma el valor 2000, que es el límite del movimiento laminar. Este punto, llamado "el umbral", es imposible de ser traspasado por el movimiento turbulento. El valor del número de Reynolds del umbral, $Re = 2000$, permite obtener la velocidad del umbral ya mencionada, que queda en función del diámetro y de la viscosidad cinemática.

$$\begin{aligned}
 Re &= \frac{U D}{\nu} \\
 U &= 2000 \frac{\nu}{D} \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

3.6 Experiencias de Nikuradse

Estas experiencias fueron realizadas por Nikuradse, entre 1930 y 1933, en tuberías con diferentes asperezas, las que se simularon mediante granos de arena de tamaño y distribución uniforme adheridos a la pared interior de la tubería. Los resultados se representaron en un gráfico logarítmico ($\log Re$ vs $\log 100\lambda$). La aspereza relativa se define como el cociente entre la altura de la aspereza ε y el diámetro o radio de la tubería.

Los resultados obtenidos, Figura 3.18, muestran la existencia de una transición entre el régimen ordenado o estratificado y el desordenado o turbulento. En otras palabras, dada una tubería de diámetro D y con un caudal Q , mientras la velocidad media dé un $Re \leq 2000$, hay un régimen ordenado; pero no basta sobrepasar este valor del Re para obtener el movimiento turbulento, hay que sobrepasarlo suficientemente, es decir, aumentar bastante la velocidad para obtener el movimiento turbulento. Además, el punto en que el movimiento es completamente desordenado depende también de la rugosidad del tubo, pues mientras en los más rugosos el régimen desordenado aparece a menores velocidades, para los tubos más lisos necesitan mayor velocidad.

Los valores se volcaron en un gráfico que se denomina Gráfico de Nikuradse y que se reproduce en la Figura 3.18.

Dicho gráfico puede interpretarse siguiendo la experimentación. En efecto, a medida que se aumenta el caudal Q en una determinada tubería y para una misma rugosidad ε , es necesario invertir una energía mayor, Δh o, dicho de otro modo, una mayor J . Pero la gráfica de ambas magnitudes se hacía difícil o mostraba dificultades para deducir el comportamiento. Al continuar las investigaciones, Nikuradse pudo observar las relaciones entre la magnitud J y λ y entre Q y Re , siempre para la misma tubería. Luego les aplicó, de acuerdo a la tecnología y la matemática de ese momento, el logaritmo a ambas magnitudes y logró observar una cierta tendencia, pero confusa, ya que la gráfica se concentraba en el eje de las ordenadas, por lo que amplió la escala cien veces y logró observar claramente el comportamiento del agua ($\log Re$), a medida que se aumenta el caudal Q y qué ocurría con la energía ($\log 100 \lambda$):

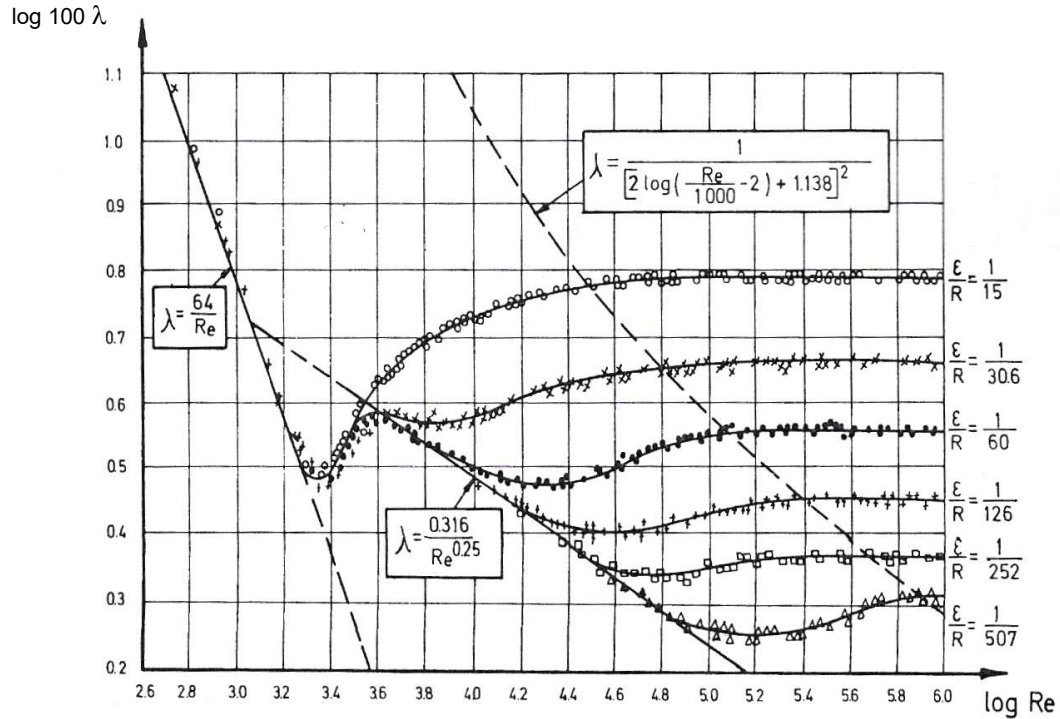


Figura 3.18. Resultados de las experiencias de Nikuradse (Dominguez S., 1999, pág. 138)

Del gráfico de la Figura 3.18 se desprenden las siguientes conclusiones.

- ✓ Para $Re \leq 2000$, los valores del factor de resistencia λ se encuentran sobre la recta que representa al movimiento laminar (Ecuación 3.24):

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.24)$$

La recta obtenida de la ecuación encontrada para movimiento laminar. En la que el factor de resistencia es independiente de la aspereza relativa.

$$\log 100 \lambda = \log 6400 - \log Re \quad (3.37)$$

- ✓ Entre $Re = 2240$ ($\log Re = 3,35$) y $Re = 3800$ ($\log Re = 3,58$) el factor de resistencia λ aumenta rápidamente para todas las asperezas relativas (desde el valor 0,030 hasta muy cerca de 0,040) formando una única curva.
- ✓ Para $Re > 3800$ y tuberías lisas ($R/\epsilon > 60$) las curvas se hacen tangente (resbalan) a la línea recta llamada recta de Blasius, Ecuación 3.38, y expresada en variables del gráfico, Ecuación 3.39.

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad (3.38)$$

$$\log 100 \lambda = \log 31,6 - 0,25 \log Re \quad (3.39)$$

- ✓ Luego, los puntos obtenidos van abandonando la recta de Blasius y los λ se hacen paulatinamente independientes de Re , de acuerdo a la relación R/ϵ .
- ✓ Para $Re > 3800$ y tubos más rugosos ($R/\epsilon < 60$) las curvas son secantes a la ecuación de Blasius y sus λ luego de seguir creciendo se hacen independientes de Re .

- ✓ Según Nikuradse el valor de λ en que el escurrimiento se hace independiente de Re y se hace constante, obedece a la Ecuación 3.40, que se denomina la Curva de Nikuradse:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{D}{\varepsilon} + 1,138\right)^2} \quad (3.40)$$
$$Re = 1000 \left(\frac{D}{\varepsilon} + 2\right)$$

Las ecuaciones 3.38, 3.39 y 3.40 definen el límite de la zona de transición para las diferentes rugosidades relativas; se desarrolla una zona que se denomina de *transición* y está comprendida entre la ecuación del movimiento laminar, la recta de Blasius, y la curva de Nikuradse.

Con Re mayores que los indicados por la curva de Nikuradse, sólo hay escurrimiento turbulento plenamente desarrollado.

3.7 Longitud de mezcla

Para evaluar el mecanismo de intercambio de partículas, y de cantidad de movimiento, característico del movimiento turbulento, consideramos dos tubos de flujo contiguos y que tienen velocidades diferentes, cuya función se conoce $u=f(z)$, también se considera que estas partículas fluidas conservan su forma y dimensiones, pero se trasladan de un tubo de flujo a otro. Ese traslado lo hacen a una distancia máxima " l_m " desde su ubicación primitiva, a dicha distancia Prandtl la denominó "longitud de mezcla", y mide la magnitud de los remolinos que se producen en el movimiento turbulento. Más allá de dicha distancia se pierde la forma y dimensión de la partícula.

