

Universidad Nacional de Cuyo - Facultad de Ingeniería

Hidráulica General

UNIDAD IV

Canalizaciones Cerradas

Profesora Titular: Patricia Susana INFANTE

Profesor Adjunto: Luis Enrique GUIASOLA

Profesora Adjunta: Sara RODRIGUEZ

Ayudante de Primera: Alejandra PUNTA

Estudiante Colaborador: Tomás Dionisio CARDOZO

2021

Contenido. Movimiento permanente en tuberías. Ecuación de la tubería. Cálculo hidráulico. Diagrama de Moody. Fórmulas experimentales. Cañerías cortas y largas. Perfil geométrico e hidráulico. Tubería de caudal variable. Servicio en ruta. Diseño de redes cerradas y abiertas de tuberías. **Movimiento en tuberías de fluidos en general.** Diseño de tuberías que conducen gases y líquidos viscosos. **Movimiento impermanente en tuberías:** ecuaciones de Saint-Venant. Golpe de ariete: descripción del fenómeno, cálculo de la celeridad de la onda, sobrepresión, influencia del tiempo de cierre.

ÍNDICE

| | |
|--|----------|
| IV. UNIDAD IV | 3 |
| 1. Movimiento permanente en tuberías | 3 |
| 1.1 Ecuación de la tubería | 3 |
| 1.2 Cálculo de J para movimiento laminar | 5 |
| 1.3 Cálculo de J para movimiento turbulento | 6 |
| 1.4 Cálculo de J a través de fórmulas experimentales para el movimiento turbulento ... | 9 |
| 1.5 Diagrama de Moody | 14 |
| 1.6 Aspereza o rugosidad de la tubería. Variación en el tiempo (tuberías metálicas) .. | 19 |
| 1.7 Formas de Cálculo. Uso del Gráfico de Moody..... | 20 |
| 1.8 Pérdidas de Carga Singulares | 22 |
| 1.9 Cuantificación de pérdidas de carga singulares..... | 23 |
| 1.10 Ejercicios sobre tuberías | 26 |
| 1.11 Perfil geométrico e hidráulico de una tubería | 51 |
| 1.12 Tubería de diámetro variable | 53 |
| 1.13 Velocidad Límite | 54 |
| 1.14 Tubería de caudal variable | 55 |
| 1.15 Cálculo de redes de tuberías | 59 |
| 1.16 Red abierta de tuberías | 59 |
| 1.17 Ejercicios de redes abiertas..... | 61 |
| 1.18 Red Cerrada de tuberías | 67 |
| 1.19 Ejercicios de red cerrada de tuberías (aplicación del Método de Cross)..... | 70 |
| 2. Movimiento en tuberías de fluidos en general | 76 |
| 2.1 Ecuaciones para fluidos incompresibles | 76 |
| 2.2 Ejercicios de tuberías con fluidos incompresibles distintos del agua..... | 77 |
| 2.3 Ecuaciones para fluidos compresibles (gases) | 79 |
| 2.4 Ejercicios de tuberías con fluidos compresibles..... | 83 |
| 3. Movimiento impermanente en tuberías | 87 |
| 3.1 Primera Ecuación de Saint-Venant..... | 87 |
| 3.2 Segunda Ecuación de Saint-Venant..... | 89 |
| 3.3 Golpe de Ariete..... | 93 |
| 3.4 Teoría de Allieve. Soluciones de las ecuaciones diferenciales | 94 |
| 3.5 Celeridad de la Onda..... | 96 |
| 3.6 Descripción del Fenómeno | 97 |
| 3.7 Sobrepresión Máxima..... | 100 |
| 3.8 Ejercicio de aplicación | 103 |
| 3.9 Métodos para controlar el golpe de ariete..... | 104 |
| 4. Anexo de Tablas | 106 |
| 5. Referencias y Bibliografía | 108 |

IV. UNIDAD IV

En el capítulo anterior se han desarrollado los conceptos necesarios para el diseño de tuberías en Movimiento Permanente Uniforme, y en este Capítulo IV se comienza con el estudio y análisis de los casos aplicados a tuberías comerciales, tanto en redes abiertas, como cerradas. Y, como una aplicación específica, se incluye el estudio del movimiento impermanente en tuberías, y la aplicación de dichos conceptos al caso del golpe de ariete.

El objetivo de esta unidad es capacitar en el diseño de redes abiertas y cerradas de tuberías que conducen agua. Además de introducir los conceptos necesarios para el diseño de redes abiertas de tuberías que conducen fluidos en general. Asimismo, la inclusión del fenómeno del golpe de ariete en el diseño y funcionamiento de una conducción cerrada.

1. Movimiento permanente en tuberías

1.1 Ecuación de la tubería

Se inicia el estudio del comportamiento del agua fluyendo en tuberías cerradas con el estudio del Movimiento Permanente Uniforme (MPU), considerando siempre a las cañerías trabajando a presión. El objetivo es el diseño de este tipo de conducciones, para lo cual hay que evaluar las pérdidas de carga o de energía. De esta forma se determinará, entre otras variables en juego, el caudal de escurrimiento.

Según lo anteriormente estudiado, las pérdidas de carga en tuberías corresponden a los frotamientos y a la presencia de las singularidades.

Las pérdidas de energía por frotamiento son pérdidas de energía continuas originadas por la circulación de un fluido viscoso a través de un conducto cerrado. Mientras que las pérdidas de energía singulares o localizadas son pérdidas ubicadas en ciertos puntos de la tubería, donde existen cambios de dirección del flujo, de diámetro o de velocidad, por ejemplo, estrechamientos, ensanchamientos, codos y válvulas entre otros.

Inicialmente se cuantificarán las pérdidas de energía por frotamiento.

Para empezar el estudio analítico de este problema se plantea una porción de longitud " l " de una tubería en la cual escurre un caudal conocido Q , limitada por dos secciones transversales denominadas 1 y 2, Figura 4.1. Para que la porción líquida aislada se encuentre en equilibrio es necesario colocar las fuerzas que ejerce el resto del fluido sobre la parte bajo estudio, o sea, las presiones ejercidas por el resto del fluido en las dos secciones transversales mencionadas, son dos vectores (p_1 y p_2) aplicados en el baricentro de cada sección y de sentido contrario; también se consideran los vectores velocidad media " U " aplicados también en los baricentros de cada sección transversal.

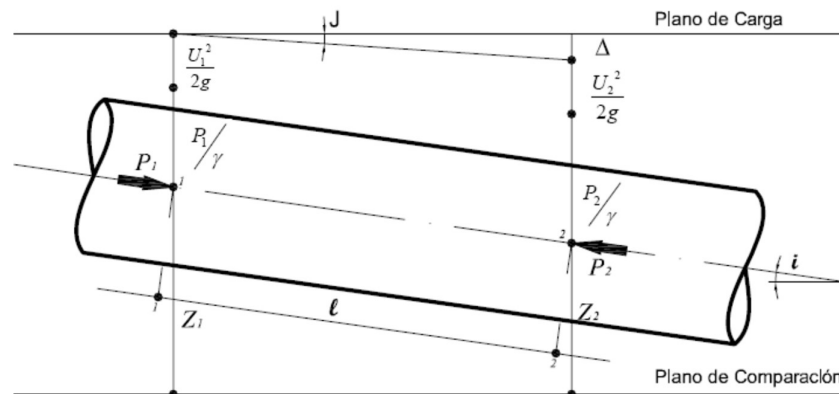


Figura 4.1. Análisis de una sección de tubería

Se define un Plano de Comparación o referencia, a partir del cual se miden las energías que componen el Teorema de Bernoulli.

Se define como Eje Hidráulico (EH) de una tubería a la línea que une los baricentros de las sucesivas secciones transversales, y en ese eje se encuentran aplicados los vectores presión “ p ” y velocidad media “ U ”.

Aplicando el Teorema de Bernoulli a las dos secciones mencionadas, llegamos a la siguiente expresión, que resulta en la suma de la energía de posición, energía de presión y energía de velocidad de cada sección transversal.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta \quad (4.1)$$

Donde:

- z_1 es la cota del baricentro de la sección 1 respecto al plano de comparación, en m
- z_2 es la cota del baricentro de la sección 2 respecto al plano de comparación, en m
- p_1 es la presión en el baricentro de la sección 1, en kg/m^2
- p_2 es la presión en el baricentro de la sección 2, en kg/m^2
- γ es el peso específico del agua, en kg/m^3
- U_1 es la velocidad media en la sección 1, en m/s
- U_2 es la velocidad media en la sección 2, en m/s
- g es la aceleración de la gravedad, en m/s^2
- Δ es la pérdida de carga o de energía entre las secciones 1 y 2, en m

Si hay MPU el caudal será constante en el espacio y en el tiempo, y si las secciones transversales son iguales, considerando la ecuación de la continuidad, resulta que las velocidades medias en ambas secciones también serán iguales.

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2$$

$$\Omega_1 = \Omega_2$$

$$U_1 = U_2$$

Y, por lo tanto, la ecuación 4.1 se reduce a:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \Delta$$

Considerando que la suma de la cota de posición “ z ” y la de presión “ p/γ ” se denomina COTA PIEZOMÉTRICA, entonces la pérdida de carga resulta igual a la diferencia de cotas piezométricas, la que se denomina H , como se ve a continuación:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = CP_1 \text{ (cota piezométrica en 1)}$$

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = CP_2 \text{ (cota piezométrica en 2)}$$

$$CP_1 - CP_2 = \Delta = H \quad (4.2)$$

Es decir, que la pérdida de carga Δ se calcula como la diferencia de cotas piezométricas, indicada con la letra H . La ecuación 4.2 se la conoce como la **ECUACIÓN DE LA TUBERÍA**.

Recordando que la pérdida de carga es producto del frotamiento de los distintos tubos de flujo entre sí y del líquido con la pared de la tubería, se la puede cuantificar a través de la pérdida de carga por unidad de peso y de longitud, indicada con la letra J , mediante la expresión siguiente:

$$\Delta = \int_1^2 J dx = J l \quad (4.3)$$

Si se reemplaza la Ecuación 4.3 en la 4.2, queda expresada otra forma de la **ECUACIÓN DE LA TUBERÍA**:

$$H = \Delta = J l$$
$$J = \frac{H}{l} \quad (4.4)$$

Esta expresión indica que la diferencia de cotas piezométricas entre dos puntos de una tubería, H , dividida la longitud real que el agua recorre entre esos dos puntos, permite calcular la pérdida de carga unitaria J (Pérdida de carga unitaria promedio), en m/m.

Para poder aplicar la ECUACIÓN DE LA TUBERÍA, es necesario determinar la pérdida de carga unitaria J . El cálculo de J depende si el movimiento del fluido es laminar o turbulento, y en este último caso si es tubería lisa o rugosa. A continuación, se desarrolla cada caso.

1.2 Cálculo de J para movimiento laminar

Si el movimiento es laminar, de acuerdo a lo estudiado en la Unidad III, la pérdida de energía unitaria tiene el valor dado por la ecuación 3.20:

$$J = 32 \frac{\mu}{\gamma} \frac{U}{D^2} \quad (3.20)$$

Donde:

- J es la pérdida de carga unitaria instantánea, en m/m
- μ es la viscosidad (inversamente proporcional a la temperatura), se mide en kgf s/m².
- γ es el peso específico, en kgf/m³
- U es la velocidad media en la tubería, en m/s
- D es el diámetro de la tubería, en m

Al ser, para este caso, tanto la viscosidad, como el peso específico constantes, la pérdida de carga unitaria J es función directa del caudal e inversa del diámetro elevado a la cuarta potencia:

$$J = \frac{Q}{K_l D^4} \quad (4.5)$$

Recordando que, según Darcy-Weisbach (Ecuación 3.22), la pérdida de carga unitaria J en cañerías se puede expresar como:

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (3.22)$$

Siendo λ el **FACTOR DE RESISTENCIA**, el cual se define como el número que multiplicado por la altura de velocidad media y dividido el diámetro, nos da el valor de la pérdida de carga unitaria adimensional.

Por lo tanto, para movimiento laminar, igualando las ecuaciones 3.20 y la 3.22 se obtiene el factor de resistencia en función del Re de la Ecuación 3.24:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (3.24)$$

Ecuación obtenida en la Unidad III y llamada ecuación de Poiseuille. Es importante destacar que en el movimiento laminar J y λ son independientes de la rugosidad de la tubería.

1.3 Cálculo de J para movimiento turbulento

Si el movimiento es turbulento, la pérdida de energía unitaria resulta de aplicar la ecuación de tensión de corte hidráulico, e igualando las ecuaciones 3.27 y 3.8, considerando la 3.30 (Unidad III), y despejando la velocidad media U:

$$\tau_0 = \gamma f \frac{U^2}{2g} \quad (3.27)$$

$$\tau_0 = R_H \gamma J \quad (3.8)$$

$$\lambda = 4 f \quad (3.30)$$

$$\gamma f \frac{U^2}{2g} = R_H \gamma J$$

$$U = \underbrace{\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}}_C \sqrt{R_H J}$$

$$U = C \sqrt{R_H J} \quad (4.6)$$

$$J = \frac{U^2}{C^2 R_H} \quad (4.7)$$

Donde:

J es la pérdida de energía por unidad de peso y longitud, de dimensiones L/L

U es la velocidad media del agua, de dimensiones L/T

f es el coeficiente de frotamiento, adimensional, función de la rugosidad de la tubería.

λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach, adimensional

γ es el peso específico del agua, de dimensiones F/L³

g es la aceleración de la gravedad, 9,81m/s²

C es el coeficiente de Chezy, función de la rugosidad de la tubería y de dimensiones L^{1/2} T⁻¹.

La Ecuación 4.6 se denomina Ecuación de Chezy y surge de las investigaciones realizadas en canales abiertos.

Antoine de Chézy

Ingeniero de puentes francés (1718-1798), conocido internacionalmente por su contribución a la hidráulica de los canales abiertos, en particular por la llamada ecuación o fórmula de Chézy.



Recordando que el radio hidráulico es el cociente entre la sección transversal de la tubería (Ω) y el perímetro mojado (χ), en el caso de una tubería de sección circular es igual a $D/4$

$$J = \frac{Q^2}{C^2 \frac{D}{4}} = \frac{Q^2}{C^2 \frac{D}{4}} = \frac{Q^2 4^3}{\pi^2 D^5 C^2}$$

$$J = \frac{Q^2 4^3}{\pi^2 D^5 C^2} \quad (4.8)$$

La Ecuación 4.8 se puede expresar como:

$$J = \frac{6,48 Q^2}{\underbrace{C^2}_{K_t} D^5}$$

$$K_t = \frac{6,48}{C^2} \quad (4.9)$$

$$J = K_t \frac{Q^2}{D^5} \quad (4.10)$$

Se puede expresar el coeficiente “K_t” en función del factor de resistencia λ, utilizando la siguiente ecuación:

$$K_t = \frac{6,48}{C^2} = \frac{6,48}{\left(\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\right)^2} = \frac{6,48}{8g} \lambda = 0,083 \lambda$$

$$K_t = 0,083 \lambda \quad (4.11)$$

La Ecuación 4.10 indica que la pérdida de carga unitaria en movimiento turbulento es función del caudal, del diámetro, y del material de la tubería a través de K_t.

El problema que aparece ahora es determinar el valor del coeficiente C de Chezy, para la Ecuación 4.9, o el valor del factor de resistencia λ, para la Ecuación 4.11, ambos son una función de la rugosidad de la cañería.

No existe una forma analítica de determinar la rugosidad en tuberías comerciales, donde es irregular su tamaño y su distribución. En la Unidad III se ha explicado la investigación desarrollada por el ingeniero Nikuradse con rugosidad artificial uniforme (utilizando granos de arena), allí también se observó que el factor de resistencia depende del tamaño, forma y distribución de las rugosidades, lo que hace aún más compleja la determinación de su valor.

Dentro del movimiento turbulento también es necesario distinguir entre movimiento turbulento para tubería lisa y movimiento turbulento para tubería rugosa, según lo estudiado en la Teoría de Prandtl - Von Kármán, y cuyas expresiones son las incluidas en los apartados siguientes.

Cálculo de J para movimiento turbulento en tubería lisa

La tubería es lisa cuando la altura de la aspereza absoluta resulta menor al espesor de la capa laminar parietal, ε < δ₀, es decir la capa laminar parietal embebe las asperezas.

Ecuación del movimiento turbulento en tubería lisa

Es la Ecuación 3.49 vista en la Unidad III, que corresponde a Nikuradse y Prandtl, válida para valores de Re > 4000.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) = 0,70 + 2 \log \left(\frac{v_f \varepsilon}{\nu} \right) \quad (3.46)$$

Donde:

- λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach
- R es el radio de la tubería
- ε es la aspereza o rugosidad absoluta
- v_f denominada por Prandtl como “velocidad de frotamiento”
- ν es la viscosidad cinemática, de dimensiones L²/T

Reemplazado el valor de la velocidad de frotamiento (igual a $U \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$) y operando se llega a las siguientes expresiones en función de Re:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log\left(\frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51}\right) \quad (4.7)$$

Donde:

λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach
 Re es número de Reynolds

En la Ecuación 4.12, el cálculo puede ser más complejo, ya que λ no está en forma explícita. Entonces Colebrook propone otra expresión de resolución más sencilla.

Ecuación del movimiento turbulento en tubería lisa Colebrook

Simplifica la ecuación anterior, y tiene diferencias del $\pm 1,5\%$ para $4000 \leq Re \leq 10^8$.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log\left(\frac{Re}{6,9}\right) \quad (4.8)$$

Ecuación del movimiento turbulento en tubería lisa de Blasius

Válida para $3000 \leq Re \leq 10^5$. Esta expresión es muy útil para simplificar las ecuaciones anteriores.

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad (4.9)$$

Además, propuso una función velocidad en la tubería.

$$\frac{u}{u_{m\acute{a}x}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \quad (4.15)$$

Cálculo de J para movimiento turbulento y tubería rugosa

Con números de Reynolds altos el espesor de la capa parietal es más delgada y es atravesada por las rugosidades (ϵ) δ_0). Hay que distinguir dos casos, uno para tubería completamente rugosa y otro para una transición entre completamente rugosa y lisa.