La longitud de mezcla entonces es la distancia máxima que alcanza la trayectoria de una partícula en el espacio en el recorrido de la mezcla transversal de la corriente, de modo que queda como la distancia entre los centros de gravedad de los dos tubos de flujo contiguos.

Nikuradse obtuvo experimentalmente la "longitud de mezcla", " l_m ", tanto para tubos lisos como rugosos, para distintos Re , Figura 3.19, a partir de los cuales se puede concluir que en las cercanías a la pared de la tubería la función matemática que expresa la " l_m " es una recta con pendiente constante.

Entonces en las cercanías de las paredes de la tubería se puede plantear una única ecuación que nos permita calcular la longitud de mezcla " l_m ":

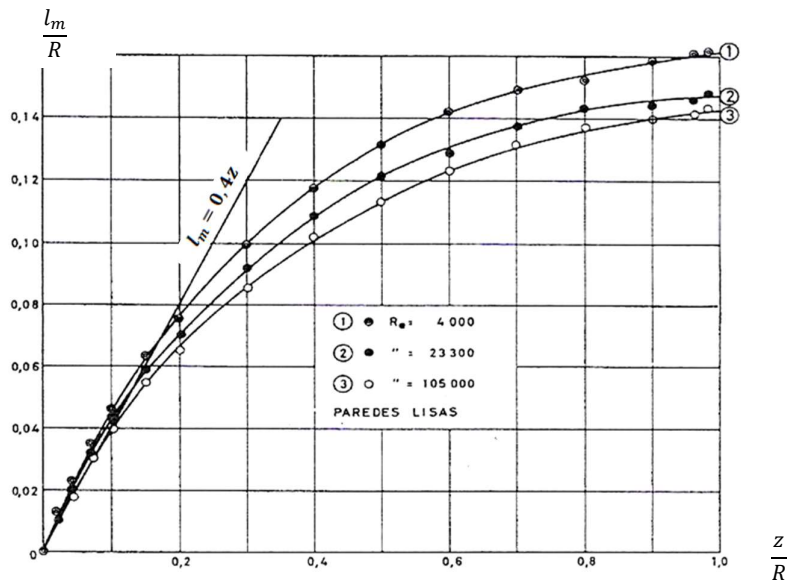
$$l_m = 0,4 z \quad (3.41)$$

Donde:

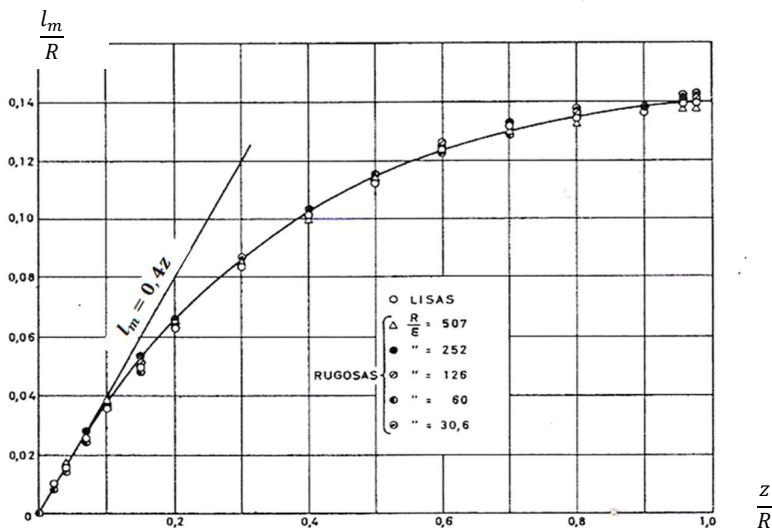
l_m es la longitud de mezcla.

z es la distancia de la línea de corriente considerada a la pared de la tubería.

Es decir que, " l_m " es independiente de Re y de la aspereza de la pared (ε), cerca de la misma.



a) Longitud de mezcla para tuberías de paredes lisas



b) Longitud de mezcla para tuberías de paredes rugosas

Figura 3.19. Longitud de mezcla para distintas tuberías, experiencias de Nikuradse. a) tuberías lisas, b) tuberías rugosas. (Dominguez S., 1999, pág. 145)

3.8 Experiencias de Fristch

Las experiencias de Fritsch, desarrolladas en 1928, fueron ejecutadas en tubos de sección rectangular, con rugosidad de las paredes variable y se midieron cuidadosamente las pérdidas de carga. Se realizaron dos series de experiencias: la primera de caudal constante con diversas rugosidades y la segunda con pérdida de carga constante a rugosidad también variable.

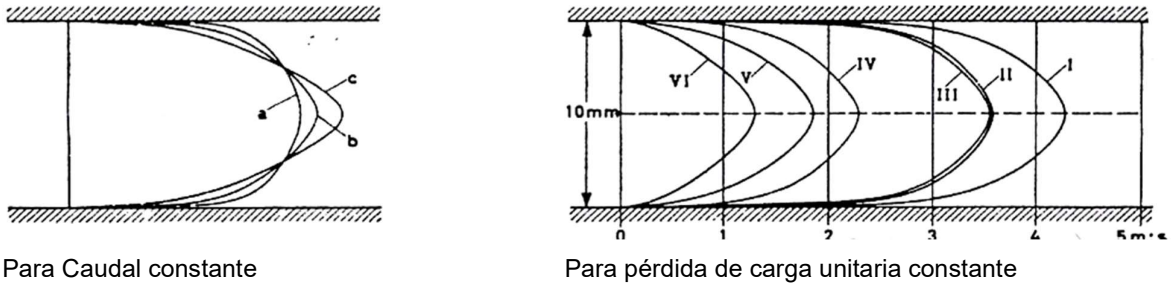


Figura 3.20. Experiencias de Frisch. (Dominguez S., 1999)

Lo más relevante del resultado de estas experiencias, Figura 3.20, es el hecho de la igualdad de la forma de las curvas de velocidad en la parte central del tubo, cuando la pérdida de carga es constante (gráfico de la derecha), cualquiera sea el valor del caudal y la rugosidad de las paredes, esa igualdad abarca la casi totalidad del ancho de la sección, siempre que el escurrimiento sea francamente turbulento. La diferencia en la forma de las curvas de velocidad en la cercanía de la pared de la tubería, por gradientes de velocidad diferentes, se debe a la capa laminar parietal, cuyo espesor es muy pequeño en comparación del ancho del tubo.

Para caudal constante (gráfico de la izquierda), la velocidad media es constante, a medida que la pared es más lisa (curva a) la distribución de velocidades es menos variable. Mientras que si aumentamos la rugosidad (curva b ligeramente rugosa y curva c muy rugosa) la función velocidad tiene mayor variación hacia el centro de la tubería.

Para $J=$ constante y rugosidades y caudales variables (gráfico de la derecha), la rugosidad es mayor cuanto mayor es el número de cada curva, la curva I es tubería lisa y la VI es muy rugosa. Si vemos en las curvas se mantiene la relación $u_{máx} - U = constante$, y la distancia a la que se encuentra la velocidad media es.

$$z_{media} = 0,223 R \quad (3.42)$$

La Ecuación 3.42 es una de las bases de la Teoría de Von Kármán y Prandtl, la que parte de la ecuación que relaciona la velocidad máxima ($u_{máx}$) en el centro de la tubería, y la velocidad media U de la sección transversal, lo que se denomina "déficit de velocidad".

La diferencia que se aprecia en las curvas de velocidad en la vecindad de las paredes se debe a la presencia de la capa laminar parietal.

3.9 Estudio analítico de la turbulencia. Ecuación Universal de la velocidad

La turbulencia de una corriente es debida a los torbellinos, en ellos se produce el intercambio transversal de partículas fluidas, es decir, mezcla entre partículas de un filete y los vecinos y viceversa. Este intercambio de partículas tiene origen en la existencia de una componente vertical (transversal) de la velocidad de cada filete, y genera variación de la cantidad de movimiento de un filete y sus vecinos.