Ecuación del movimiento turbulento en tubería completamente rugosa $\delta_0 < \frac{1}{4} \epsilon$

La tubería se comporta como completamente rugosa, cuando el espesor de la capa laminar es menor a un cuarto de la rugosidad, en este caso el factor de resistencia es independiente del Re , la expresión que permite el cálculo corresponde a Prandtl y fue desarrollada en la Unidad III (Ecuación 3.52).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log\left(\frac{R}{\epsilon}\right) = 1,70 \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log\left(\frac{3,7}{\epsilon/D}\right) \quad (4.10)$$

Donde:

λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach
 R es el radio de la tubería
 ϵ es la aspereza o rugosidad absoluta

Si se hace una comparación con el Gráfico de Nikuradse, la zona de movimiento turbulento en tubería rugosa corresponde a la zona de rectas horizontales y paralelas al eje de las abscisas en el cual se miden los Re , y donde el factor de resistencia es independiente del Re y solo depende de la aspereza relativa del material de la tubería.

1.4 Cálculo de J a través de fórmulas experimentales para el movimiento turbulento

En las ecuaciones del movimiento turbulento desarrolladas por Prandtl-Von Kármán el factor de fricción λ no está expresado en forma explícita, por ello, a través del trabajo de investigadores e ingenieros mediante la simulación física del escurrimiento del agua en tuberías de materiales comercialmente disponibles en la época, surgieron ecuaciones empíricas explícitas para el cálculo práctico de tuberías.

Las ecuaciones experimentales son válidas para la viscosidad del fluido para las que se desarrollaron y están limitadas al rango de Re y diámetros de la experimentación.

Se exponen algunas de esas ecuaciones a continuación.

Ecuación de Moody. Saldarriaga (2007)

Lewis Moody luego de finalizar el desarrollo de su famoso Diagrama de Moody, propuso la siguiente ecuación explícita para el cálculo del factor de resistencia λ .

$$\lambda = 0,0055 \left[1 + \left(2000 \frac{\varepsilon}{D} + \frac{10^6}{Re} \right)^{1/3} \right] \quad (4.11)$$

Donde:

λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach
 D es el diámetro de la tubería
 ε es la aspereza o rugosidad absoluta
 Re es el número de Reynolds

La precisión de la Ecuación 4.17 comparada con la Ecuación Colebrook es baja para $Re > 3 \cdot 10^5$ y para rugosidades relativas muy altas.

Ecuación de Wood. Saldarriaga (2007)

Fue deducida por Donald Wood en la Universidad de Kentucky en la década de 1960, y tiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \lambda &= a + b Re^{-c} \\ a &= 0,094 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0,225} + 0,53 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) \\ b &= 88 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0,44} \\ c &= 1,62 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0,134} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Donde:

λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach
 D es el diámetro de la tubería
 ε es la aspereza o rugosidad absoluta
 Re es el número de Reynolds

a, b y c son números auxiliares

La ecuación 4.18 comparada con la Ecuación Colebrook resulta menos precisa que la 4.17, puesto que es válida para $\varepsilon/D > 10^{-5}$ y para $3 \cdot 10^4 < Re < 10^7$.

Ecuación de Barr. Saldarriaga (2007)

Es una expresión bastante compleja de λ desarrollada a fines de la década de 1970.

Donde:

λ es el factor de resistencia de Darcy-Weisbach

Δ es la pérdida de energía por frotamiento

l es la longitud de la tubería

$A, B, C, D, E, \pi_1, \pi_2$ son magnitudes auxiliares

ε es la aspereza o rugosidad absoluta

Q es el caudal

ν es la viscosidad cinemática, de dimensiones L^2/T

El factor de frotamiento λ es función del caudal Q , de J, g, ε y ν .

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\left(\frac{A}{\pi_1^B} \right) + \left(\frac{C}{\pi_2^D} E \right) \right)$$

$$A = 0,325(0,027 \log \pi_1)$$

$$B = 0,93(0,0068 \log \pi_1)$$

$$C = 2,95(0,29 \log \pi_2)$$

$$D = 0,914(0,0052 \log \pi_2)$$

$$E = 1 + \left(\frac{\pi_2^{0,44}}{11\pi_1^{0,54}} \right) \quad (4.13)$$

$$\pi_1 = \frac{0,958866Q^{2/5}}{\left(\frac{\Delta}{l} g \right)^{1/5} \varepsilon}$$

$$\pi_2 = \frac{1,32786Q^{3/5} \left(\frac{\Delta}{l} g \right)^{1/5}}{\nu}$$

Las Ecuaciones 4.19 no resultaron de mucho interés, ya que simultáneamente se desarrollaron los primeros software para el cálculo de λ con las ecuaciones implícitas de Darcy-Weisbach y Colebrook.

Ecuación de Scobey. Saldarriaga (2007)

En esta ecuación, desarrollada por Scobey en 1931 para tuberías de hormigón simple, la velocidad del agua es función del diámetro de la tubería, de la pérdida de carga unitaria y del tipo de material de la tubería a través del factor K :

$$U = K D^{0,625} J^{0,5} \quad (4.20)$$

Donde:

K es el coeficiente de retardo, función del tipo de material y estado de la tubería

U es la velocidad en m/s

D es el diámetro de la tubería en m

J es la pérdida de energía unitaria de la tubería

Ecuación de Manning

Robert Manning

Ingeniero irlandés (1816-1897) conocido por la creación de la fórmula de Manning. Nació en Normandía, Francia. Se desempeñó en Departamento de Obras Públicas de Irlanda en tareas relacionadas con la Ley de Drenaje Arterial publicado en 1842, con muchas actividades en control de inundaciones y drenaje. También trabajó en varios campos de la ingeniería, incluida la construcción de un puerto y del suministro de agua de la ciudad de Belfast.



Manning desarrolló sus investigaciones en simulación de las rugosidades basadas en el coeficiente de Chezy, por lo que, en la Ecuación 4.6 de la velocidad, ya dada, el coeficiente C se puede calcular con la Ecuación 4.21, válida para conducciones abiertas, donde el valor del coeficiente de Chezy " C " se obtiene como:

$$C = \frac{R_H^{1/6}}{n} \quad (4.21)$$

Donde:

C es el coeficiente de Chezy, función de la rugosidad de la tubería y de dimensiones $L^{1/2} T^{-1}$.

n es el coeficiente de rugosidad de Manning, de dimensión $TL^{-1/3}$, según Tabla 4.1 en dimensiones del SI.

R_H es el radio hidráulico de la conducción, de dimensión L .

Tabla 4.1. Valor del coeficiente "n" de Manning para distintos materiales, expresado en unidades del SI. Franzini & Finnemore (1999)

| Tipo de superficie | n ($s/\sqrt[3]{m}$) | |
|----------------------------------|-----------------------|--------|
| | Mínimo | Máximo |
| Plásticos en general | 0,008 | 0,010 |
| Barro cocido vitrificado | 0,010 | 0,017 |
| Hormigón liso | 0,010 | 0,013 |
| Hormigón premoldeado | 0,011 | 0,013 |
| Hormigón monolítico | 0,012 | 0,016 |
| Superficie de mortero de cemento | 0,011 | 0,015 |
| Ladrillo con mortero de cemento | 0,012 | 0,017 |
| Vidrio | 0,009 | 0,013 |
| Tubería de tablas de madera | 0,010 | 0,013 |
| Hierro fundido nuevo | 0,013 | 0,017 |
| Acero remachado | 0,017 | 0,020 |
| Tubería de material corrugado | 0,021 | 0,030 |

Aplicando el coeficiente de Manning " n " en las ecuaciones válidas para el movimiento turbulento, Ecuaciones 4.9 y 4.10:

$$J = K_t \frac{Q^2}{D^5} = \frac{6,49 Q^2}{C^2 D^5} = \frac{6,49 Q^2}{\left(\frac{R_H^{1/6}}{n}\right)^2 D^5} = \frac{6,49 \times 4^{1/3} n^2 Q^2}{D^{1/3} D^5} = 10,302 \frac{n^2 Q^2}{D^{5,333}}$$

$$J = 10,302 \frac{n^2 Q^2}{D^{5,333}} \quad (4.22)$$

Ecuación de Hazen Williams

Allen Hazen

Ingeniero norteamericano (1869-1930) experto en hidráulica, control de inundaciones, purificación de agua y tratamiento de aguas residuales. Su carrera se extendió desde 1888 hasta 1930 y es, quizás, mejor conocido por sus contribuciones a la hidráulica con la ecuación de Hazen-Williams. Hazen publicó algunos de los trabajos fundamentales sobre sedimentación y filtración. Fue presidente de la Asociación de Obras Hidráulicas de Nueva Inglaterra y vicepresidente de la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Civiles.



Gardner Stewart Williams

Ingeniero Civil norteamericano (1866-1931) se convirtió en una autoridad reconocida a nivel nacional en ingeniería hidráulica y fue conocido por sus múltiples presas de arco, plantas hidroeléctricas. Fue profesor universitario en la Universidad de Cornell y la Universidad de Michigan.

Es una de las ecuaciones más utilizadas para tuberías rugosas, según las experiencias realizadas la velocidad se puede calcular a través de la Ecuación 4.23, expresada en unidades del SI:

$$U = 0,355 K D^{0,63} J^{0,54} \quad (4.23)$$

Donde:

K es una constante característica que depende del material de la tubería, del flujo y del fluido. Tabla 4.2

U es la velocidad en m/s

D es el diámetro de la tubería en m

J es la pérdida de energía unitaria de la tubería

0,355 es una constante que surge del cambio de unidades del sistema inglés al SI

El uso de la Ecuación 4.23 tiene que estar limitado a ciertas características del fluido y del flujo, ya que los investigadores han establecido claramente las condiciones de sus pruebas experimentales:

1. El fluido debe ser agua a temperaturas normales.
2. El diámetro D debe ser superior o igual a 75mm.
3. La velocidad en las tuberías debe ser inferior a 3m/s.

Tabla 4.2. Valor de K de Hazen Williams para distintos materiales de tuberías y canales.
 Saldarriaga (2007)

| Material | Condición | Diámetro (mm) | K |
|-----------------------|---|-----------------------|--------------|
| Hierro dulce | Nuevo | todos | 130 |
| | 5 años de edad | $D \geq 300$ | 120 |
| | | $200 \leq D \leq 250$ | 119 |
| | | $100 \leq D \leq 150$ | 118 |
| | 10 años de edad | $D \geq 600$ | 113 |
| | | $300 \leq D \leq 500$ | 111 |
| | | $100 \leq D \leq 250$ | 107 |
| | 20 años de edad | $D \geq 600$ | 100 |
| | | $300 \leq D \leq 500$ | 96 |
| | 30 años de edad | $100 \leq D \leq 250$ | 89 |
| $D \geq 760$ | | 90 | |
| $400 \leq D \leq 500$ | | 87 | |
| 40 años de edad | $100 \leq D \leq 350$ | 75 | |
| | $D \geq 760$ | 83 | |
| | $400 \leq D \leq 600$ | 80 | |
| 50 años de edad | $100 \leq D \leq 350$ | 64 | |
| | $D \geq 1000$ | 77 | |
| | $600 \leq D \leq 900$ | 74 | |
| Acero soldado | constante | $100 \leq D \leq 500$ | 55 |
| | | $200 \leq D \leq 250$ | 119 |
| | | $D \geq 300$ | 120 |
| Acero bridado | constante | $100 \leq D \leq 250$ | 118 |
| | | $300 \leq D \leq 500$ | 111 |
| | | $D \geq 600$ | 113 |
| Madera | constante | todos | 120 |
| Hormigón simple | Encofrado de acero Encofrado de madera Centrifugado | todos | 140 |
| | | | 120 |
| | | | 135 |
| Arcilla vitrificada | Buenas condiciones | todos | 100 |
| PVC | constante | todos | 150 |
| Asbesto cemento | constante | todos | 140 |
| Mampostería | constante | todos | 100 |
| Cobre | constante | todos | 130 a 140 |
| Hierro galvanizado | constante | todos | 120 |
| Latón | constante | todos | 130 |
| Vidrio | constante | todos | 140 |

1.5 Diagrama de Moody

Lewis Ferry Moody

Ingeniero Mecánico Norteamericano, (1880–1953).

Fue el primer profesor de Hidráulica en la Escuela de Ingeniería de Princeton. Fue galardonado con la Medalla Elliott Cresson en 1945 (del Instituto Franklin) y nombrado Miembro Honorario de la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos (American Society of Mechanical Engineers ASME) en 1951. Solamente 5 años después de su fallecimiento, ASME instauró el Premio Lewis F. Moody que se otorga por realización de trabajos de excelencia originales aplicados para la práctica de la ingeniería mecánica, en la División de Ingeniería de Fluidos de ASME.



Los resultados del trabajo experimental desarrollado por Moody permitieron definir el denominado Gráfico de Moody (1944).

Moody se basó en los resultados de Nikuradse y Colebrook con el fin de investigar las pérdidas por fricción en tuberías con rugosidades reales y no artificiales.

En primer lugar, Moody observó que en el diagrama de Nikuradse el factor de resistencia solo era función de la aspereza relativa para flujos turbulentos en tubería rugosa, o sea, sobre las rectas horizontales del Gráfico de Nikuradse. Luego, tomando tuberías comerciales de diferentes materiales (acero, acero bridado, hierro dulce, hierro galvanizado, concreto, entre otros) y diámetros, midió en laboratorio las pérdidas de energía por frotamiento y calculó el factor de resistencia para movimiento turbulento en tubería rugosa, la aspereza relativa y finalmente la aspereza absoluta. Entonces, concluyó que cada material tiene una rugosidad equivalente que establece su comportamiento hidráulico.

Utilizando la Ecuación 3.24 de Poiseuille ($\lambda = 64/Re$), la Ecuación 4.12 de Colebrook y la Ecuación 3.22 de Darcy-Weisbach, que permiten el cálculo del factor de resistencia λ en todos los casos posibles de movimientos, Moody representó gráficamente el conocido mundialmente como Diagrama de Moody, Figura 4.2, el cual permite abordar el diseño de los parámetros de una tubería. El gran avance de Moody fue introducir, de manera sistematizada, los diámetros comerciales y las asperezas ε tecnológicamente obtenidas de la fabricación de cada tipo de tubería.

El Diagrama de Moody es la representación gráfica en escala doblemente logarítmica del factor de resistencia λ en función del Re y la rugosidad o aspereza relativa de una tubería ε/D .

Se incluye como Figura 4.2. la imagen extraída de Hidráulica de Francisco Javier Domínguez, y Figura 4.3 la versión original preparada en papel vegetal por el Instituto de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la UNCUYO. También se puede bajar como archivo pdf en <https://www.docsity.com/es/diagrama-moody/3973145/> (Asignatura de Física, Carrera de Arquitectura, 14).

Como puede verse, tanto, en la Figura 4.2, como en la 4.3, se ha elaborado un gráfico de cuatro entradas: dos abscisas y dos ordenadas.

Ordenada Izquierda. Se lee el factor de resistencia " λ ", que se expresa mediante la ecuación de Darcy-Weisbach (relación entre λ y J) y que resulta

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad \lambda = \frac{J D}{\frac{U^2}{2g}}$$

Abscisa Inferior Re . Se lee el número de Reynolds en escala logarítmica $Re = \frac{U D}{\nu}$

Ordenada Derecha D/ε . Se lee la aspereza relativa. El valor de la rugosidad ε se obtiene de la información dada por el fabricante ya que depende del material y de la tecnología empleada.

Abscisa Superior. Se lee el producto $Re\sqrt{\lambda}$

Los valores se obtienen reemplazando λ y Re por sus ecuaciones:

$$Re\sqrt{\lambda} = \frac{U D}{\nu} \sqrt{\frac{J D}{\frac{U^2}{2g}}} = \frac{U D}{\nu U} \sqrt{2g J D}$$

$$\frac{D^{3/2}}{\nu} \sqrt{2g J} = Re\sqrt{\lambda} \quad (4.24)$$

A continuación, se detallan las diferentes ecuaciones/áreas que involucra el Diagrama de Moody.

Para el **Movimiento Laminar** sólo se utiliza la **Ecuación de Poiseuille**, que en escala logarítmica resulta ser una recta de pendiente negativa. La continuación en línea punteada es una zona crítica, que indica que puede ser o no laminar y es necesario verificar, Figuras 4.2 y 4.3, en esta zona del diagrama el flujo no puede ser pronosticado.

$$\lambda Re = 64 \quad (3.24)$$

$$\log \lambda = 64 - \log Re \quad (4.25)$$

$$Re \leq 2000$$

Para el **Movimiento Turbulento** se diferencian las expresiones.

Para el **Movimiento Turbulento en Tubería Lisa**, $\delta_0 > \varepsilon$, y con valores bajos del Re , se incluyen las Ecuaciones 3.49 de **Prandtl-Von Kármán para tubería lisa**, la 4.12 y 4.13 de **Colebrook** y la 4.14 de **Blasius**, en otras palabras, las curvas que representan la variación de λ son asintóticas a una u otra ecuación y se van “despegando” de ellas a medida que Re aumenta. Indican la función $\lambda = f\left(Re, \frac{D}{\varepsilon}\right)$, y en el Diagrama de Moody se representa por medio de curvas para distintos valores de aspereza relativa D/ε .

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) = 0,70 + 2 \log\left(\frac{\nu_f \varepsilon}{\nu}\right) \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log\left(\frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51}\right) \quad (4.14)$$

$$Re \geq 4000$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log\left(\frac{Re}{6,9}\right) \quad (4.13)$$

$$4000 \leq Re \leq 10^8$$

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad (4.15)$$

$$3000 \leq Re \leq 100.000$$

Con números de Reynolds altos el espesor de la capa parietal es más delgada y es atravesada por las rugosidades ($\varepsilon > \delta_0$), y se presenta **Movimiento Turbulento en Tubería Rugosa**, y hay que distinguir dos casos, uno para tubería completamente rugosa y otro para una transición entre completamente rugosa y lisa.

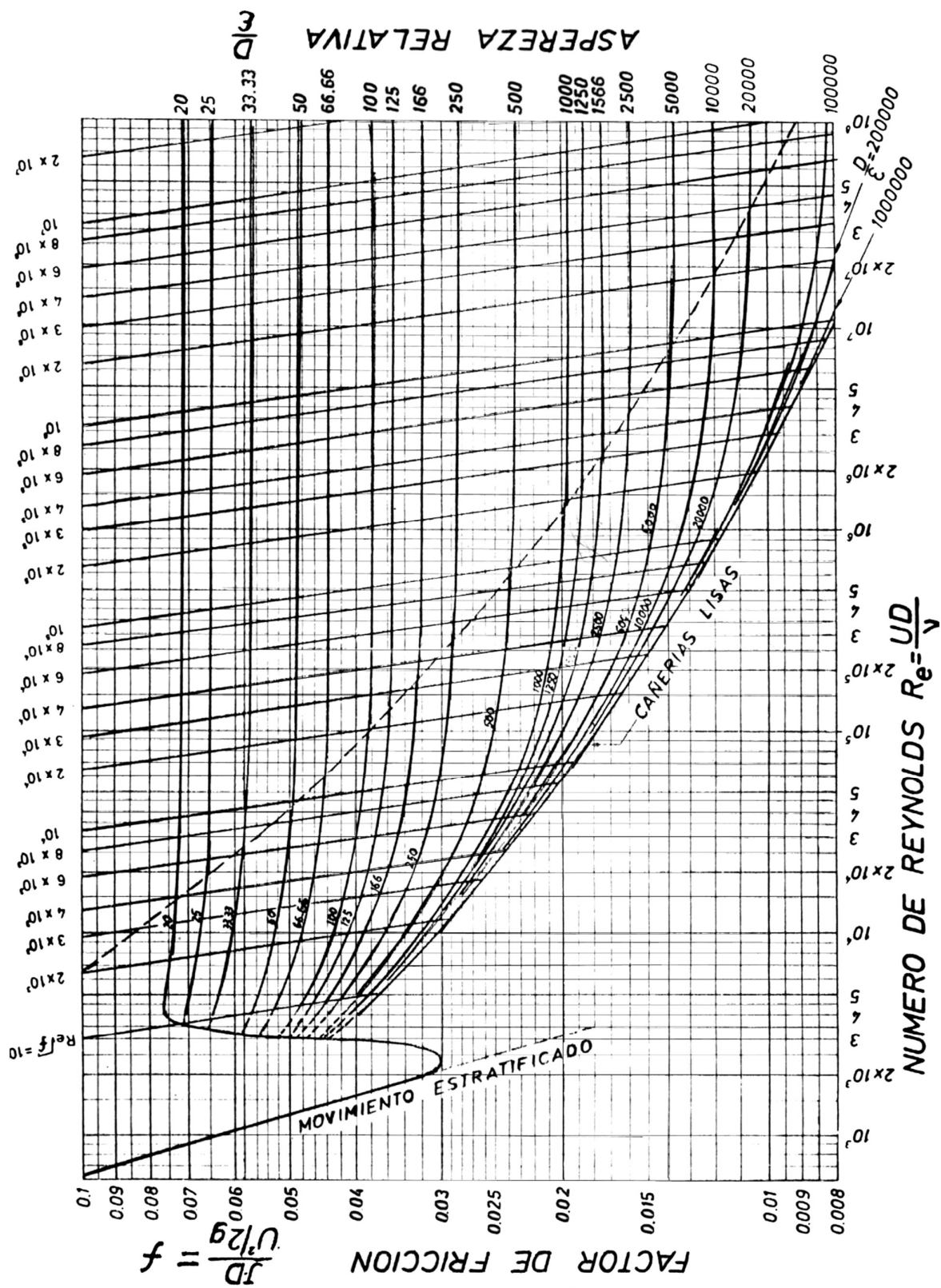
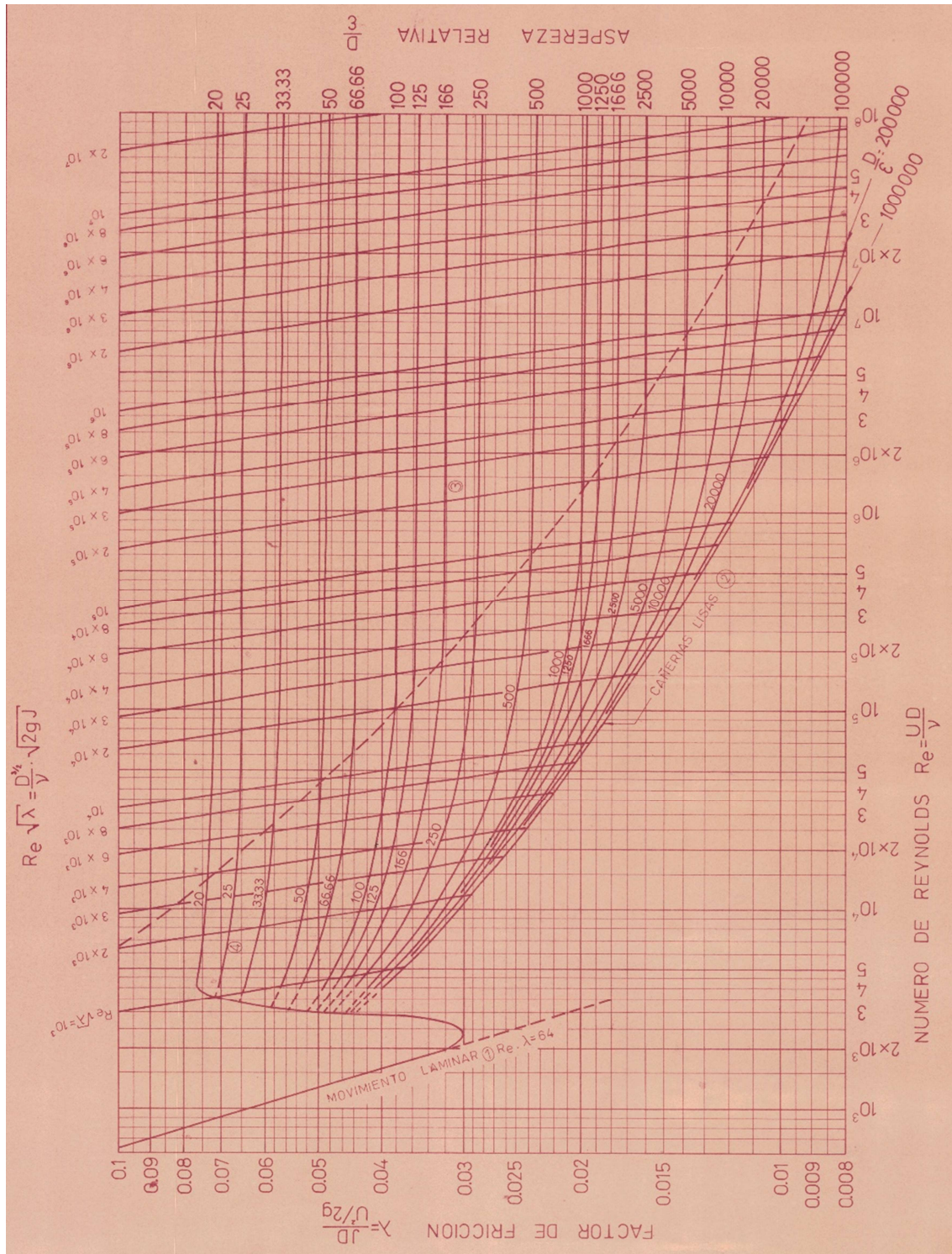


Figura 4.2. Diagrama de Moody, el coeficiente de resistencia λ está indicado con la letra f ,
 Dominguez (1999)

Figura 4.3. Diagrama de Moody en versión original preparada en papel vegetal por el Instituto de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la UNCUIYO



Para **Movimiento Turbulento en Tubería completamente Rugosa**, el espesor de la capa laminar es menor a un cuarto de la rugosidad o sea, cuando $\delta_o < \frac{1}{4} \varepsilon$ el factor de resistencia es independiente del Re , la expresión que permite el cálculo corresponde a la Teoría de **Prandtl-Von Kármán** (Ecuación 3.52 y Ecuación 4.16).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) = 1,70$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{3,7}{\varepsilon / D} \right)$$
(4.16)

Si se hace una comparación con el Gráfico de Nikuradse del capítulo anterior, la zona de movimiento turbulento en tubería rugosa corresponde a la zona de rectas horizontales y paralelas al eje de las abscisas en el cual se miden los Re .

Para **Movimiento Turbulento para una transición entre completamente rugosa y lisa**, en el intervalo entre $\varepsilon > \delta_o > \varepsilon/4$ no se puede aplicar la ecuación de tuberías lisas, ni la de completamente rugoso, entonces Colebrook combinó ambas ecuaciones y obtuvo la ecuación 4.26

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{3,7}{\varepsilon / D} + \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51} \right)$$
(4.26)

La Ecuación 4.26, llamada **Ecuación de Colebrook**, para $\varepsilon=0$ se reduce a la ecuación para tubería lisa, o sea la Ecuación 4.12. Para valores muy altos de Re , el segundo término se anula y la ecuación se reduce a la 4.16 de tubería completamente rugosa. Por esto la Ecuación 4.26 de Colebrook se denomina ECUACIÓN UNIVERSAL DE PÉRDIDAS DE CARGA POR FROTAMIENTOS EN TUBERÍAS COMERCIALES.

La ecuación 4.26 presenta la desventaja que el factor de resistencia no está en forma explícita, entonces **Haaland** en 1983 desarrolló la Ecuación 4.27:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log \left(\left(\frac{3,7}{\varepsilon / D} \right)^{1,11} + \frac{Re}{6,9} \right)$$

$$4000 \leq Re \leq 10^8$$
(4.27)

Haaland combinó la ecuación de Colebrook para tubería lisa, Ecuación 4.12, con la ecuación para tuberías completamente rugosas, Ecuación 4.16, obteniendo la Ecuación 4.27, que difiere en $\pm 1,5\%$ de la Ecuación 4.26 para $4000 \leq Re \leq 10^8$, y tiene la ventaja de que el factor de resistencia está en forma explícita.

En el Diagrama, Figuras 4.2 y 4.3, una curva de trazos, separa la zona de transición de la zona de completa turbulencia, es la denominada **curva de Nikuradse** en el capítulo anterior y cuya expresión es la siguiente.

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{D}{\varepsilon} + 1,138 \right)^2} \wedge Re = 1000 \left(\frac{D}{\varepsilon} + 2 \right)$$
(4.28)

Como el diagrama de Moody es adimensional puede utilizarse para cualquier sistema de unidades. Y además se aplica a cualquier fluido newtoniano, sólo teniendo en cuenta el valor adecuado de la viscosidad dinámica y la cinemática. Si la tubería no es circular, se reemplaza el valor de diámetro por el valor del radio hidráulico.

En la actualidad la resolución matemática de las expresiones implícitas para el cálculo de λ no resulta tan complicada, ya que, aplicando el método de iteraciones sucesivas a las mismas, se pueden resolver sin mayores inconvenientes. Aun así, existen programas de computación que se encargan de realizar estas resoluciones implícitas.

1.6 Aspereza o rugosidad de la tubería. Variación en el tiempo (tuberías metálicas)

La última variable a tener en cuenta para el uso del Diagrama de Moody es la denominada aspereza o rugosidad de la tubería, la que depende del tipo de material que constituye la misma y del fluido que transporta. A continuación, se adjuntan algunos valores de aspereza necesarios para los cálculos.

Tabla 4.3. Valores de aspereza ϵ para distintos materiales de tubería. Streeter & Wylie (1986). Mataix (1986). Sotelo Avila (1997). Franzini & Finnemore (1999). Saldarriaga (2007)

| Material | Observaciones | ϵ (mm) |
|--|------------------------------------|-----------------|
| Cobre, aluminio, plomo | Nuevo | hasta 0,001 |
| Latón industrial | Nuevo | 0,025 |
| Acero calibrado, laminado sin costuras | Nuevo | 0,03 – 0,05 |
| | Usado, oxidado | 0,15 – 0,25 |
| | Con incrustaciones | 1,5 - 3 |
| Acero soldado | Nuevo asfaltado | 0,015 |
| | Esmaltado con alquitrán | 0,0048 |
| | Usado, oxidado | 0,4 |
| | Valor medio para tubería de agua | 0,4 – 1,2 |
| | Tubería de agua con incrustaciones | 1,5 – 3 |
| | Riveteado | 0,9 |
| Acero roblonado | según clase de roblonado | 0,9 – 9,0 |
| Hierro fundido | Nuevo (bituminado) | 0,1 – 0,2 |
| | Nuevo (sin betún) | 0,2 – 0,3 |
| | Usado, oxidado | 0,5 – 1,0 |
| | Usado con incrustaciones | 1,5 – 3,0 |
| | Valor medio tubería de agua | 1,0 – 3,0 |
| Fibrocemento | Sin detalles | 0,03 – 0,1 |
| Plástico (P.V.C.) ACINPLAST | Sin detalles | 0,0015 |
| Asbesto – Cemento | Nuevo | 0,03 |
| Hierro galvanizado | Nuevo | 0,15 – 0,2 |
| Metal corrugado | Nuevo | 20,0 – 45,0 |
| Mortero seco | Revestimiento de túneles. | 1,25 |
| Hormigón | Nuevo | 0,3 – 3,0 |
| | Con encofrado de acero | 0,18 |
| | Con encofrado de madera | 0,2 - 1 |
| | Centrifugado | 0,36 |
| Ladrillo | Sin detalles | 0,6 |
| Vidrio | Sin detalles | 0,0003 |
| Madera | Sin detalles | 0,18 – 0,9 |
| Arcilla vitrificada | Sin detalles | 0,15 |

Si se estudia la forma de las curvas del Gráfico de Moody se puede concluir que el valor de la aspereza absoluta tiene mucha importancia en el valor del factor de resistencia. Es notable el crecimiento del valor de la rugosidad absoluta, a medida que se intensifica el uso de la cañería, los valores tienen poca variación inicial, pero transcurridos unos 10 años de uso se magnifica considerablemente. Y esa magnificación también depende del tipo de fluido que transporta la tubería y la temperatura de trabajo del mismo.

La Figura 4.4 muestra la variación de la rugosidad en función del tiempo de uso desarrollada por Scobey.

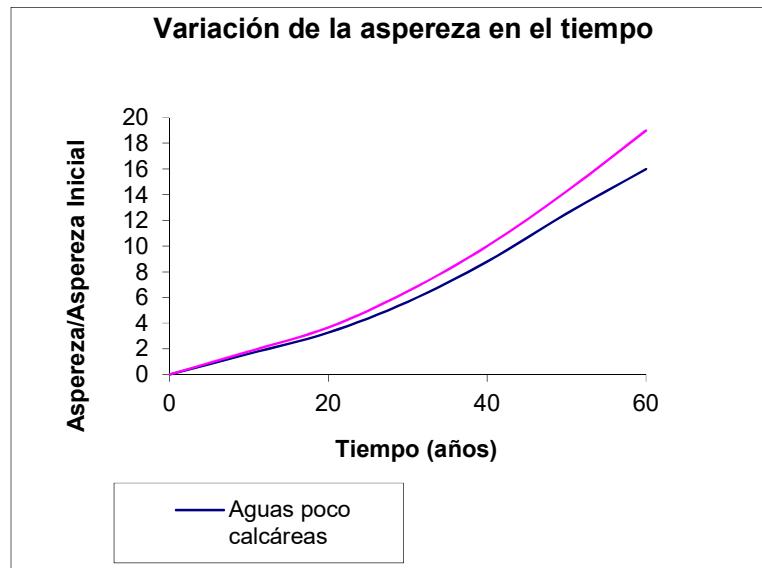


Figura 4.4. Variación de la aspereza en función del tiempo en tuberías metálicas

Esta variación depende del tipo de fluido y del material con el cual están construidas las tuberías. Existen algunos materiales como la madera y el hormigón que no varían su rugosidad con el tiempo, más aún, algunos hasta la disminuyen la misma, debido a la formación de una película lisa en su interior.

Esta situación sumada a la realidad de los valores dados por los fabricantes hace que resulte conveniente trabajar con un intervalo de variación de valores de ϵ .

1.7 Formas de Cálculo. Uso del Gráfico de Moody.

Las variables en juego son: caudal (Q), pérdida de carga unitaria (J) y el diámetro (D). Y en función de dichas variables se pueden presentar tres formas distintas de uso del Gráfico de Moody:

1. Dado el diámetro y la diferencia de cotas piezométricas, calcular el caudal que escurre.
2. Diseñar el diámetro necesario para que escorra un caudal dado, si se conoce la diferencia de cotas piezométricas.
3. Calcular la pérdida de energía que se produce para un diámetro dado y un caudal determinado.

Primer Caso: Cálculo del caudal de escurrimiento

Los datos son: D , ϵ , H y l . La incógnita es: Q .

Se calcula la pérdida de carga unitaria, y junto con el diámetro, se calcula la abcisa superior del ábaco.

$$J = \frac{H}{l}$$

$$Re \sqrt{\lambda} = \frac{D^{3/2} \sqrt{2gJ}}{\nu}$$

Recordando que l es la longitud total de la tubería, y que ν resulta función de la temperatura, Para Mendoza se adopta una temperatura de 10°C , para la zona cordillerana se puede considerar 5°C .

Conocido el tipo de material se determina la relación D/ε y se ingresa al gráfico de la Figura 4.5, por la abscisa superior $Re\sqrt{\lambda}$, bajando paralelamente a las rectas hasta llegar a la curva de la aspereza relativa y luego leyendo el λ en la ordenada izquierda.

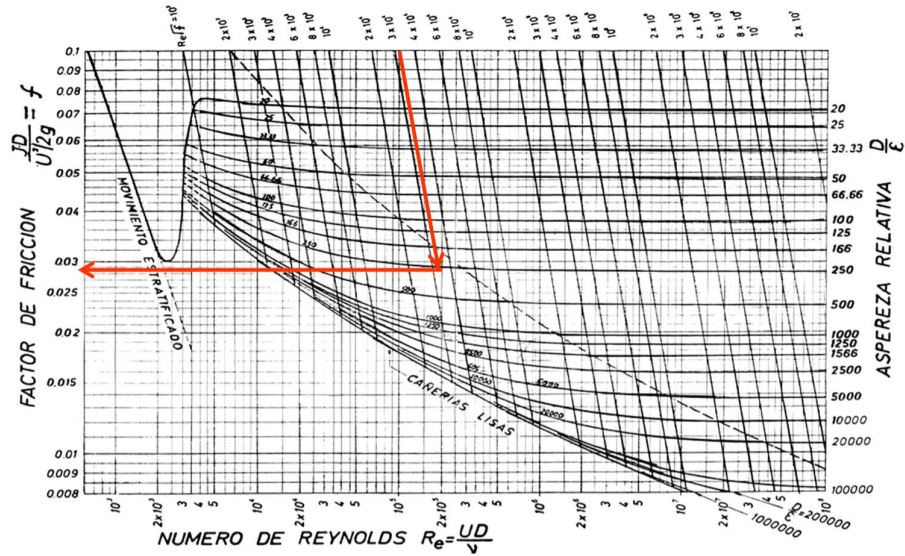


Figura 4.5. Uso ábaco de Moody, incógnita Q

Con λ se calcula la velocidad media U , y finalmente Q .

$$Re = \frac{U D}{\nu}$$

$$Q = U \Omega$$

También se puede leer en la ordenada izquierda el factor de resistencia λ y de su expresión despejar la velocidad media U y el caudal Q .