En la Figura 3.21 se ha graficado el zoom del diagrama de velocidades instantáneas entre dos tubos de flujo contiguos, cuyas líneas centrales de corriente son α y β . Se considera una superficie de magnitud ω , paralela al plano xy, como superficie de contacto entre los dos tubos de flujo consecutivos (α y β), ese área es pequeña por hipótesis. A través de ella hay una componente vertical, w' , del vector velocidad instantánea V .

Hay una diferencia de velocidades entre las dos líneas de corriente, α y β , una con u' y la otra con u . En la unidad de tiempo la masa de agua, que en el sentido vertical pasa de un tubo de flujo a otro a través de la superficie de contacto ω , es:

$$\left. \begin{aligned} masa &= \delta \text{ Volumen} \\ \text{Volumen} &= \omega \text{ espacio recorrido} \\ \text{espacio recorrido} &= w' dt \end{aligned} \right\} masa = \delta \omega w' dt$$

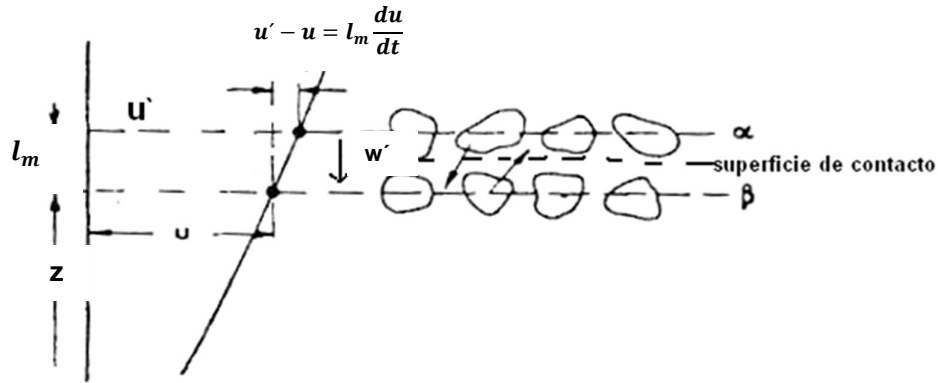


Figura 3.21. Longitud de mezcla entre dos filetes. (Dominguez S., 1999, pág. 141)

La cantidad del movimiento que en el tiempo dt , se calcula con la segunda Ley de Newton:

$$F = m a$$

$$F = \delta \omega w' dt a$$

La fuerza es la resultante de una tensión tangencial τ aplicada en la sección ω , que sería la misma en cada punto si el movimiento fuera invariable en el tiempo. Como en realidad este movimiento es muy variable, el valor de la fuerza es un valor medio del de la tensión tangencial, llamada por eso tensión tangencial aparente.

$$F = \tau \omega$$

La velocidad en cada línea de corriente, considerada como el centro de gravedad de cada tubo de flujo, es una función de la distancia de la línea de corriente respecto de la pared de la tubería (z), y considerando que la aceleración es el gradiente de velocidades en el tiempo, nos queda:

$$\tau \omega = \delta \omega w' dt \frac{du}{dt}$$

$$\tau = \delta w' du$$

Considerando las dos líneas de corriente contiguas, en una corriente cuya distribución de velocidades es conocida, $u = f(z)$, Figura 3.21, se puede aceptar que en el movimiento transversal que pueden ejecutar las partículas fluidas, conservan más o menos su forma y dimensiones. Son capaces de llegar a una distancia l_m de su ubicación original, por lo tanto, esta longitud l_m mide la magnitud de los remolinos en ese sitio de la corriente. Más allá de la distancia l_m la partícula pierde su forma y dimensión. La variación de la velocidad " du " resulta ser la diferencia entre u y u' .

$$\tau = \delta w' (u' - u)$$

Ahora bien, una partícula que salió de la línea de corriente α con velocidad u' llegó a la línea β con velocidad u , ocupando en esa línea de corriente el lugar que tenía la otra partícula, es decir que la variación de velocidad está dada por:

$$(u' - u) = l_m \frac{du}{dz}$$

Esta variación ($u' - u$) resulta numéricamente igual a la velocidad transversal w' ; que es la causa de la mezcla trasversal de la corriente, por lo tanto, la componente vertical de la velocidad w' es la que origina la variación de la magnitud de la componente horizontal u , y resulta del mismo

orden de magnitud que $(u'-u)$, lo que parece lógico, además si solamente se mira que l_m es la distancia que pueden recorrer en ese punto de la corriente los remolinos.

Por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} u' &= f(z) \\ u &= f(z) + \frac{du}{dz} \Delta z \end{aligned} \right\} u' - u = \frac{du}{dz} \Delta z$$

$$\Delta z = l_m$$

Reemplazando en la ecuación de la tensión tangencial: $w' - u = w'$

$$\tau = \delta w' \frac{du}{dz} l_m$$

$$\tau = \delta \frac{du}{dz} l_m \frac{du}{dz} l_m$$

$$\tau = \delta \left(\frac{du}{dz} \right)^2 l_m^2$$

Recordando la Ecuación 3.41, de la longitud de mezcla cercana a la pared y reemplazando el valor de la tensión de corte hidráulico en la pared τ_0 :

$$\tau_0 = \delta \left(\frac{du}{dz} \right)^2 0,4^2 z^2$$

Despejando du para luego integrar y encontrar la función velocidad instantánea:

$$du = \underbrace{\sqrt{\frac{\tau_0}{\delta}}}_{v_f} \frac{1}{0,4 z} dz$$

$$du = \frac{v_f}{0,4} \frac{dz}{z}$$

$$\int_u^{u_{m\acute{a}x}} du = \frac{v_f}{0,4} \int_z^R \frac{dz}{z}$$

Integrando:

$$\ln\left(\frac{R}{z}\right) = \ln(10) \times \log\left(\frac{R}{z}\right)$$

$$\ln(10) = 2,302$$

$$\ln\left(\frac{R}{z}\right) = 2,302 \times \log\left(\frac{R}{z}\right)$$

$$u_{m\acute{a}x} - u = \frac{v_f}{0,4} \ln\left(\frac{R}{z}\right)$$

$$\frac{u_{m\acute{a}x} - u}{v_f} = \frac{2,302}{0,4} \log\left(\frac{R}{z}\right)$$

$$\frac{u}{v_f} = \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 5,75 \log\left(\frac{R}{z}\right) \quad (3.43)$$

LEY UNIVERSAL DE VARIACIÓN DE VELOCIDADES DE PRANDTL-VON KARMAN

Donde:

u es la velocidad de una línea de corriente alejada una distancia z de la pared de la tubería.

$u_{m\acute{a}x}$ es la velocidad máxima en la sección transversal de la tubería y que ubica en el centro de la misma

v_f es uno de los parámetros definidos por Prandtl (velocidad de frotamiento)

R es el radio de la tubería

z es la distancia de la línea de corriente a la pared de la tubería.

Aplicando la Ecuación 3.43 a la velocidad media de la tubería U , y la Ecuación 3.42 a la ubicación de la misma:

$$\frac{U}{v_f} = \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 5,75 \log \left(\frac{R}{0,223 R} \right) = \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 3,75$$

$$\frac{U}{v_f} = \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 3,75 \quad (3.44)$$

La Ecuación 3.44 es el **DÉFICIT DE VELOCIDAD**, que es independiente del caudal y de la rugosidad, según las experiencias de Fritsch, Figura 3.20.