Segundo Caso: dimensionado del diámetro de una tubería

Los datos son: Q , H , ε y l . La incógnita: D

En este caso el problema se resuelve por tanteos sucesivos, se adopta un valor del diámetro D (columna 1), se calcula la velocidad media del mismo U (columna 3), el Re (columna 4), y con la aspereza relativa (columnas 5 y 6), se puede leer en el Gráfico de Moody el valor del factor de resistencia (columna 7), y con λ se calcula J (columna 8) y la pérdida de carga total Δ (columna 9), con la finalidad de comparar la pérdida de carga Δ con la diferencia de cotas piezométricas H . El cálculo se puede organizar mediante la Tabla 4.4:

Tabla 4.1. Tabla modelo para cálculo del diámetro

| D (m) | Ω (m ²) | U (m/s) | Re | ε (m) | D/ ε | λ | J (m/m) | Δ (m) |
|-------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------|----------------------|-------------------------|-----------|--------------------------|-----------------|
| Diámetro adoptado | $\frac{\pi D^2}{4}$ | $\frac{Q}{\Omega}$ | $\frac{U D}{\nu}$ | | $\frac{D}{\varepsilon}$ | (ábaco) | $\lambda \frac{U^2}{2g}$ | JL |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) |

Si la pérdida de carga Δ obtenida del cálculo es mayor que la diferencia de cotas piezométricas H ($\Delta > H$) es necesario aumentar el valor del diámetro en la iteración siguiente para disminuir la

pérdida de carga. Y viceversa, cuando $\Delta < H$ es necesario disminuir el valor del diámetro en la iteración siguiente para aumentar la pérdida de carga.

La forma de utilización del gráfico se muestra en la Figura 4.6:

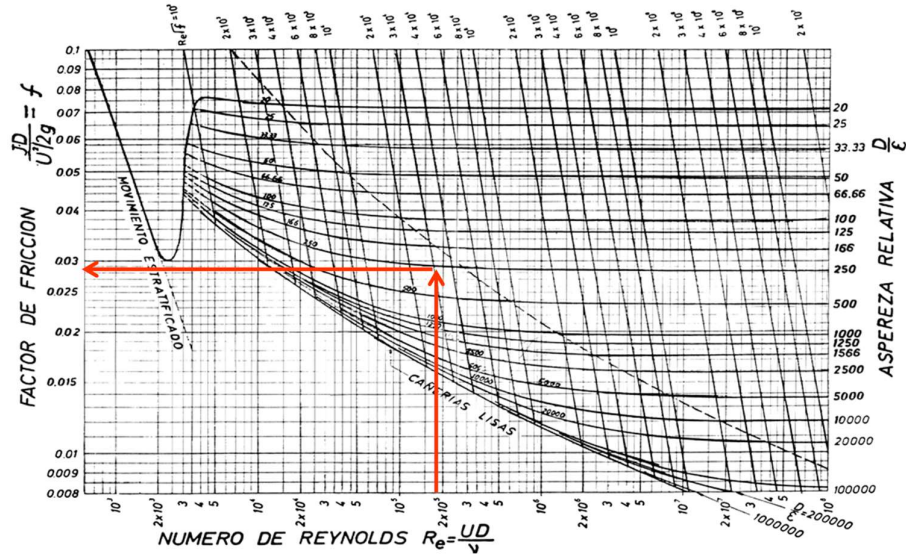


Figura 4.6. Uso ábaco de Moody, incógnita D

Este es el caso más habitual en el proyecto de un sistema de tuberías.

Tercer Caso: cálculo de la pérdida de carga

Los datos son datos: Q, D, ε . La incógnita es J .

Se calcula U y el Re , se ingresa con este valor junto con la aspereza relativa en el gráfico de Moody, y se lee λ en la ordenada, con el cual se calcula J y finalmente Δ . En este caso el cálculo es directo como ya lo ha mostrado la Figura 4.6.

1.8 Pérdidas de Carga Singulares

Las Ecuaciones 4.2 y la 4.4 de la tubería fueron obtenidas a partir de considerar únicamente pérdidas de carga por unidad de longitud, o sea, las pérdidas debidas al frotamiento entre el líquido y la pared de la cañería. Sin embargo, aparecen pérdidas de carga singulares o localizadas, por ejemplo, válvulas, codos, cambios de sección, entre otras. Estas pérdidas se ubican en una sección transversal, en un lugar puntual, de ahí su nombre.

Entonces, la pérdida de carga total está compuesta por la suma de la pérdida de carga por frotamiento y la pérdida de carga por las singularidades. Si recordamos la ecuación 4.10, la pérdida por frotamientos es:

$$J = K_t \frac{Q^2}{D^5}$$

$$\Delta_{frotamientos} = J l$$

$$\Delta_{frotamientos} = K_t \frac{Q^2}{D^5} l$$

La expresión de las pérdidas de carga singulares es:

$$\Delta_{singularidades} = \sum \lambda \frac{U^2}{2g} = \sum \lambda \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4 2g} = \frac{16}{\pi^2 2g} \sum \lambda \frac{Q^2}{D^4}$$

Donde se ha remplazado la velocidad media por el cociente del caudal y la sección transversal. La pérdida de energía total es la suma de ambas:

$$\Delta_{total} = \Delta_{frotamientos} + \Delta_{singularidades}$$

$$\Delta_{total} = K_t \frac{Q^2 l}{D^5} + 0,08 \sum \lambda \frac{Q^2}{D^4}$$

O bien:

$$\Delta_{total} = \frac{Q^2}{D^4} \left(K_t \frac{l}{D} + 0,08 \sum \lambda \right)$$

Si recordamos que el valor de K_t (ecuación 4.9)

$$K_t = \frac{6,48}{C^2}$$

$$\Delta_{total} = \frac{Q^2}{D^4} \left(\frac{6,48 l}{C^2 D} + 0,08 \sum \lambda \right) \quad (4.29)$$

Las pérdidas de carga singulares se despreciarán cuando resulten menores del 5% de las continuas debido a que este es el error medio de las fórmulas experimentales utilizadas para el cálculo de J . Entonces:

$$0,05 \frac{6,48 Q^2}{C^2 D^5} l \geq 0,08 \sum \lambda \frac{Q^2}{D^4}$$

$$\sum \lambda \leq \frac{0,05 \times 6,48}{0,08} \frac{1}{C^2} \frac{l}{D}$$

El límite está dado por:

$$\sum \lambda \leq \frac{4}{C^2} \frac{l}{D}$$

Adoptando un valor medio del Coeficiente de Chezy, $C=40$

$$\sum \lambda \leq \frac{4}{40^2} \frac{l}{D}$$

$$\sum \lambda \leq \frac{1}{400} \frac{l}{D}$$

Para el caso de contar con una cañería donde existe solamente pérdida de carga por embocadura y por una salida es decir que $\sum \lambda = 2$.

$$2 \leq \frac{1}{400} \frac{l}{D}$$

$$800 \leq \frac{l}{D}$$

$$l \geq 800 D \quad (4.30)$$

La Ecuación 4.30 indica que si $l \geq 800 D$ las pérdidas singulares resultan con un valor menor al 5% de las pérdidas por frotamiento, en ese caso se denomina TUBERÍA LARGA. Y si $l < 800 D$, sí deben considerarse las pérdidas singulares, ya que toman valores mayores al 5% de las pérdidas por frotamiento, y se denomina TUBERÍA CORTA.

1.9 Cuantificación de pérdidas de carga singulares

La cuantificación de las pérdidas de energía por singularidades (Δ_s) se basa en el valor de un factor de resistencia que es característico de cada singularidad, multiplicado por la altura de velocidad, Ecuación 4.31.

$$\Delta_s = \lambda_s \frac{U^2}{2g} \quad (4.31)$$

Donde:

λ_s es el factor de resistencia de la singularidad específica
 U es la velocidad en m/s

El estudio de las particularidades relacionadas con las singularidades de contorno cerrado se desarrolla en la Unidad V, pero, con el fin de poder cuantificar las pérdidas de carga singulares y ver cómo influyen en el trazado de la línea piezométrica y línea de energía, a continuación, se puede ver una lista orientativa de singularidades y sus valores de λ .

En las expresiones que a continuación se dan, la nomenclatura es la siguiente:

- Δ_s es la pérdida de carga en la singularidad en (m).
- U_2 es la velocidad media del agua aguas abajo de la singularidad en (m/seg).
- U_1 es la velocidad media del agua aguas arriba de la singularidad en (m/seg).
- D_2 es el diámetro de la tubería aguas abajo de la singularidad en (m).
- D_1 es el diámetro de la tubería aguas arriba de la singularidad en (m).

Tabla 4.5. Cuadro resumen de factor de resistencia λ para cambios de sección. Saldarriaga (2007). Franzini & Finnemore (1999). Giles (1969)

| Singularidad | | Ecuaciones |
|---|--|---|
| Estrechamiento brusco en tuberías | | $\Delta = \lambda_{estrecham.} \frac{U_2^2}{2g}$ $\lambda_{estrecham.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]$ |
| Embocadura de un depósito en una tubería | | $\Delta = \lambda_{embocadura} \frac{U_2^2}{2g}$ $\lambda_{embocadura} = \frac{1}{2}$ |
| Tubo entrante en un depósito: de longitud mayor que la mitad del diámetro de la tubería | | $\Delta = \lambda_{t.entranete} \frac{U_2^2}{2g}$ $\lambda_{t.entranete} = 0,8$ <p>Para $l > \frac{D}{2}$</p> $\lambda_{t.entranete} = 1$ |
| Unión de bordes redondeados desde un depósito a una tubería. Boca de campana | <p>Para $\frac{r}{D} > 0,18$</p> | $\Delta = \lambda_{b.redondeado} \frac{U_2^2}{2g}$ $\lambda_{b.redondeado} = 0,04 \text{ a } 0,05$ |

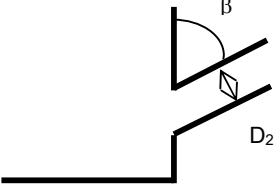
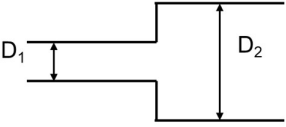
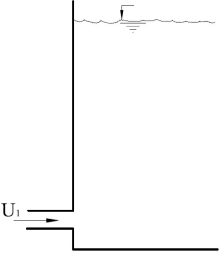


| Singularidad | | Ecuaciones |
|---|--|---|
| Unión oblicua desde un depósito a una tubería |  | $\Delta = \lambda_{u.oblicua} \frac{U_2^2}{2g}$ $\lambda_{u.oblicua} = 0,5 + 0,3 \cos\beta + 0,2 \cos^2\beta$ |
| Ensanchamiento brusco |  | $\Delta = \lambda_{ensancha.b.} \frac{U_1^2}{2g}$ $\lambda_{ensancha.b.} = \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 - 1 \right]^2$ |
| | | $\Delta = \lambda_{ensancha.b.} \frac{U_2^2}{2g}$ $\lambda_{ensancha.b.} = \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2$ |
| Llegada de una tubería a un depósito |  | $\Delta = \lambda_{llegada} \frac{U_1^2}{2g}$ $1,20 < \lambda_{llegada} < 1,1$ $\lambda_{llegada \text{ medio}} = 1$ |

Tabla 4.6. Factor de resistencia para cambios bruscos de dirección (codos). Manual Técnico Degremont

| Singularidad | | Coeficientes de resistencia λ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--|---|------|------|------|------|------|--------------|----|-----|----|----|----|---------------------|-------------------------|------|------|------|------|-------------------|------|------|------|------|------|-------------------|------|------|------|------|------|-------------------|------|------|------|------|------|--------------------|------|------|------|------|------|--------------------|------|------|------|------|------|
| codos ángulo | en  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>δ (°)</th> <th>23</th> <th>30</th> <th>45</th> <th>60</th> <th>75</th> <th>90</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>λ_{codo}</td> <td>0,17</td> <td>0,20</td> <td>0,40</td> <td>0,70</td> <td>1,00</td> <td>1,50</td> </tr> </tbody> </table> <p>δ: ángulo en el cambio de dirección</p> | | | | | | δ (°) | 23 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | λ_{codo} | 0,17 | 0,20 | 0,40 | 0,70 | 1,00 | 1,50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | δ (°) | 23 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| λ_{codo} | 0,17 | 0,20 | 0,40 | 0,70 | 1,00 | 1,50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| codos redondeados |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>r/D</th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\delta=22,5^\circ$</td> <td>0,11</td> <td>0,10</td> <td>0,09</td> <td>0,08</td> <td>0,08</td> </tr> <tr> <td>$\delta=45^\circ$</td> <td>0,19</td> <td>0,17</td> <td>0,16</td> <td>0,15</td> <td>0,15</td> </tr> <tr> <td>$\delta=60^\circ$</td> <td>0,25</td> <td>0,22</td> <td>0,21</td> <td>0,20</td> <td>0,19</td> </tr> <tr> <td>$\delta=90^\circ$</td> <td>0,33</td> <td>0,29</td> <td>0,27</td> <td>0,26</td> <td>0,26</td> </tr> <tr> <td>$\delta=135^\circ$</td> <td>0,41</td> <td>0,36</td> <td>0,35</td> <td>0,35</td> <td>0,35</td> </tr> <tr> <td>$\delta=180^\circ$</td> <td>0,48</td> <td>0,43</td> <td>0,42</td> <td>0,42</td> <td>0,42</td> </tr> </tbody> </table> <p>r: radio de curvatura. D: diámetro. δ: ángulo del cambio de dirección</p> | | | | | | r/D | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | $\delta=22,5^\circ$ | 0,11 | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,08 | $\delta=45^\circ$ | 0,19 | 0,17 | 0,16 | 0,15 | 0,15 | $\delta=60^\circ$ | 0,25 | 0,22 | 0,21 | 0,20 | 0,19 | $\delta=90^\circ$ | 0,33 | 0,29 | 0,27 | 0,26 | 0,26 | $\delta=135^\circ$ | 0,41 | 0,36 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | $\delta=180^\circ$ | 0,48 | 0,43 | 0,42 | 0,42 | 0,42 |
| | | r/D | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $\delta=22,5^\circ$ | 0,11 | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,08 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $\delta=45^\circ$ | 0,19 | 0,17 | 0,16 | 0,15 | 0,15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $\delta=60^\circ$ | 0,25 | 0,22 | 0,21 | 0,20 | 0,19 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $\delta=90^\circ$ | 0,33 | 0,29 | 0,27 | 0,26 | 0,26 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $\delta=135^\circ$ | 0,41 | 0,36 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\delta=180^\circ$ | 0,48 | 0,43 | 0,42 | 0,42 | 0,42 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

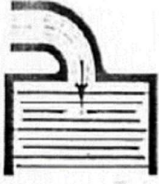
| Singularidad | | Coeficientes de resistencia λ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|------|------|------|---|---|-----|---|-----|---|---|---|-------------------|------|------|------|------|------|
| codos redondeados (que desembocan en un depósito lleno) |  | <table border="1"> <thead> <tr> <th>r/D</th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\delta=90^\circ$</td> <td>1,68</td> <td>1,64</td> <td>1,62</td> <td>1,61</td> <td>1,61</td> </tr> </tbody> </table> | | | | | | r/D | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | $\delta=90^\circ$ | 1,68 | 1,64 | 1,62 | 1,61 | 1,61 |
| | | r/D | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | | | |
| $\delta=90^\circ$ | 1,68 | 1,64 | 1,62 | 1,61 | 1,61 | | | | | | | | | | | | | | |
| r: radio de curvatura. D: diámetro. δ : ángulo del cambio de dirección | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Tabla 4.7. Factor de resistencia λ para válvulas. Manual Técnico Degremont. Franzini & Finnemore (1999). Saldarriaga (2007)

| Tipo de válvula | λ |
|--|-----------|
| Válvula exclusiva o compuerta abierta | 0,20 |
| Válvula exclusiva o compuerta entreabierta | 2,06 |
| Válvula exclusiva con $\frac{3}{4}$ apertura | 1 a 1,15 |
| Válvula exclusiva con $\frac{1}{2}$ apertura | 5,60 |
| Válvula exclusiva con $\frac{1}{4}$ apertura | 24,00 |
| Válvula globo abierta | 10 |
| Válvula de ángulo abierta | 5 |

Tabla 4.8. Factor de resistencia λ para curvas a 90° , (r es el radio de curvatura de la curva, y D es el diámetro de la tubería) Manual Técnico Degremont.

| r/D | λ |
|-----|-----------|
| 1,0 | 0,40 |
| 1,5 | 0,32 |
| 2,0 | 0,27 |
| 3,0 | 0,22 |
| 4,0 | 0,20 |

1.10 Ejercicios sobre tuberías

Ejercicio 4.1

Calcular el caudal de agua a 10°C que circula por una tubería de acero de aspereza de 0,05 mm, con un diámetro de 50 mm y una longitud neta de 1250 m, cuando en el punto inicial la altura de presión es de 50 m.c.a. y cota de 500 m s.n.m. Y en el punto de entrega se verifica una presión de 18 m.c.a. y una cota de 470 m s.n.m. Adoptar viscosidad cinemática de $1,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Cálculo de caudal (Primer caso del uso del Gráfico de Moody)

Aplicando Teorema de Bernoulli en dos secciones de la tubería, punto inicial (1) y punto final (2)

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta$$

Como el diámetro es constante, $D_1 = D_2$, la sección también, y por ecuación de continuidad:

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2$$

$$U_1 = U_2$$

Entonces:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \Delta$$

$$\Delta = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = 500 \text{ m} + 50 \text{ m} - (470 \text{ m} + 18 \text{ m}) = 62 \text{ m}$$

$$J = \frac{\Delta}{l} = \frac{62 \text{ m}}{1250 \text{ m}} = 0,0496$$

$$Re \sqrt{\lambda} = \frac{D^{3/2} \sqrt{2gJ}}{\nu} = \frac{(0,05 \text{ m})^{3/2} \sqrt{2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0,0496}}{1,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 8484 = 8,5 \cdot 10^3$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,05 \text{ m}}{5 \cdot 10^{-5} \text{ m}} = 1000$$

Leyendo en el ábaco de Moody con $Re \sqrt{\lambda} = 8,5 \cdot 10^3$ y $\frac{D}{\varepsilon} = 1000$, se obtiene:

$$\lambda = 0,024 \text{ y } Re = 5,6 \cdot 10^4$$

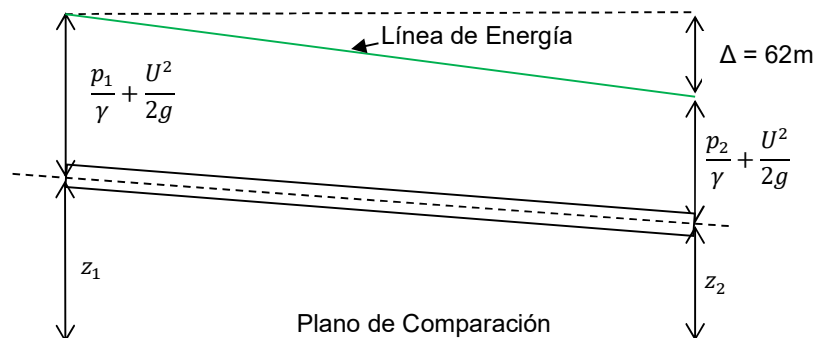
$$U = \frac{Re \nu}{D} = \frac{5,6 \cdot 10^4 \times 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{0,05 \text{ m}} = 1,45 \text{ m/s}$$

Cálculo de Caudal

$$Q = \Omega U = \frac{\pi D^2}{4} U = \frac{\pi (0,05 \text{ m})^2}{4} \times 1,45 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,00293 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$U = 1,45 \text{ m/s y } Q = 2,93 \text{ l/s}$$

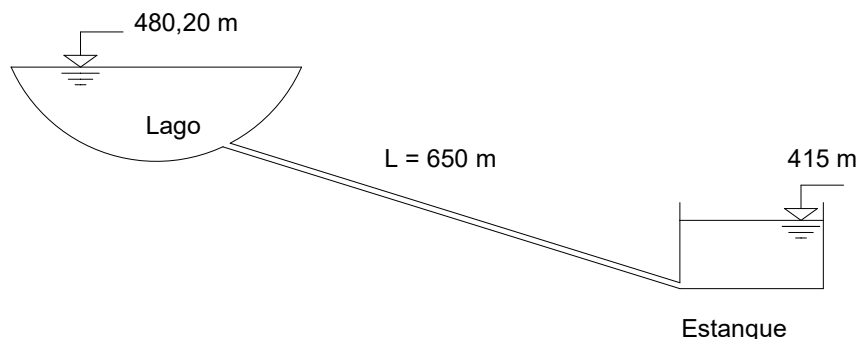
En la figura siguiente se muestra un esquema con la línea piezométrica.



Ejercicio 4.2

Un estanque se alimenta de un lago mediante una tubería de hierro galvanizado ($\varepsilon=0,15\text{mm}$) de 650 m de longitud. El nivel libre del lago tiene una cota de 480,2 m y el del estanque es de 415 m.

Calcular la velocidad del agua y el caudal aportado en la tubería cuando la misma tiene un diámetro 50,8 mm. Considerar una viscosidad cinemática igual a $1/800.000 \text{ m}^2/\text{s}$. Despreciar pérdidas por singularidad.



Cálculo de caudal (Primer caso del uso del Gráfico de Moody)

$$\Delta = 480,2 \text{ m} - 415 \text{ m} = 65,2 \text{ m}$$

$$J = \frac{\Delta}{l} = \frac{65,2 \text{ m}}{650 \text{ m}} = 0,100$$

$$Re \sqrt{\lambda} = \frac{D^{3/2} \sqrt{2gJ}}{\nu} = \frac{(0,0508 \text{ m})^{3/2} \sqrt{2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0,100}}{\frac{1}{800000} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 12380 = 1,4 \cdot 10^4$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,0508 \text{ m}}{1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 339$$

Leyendo en el ábaco de Moody con $Re \sqrt{\lambda} = 1,4 \cdot 10^4$ y $\frac{D}{\varepsilon} = 339$

$$\lambda = 0,028 \text{ y } Re = 7,7 \cdot 10^4$$

$$U = \frac{Re \nu}{D} = \frac{7,7 \cdot 10^4 \times \frac{1}{800000} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{0,0508 \text{ m}} = 1,90 \text{ m/s}$$

$$Q = \Omega U = \frac{\pi D^2}{4} U = \frac{\pi (0,0508 \text{ m})^2}{4} \times 1,90 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,00385 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 3,85 \text{ l/s}$$

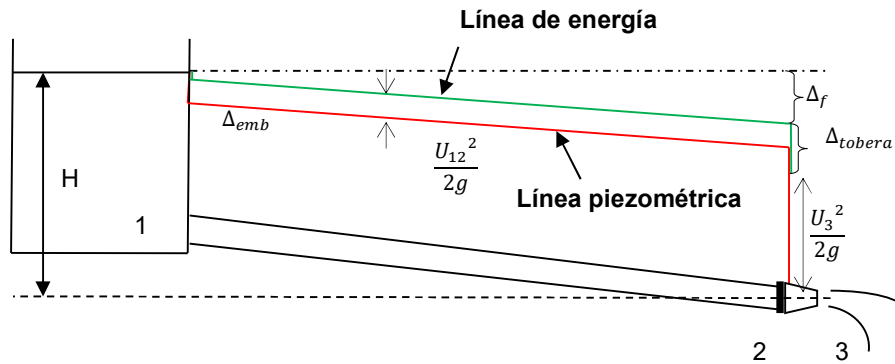
$$Q = 3,85 \text{ l/s}$$

Ejercicio 4.3

Un chorro de agua se descarga mediante una tobera, de acuerdo al esquema de la figura. Calcular el caudal que es erogado, la altura de presión de la tobera (punto 2), la pérdida de carga que produce la misma, si el diámetro de la tubería es de 0,18 m, la longitud de 150 m y el λ por frotamientos igual a 0,032, el diámetro de la tobera es de 0,06m. Dibujar la línea de energía y la piezométrica. Adoptar un λ por singularidad igual a 0,055 correspondiente a la tobera. H es igual 80m.

Nota: Una tobera para líquidos es un tubo convergente que se utiliza como dispositivo para medir caudales o para generar altas velocidades.

Ejercicio propuesto en Mecánica de Fluidos con aplicaciones en Ingeniería (Franzini & Finemore, 1999, pág. 199)



Cálculo de caudal

Se aplica Teorema de Bernoulli entre la sección 1 y la sección 3, desde la superficie libre de agua (punto 1) hasta el chorro libre (punto 3). El plano de comparación pasa por el baricentro de la tubería en la sección 2 (el punto 2 es el punto de inicio de la tobera y el punto 3 es el final de la tobera). En el punto 3, como es chorro libre, la presión es la presión atmosférica:

$$z_3 = 0 \text{ y } \frac{p_3}{\gamma} = 0$$

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{U_3^2}{2g} + \Delta$$

Hay pérdidas por frotamiento y singularidades (tobera y embocadura).

Reemplazando:

$$H = \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_f \frac{U_{12}^2}{2g} \frac{l}{D_{12}} + \lambda_{tob} \frac{U_3^2}{2g} + \lambda_{emb} \frac{U_{12}^2}{2g}$$

De la ecuación de continuidad:

$$Q = U_{12} \Omega_{12} = U_3 \Omega_3$$

$$U_3 = U_{12} \frac{\Omega_{12}}{\Omega_3} = U_{12} \frac{D_{12}^2}{D_3^2}$$

$$H = \left(\frac{D_{12}}{D_3}\right)^4 \frac{U_{12}^2}{2g} + \lambda_f \frac{U_{12}^2}{2g} \frac{l}{D_{12}} + \lambda_{tob} \left(\frac{D_{12}}{D_3}\right)^4 \frac{U_{12}^2}{2g} + \lambda_{emb} \frac{U_{12}^2}{2g}$$

$$H = \frac{U_{12}^2}{2g} \left[\left(\frac{D_{12}}{D_3}\right)^4 + \lambda_f \frac{l}{D_{12}} + \lambda_{tob} \left(\frac{D_{12}}{D_3}\right)^4 + \lambda_{emb} \right]$$

$$U_{12} = \sqrt{\frac{2 g H}{\left[\left(\frac{D_{12}}{D_3}\right)^4 + \lambda_f \frac{l}{D_{12}} + \lambda_{tob} \left(\frac{D_{12}}{D_3}\right)^4 + \lambda_{emb}\right]}}$$

$$U_2 = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 80\text{m}}{\left[\left(\frac{0,18 \text{ m}}{0,06 \text{ m}}\right)^4 + 0,032 \frac{150 \text{ m}}{0,18} + 0,055 \left(\frac{0,18 \text{ m}}{0,06 \text{ m}}\right)^4 + 0,5\right]}} = 3,73 \text{ m/s}$$

$$Q = U_{12} \frac{\pi D_{12}^2}{4} = 3,73 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\pi \times (0,18 \text{ m})^2}{4} = 0,095 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = \frac{0,095 \text{ m}^3}{\text{s}} = 95 \text{ l/s}$$

$$U_3 = U_{12} \frac{D_{12}^2}{D_3^2} = 3,73 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{(0,18 \text{ m})^2}{(0,06 \text{ m})^2} = 33,60 \text{ m/s}$$

$$U_3 \gg U_2$$

Cálculo de altura de presión (p_2 / γ)

$$H = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_{12}^2}{2g} + \lambda_f \frac{U_{12}^2}{2g} \frac{l}{D_{12}} + \lambda_{emb} \frac{U_{12}^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = H - \frac{U_{12}^2}{2g} - \lambda_f \frac{U_{12}^2}{2g} \frac{l}{D_{12}} - \lambda_{emb} \frac{U_{12}^2}{2g} = H - \frac{U_{12}^2}{2g} \left(1 + \lambda_f \frac{l}{D_{12}} + \lambda_{emb} \right)$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 80 \text{ m} - \frac{(3,73 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} \left(1 + 0,032 \frac{150 \text{ m}}{0,18 \text{ m}} + 0,5 \right) = 59,99 \text{ m}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 59,99 \text{ m}$$

Cálculo de la línea pérdida de carga

$$\Delta_{emb} = \lambda_{emb} \frac{U_{12}^2}{2g} = 0,5 \frac{(3,73 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 0,36 \text{ m}$$

$$\Delta_{tob} = \lambda_{tob} \frac{U_3^2}{2g} = 0,055 \frac{(33,66 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 3,16 \text{ m}$$

$$\Delta_f = \lambda_f \frac{U_{12}^2}{2g} \frac{l}{D_{12}} = 0,032 \frac{(3,73 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} \frac{150 \text{ m}}{0,18 \text{ m}} = 18,94 \text{ m}$$

$$B_{1 \text{ A.Arr}} = H = 80 \text{ m}$$

$$B_{1 \text{ A.Ab}} = H = 80 \text{ m} - 0,36 \text{ m} = 79,64 \text{ m}$$

$$B_2 = 79,64 \text{ m} - \Delta_f = 79,64 \text{ m} - 18,94 \text{ m} = 60,70 \text{ m}$$

$$B_3 = 60,70 \text{ m} - \Delta_{tob} = 60,70 \text{ m} - 3,16 \text{ m} = 57,54 \text{ m}$$

Cálculo de la línea piezométrica

$$CP_{1 \text{ A.Arr}} = 80 \text{ m}$$

$$CP_{1 \text{ A.Ab}} = 79,64 \text{ m} - \frac{U_{12}^2}{2g} = 79,64 \text{ m} - \frac{(3,73 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 78,93 \text{ m}$$

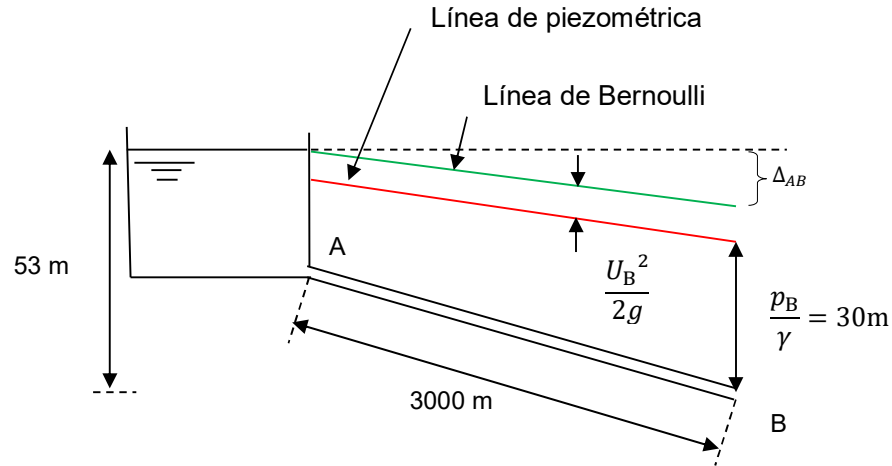
$$CP_2 = 60,70 \text{ m} - \frac{U_{12}^2}{2g} = 60,70 \text{ m} - \frac{(3,73 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 59,99 \text{ m}$$

$$CP_3 = 57,54 \text{ m} - \frac{(33,60 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0$$

En la figura siguiente se muestra un esquema de las líneas de energía y piezométrica (no están a escala).

Ejercicio 4.4

Determinar el diámetro de un tubo de acero ($\epsilon = 4,58 \times 10^{-5}$ m) necesario para transportar un caudal de $0,25 \text{ m}^3/\text{s}$ de aceite de viscosidad cinemática de $0,00001 \text{ m}^2/\text{s}$, a una longitud de 3000 m y proveer una altura piezométrica en el punto B de 30 m . Trazar la línea piezométrica del tubo.



Cálculo del diámetro (Segundo caso del uso del Gráfico de Moody)

Se calcula la pérdida de energía unitaria J con las cotas piezométricas del problema. Luego, se procede a iterar el valor del D . Se adopta un valor del D , se calcula la U , Re , la aspereza relativa D/ϵ , se lee λ en el Gráfico de Moody (Figura 4.6) y se calcula J para comparar con el $J_{disponible}$

$$J_{disponible} = \frac{CP_A - CP_B}{l} = \frac{53\text{m} - 30\text{m}}{3000\text{m}} = 0,0077$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} \quad Re = \frac{UD}{\nu} \quad \frac{D}{\epsilon} \quad JD = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

$$J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} \quad \text{y} \quad \Delta = J \times l$$

Se puede ordenar el cálculo a través de una planilla e ir iterando el D hasta que el valor de $J < J_{disponible}$

| D(m) | L(m) | CP _A (m) | Z _B (m) | P _B (m) | J disp | ε(m) | U (m/s) | Re | D/ε | λ | U ² /2g(m) | J | Δ (m) |
|--------------|------|---------------------|--------------------|--------------------|--------|---------|---------|----------|------|--------|-----------------------|----------------|--------------|
| 0,100 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 31,85 | 3,18E+05 | 2183 | 0,0180 | 51,69 | 9,30495 | 27914,86 |
| 0,200 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 7,96 | 1,59E+05 | 4367 | 0,0175 | 3,23 | 0,28270 | 848,11 |
| 0,300 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 3,54 | 1,06E+05 | 6550 | 0,0185 | 0,64 | 0,03936 | 118,07 |
| 0,400 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 1,99 | 7,96E+04 | 8734 | 0,0190 | 0,20 | 0,00959 | 28,78 |
| 0,410 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 1,89 | 7,77E+04 | 8952 | 0,0190 | 0,18 | 0,00848 | 25,43 |
| 0,420 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 1,81 | 7,58E+04 | 9170 | 0,0195 | 0,17 | 0,00771 | 23,14 |
| 0,421 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 1,80 | 7,56E+04 | 9192 | 0,0195 | 0,16 | 0,00762 | 22,87 |
| 0,422 | 3000 | 53 | 0 | 30 | 0,0077 | 4,6E-05 | 1,79 | 7,55E+04 | 9214 | 0,0195 | 0,16 | 0,00753 | 22,60 |

En el análisis de los resultados se puede ver que con un **D=0,421m** la pérdida de energía Δ resulta cercana a los 23m y por debajo de la misma, de modo que, se puede adoptar como el resultado final.

Los valores del diámetro obtenidos no responden a los valores comerciales, en la práctica hay que redondearlo y adaptarlo a los diámetros comerciales, buscando que la pérdida de carga real sea menor a la disponible (en este ejercicio de 23 m).

Una segunda alternativa de resolución se plantea a través de la aplicación del Teorema de Bernoulli desde la superficie libre de agua (punto A) hasta el chorro libre (punto B). El plano de comparación pasa por el baricentro de la tubería en la sección B. En el punto B, la presión es la indicada por el ejercicio igual a 30 m.

$$z_B = 0 \quad \frac{p_B}{\gamma} = 30\text{m}$$

$$H + 0 + 0 = 0 + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} + \Delta_{AB}$$

Reemplazando:

$$H = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} + \lambda_f \frac{U_{AB}^2}{2g} \frac{l}{D}$$

$$H - \frac{p_B}{\gamma} = \frac{U_B^2}{2g} + \lambda_f \frac{U_{AB}^2}{2g} \frac{l}{D}$$

$$U_B = U_{AB}$$

Además:

$$U_B = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

$$H - \frac{p_B}{\gamma} = \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D^4} + \lambda_f \frac{8}{g \pi^2} \frac{Q^2}{D^5} l$$

$$H - \frac{p_B}{\gamma} = 0,0827 \times \frac{Q^2}{D^4} + 0,0827 \lambda_f \frac{Q^2}{D^5} l$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas, el diámetro y λ_f , es necesario iterar.

Adoptando un $\lambda_f = 0,017$, calculamos el diámetro, con este valor determinamos el valor de Re y de D/ε para entrar en el ábaco de Moody y encontrar el valor de λ_f

$$53\text{m} - 30\text{m} = 23\text{m} = 0,0827 \times \frac{(0,25 \text{ m}^3/\text{s})^2}{D^4} + 0,0827 \times 0,017 \times \frac{(0,25 \text{ m}^3/\text{s})^2}{D^5} \times 3000\text{m}$$

El diámetro para estos valores es: 0,405 m. Este valor se obtuvo iterando en la ecuación anterior.

Para este diámetro:

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{\frac{1,94}{s} \times 0,405\text{m}}{0,00001 \text{ m}^2/\text{s}} = 3,8 \cdot 10^4$$

$$U = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,25 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi (0,405\text{m})^2}{4}} = 1,942 \text{ m/s}$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,405\text{m}}{0,0000458\text{m}} = 8843$$

Con estos valores de Re y D/ε , en el ábaco de Moody: $\lambda = 0,0225$

Para $\lambda = 0,0225$

$$23\text{m} = 0,0827 \times \frac{(0,25 \text{ m}^3/\text{s})^2}{D^4} + 0,0827 \times 0,0225 \times \frac{(0,25 \text{ m}^3/\text{s})^2}{D^5} \times 3000\text{m}$$

El diámetro es 0,433 m, para este valor de diámetro el Re y D/ε:

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{\frac{1,699m}{s} \times 0,433m}{0,00001 m^2/s} = 7,4 \cdot 10^4$$

$$U = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,25 m^3/s}{\frac{\pi (0,43)^2}{4}} = 1,699 m/s$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,433m}{0,0000458m} = 9454$$

Con estos valores de Re y D/ε, en el ábaco de Moody: λ = 0,02

Para λ = 0,02

$$23m = 0,0827 \times \frac{(0,25 m^3/s)^2}{D^4} + 0,0827 \times 0,02 \times \frac{(0,25 m^3/s)^2}{D^5} \times 3000m$$

El diámetro es 0,423 m, para este valor de diámetro el Re y D/ε:

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{\frac{1,78}{s} \times 0,423m}{0,00001 m^2/s} = 7,5 \cdot 10^4$$

$$U = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,25 m^3/s}{\frac{\pi (0,42)^2}{4}} = 1,78m/s$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,423m}{0,0000458m} = 9236$$

Con estos valores de Re y D/ε, en el ábaco de Moody: λ = 0,02

Entonces el diámetro buscado es **D=0,423m**.

Son necesarias algunas aclaraciones, primero para cada valor de λ_f el diámetro se obtuvo iterando hasta encontrar el valor de 23 m. Una primera aproximación se puede realizar anulando el primer término que está en función de D⁴, y considerando sólo el término de D⁵, ya que es mayor por estar además multiplicado por el valor de la longitud.

$$\underbrace{H - \frac{p_B}{\gamma}}_{23 m} = 0,0827 \times \frac{Q^2}{D^4} + 0,0827 \lambda_f \frac{Q^2}{D^5} l$$

Ejercicio 4.5

Calcular la pérdida de energía total y por unidad de longitud debido al frotamiento para una tubería de acero (ε=0,0473 mm) por la que circulan 189l/min de agua, con un diámetro de 5,1 cm y una longitud de 125 m. Considerar una viscosidad cinemática igual a 1/800000 m²/s.

Cálculo de la pérdida de energía (Tercer caso del uso del Gráfico de Moody)

$$Q = 189 \frac{l}{min} \frac{1 min}{60 s} \frac{1 m^3}{1000 l} = 0,00315 \frac{m^3}{s}$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,00315 \frac{m^3}{s}}{\pi \frac{(0,05)^2}{4}} = 1,54 m/s$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = 1,54 \frac{m}{s} \times 0,051m \times \frac{800000}{1 m^2/s} = 6,3 \cdot 10^4$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,051 \text{ m}}{0,0000473 \text{ m}} = 1078$$

Con el valor de Re y D/ε en el ábaco de Moody, se lee el valor de λ

$$\lambda = 0,023$$

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

$$J = \lambda \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} = 0,023 \frac{1}{0,051 \text{ m}} \frac{(1,54 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 0,055$$

$$\Delta = J l = 0,055 \times 125 \text{ m} = 6,88 \text{ m}$$

$$J = 0,055 \text{ y } \Delta = 6,88 \text{ m}$$

Ejercicio 4.6

A través de una tubería de acero circula agua a 30°C, viscosidad cinemática de $0,804 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. El diámetro de la tubería es de 5 cm, con una longitud de 125 m y transporta un caudal de 800 l/min. Calcular el número de Reynolds y la pérdida de carga. La aspereza de la tubería es de $4,5 \times 10^{-4} \text{ m}$.

Cálculo de la pérdida de energía (Tercer caso del uso del Gráfico de Moody)

$$Q = 800 \frac{\text{l}}{\text{min}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ l}} = 0,013 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,013 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \frac{(0,05 \text{ m})^2}{4}} = 6,62 \text{ m/s}$$

Cálculo de valor de Re

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{6,62 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,05 \text{ m}}{0,804 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 4,1 \cdot 10^5$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,05 \text{ m}}{0,00045 \text{ m}} = 111$$

Cálculo de la pérdida de carga

Con el valor de Re y D/ε en el ábaco de Moody, se obtiene el valor de λ

$$\lambda = 0,037$$

Corresponde a movimiento turbulento en tubería rugosa, entonces del valor de λ , puede obtenerse también de la ecuación 4.16.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \frac{R}{\varepsilon} = 1,70$$

$$\lambda = \frac{1}{\left(1,7 + 2 \times \log \frac{D/2}{\varepsilon}\right)^2} = \frac{1}{\left(1,7 + 2 \times \log \frac{0,05 \text{ m}/2}{0,00045 \text{ m}}\right)^2} = 0,0371$$

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

$$J = \lambda \frac{1}{D} \frac{U^2}{2g} = 0,037 \frac{1}{0,05m} \frac{(6,62 m/s)^2}{2 \times 9,81 m/s^2} = 1,65$$

$$\Delta = J l = 1,65 \times 125 m = 206,6 m \quad \Delta = \mathbf{206,6 m}$$

Ejercicio 4.7

Considerando únicamente las pérdidas por frotamiento en la tubería. ¿Qué altura de carga se necesita para transportar 220 l/s de un fuel-oil pesado a 40°C a través de 1000 m de una tubería nueva de PVC de 30 cm de diámetro? Considerando una aspereza $\varepsilon = 0,001$ mm y una $\nu = 52,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,22 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \frac{(0,30\text{m})^2}{4}} = 3,11 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{3,11 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,3 \text{ m}}{5,28 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,77 \cdot 10^4$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{300 \text{ mm}}{0,001 \text{ mm}} = 300000$$

Con el valor de Re y D/ε en el ábaco de Moody, se obtiene el valor de λ

$$\lambda = 0,0265$$

El valor corresponde a tubería lisa

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta = H l = \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g}$$

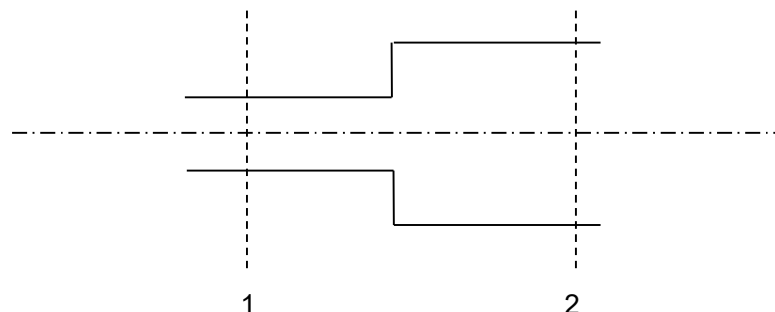
$$\Delta = 0,0265 \frac{1000m}{0,30m} \frac{(3,11m)^2}{2g}$$

$$\Delta = \mathbf{43,66 m}$$

Ejercicio 4.8

Una tubería de 15 cm de diámetro presenta un ensanche brusco a 45 cm de diámetro. Si la tubería transporta 350 l/s, calcular:

- La pérdida de carga Δ por la singularidad
- El aumento de presión Δp por el aumento del diámetro de la tubería, medida en metros de columna de agua



Cálculo de la pérdida de carga

$$U_1 = \frac{Q}{\Omega_1} = \frac{Q}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = \frac{0,35 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi (0,15\text{m})^2}{4}} = 19,82 \text{ m/s}$$

$$U_2 = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{Q}{\frac{\pi D_2^2}{4}} = \frac{0,35 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi (0,45\text{m})^2}{4}} = 2,20 \text{ m/s}$$

$$\Delta = \lambda_{\text{ensancha.b.}} \frac{U_1^2}{2g} = 0,79 \frac{(19,82 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 15,81 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{ensancha.b.}} = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{0,15 \text{ m}}{0,45 \text{ m}} \right)^2 \right]^2 = 0,79$$

$$\Delta = 15,81 \text{ m}$$

Cálculo de aumento de presión

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta$$

Si el plano de comparación coincide con el eje hidráulico:

$$z_1 = z_2 = 0$$

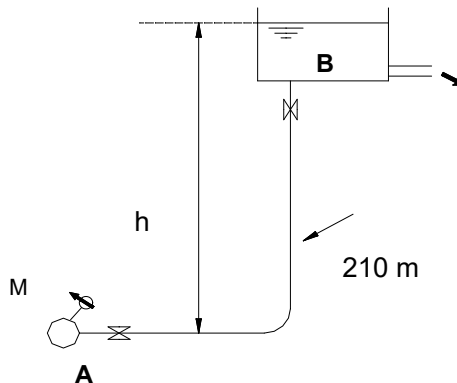
$$\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} - \Delta$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{(19,82 \text{ m/s})^2 - (2,2 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} - 15,81 \text{ m} = 3,95 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 3,95 \text{ m}$$

Ejercicio 4.9

Una tubería, cuyo corte transversal es el de la figura, tiene un manómetro M que marca 4,3 atm. Las características de la tubería del sistema son longitud: longitud 210m, diámetro 100 mm, y aspereza del acero 0,05 mm. Calcular la carga h para que el caudal alimentado sea de 5 l/s con las válvulas abiertas, sin considerar las pérdidas de carga singulares. Considerar una viscosidad



Aplicando Bernoulli en la sección B y A:

$$h = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} + \Delta$$

$$h = 0 + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} + \Delta = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} + \lambda \frac{l U^2}{D 2g}$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,005 \frac{m^3}{s}}{\frac{\pi (0,1 m)^2}{4}} = 0,64 m/s$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{0,64 \frac{m}{s} \times 0,1 m}{1 m^2/s} = 80000 = 5,10 \cdot 10^4 \quad \frac{D}{\varepsilon} = \frac{100 mm}{0,05 mm} = 2000$$

Del ábaco de Moody se lee $\lambda = 0,022$, correspondiente a movimiento turbulento en tubería lisa.

El valor del coeficiente de resistencia también se puede obtener, por iteraciones sucesivas, mediante la aplicación de alguna de estas ecuaciones que responden al movimiento turbulento en tubería lisa.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) = 0,70 + 2 \log\left(\frac{v_f \varepsilon}{\nu}\right) \quad (3.49)$$

$$\lambda \approx 0,021$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log\left(\frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51}\right) \wedge Re \geq 4000 \quad (4.17)$$

$$\lambda \approx 0,021$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \log\left(\frac{Re}{6,9}\right) \wedge 4000 \leq Re \leq 10^8 \quad (4.13)$$

$$\lambda \approx 0,021$$

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \wedge 3000 \leq Re \leq 100.000 \quad (4.18)$$

$$\lambda \approx 0,021$$

Reemplazando en la ecuación de Bernoulli:

$$h = \frac{4,3 atm}{1000 \frac{kgf}{m^3}} \frac{10330 \frac{kgf}{m^2}}{1 atm} + \frac{(0,64 m/s)^2}{2 \times 9,81 m/s^2} + 0,022 \frac{210m}{0,10m} \frac{(0,64 m/s)^2}{2 \times 9,81 m/s^2} = 45,40m$$

$$h = 45,40 m$$

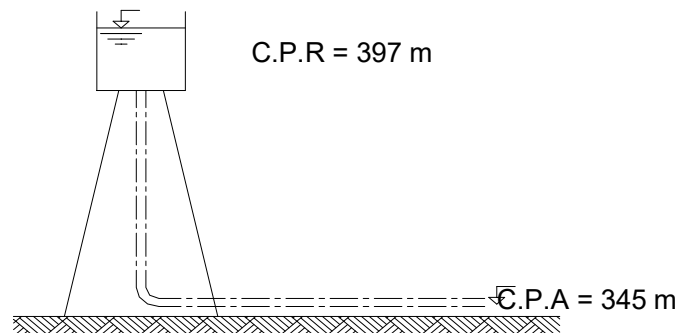
Ejercicio 4.10

En una ciudad una tubería de hierro galvanizado (aspereza absoluta de 0,15 mm) de 3000 m de longitud y 500 mm de diámetro, lleva agua potable desde un depósito elevado R cuyo nivel mínimo tiene una cota de 397 m, al punto de distribución principal de la red (A), de cota 345 m. Se construye un segundo ramal (II) de igual diámetro, aspereza y longitud que el primero existente.

a) Trazar la piezométrica y calcular la altura de presión de la tubería antes y después de la instalación de la segunda tubería, requiriéndose un caudal de 420 l/s.

b) La cantidad de hidrantes que podrían, teóricamente, entrar en servicio si cada uno suministra un caudal de 6 l/s para una presión de trabajo de 30 m.

Adoptar una viscosidad igual a $1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$



a.1) Antes de la construcción del ramal II

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,42 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \frac{(0,5 \text{ m})^2}{4}} = 2,14 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{2,14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,5 \text{ m}}{1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 856000 = 8,56 \times 10^5$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,5 \text{ m}}{0,00015 \text{ m}} = 3333,33$$

Ingresando al gráfico de Moody se puede leer un $\lambda=0,016$, que corresponde movimiento turbulento en tubería lisa. También, se puede utilizar Colebrook la ecuación 4.26

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(0,27 \frac{\varepsilon}{D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.26)$$

Para encontrar el valor de λ es necesario realizar iteraciones sucesivas en la ecuación anterior.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(0,27 \frac{1}{3333} + \frac{2,51}{856000 \sqrt{\lambda}} \right)$$

$$\lambda = 0,0158$$

La pérdida de carga entonces se calcula como:

$$\Delta = \lambda \frac{U^2}{2g} \frac{l}{D}$$

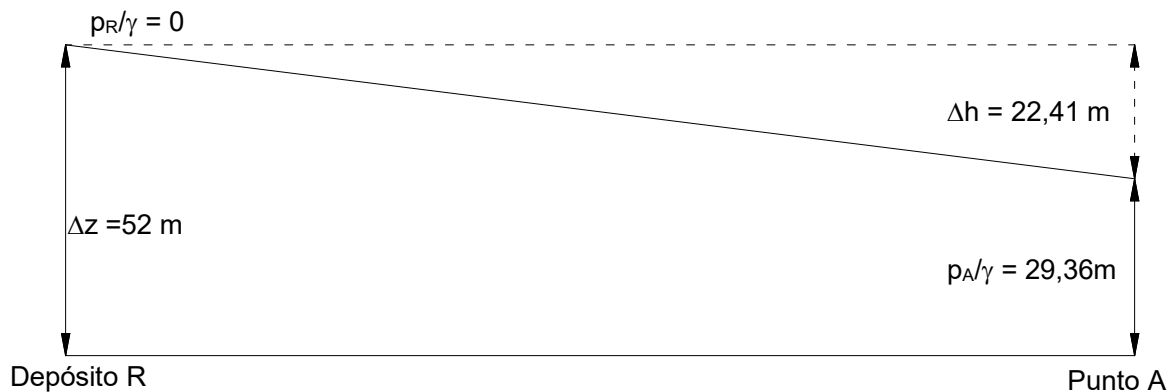
$$\Delta = 0,016 \frac{(2,14 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \frac{3000 \text{ m}}{0,5 \text{ m}} = 22,41 \text{ m}$$

Planteando Teorema de Bernoulli entre el depósito R y el punto A:

$$H_1 = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} + \Delta$$

$$\frac{p_A}{\gamma} = H_1 - z_A - \frac{U_A^2}{2g} - \Delta = 397 \text{ m} - 345 \text{ m} - 0,23 \text{ m} - 22,41 \text{ m} = 29,36 \text{ m} \rightarrow \frac{p_A}{\gamma} = \mathbf{29,36 \text{ m}}$$

La línea piezométrica en esta circunstancia es la siguiente:



a.2) Después de la construcción del ramal II.