3.10 Capa laminar parietal

La viscosidad interviene siempre en las resistencias, llamadas frotamientos y solamente son despreciables en los movimientos turbulentos; una expresión completa de la tensión tangencial en estos movimientos turbulentos, sin embargo, debe abarcar, por lo tanto, todas las fuerzas que se oponen al movimiento, o sea, la tensión se compone de dos sumandos, uno producto de la viscosidad del agua y el otro producto de la inercia:

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{du}{dz}}_{\tau_{laminar}} + \underbrace{\delta l_m^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2}_{\tau_{turbulento}} \quad (3.45)$$

La Ecuación 3.45 explica la existencia de la capa laminar adherida a la pared, que se desliza lentamente en los movimientos turbulentos. En la pared la velocidad es cero, y que por lo tanto no hay componente transversal de la velocidad, tampoco hay turbulencia. La velocidad en las cercanías de la pared tiene valores muy pequeños y por ello también es pequeño el Re . El escurrimiento, cualquiera sea la forma que adquiera en el interior de la tubería, en la cercanías de la pared es laminar o estratificado. Y, por lo tanto, sólo existe el primer sumando de la Ecuación 3.45 para el cálculo de la tensión de corte hidráulico.

Si el movimiento es turbulento al interior de la tubería, hay velocidades mayores y comienza la turbulencia, y por lo tanto comienza a perder importancia el primer sumando de la Ecuación 3.45 y aumenta el valor del segundo sumando de la misma ecuación.

Cuando la velocidad es tan grande que el primer sumando se hace despreciable frente al segundo, el movimiento es francamente turbulento. En la Figura 3.22 se puede ver esta diferencia en la función velocidad, es casi lineal en las cercanías de la pared y luego se hace curva en el interior de la tubería, ilustra la repartición de velocidades, que se supone está dada por la curva a, b, d, e. En la vecindad de la pared, el tramo ab de la curva puede considerarse una recta, dada la pequeñez de la distancia a la pared z_b (distancia de b a la pared), y del gran valor que adquiere la velocidad u_1 a esa distancia de la pared.

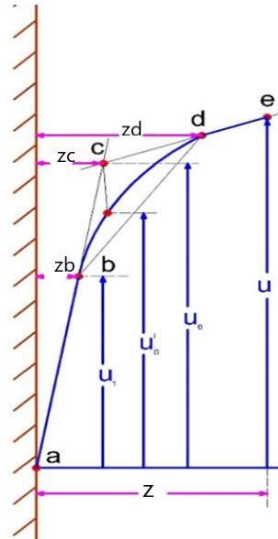


Figura 3.22. Variación de la velocidad en las cercanías de la pared de la tubería (Dominguez S., 1999, pág. 148)

El gradiente de velocidad en el punto b es:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_1}{z_b} \quad (3.46)$$

Entre el punto b y el d aparece una zona de transición en la que irá disminuyendo la importancia de las fuerzas de viscosidad y aumentando las de inercia, pues crece u , y por lo tanto, el primer sumando de la Ecuación 3.45 comienza a perder su valor relativo. En el punto d, a la distancia z_d , de la pared solamente tiene importancia el segundo sumando, que, a su vez, empezó a tomarlo desde b. En la zona “d-e” de la curva el movimiento es francamente turbulento. Tanto la magnitud z_b como z_d son muy pequeñas, de ahí es que idealizamos el fenómeno, prescindiendo de la zona (z_d-z_b) de transición, para aceptar que la capa laminar tiene un espesor z_c , que la parte recta de la curva de velocidades llega a “c” con movimiento estratificado en todo su espesor y que el movimiento turbulento comienza en c hacia e. La velocidad u_0 la llamaremos *velocidad parietal*; es la que iguala las condiciones laminares y turbulentas del movimiento. Su valor no difiere en cantidad apreciable de la u'_0 , que correspondería exactamente en la curva de velocidades a la distancia z_c . El triángulo b-c-d es de magnitud despreciable también.

En el punto de transición entre el movimiento laminar y el turbulento la Ecuación 3.45 tiene la colaboración de los dos sumandos, por lo tanto, podemos decir que ambos tienen el mismo peso ponderado y entonces se pueden igualar entre sí, recordando la Ecuación 3.27 de la tensión tangencial en el movimiento turbulento:

$$\begin{aligned} \tau_{laminar} &= \tau_{turbulento} \\ \tau_{turbulento} &= \gamma f \frac{U^2}{2g} = \delta \lambda \frac{U^2}{8} \\ \tau_{laminar} &= \mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{u_0}{z_c} \\ \mu \frac{u_0}{z_c} &= \delta \lambda \frac{U^2}{8} \end{aligned}$$

$$z_c = \frac{\mu}{\rho v} \frac{8 u_0}{\lambda U^2}$$

Llamando z_c al espesor de la capa laminar parietal, y operando:

$$z_c = v \frac{8 u_0 D}{\lambda U^2 D} = \frac{8 u_0 D}{\lambda U Re}$$

$$z_c = \frac{8 u_0 D}{\lambda U Re} \quad (3.47)$$

La Ecuación 3.47 da el espesor de la capa parietal laminar, que es función inversa del factor de resistencia λ y del Re. A medida que el Re aumenta disminuye el espesor de la capa parietal laminar.

En efecto, la Figura 3.23 muestra que cuando $\varepsilon < z_c$, la capa laminar embebe las asperezas; en cambio, si $\varepsilon > z_c$ la capa laminar es ondulada o curva, y se proyectan dentro del escurrimiento turbulento salientes y entrantes que deformando las líneas de corriente vecinas dan nacimiento a los torbellinos que se desprendan de la pared, provocando mayor turbulencia del conjunto de la corriente hacia el interior.

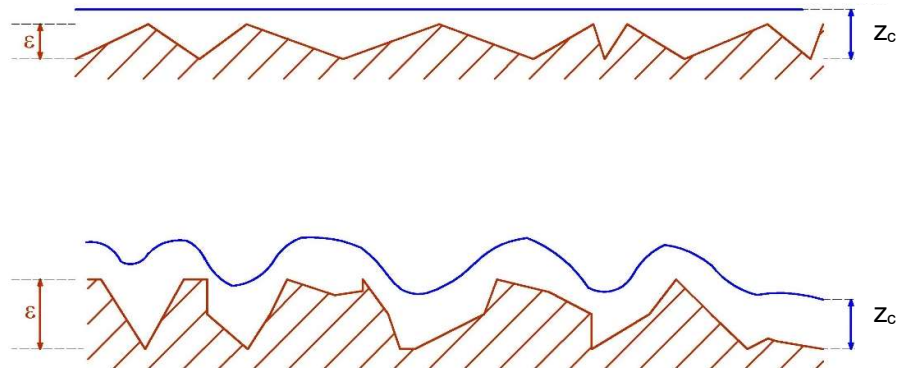


Figura 3.23. Capa laminar en tubería ($z_c > \varepsilon$) lisas y ($z_c < \varepsilon$) rugosas. (Dominguez S., 1999, pág. 150)

Tal como las experiencias de Nikuradse lo han demostrado λ aumenta con la aspereza de la pared en la transición, y por lo tanto, mientras mayor es λ , menor es el espesor de la capa laminar; es por eso que una gran aspereza de pared provoca la turbulencia, como igualmente un aumento de la magnitud de la canalización o de la velocidad, que hacen crecer el número de Reynolds.

3.11 Teoría de Prandtl Von Karman

Consiste en la aplicación de las ecuaciones ya vistas de la Ley Universal de la Distribución de la Velocidad al caso del movimiento turbulento en tuberías lisas y movimiento turbulento en tuberías rugosas.