El caudal de cada tubería es la mitad del caudal total

$$Q = \frac{Q_T}{2} = \frac{0,42 \text{ m}^3/\text{s}}{2} = 0,21 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,21 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \frac{(0,5 \text{ m})^2}{4}} = 1,07 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{1,07 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,5 \text{ m}}{1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 428000$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,5 \text{ m}}{0,00015 \text{ m}} = 3333$$

Ingresando al gráfico de Moody se puede leer un $\lambda=0,0165$, que corresponde movimiento turbulento en tubería lisa. También, se puede utilizar Colebrook la ecuación 4.26

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(0,27 \frac{1}{3333} + \frac{2,51}{428000 \sqrt{\lambda}} \right)$$

$$\lambda = 0,0165$$

La pérdida de carga entonces se calcula como:

$$\Delta = 0,0165 \frac{(1,07 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \frac{3000 \text{ m}}{0,5 \text{ m}} = 5,78 \text{ m}$$

Planteando Teorema de Bernoulli entre el depósito R y el punto A:

$$\frac{p_A}{\gamma} = H_R - z_A - \frac{U_A^2}{2g} - \Delta = 397 \text{ m} - 345 \text{ m} - 0,06 \text{ m} - 5,78 \text{ m} = 46,16 \text{ m} \rightarrow \frac{p_A}{\gamma} = \mathbf{46,16 \text{ m}}$$

b) Cantidad de hidrantes

$$\Delta = H_R - z_A - \frac{p_A}{\gamma} = 397 \text{ m} - 345 \text{ m} - 30 \text{ m} = 22 \text{ m}$$

$$J = \frac{\Delta}{l} = \frac{22 \text{ m}}{3000 \text{ m}} = 0,0073$$

Cálculo del caudal cuando la altura de presión en el punto A es 30 m, Primer caso de uso del gráfico de Moody:

$$Re \sqrt{\lambda} = \frac{D^{3/2} \sqrt{2gJ}}{\nu} = \frac{(0,5 \text{ m})^{3/2} \sqrt{2 \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0,0073}}{1,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,07 \cdot 10^5$$

$$\frac{D}{\varepsilon} = 3333$$

Con estos valores en el ábaco de Moody, $\lambda=0,016$

$$U = \sqrt{\frac{2gJD}{\lambda}} = \sqrt{2 \frac{9,81 \text{ m} \cdot 0,0073}{\text{s}^2} \frac{0,5 \text{ m}}{0,016}} = 2,12 \text{ m/s}$$

$$Q = U \Omega = 2,12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\pi (0,5 \text{ m})^2}{4} = 0,42 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para los dos ramales el caudal total será

$$Q_{\text{Total}} = 0,84 \text{ m}^3/\text{s}$$

El número de hidrantes se calcula como sigue:

$$N^{\circ} \text{ hidrantes} = \frac{0,84 \text{ m}^3/\text{s}}{0,006 \text{ m}^3/\text{s}} = 140 \text{ hidrantes}$$

Se pueden instalar 140 hidrantes

Ejercicio 4.11

Utilizando el diagrama de Moody responder a lo siguiente:

- ¿Para qué tipo de flujo la pérdida por fricción varía con el cuadrado de la velocidad?
- ¿Cuál es el factor de fricción (λ) para $Re = 10^5$, para $\varepsilon/D = 0,0001$ (tubería lisa) y $\varepsilon/D = 0,001$?
- ¿Para qué rango del Re el factor de fricción es constante en una tubería de hierro fundido ($\varepsilon = 0,25 \text{ mm}$) de 152 mm de diámetro?
- Suponiendo que la rugosidad absoluta de un tubo dado se incrementa en un período de 3 años, a tres veces su valor inicial, esto tendría mayor efecto en la pérdida de energía en flujo turbulento para Re altos o bajos?
- ¿Para qué tipo de flujo λ depende únicamente de Re ?
- ¿Para qué tipo de flujo λ depende de Re y de ε/D ?
- Si λ es $0,06$ para un tubo liso, ¿cuál sería el valor de λ para un tubo de rugosidad relativa $\varepsilon/D = 0,001$ con el mismo Re ?
- Idem para $\lambda = 0,015$.

Ejercicio propuesto en Hidráulica General (Sotelo Avila, 1997, pág. 319)

a) La pérdida por fricción varía con el cuadrado de la velocidad para el movimiento turbulento.

b) Para $Re = 100000$ y $\frac{D}{\varepsilon} = 10000$ y $\lambda = 0,0185$ y para $\frac{D}{\varepsilon} = 1000$ $\lambda = 0,0223$

c) $\frac{D}{\varepsilon} = \frac{152 \text{ mm}}{0,25 \text{ mm}} = 608$

El factor de resistencia λ es contante para $Re \geq 7 \cdot 10^5$

d) $\varepsilon_{(3 \text{ años})} = 3 \varepsilon_0 \Rightarrow$ por lo tanto la aspereza relativa (D/ε_0) será tres veces menor, y para movimiento turbulento, a menor aspereza relativa mayor es el factor de resistencia λ . Para Re bajos el factor λ crece más rápido que para Re altos, al disminuir la aspereza relativa; es decir

que, el crecimiento de la aspereza con el tiempo tiene mayor efecto en el valor de la pérdida de carga para números de Re bajos.

e) λ depende sólo del Re para el movimiento laminar.

f) λ depende de Re y de ε/D para el movimiento turbulento en tubería lisa.

g) Si $\lambda = 0,06$, entonces $Re = 3250$

Para $Re = 3250$ entonces $\lambda = 0,045$ para tuberías lisas.

h)) Si $\lambda = 0,015$, entonces $Re = 2,5 \cdot 10^5$ es tubería lisa

Para $Re = 2,5 \cdot 10^5$ y $\frac{D}{\varepsilon} = 1000$, $\lambda = 0,021$

Ejercicio 4.12

Un flujo de aceite de un peso específico de 900 kgf/m^3 y $\nu=0,00001 \text{ m}^2/\text{s}$ circula con un caudal de $0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ a través de un tubo de hierro fundido de 200 mm de diámetro y 500 m de longitud. Determinar la pérdida de carga. Utilizar el ábaco de Moody, considerando un $\varepsilon = 0,26\text{mm}$.

Respuesta: $\Delta=118,9\text{m}$

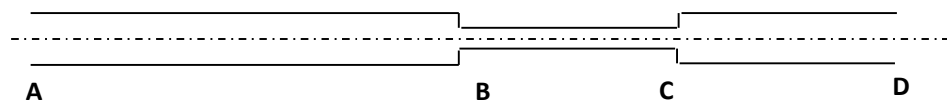
Ejercicio 4.13

Dimensionar una tubería de PVC, por la que circula un caudal de $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua, si la longitud de la misma es de 100 m y la pérdida de carga de 20 m . Considerar $\nu=1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Respuesta: $D=0,26\text{m}$

Ejercicio 4.14

En el punto A de una tubería horizontal de 30 cm de diámetro la altura de presión es de 60 m . A una distancia de 60 m de A, la tubería de 30 cm sufre una contracción brusca hasta el diámetro de 15 cm de la nueva tubería. A una distancia de esta contracción brusca de 30 m la tubería de 15 cm sufre un ensanchamiento brusco, conectándose con una tubería de 30 cm . El punto D está 30 m aguas abajo de este cambio de sección, ver gráfico que se adjunta. Para una velocidad de $2,41 \text{ m/s}$ en la primera tubería. Dibujar las líneas de energía y piezométrica, considerando una aspereza absoluta de $0,15\text{mm}$ y $1/\nu$ de 800000 s/m^2 .



En este caso se trata de tuberías en serie (dos o más tuberías diferentes colocadas una a continuación de otra, las mismas difieren en el diámetro o en el material (rugosidad) o ambas características), y se pueden presentar tres casos, cálculo del caudal, cálculo de las pérdidas de carga o el dimensionamiento de la tubería.

Para el cálculo de la energía y de la cota piezométrica, se plantea primero el cálculo del caudal, que resulta constante en las tuberías en serie.

Cálculo de caudal

$$Q = \Omega U = \frac{\pi D^2}{4} U = \frac{\pi (0,30 \text{ m})^2}{4} 2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,17 \text{ m}^3/\text{s}$$

Cálculo de las pérdidas de carga

Las pérdidas de energía que se presentan corresponden a frotamientos por tramo y dos singularidades, un estrechamiento y un ensanchamiento. Las expresiones de cálculo son las siguientes:

| Pérdida de energía | Ecuaciones y valores | |
|-----------------------|---|--|
| Frotamiento por tramo | $\Delta_{frotamiento} = J l = \lambda_M \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g}$ | λ_i depende de la Ecuación 4.26 |
| Estrechamiento | $\Delta_{estrecha.b.} = \lambda_{estrecha.b.} \frac{U_{BC}^2}{2g}$ $\lambda_{estrecha.b.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{D_{BC}}{D_{AB}} \right)^2 \right]$ | $\lambda_{estrecha.b.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{0,15\text{m}}{0,30\text{m}} \right)^2 \right]$ $\lambda_{estrecha.b.} = 0,375$ |
| Ensanchamiento | $\Delta_{ensancha.b.} = \lambda_{ensancha.b.} \frac{U_{CD}^2}{2g}$ $\lambda_{ensancha.b.} = \left[1 - \left(\frac{D_{CD}}{D_{BC}} \right)^2 \right]^2$ | $\lambda_{ensancha.b.} = \left[1 - \left(\frac{0,30}{0,15} \right)^2 \right]^2$ $\lambda_{ensancha.b.} = 9$ |

Para el factor de resistencia λ se puede leer directamente del Gráfico de Moody o calcular con la Ecuación de Colebrook (4.26).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{3,7}{\varepsilon/D} + \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{2,51} \right) \quad (4.26)$$

En cualquiera de los casos la velocidad del agua por tramo se calcula con la ecuación de la continuidad: $U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}$, con ella el Re y D/ε para leer en el gráfico de Moody.

Los cálculos de las pérdidas de energía se resumen en la tabla siguiente.

| | DETALLE | L(m) | D(m) | L/D | ε(m) | U (m/s) | Re | D/ε | λ _i | U ² /2g (m) | Δi (m) |
|-----------------|----------------|------|------|-----|-------|---------|----------|------|----------------|------------------------|---------|
| Pto A | | | 0,30 | | | 2,41 | | | | 0,2960 | |
| Tramo AB | frotamiento | 60 | 0,30 | 200 | 2E-04 | 2,41 | 5,78E+05 | 2000 | 0,0175 | 0,2960 | 1,0361 |
| Pto B | estrechamiento | | 0,15 | | | 9,64 | | | 0,3750 | 4,7365 | 1,7762 |
| Tramo BC | frotamiento | 30 | 0,15 | 200 | 2E-04 | 9,64 | 1,16E+06 | 1000 | 0,0200 | 4,7365 | 18,9459 |
| Pto C | ensanchamiento | | 0,30 | | | 2,41 | | | 9,0000 | 0,2960 | 2,6643 |
| Tramo CD | frotamiento | 30 | 0,30 | 100 | 2E-04 | 2,41 | 5,78E+05 | 2000 | 0,0175 | 0,2960 | 0,5181 |

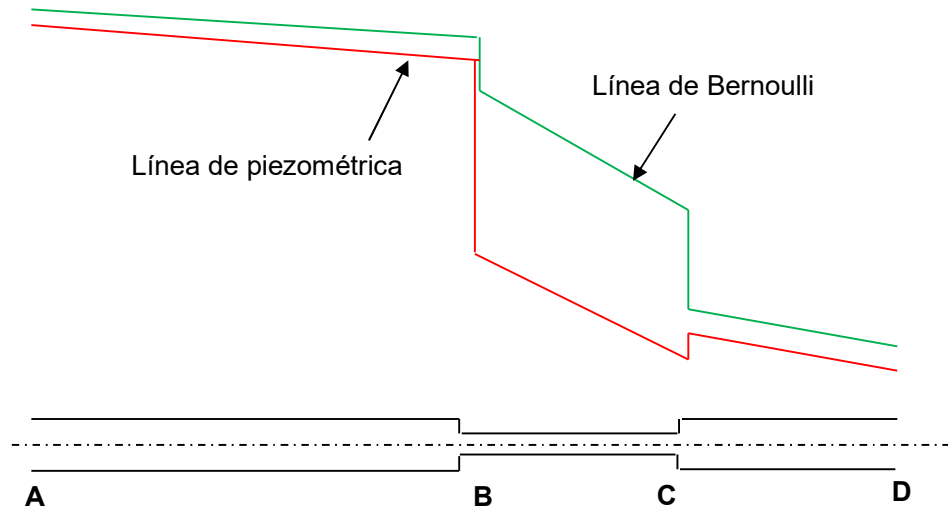
Además, para el cálculo de la energía se aplica el Teorema de Bernoulli a cada punto característico. Los planteos se resumen en la tabla siguiente.

| Punto | Ecuaciones | Bei (m) |
|------------------|---|---------|
| Ag. Abajo Pto A | $B_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_{AB}^2}{2g} = 0 + 60 \text{ m} + \frac{(2,41 \text{ m})^2}{2g}$ | 60,2960 |
| Ag. Arriba Pto B | $B_{B(A.Arr)} = B_A - \Delta_{\text{frotamiento}} = 60,2960 \text{ m} - 1,0361 \text{ m}$ | 59,2599 |
| Ag. Abajo Pto B | $B_{B(A.Ab)} = B_{B(A.Arr)} - \Delta_{\text{estrecha. b.}} = 59,2599 \text{ m} - 1,7762 \text{ m}$ | 57,4837 |
| Ag. Arriba Pto C | $B_{C(A.Arr)} = B_{B(A.Ab)} - \Delta_{\text{frotamiento}} = 57,4837 \text{ m} - 18,9459 \text{ m}$ | 38,5379 |
| Ag. Abajo Pto C | $B_{C(A.Ab)} = B_{C(A.Arr)} - \Delta_{\text{ensancha. b.}} = 38,5379 \text{ m} - 2,6643 \text{ m}$ | 35,8736 |
| Ag. Arriba Pto D | $B_D = B_{C(A.Ab)} - \Delta_{\text{frotamiento}} = 35,8736 \text{ m} - 0,5181 \text{ m}$ | 35,3555 |

Para el cálculo de la Cota Piezométrica se plantea partiendo del Bernoulli y restando la altura de velocidad correspondiente

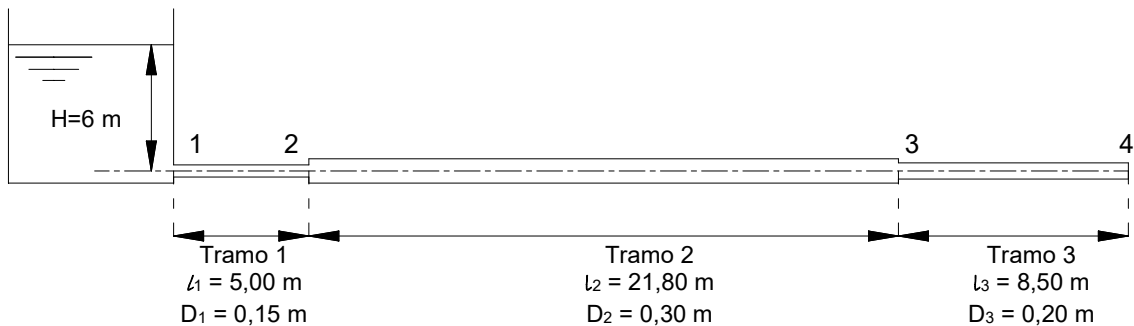
| Punto | Ecuaciones | CPi(m) |
|------------------|---|---------|
| Ag. Abajo Pto A | $CP_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} = 0 + 60 \text{ m}$ | 60,0000 |
| Ag. Arriba Pto B | $CP_{B(A.Arr)} = B_{B(A.Arr)} - \frac{U_{AB}^2}{2g} = 59,2599 \text{ m} - 0,2960 \text{ m}$ | 58,9639 |
| Ag. Abajo Pto B | $CP_{B(A.Ab)} = B_{B(A.Ab)} - \frac{U_{BC}^2}{2g} = 57,4837 \text{ m} - 4,7365 \text{ m}$ | 52,7473 |
| Ag. Arriba Pto C | $CP_{C(A.Arr)} = B_{C(A.Arr)} - \frac{U_{BC}^2}{2g} = 38,5379 \text{ m} - 4,7365 \text{ m}$ | 33,8014 |
| Ag. Abajo Pto C | $CP_{C(A.Ab)} = B_{C(A.Ab)} - \frac{U_{DC}^2}{2g} = 35,8736 \text{ m} - 0,2960 \text{ m}$ | 35,5776 |
| Ag. Arriba Pto D | $CP_D = B_D - \frac{U_{CD}^2}{2g} = 35,3555 \text{ m} - 0,2960 \text{ m}$ | 35,0595 |

El gráfico de la línea de energía y la línea piezométrica es el siguiente.



Ejercicio 4.15

En un proyecto de provisión de aguas desde un depósito sale una tubería de hierro galvanizado ($\epsilon=1,5 \cdot 10^{-4}m$) que consta de tres tramos conectados en serie cuyas características son los de la figura de abajo. Calcular el caudal que transporta este sistema cuando el mismo desagua a presión atmosférica. Considerar una viscosidad cinemática igual a $1,25 \cdot 10^{-6}m^2/s$. Trazar la línea de energía y la piezométrica.



Para el cálculo de las pérdidas de energía es necesario conocer las velocidades por cada tramo de la tubería, como el caudal es la incógnita del ejercicio, no se pueden calcular las velocidades de cada por tramo. Por ello, es que se plantea el Teorema de Bernoulli entre el punto 1 y el punto 4, y luego se expresan las velocidades por tramo en función de la velocidad del punto 4 para poder despejarla de la ecuación de Bernoulli. Se considera que el plano de referencia coincide con el eje hidráulico del sistema de tuberías:

$$B_1 = H = B_4 + \Sigma \Delta_i = B_4 + \Sigma \Delta_{singularidad} + \Sigma \Delta_{frotamientos}$$

$$H = B_4 + \sum \lambda_{s i} \frac{U_i^2}{2g} + \sum \lambda_{f i} \frac{l_i U_i^2}{D_i 2g}$$

$$B_4 = z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{U_{34}^2}{2g}$$

$$z_4 = 0$$

A la salida de la tubería el chorro es libre, entonces la presión a la salida es la atmosférica

$$\frac{p_4}{\gamma} = 0$$

$$H = \frac{U_{34}^2}{2g} + \left(\sum \lambda_{s1} + \sum \lambda_{f12} \frac{l_{12}}{D_{12}} \right) \frac{U_{12}^2}{2g} + \left(\sum \lambda_{s2} + \sum \lambda_{f23} \frac{l_{23}}{D_{23}} \right) \frac{U_{23}^2}{2g} + \left(\sum \lambda_{s3} + \sum \lambda_{f34} \frac{l_{34}}{D_{34}} \right) \frac{U_{34}^2}{2g}$$

Es una ecuación con varias incógnitas, ya que no sólo las velocidades por tramo son desconocidas, sino que también los factores de resistencia λ_{fi} por tramo lo son. Para expresar en función de una única velocidad se puede aplicar la ecuación de la continuidad a las velocidades por cada tramo:

$$Q = \pi \frac{D_{12}^2}{4} U_{12} = \pi \frac{D_{23}^2}{4} U_{23} = \pi \frac{D_{34}^2}{4} U_{34} \rightarrow U_{12} = U_{34} \frac{D_{34}^2}{D_{12}^2} \wedge U_{23} = U_{34} \frac{D_{34}^2}{D_{23}^2}$$

Remplazando en la expresión del Bernoulli:

$$H = \frac{U_{34}^2}{2g} + \left(\sum \lambda_{s1} + \sum \lambda_{f12} \frac{l_{12}}{D_{12}} \right) \frac{D_{34}^2 U_{34}^2}{D_{12}^2 2g} + \left(\sum \lambda_{s2} + \sum \lambda_{f23} \frac{l_{23}}{D_{23}} \right) \frac{D_{34}^2 U_{34}^2}{D_{23}^2 2g} + \left(\sum \lambda_{s3} + \sum \lambda_{f34} \frac{l_{34}}{D_{34}} \right) \frac{U_{34}^2}{2g}$$

Sacando factor común la altura de velocidad

$$H = \frac{U_{34}^2}{2g} \times \left[1 + \left(\sum \lambda_{s1} + \sum \lambda_{f12} \frac{l_{12}}{D_{12}} \right) \frac{D_{34}^2}{D_{12}^2} + \left(\sum \lambda_{s2} + \sum \lambda_{f23} \frac{l_{23}}{D_{23}} \right) \frac{D_{34}^2}{D_{23}^2} + \left(\sum \lambda_{s3} + \sum \lambda_{f34} \frac{l_{34}}{D_{34}} \right) \right]$$

Y despejando la velocidad U_{34} :

$$U_{34} = \sqrt{\frac{2gH}{\left[1 + \left(\sum \lambda_{s1} + \sum \lambda_{f12} \frac{l_{12}}{D_{12}} \right) \frac{D_{34}^2}{D_{12}^2} + \left(\sum \lambda_{s2} + \sum \lambda_{f23} \frac{l_{23}}{D_{23}} \right) \frac{D_{34}^2}{D_{23}^2} + \left(\sum \lambda_{s3} + \sum \lambda_{f34} \frac{l_{34}}{D_{34}} \right) \right]}}$$

Se procede a calcular los factores de resistencia para la cuantificación de las pérdidas de energía.