Movimiento Turbulento en Tuberías Lisas

Si se aplica la Ecuación 3.43 al espesor de la capa parietal laminar:

$$\frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} = \frac{u_0}{v_f} + 5,75 \log \left(\frac{R}{z_c} \right)$$

Recordando que:

$$\begin{aligned}\mu \frac{u_0}{z_c} &= \delta \frac{\lambda}{8} U^2 = \delta v_f^2 \\ z_c &= \frac{u_0 \mu}{v_f^2 \delta} \\ \frac{u_0}{v_f} &= z_c \frac{\delta}{\mu} v_f\end{aligned}\tag{3.48}$$

Remplazando las ecuaciones anteriores en la Ecuación 3.43:

$$\begin{aligned}\frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} &= \frac{z_c}{v} v_f + 5,75 \log \left(\frac{R v_f^2}{u_0 v} \right) \\ \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} &= \frac{z_c}{v} v_f + \underbrace{5,75 \log \left(\frac{v_f}{u_0} \right)}_{5,70 \text{ s/Nikuradse}} + 5,75 \log \left(\frac{R v_f}{v} \right) \\ \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - \frac{U}{v_f} &= \underbrace{5,70}_{3,75 \text{ s/Fritsch}} + 5,75 \log \left(\frac{R v_f}{v} \right) - \frac{U}{v_f} \\ 3,75 &= 5,70 + 5,75 \log \left(\frac{R v_f}{v} \right) - \frac{U}{v_f} \\ \frac{U}{v_f \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} &= 5,70 - 3,75 + 5,75 \log \left(\frac{R v_f}{v} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{1,95}{\sqrt{8}} + \frac{5,75}{\sqrt{8}} \log \left(\frac{R v_f}{v} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 0,70 + 2 \log \left(\frac{R v_f \varepsilon}{v} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 0,70 + 2 \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) + 2 \log \left(\frac{v_f \varepsilon}{v} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) &= 0,70 + 2 \log \left(\frac{v_f \varepsilon}{v} \right)\end{aligned}\tag{3.49}$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO TURBULENTO EN TUBERÍAS LISAS

Movimiento Turbulento en Tuberías Rugosas

La Ecuación 3.43 se aplica a la capa parietal laminar, y remplazando $z=z_c$ y la velocidad $u=u_0$:

$$\begin{aligned}\frac{u}{v_f} &= \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 5,75 \log \left(\frac{R}{z} \right) \\ \frac{u_0}{v_f} &= \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 5,75 \log \left(\frac{R}{z_c} \right)\end{aligned}\tag{3.43}$$

Si reemplazamos la $u_{m\acute{a}x}/v_f$, en la Ecuación 3.43

$$\begin{aligned}\frac{u_0}{v_f} &= \frac{u}{v_f} + 5,75 \log \left(\frac{R}{z} \right) - 5,75 \log \left(\frac{R}{z_c} \right) \\ \frac{u}{v_f} &= \frac{u_0}{v_f} - 5,75 \log \left(\frac{R}{z} \right) + 5,75 \log \left(\frac{R}{z_c} \right)\end{aligned}$$

Agrupando el término del logaritmo:

$$\begin{aligned}\frac{u}{v_f} &= \frac{u_0}{v_f} + 5,75 \log\left(\frac{Rz}{z_c R}\right) \\ \frac{u}{v_f} &= \frac{u_0}{v_f} + 5,75 \log\left(\frac{z}{z_c}\right)\end{aligned}\quad (3.50)$$

El valor de z_c en función del valor de la aspereza absoluta de la pared de la tubería (ε), se puede tomar proporcional al mismo.

$$z_c = m \varepsilon$$

Donde:

z_c es el espesor de la capa laminar parietal
 ε es el valor absoluto de la aspereza parietal
 m es un coeficiente de forma de la aspereza

Remplazando en la Ecuación 3.50:

$$\begin{aligned}\frac{u}{v_f} &= \frac{u_0}{v_f} + 5,75 \log\left(\frac{z}{m \varepsilon}\right) \\ \frac{u}{v_f} &= \frac{u_0}{v_f} - \underbrace{5,75 \log m}_{8,48 \text{ s/Nikuradse}} + 5,75 \log\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \\ \frac{u}{v_f} &= 8,48 + 5,75 \log\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\end{aligned}\quad (3.51)$$

Aplicando la Ecuación 3.51 en el centro de la tubería queda:

$$\frac{u_{max}}{v_f} = 8,48 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)$$

Introduciendo la velocidad media U en cada miembro:

$$\begin{aligned}\frac{u_{max}}{v_f} - \frac{U}{v_f} &= 8,48 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{v_f} \\ \frac{u_{max}}{v_f} - \frac{U}{v_f} &= 8,48 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{v_f} \\ \underbrace{\frac{u_{max}}{v_f} - \frac{U}{v_f}}_{3,75 \text{ s/Fritsch}} &= 8,48 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{v_f} \\ \frac{U}{v_f} &= 8,48 - 3,75 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \\ \frac{U}{v_f} &= 4,73 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \\ \frac{U}{U \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} &= 4,73 + 5,75 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{4,73}{\sqrt{8}} + \frac{5,75}{\sqrt{8}} \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 1,7 + 2 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) = 1,70 \quad (3.52)$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO TURBULENTO EN TUBERÍAS RUGOSAS

Esta expresión completa la idea de la existencia de tres tipos de movimientos turbulentos:

- ✓ TURBULENTO EN TUBERÍA LISA
- ✓ TURBULENTO EN TUBERÍA RUGOSA
- ✓ TURBULENTO DE TRANSICIÓN

En el primer caso la pérdida de carga o energía crece en función de la aspereza de las paredes y de la velocidad del fluido, mientras que, para los tubos rugosos, la pérdida de energía es independiente de la velocidad de escurrimiento.

Mientras que para el movimiento de transición no hay una función establecida al respecto en esta etapa de estudio.

La Figura 3.24 muestra las mismas experiencias de Nikuradse de la Figura 3.17, donde hay distintas curvas para distintas rugosidades relativas, resumidas en una sólo curva al expresar en función de λ y del espesor de la capa laminar parietal.

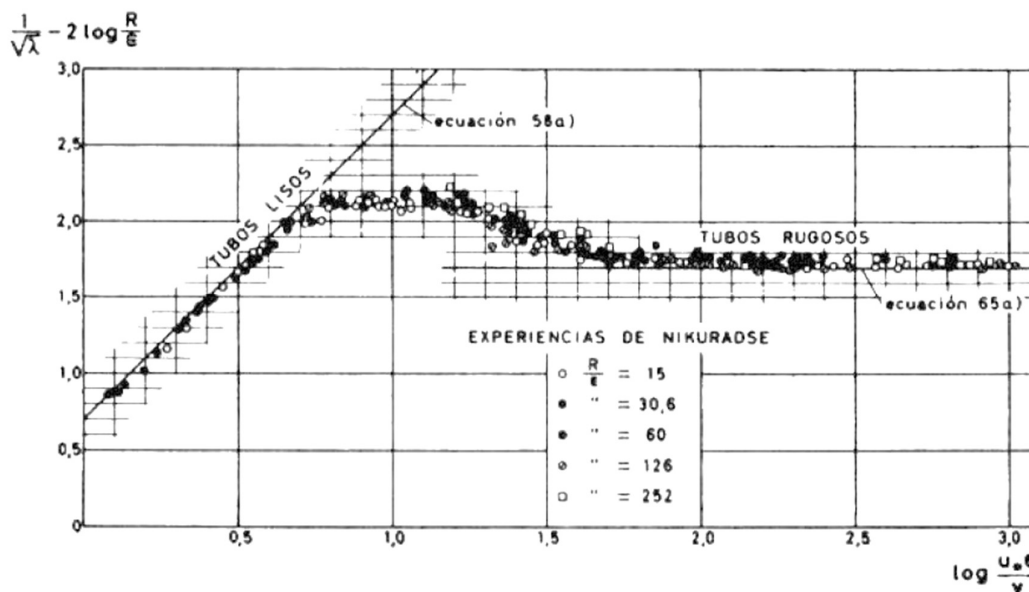


Figura 3.24. Gráfico de Prandtl. (Dominguez S., 1999, pág. 164)

3.12 Ejercitación sobre Movimiento Turbulento

Ejercicio 3.11. Sotelo Ávila (1997)

El flujo turbulento en tubería lisa se produce con una velocidad media de 0,61 m/s. Para $Re = 10^5$ y $Re = 10^3$; clasificar los movimientos según las experiencias de Nikuradse, determinar el factor λ y la velocidad máxima.

Para $Re = 100.000$ es movimiento turbulento

Cálculo de λ

Para tubería lisa: $\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} = \frac{0,316}{100.000^{0,25}} = 0,018$

Cálculo de $u_{máx}$

Recordando:

$$\frac{U}{v_f} = \frac{u_{m\acute{a}x}}{v_f} - 3,75$$

Entonces.

$$u_{m\acute{a}x} = U + 3,75 v_f$$

$$v_f = U \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{0,61m}{s} \sqrt{\frac{0,018}{8}} = 0,03 m/s$$

$$u_{m\acute{a}x} = 0,61 \frac{m}{s} + 3,75 \times 0,03 \frac{m}{s} = 0,72m/s$$

Para $Re = 100.000$; $\lambda=0,018$; $u_{m\acute{a}x}=0,72 m/s$; movimiento turbulento

Para $Re= 1000$ es movimiento laminar

Cálculo de λ

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1000} = 0,064$$

Cálculo de $u_{m\acute{a}x}$

$$u_{m\acute{a}x} = 2 U = 2 \times 0,61 \frac{m}{s} = 1,22 m/s$$

Para $Re = 1000$; $\lambda=0,064$; $u_{m\acute{a}x}=1,22 m/s$; movimiento laminar

Ejercicio 3.12

Una bomba acoplada a una tubería desarrolla una carga excesiva igual a 15 m con un caudal igual a 100 l/s. Determinar la longitud de la tubería lisa horizontal que puede ser acoplada a la bomba, si el diámetro es 0,30 m, la temperatura del agua es 20°C ($\nu = 1,007 \cdot 10^{-6} m^2/s$).

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,1 m^3/s}{\frac{\pi (0,3m)^2}{4}} = 1,42m/s$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{1,42 \frac{m}{s} \times 0,3 m}{1,007 \cdot 10^{-6} m^2/s} = 4,22 \cdot 10^5$$

Mayor a 2000, es movimiento turbulento, se adopta la ecuación de Blasius

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} = \frac{0,316}{(4,22 \cdot 10^5)^{0,25}} = 0,012$$

$$\Delta = J l = \frac{\lambda U^2 l}{2 g D}$$

Si se considera que la carga hidráulica generada por la bomba se gasta por completo en pérdida de energía por frotamiento, se puede despejar la longitud que el agua puede recorrer con esa energía $H=15m=\Delta$:

$$l = \frac{\Delta 2 g D}{\lambda U^2} = \frac{15m \times 2 \times 9,81 \frac{m}{s^2} \times 0,3m}{0,012 \times (1,42m/s)^2} = 3554 m$$

Ejercicio 3.13. Giles, Evett & Cheng (1994)

Determinar la tensión de corte hidráulico en las paredes de un tubo de 30 cm de diámetro cuando el caudal de 170 l/s de agua causa una pérdida de carga de 15 m en una longitud de 300 m. Determinar además la tensión de corte hidráulico a una distancia de 5 cm desde el centro de la tubería ($r=0,05m$), la velocidad de frotamiento y el factor de fricción asociado. Ejercicio adaptado de ejercicio 8.8 Mecánica de los Fluidos e Hidráulica (Giles, Evett, & Cheng, Mecánica de los Fluidos e Hidráulica, 1994, pág. 171)

Cálculo de U

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,17 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi (0,3\text{m})^2}{4}} = 2,41\text{m/s}$$

Cálculo de J

$$J = \frac{\Delta}{L} = \frac{15\text{m}}{300\text{m}} = 0,05$$

Cálculo de la tensión de corte parietal τ_o

$$\tau_o = \gamma \times R_H \times J = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \times \frac{0,3\text{m}}{4} \times 0,05 = 3,75 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

Cálculo de la tensión de corte a 5cm desde el centro de la tubería τ

$$\tau = \tau_o \times \frac{r}{R} \Rightarrow r = 0,05\text{m} \wedge R = 0,15\text{m}$$

$$\tau = 3,75 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \times \frac{0,05\text{m}}{0,15\text{m}} = 1,25 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

Cálculo de la velocidad de frotamiento

$$v_f = \sqrt{\frac{\tau_o}{\delta}} = \sqrt{\frac{\tau_o \times g}{\gamma}} = \sqrt{3,75 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} \frac{9,81 \text{ m}^3 \text{ m}}{1000 \text{ kgf s}^2}} = 0,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cálculo de λ

$$J \times D = \lambda \frac{U^2}{2g} \Rightarrow \lambda = \frac{2g \times J \times D}{U^2} = 2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{0,05 \times 0,3\text{m}}{\left(2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 0,051$$

Ejercicio 3.14

Calcular la pérdida de carga en un tubo de vidrio de 2 cm de diámetro (tubería lisa) que tiene una descarga de 2 l/s. Considerar una $\nu=1,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Respuesta: la pérdida de carga unitaria del tubo de vidrio es $J=1,85$.

Ejercicio 3.15

Determinar el régimen de escurrimiento de un líquido y el factor de resistencia λ que hay en el espacio intertubular de un intercambiador de calor de hierro galvanizado ($\varepsilon=0,15\text{mm}$), un diámetro de 0,021m, una velocidad media $U=0,77\text{m/s}$, una viscosidad $\mu=1,2 \cdot 10^{-3}\text{Pa s}$, y una densidad de 1150 kg/m^3 .

Respuesta: Régimen Turbulento, $Re=1,55 \cdot 10^4$, según Blassius $\lambda=0,028$, según Moody $\lambda=0,038$, según Movimiento Turbulento en Tubería Lisa $\lambda=0,0265$.

Ejercicio 3.16. Giles, Evett & Cheng (1994)

Determinar la pérdida de carga en un tramo de tubería lisa de 30cm de diámetro y 1000m de longitud, cuando la velocidad llega a 1,50m/s, mientras fluye agua a 15°C ($\nu=1,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) y cuando circula fuel-oil a la misma temperatura ($\nu=4,42 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Respuesta: pérdida de carga del agua 4,81m, pérdida de carga del fuel-oil 6,76m.

Ejercicio 3.17

Considerando una tubería de diámetro de 200 mm y una viscosidad cinemática de $1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Calcular las coordenadas en el Gráfico Universal de Prandtl de un punto del Gráfico de Nikuradse cuyas coordenadas son:

- ✓ $\log Re=4,80$
- ✓ $\log 100\lambda=0,65$
- ✓ $\varepsilon/R=1/30$

Respuesta: abcisa=1,90, ordenada=1,78. Movimiento Turbulento en tubería rugosa.

Ejercicio 3.18

Calcular la pérdida de energía por fricción en un tramo de tubo liso donde fluye aceite con una velocidad media de 3 m/s. La longitud de la tubería es de 153m, el diámetro de 0,10m, el peso específico de 930 kgf/m^3 y la viscosidad dinámica es de $0,00486 \text{ kgf s/m}^2$.

Respuesta: $J \text{ (m/m)}=0,17$ y $\Delta=25,36\text{m}$

Ejercicio 3.19

Se sabe que la pérdida de carga de 4 m de tubería de 100 mm de diámetro es de $1,2 \text{ kgf m/kgf}$ de fluido, cuando fluye aceite de $0,93 \text{ kg/l}$ de densidad y $0,038 \text{ (N s/m}^2)$ de viscosidad con una descarga de 50 l/s. Determinar el tipo de flujo, la velocidad en la línea central y el esfuerzo de corte en la pared de la tubería.

Respuesta: Movimiento Turbulento, $u_{\text{máx}}=7,39\text{m/s}$; $\tau_o=68,42\text{N/m}^2$

Ejercicio 3.20

Por una tubería circular cuyo valor del factor de resistencia es de 0,0154 fluye vapor con un peso específico de 38N/m^3 a una velocidad media de 35m/s. ¿Cuál es el esfuerzo cortante, o tensión de corte hidráulico, en la pared de la tubería?

Respuesta: $\tau_o=9,13\text{N/m}^2$

4. Tablas

A continuación, se transcriben algunos datos de interés organizados en tablas y extraídos de las referencias.

Tabla 3.1. Densidad, viscosidad dinámica y viscosidad cinemática del agua a distintas temperaturas. Mecánica de los Fluidos (C. & Wiggert, 2003)

Temperatura T (°C)	Densidad δ (kg/m ³)	Viscosidad dinámica $\mu \cdot 10^{-3}$ (N s/m ²)	Viscosidad cinemática $\nu \cdot 10^{-6}$ (m ² /s)
0	999,9	1,792	1,792
5	1000	1,519	1,519
10	999,7	1,308	1,308
15	999,1	1,14	1,141
20	998,2	1,005	1,007
30	995,7	0,801	0,804
40	992,2	0,656	0,661
50	988,1	0,549	0,556
60	983,2	0,469	0,477
70	977,8	0,406	0,415
80	971,8	0,357	0,367
90	965,3	0,317	0,328
100	958,4	0,284	0,296

Tabla 3.2. Densidad del agua a distintas temperaturas para una presión de una (1) atmósfera. (https://www.ugr.es/~elenasb/teaching/densidadtemperatura_agua_tabla.pdf, 2018)

Temperatura (°C)	Densidad (kg/m ³)	Temperatura (°C)	Densidad (kg/m ³)	Temperatura (°C)	Densidad (kg/m ³)
0(hielo)	917,00	33	994,76	67	979,34
0	999,82	34	994,43	68	978,78
1	999,89	35	994,08	69	978,21
2	999,94	36	993,73	70	977,63
3	999,98	37	993,37	71	977,05
4	1000,00	38	993,00	72	976,47
5	1000,00	39	992,63	73	975,88
6	999,99	40	992,25	74	975,28
7	999,96	41	991,86	75	974,68
8	999,91	42	991,46	76	974,08
9	999,85	43	991,05	77	973,46
10	999,77	44	990,64	78	972,85
11	999,68	45	990,22	79	972,23
12	999,58	46	989,80	80	971,60
13	999,46	47	989,36	81	970,97
14	999,33	48	988,92	82	970,33
15	999,19	49	988,47	83	969,69
16	999,03	50	988,02	84	969,04
17	998,86	51	987,56	85	968,39
18	998,68	52	987,09	86	967,73
19	998,49	53	986,62	87	967,07
20	998,29	54	986,14	88	966,41
21	998,08	55	985,65	89	965,74
22	997,86	56	985,16	90	965,06
23	997,62	57	984,66	91	964,38
24	997,38	58	984,16	92	963,70
25	997,13	59	983,64	93	963,01
26	996,86	60	983,13	94	962,31
27	996,59	61	982,60	95	961,62
28	996,31	62	982,07	96	960,91
29	996,02	63	981,54	97	960,20
30	995,71	64	981,00	98	959,49
31	995,41	65	980,45	99	958,78
32	995,09	66	979,90	100	958,05

5. Capa límite

La introducción de un cuerpo o la variación más o menos brusca de la forma de los contornos en una corriente origina la modificación de ésta en las cercanías de la superficie del cuerpo. Esa zona modificada es lo que se denomina "capa límite". La modificación consiste en una disminución de la velocidad de la corriente. A veces sucede el fenómeno a la inversa, pues se trata de un cuerpo que se mueve en un fluido en reposo, originándose la modificación del reposo en la cercanía del cuerpo.

En un cuerpo en reposo introducido en una corriente la velocidad que tiene que ser nula en la superficie misma, crece hacia el interior de la corriente hasta adquirir a poca distancia la velocidad de la corriente, esta zona es la capa límite, Figura 3.25.

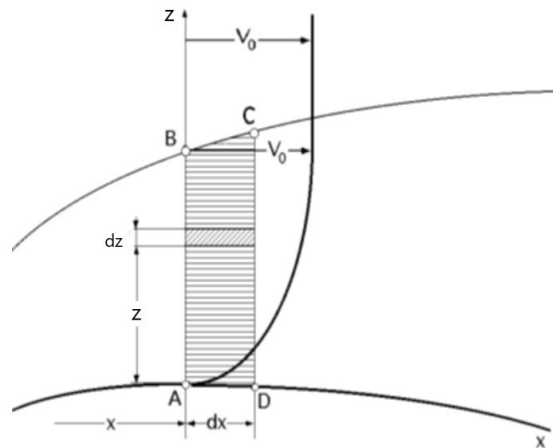


Figura 3.25. Capa límite

En el caso de un cuerpo que se traslada en un fluido en reposo, pegado a la superficie del cuerpo, el fluido adquiere la velocidad de él, disminuyendo hacia el interior del fluido rápidamente, para quedar en reposo a poca distancia del cuerpo móvil.

Imaginemos una placa fija inmóvil sumergida en una corriente paralela de fluido viscoso con velocidad uniforme e igual a v_0 , Figura 3.26. El fluido que está en contacto con la placa por adherencia queda fijo, de modo que tiene velocidad cero y las capas de fluido hacia el exterior de la placa sufren un frenado de la velocidad v_0 . En las vecindades de la placa se va a desarrollar la capa límite, que es el espacio entre dicha superficie y la distancia a la cual se produce el 99% de la velocidad del fluido v_0 . O, dicho de otra manera, el espesor de la capa límite se define, convencionalmente, como la distancia desde la superficie al punto en que su velocidad difiere de la velocidad del fluido en un 1%, y corresponde al área sombreada de la Figura 3.26.

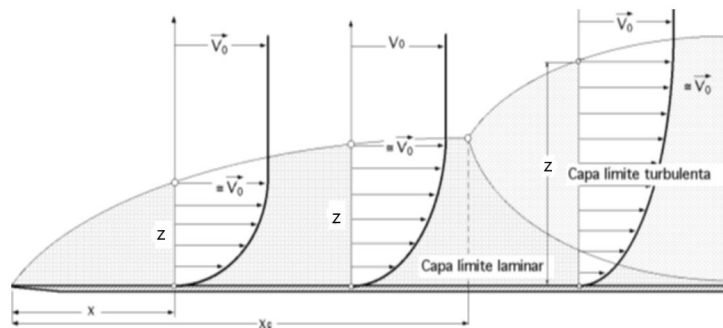


Figura 3.26. Capa límite en placa fija inmóvil

La importancia de la capa límite radica en la presencia de la misma en fluidos poco viscosos, como el agua y el aire.

En toda la superficie misma del cuerpo la velocidad del fluido es nula. En el vértice de la placa comienza la capa límite sin espesor y sin velocidad, en un punto de coordenada x ya se ha modificado la velocidad de la corriente y dicha modificación tiene un espesor z , más apreciable. El movimiento dentro de la capa límite hasta x_0 es ordenado o laminar. A partir de x_0 llega un momento en que toda ella no puede ser laminar y se hace turbulenta, lo que se muestra esquemáticamente en la figura. El paso de la capa límite laminar a la turbulenta no es brusco existe una transición.

Con lo dicho se ve que el espesor variable z de la capa límite, y la aparición de la parte turbulenta dependen de la velocidad de la corriente v_0 , de la distancia x al comienzo de la capa límite y naturalmente de la viscosidad del fluido; por esto es que un parámetro lógico es el número de Reynolds especial, de distancia

$$\frac{v_0 \times x}{\nu} = Re_d \quad (3.53)$$

El espesor de la capa límite del movimiento turbulento quedará definido por:

$$z_x = \frac{k_x}{\sqrt{Re_d}} \quad (3.54)$$

donde tomará valores de $k_x = 4,9$ para movimiento laminar y de $k_x = 0,38$ para el turbulento.

A lo largo de la placa plana la capa límite crece hacia aguas abajo, cuando el gradiente de presiones es nulo. Mientras que si la presión disminuye hacia aguas abajo, como es el caso de una sección que disminuye en su forma hacia aguas abajo, la capa límite tiende a reducir su espesor.

En los cuerpos redondeados, especialmente en los de gran curvatura, o simplemente en un contorno de la corriente con esas características, es fácil que se produzca en la superficie del contorno un gradiente positivo de presión, en el sentido de la corriente, lo que origina una variación o correlativa gradiente inversa de velocidad, la que puede llegar a anularse. Donde la velocidad se anule la capa límite se desprende de la pared originando lo que se denomina "despegue de la capa límite". En la Figura 3.27, el despegue se produce en A. En este punto, el gradiente de velocidad que era positivo aguas arriba, en la vecindad de la pared y que venía disminuyendo hacia A, se anula en la pared en A, y aguas abajo se hace negativo, es decir que la velocidad, en las cercanías de la pared toma el sentido inverso del que tenía aguas arriba de A. Desde el punto de despegue en la zona de despegue, se produce un remolino con gran turbulencia y gran disipación de la energía de la corriente.

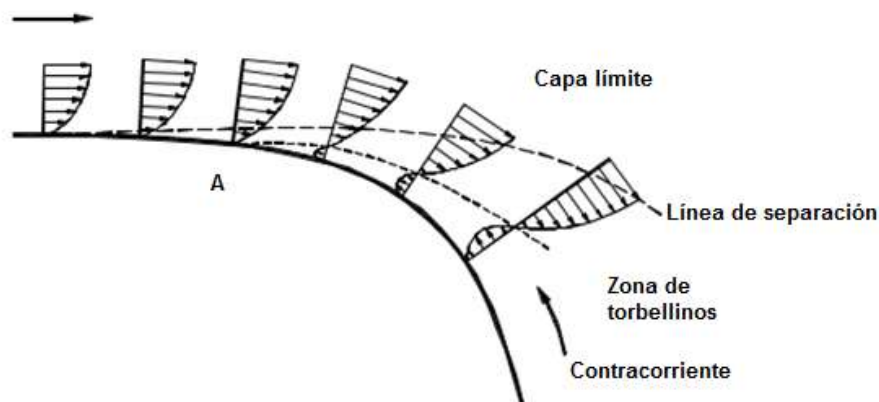


Figura 3.27. Separación de capa límite. Adaptado de Hidráulica de Tuberías y Canales (Rocha Felices, 2007)

Si se considera, por ejemplo, una esfera inmóvil en una corriente de fluido perfecto, es decir sin viscosidad, la menor distancia entre las líneas de corriente en las vecindades de la esfera, Figura 3.28 (a), revela mayor velocidad a medida que se acerca a la esfera, o sea menor presión; es decir, que se desarrolla un gradiente negativo de presión y luego uno positivo. Como se trata de un fluido perfecto el movimiento tiene que ser irrotacional y estratificado, es por lo tanto, imposible la separación. En cambio, si se trata de un fluido real, viscoso, Figura 3.28 (b), existiendo hacia aguas abajo un gradiente positivo de presión (correlativo a uno negativo de velocidad), se produce el despegue seguido de una zona de remolinos o estela de separación, donde hay gran disipación de energía.

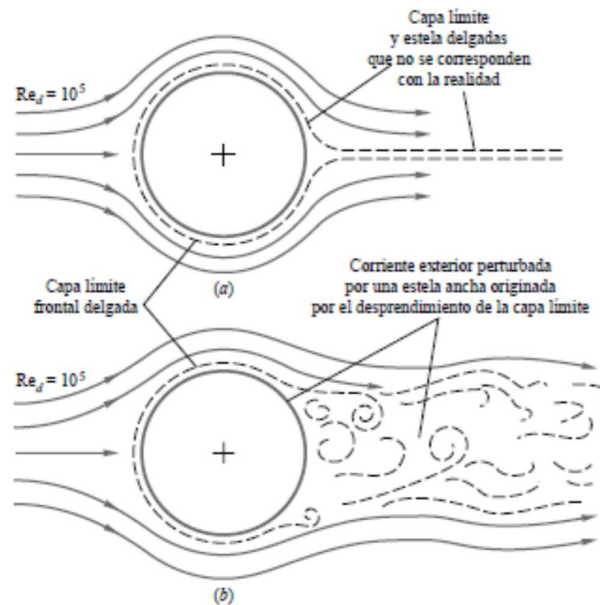


Figura 3.28. Representación de un flujo alrededor de un cuerpo redondeado. a) flujo ideal b) flujo real (White, 2004, pág. 439)

Mientras mayor sea el $Re_d \left(\frac{v_0 \times x}{\nu} = Re_d \right)$ más hacia aguas abajo se situará el punto de despegue. La capa límite crecerá de espesor hacia atrás del cuerpo despegándose. Si la superficie de la esfera es rugosa aparece antes la capa límite turbulenta lo que echa hacia aguas abajo el punto de separación. Si se produce la separación en la capa límite laminar, la estela de remolinos es relativamente mayor, y por lo tanto la pérdida de energía mayor también. La turbulencia favorece pues la unión de la capa límite al cuerpo, en cambio la estratificación anticipa la separación.

La resistencia de forma es la que se produce debido a un gradiente de presiones adverso que se origina al desprenderse la capa límite y que depende de la forma del contorno.

El problema de la capa límite resulta de las consecuencias que implica el despegue, esto es, la gran pérdida de energía en los remolinos, Figura 3.29. La existencia de ellos implica la aparición de tensiones de corte o tangenciales, siendo mayores que las que habrían sido si no estuviera el sólido.



Figura 3.29. Desprendimiento de torbellinos de un cilindro circular sumergido en una corriente estacionaria. (White, 2004, pág. 305)

Para determinar estas tensiones, se suponen dos placas, una fija (la del sólido) y otra móvil (la de la capa límite), y aplicando la tensión tangencial de Newton:

$$\tau = \frac{F}{\omega} = \mu \frac{u}{\frac{z}{\omega}} = \mu \frac{v_0}{z_x}$$

gradiente

Si:

$$z_x = \frac{k_x}{\sqrt{Re_d}}$$

Reemplazando y operando

$$\tau = \mu v_0 \frac{\sqrt{Re_d}}{k_x} \frac{2g}{\delta v_0^2} \frac{\delta v_0^2}{2g}$$

Llamando coeficiente de forma o empuje:

$$cf = \mu \frac{\sqrt{Re_d}}{k_x} \frac{2g}{\delta v_0}$$

$$\tau = cf \frac{\delta v_0^2}{2g} \tag{3.55}$$

Estas tensiones son la causa de considerables empujes que actúan sobre las estructuras, por lo que, en casos especiales, hay que tenerlos muy en cuenta.

6. Referencias y Bibliografía

- C., P. M., & Wiggert, D. C. (2003). *Mecánica de Fluidos* (3° ed.). México: Ediciones PARANINFO S.A.
- Dominguez S., F. J. (1999). *Hidráulica* (6° ed.). Santiago, Chile: Universitaria.
- Giles, R. V. (1970). *Mecánica de los Fluidos e Hidráulica* (2° ed.). España: McGraw Hill.
- Giles, R. V., Evett, J. B., & Cheng, L. (1994). *Mecánica de los Fluidos e Hidráulica* (3° ed.). España: McGraw-Hill.
- http://fluidos.eia.edu.co/hidraulica/laminar_turbulento.htm. (s.f.). Recuperado el 25 de setiembre de 2018
- https://www.ugr.es/~elenasb/teaching/densidadtemperatura_agua_tabla.pdf. (27 de setiembre de 2018).
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/pfric.html> (27 de setiembre de 2018)
- Mataix y Plana, C. (1986). *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas* (2° Edición ed.). Madrid, España: Ediciones Del Castillo S.A.
- Mott, R. L. (1996). *Mecánica de fluidos aplicada* (4° ed.). Mexico: Prentice Hall.
- Rocha Felices, A. (2007). *Hidráulica de Tuberías y Canales*. Universidad Nacional de Ingeniería. Facultad de Ingeniería Civil.
- Sotelo Ávila, G. (1997). *Hidráulica General. Volumen 1 Fundamentos*. D.F, México: LIMUSA S.A.
- Valiente Bardera, A. (2002). *Problemas de Flujo de Fluidos* (2° Edición ed.). D.F., Mexico: Limusa S.A.
- White, F. M. (2004). *Mecánica de los Fluidos* (5° ed.). Madrid, España: Mc Graw Hill.