Pérdidas de energía

Para cuantificar las pérdidas de carga o de energía por frotamiento en cada tramo es necesario determinar el tipo de movimiento turbulento (liso o rugoso), y luego aplicar la ecuación correspondiente para cada caso. En este caso al no conocerse el caudal, no se sabe la velocidad por tramo, y por lo tanto tampoco el Re , para su posterior clasificación, por lo tanto, se supone inicialmente Movimiento Turbulento en tubería rugosa (Ecuación 4.16) y luego se verifica tal situación. También puede usarse el Ábaco de Moody entrando en el área del Movimiento Turbulento en Tubería Rugosa, teniendo en cuenta el valor de la aspereza relativa D/ϵ . Se resumen las expresiones y los valores de los factores de resistencia:

| Tramo | Ecuaciones y valores | |
|---------|---|---|
| Tramo 1 | $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{fi}}} - 2 \log \frac{R_i}{\epsilon} = 1,70$ $\lambda_{fi} = \frac{1}{\left(1,70 + 2 \log \frac{R_i}{\epsilon} \right)^2}$ | $\lambda_{f12} = \frac{1}{\sqrt{1,70 + 2 \log \frac{0,075m}{1,5 \cdot 10^{-4}m}}} = 0,0198$ |
| Tramo 2 | | $\lambda_{f23} = \frac{1}{\sqrt{1,70 + 2 \log \frac{0,15}{1,5 \cdot 10^{-4}m}}} = 0,0169$ |
| Tramo 3 | | $\lambda_{f34} = \frac{1}{\sqrt{1,70 + 2 \log \frac{0,10}{1,5 \cdot 10^{-4}m}}} = 0,0185$ |

Para el cálculo de los factores de resistencia por singularidad:

| Singularidad | Ecuaciones y valores | |
|----------------|---|--|
| Embocadura | $\Delta_{embocadura} = \lambda_{s1} \frac{U_{12}^2}{2g}$ | $\lambda_{embocadura} = 0,5$ |
| Ensanchamiento | $\Delta_{ensanchamiento} = \lambda_{ensancha.b.} \frac{U_{23}^2}{2g}$ $\lambda_{ensancha.b.} = \left[1 - \left(\frac{D_{23}}{D_{12}} \right)^2 \right]^2$ | $\lambda_{ensancha.b.} = \left[1 - \left(\frac{0,30}{0,15} \right)^2 \right]^2$ $\lambda_{ensancha.b.} = 9$ |
| Estrechamiento | $\Delta_{estrecha.b.} = \lambda_{estrecha.b.} \frac{U_{34}^2}{2g}$ $\lambda_{estrecha.b.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{D_{34}}{D_{23}} \right)^2 \right]$ | $\lambda_{estrecha.b.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{0,20m}{0,30m} \right)^2 \right]$ $\lambda_{estrecha.b.} = 0,278$ |

En el cuadro siguiente se resumen los cálculos realizados

| | Tipo pérdida | D (m) | l (m) | ε (m) | λ _f | λ _f / l/D | λ _{si} | λ _i (D ₃₄ / D _i) ⁴ |
|----------------|----------------|-------|-------|----------------------|----------------|----------------------|-----------------|---|
| Pto 1 | embocadura | 0,15 | | | | | 0,5 | 1,5802 |
| Tramo 1 | frotamiento | 0,15 | 5 | 1,5 10 ⁻⁴ | 0,0198 | 0,6616 | | 2,0911 |
| Pto 2 | ensanchamiento | 0,3 | | | | | 9 | 1,7778 |
| Tramo 2 | frotamiento | 0,3 | 21,8 | 1,5 10 ⁻⁴ | 0,0169 | 1,2256 | | 0,2421 |
| Pto 3 | estrechamiento | 0,2 | | | | | 0,278 | 0,2780 |
| Tramo 3 | frotamiento | 0,2 | 8,5 | 1,5 10 ⁻⁴ | 0,0185 | 0,7872 | | 0,7872 |
| | | | | | | | | 6,7564 |

Se reemplazan los valores en la ecuación de la velocidad U₃₄

$$U_{34} = \sqrt{\frac{2gH}{\left[1 + \left(\sum \lambda_{s1} + \sum \lambda_{f12} \frac{l_{12}}{D_{12}} \right) \frac{D_{34}^2}{D_{12}^2} + \left(\sum \lambda_{s2} + \sum \lambda_{f23} \frac{l_{23}}{D_{23}} \right) \frac{D_{34}^2}{D_{23}^2} + \left(\sum \lambda_{s3} + \sum \lambda_{f34} \frac{l_{34}}{D_{34}} \right) \right]}}$$

$$U_{34} = \sqrt{\frac{2 \frac{9,81}{s^2} 6m}{\left[1 + (1,5802 + 2,0911) + (1,7778 + 0,2421) + (0,2780 + 0,7872) \right]}} = 3,8958m/s$$

Cálculo del caudal

$$Q = \Omega_{34} U_{34} = \frac{\pi D_{34}^2}{4} U_{34} = \frac{\pi (0,2 m)^2}{4} 3,8958 \frac{m}{s} = 0,1223 m^3/s$$

Verificación del tipo de movimiento.

Con el caudal calculado se determina la velocidad, el Re y D/ε para cada tramo, ingresando en el Gráfico de Moody se observa el tipo de movimiento y se lee el factor de resistencia λ, en el cuadro siguiente se resumen los cálculos realizados.

| Tramo | l (m) | D(m) | ε (m) | Q (m ³ /s) | U _i (m/s) | Re | D/ε | Clasif. Movim | λ _{Mf} | λ _{Mf} (l i/Di)(D ₃₄ /D _i) ⁴ |
|---------|-------|------|----------|-----------------------|----------------------|----------|------|---------------|-----------------|---|
| Tramo 1 | 5 | 0,15 | 1,50E-04 | 0,1223 | 6,9259 | 8,31E+05 | 1000 | transición | 0,020 | 2,1070 |
| Tramo 2 | 21,8 | 0,3 | 1,50E-04 | 0,1223 | 1,7315 | 4,16E+05 | 2000 | transición | 0,018 | 0,2584 |
| Tramo 3 | 8,5 | 0,2 | 1,50E-04 | 0,1223 | 3,8958 | 6,23E+05 | 1333 | transición | 0,019 | 0,8075 |
| | | | | | | | | | | 3,1729 |

El valor de λ del movimiento de transición también se puede calcular con la Ecuación 4.26 de Colebrook.

Con los nuevos valores de factor de resistencia por tramo se ajusta el valor de la velocidad U₃₄

$$U_{34} = \sqrt{\frac{2 \frac{9,81m}{s^2} 6m}{[1 + (1,5802 + 2,1070) + (1,7778 + 0,2584) + (0,2780 + 0,8075)]}} = 3,8827m/s$$

$$\frac{U_{34}^2}{2g} = 0,7684m$$

$$Q = \Omega_{34} U_{34} = \frac{\pi D_{34}^2}{4} U_{34} = \frac{\pi (0,2 m)^2}{4} 3,8827 \frac{m}{s} = 0,1219 m^3/s$$

Este caudal encontrado es casi igual al usado para los cálculos de las pérdidas de carga. De modo que el caudal es igual a **Q=122 l/s**.

Se calculan las velocidades por tramo:

$$U_{12} = U_{34} \frac{D_{34}^2}{D_{12}^2} = 3,8827 \frac{m}{s} \frac{(0,20m)^2}{(0,15m)^2} = 6,9025 \frac{m}{s} \wedge \frac{U_{12}^2}{2g} = 2,4284m$$

$$U_{23} = U_{34} \frac{D_{34}^2}{D_{23}^2} = 3,8827 \frac{m}{s} \frac{(0,20m)^2}{(0,30m)^2} = 1,7256 \frac{m}{s} \wedge \frac{U_{23}^2}{2g} = 0,1518m$$

Trazado de línea de energía y piezométrica

Se calcula la energía, o sea el Bernoulli, en cada sección transversal y luego la cota piezométrica restándole la altura de velocidad correspondiente:

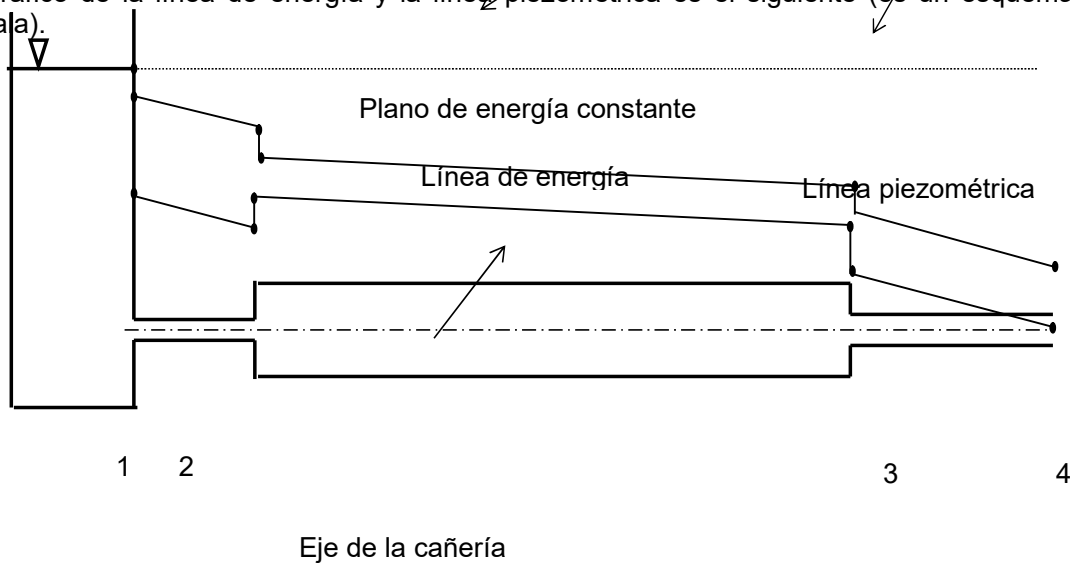
| Punto | Ecuaciones | Bei (m) |
|------------------|--|---------|
| Ag. Arriba Pto 1 | $B_{1 A.Arr} = H$ | 6,0000 |
| Ag. Abajo Pto 1 | $B_{1 A.Ab} = H - \Delta_{emb} = H - \lambda_{emb} \frac{U_{12}^2}{2g} = 6,0000 m - 0,5 \times 2,4284m$ | 4,7858 |
| Ag. Arriba Pto 2 | $B_{2 A.Arr} = B_{1 A.Ab} - \Delta_{f12} = 4,7858 m - \lambda_{Mf12} \frac{l_{12}}{D_{12}} \frac{U_{12}^2}{2g}$ $= 4,7858 m - 0,020 \frac{5m}{0,15m} 2,4284m$ | 3,1669 |
| Ag. Abajo Pto 2 | $B_{2 A.Ab} = B_{2 A.Arr} - \lambda_{ensancha.b.} \frac{U_{23}^2}{2g} = 3,1669m - 9 \times 0,1518m$ | 1,8009 |
| Ag. Arriba Pto 3 | $B_{3 A.Arr} = B_{2 A.Ab} - \Delta_{f23} = 1,8009 m - \lambda_{Mf23} \frac{l_{23}}{D_{23}} \frac{U_{23}^2}{2g}$ $= 1,8009 m - 0,018 \frac{21,8m}{0,3m} 0,1518m$ | 1,6024 |
| Ag. Abajo Pto 3 | $B_{3 A.Ab} = B_{3 A.Arr} - \lambda_{estrecha.b.} \frac{U_{34}^2}{2g} = 1,6024 m - 0,278 \times 0,7684m$ | 1,3888 |

| Punto | Ecuaciones | Bei (m) |
|------------------|---|---------|
| Ag. Arriba Pto 4 | $B_{4 A.Arr} = B_{3 A.Ab} - \Delta_{f34} = 1,3888 \text{ m} - \lambda_{Mf34} \frac{l_{34}}{D_{34}} \frac{U_{34}^2}{2g}$ $= 1,3888 \text{ m} - 0,019 \frac{8,5\text{m}}{0,2\text{m}} 0,7684\text{m}$ | 0,7684 |

Para el cálculo de la Cota Piezométrica se plantea partiendo del Bernoulli y restando la altura de velocidad correspondiente.

| Punto | Ecuaciones | CPI(m) |
|------------------|--|---------|
| Ag. Arriba Pto 1 | $CP_{1 A.Arr} = B_{1 A.Arr} - \frac{U_1^2}{2g} = 6 \text{ m} - 0\text{m}$ | 6,0000 |
| Ag. Abajo Pto 1 | $CP_{1 A.Ab} = B_{1 A.Ab} - \frac{U_{12}^2}{2g} = 4,7858 \text{ m} - 2,4284\text{m}$ | 2,3574 |
| Ag. Arriba Pto 2 | $CP_{2 A.Arr} = B_{2 A.Arr} - \frac{U_{12}^2}{2g} = 3,1669\text{m} - 2,4284 \text{ m}$ | 0,7385 |
| Ag. Abajo Pto 2 | $CP_{2 A.Ab} = B_{2 A.Ab} - \frac{U_{23}^2}{2g} = 1,8009\text{m} - 0,1518\text{m}$ | 1,6492 |
| Ag. Arriba Pto 3 | $CP_{3 A.Arr} = B_{3 A.Arr} - \frac{U_{23}^2}{2g} = 1,6024 \text{ m} - 0,1518 \text{ m}$ | 1,4506 |
| Ag. Abajo Pto 3 | $CP_{3 A.Ab} = E$ | 1,7684m |
| Ag. Arriba Pto 4 | $CP_{4 A.Arr} = B_{4 A.Arr} - \frac{U_{34}^2}{2g} = 0,7684 \text{ m} - 0,7684 \text{ m}$ | 0 |

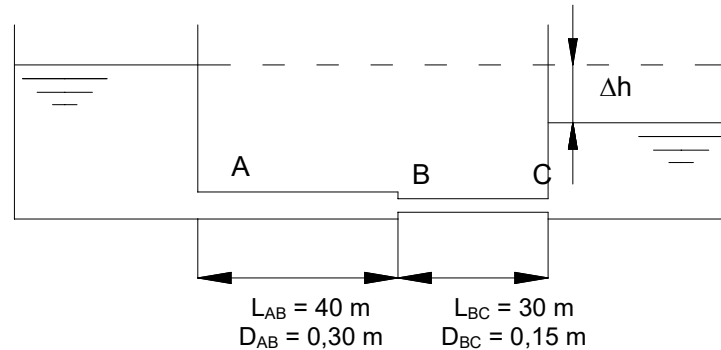
El gráfico de la línea de energía y la línea piezométrica es el siguiente (es un esquema sin escala).



Ejercicio 4.16

Dos depósitos de agua están conectados por medio de una tubería que conduce un caudal de agua de 50 l/s. El nivel de agua en el primer depósito es de 25 metros. La tubería es de hierro galvanizado ($\epsilon=0,152 \text{ mm}$) y posee un primer tramo de 40 metros de longitud y 30 cm de diámetro. Calcular el nivel o energía en el segundo depósito y las cotas piezométricas aguas

arriba y aguas abajo del estrechamiento. Adoptar $\lambda_{embocadura}=0,5$; $\lambda_{desembocadura}=1$; y una viscosidad cinemática igual a $1/800000 \text{ s/m}^2$.



Cálculo de las pérdidas de energía

Para cuantificar las pérdidas de carga o de energía por frotamiento en cada tramo es necesario calcular la U , Re , D/ϵ y leer λ del Gráfico de Moody, o calcularlo con la ecuación que corresponde al tipo de movimiento turbulento (liso o rugoso).

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} \wedge Re = \frac{U \times D}{\nu} \wedge \Delta_{frotamiento} = J l = \lambda_f \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Mientras que para las pérdidas singulares se toman los siguientes factores de resistencia.

| Singularidad | Ecuaciones y valores | |
|----------------|---|--|
| Embocadura | $\Delta_{embocadura} = \lambda_{sA} \frac{U_{AB}^2}{2g}$ | $\lambda_{embocadura} = 0,5$ |
| Estrechamiento | $\Delta_{estrecha.b.} = \lambda_{estrecha.b.} \frac{U_{BC}^2}{2g}$ $\lambda_{estrecha.b.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{D_{BC}}{D_{AB}} \right)^2 \right]$ | $\lambda_{estrech. b.} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{0,15m}{0,30m} \right)^2 \right]$ $\lambda_{estrecha.b.} = 0,375$ |
| Desembocadura | $\Delta_{desembocadura} = \lambda_{sC} \frac{U_{BC}^2}{2g}$ | $\lambda_{desembocadura} = 1$ |

Los cálculos se resumen en el cuadro siguiente.

| | DETALLE | l(m) | D(m) | l/D | ϵ (m) | U (m/s) | Re | D/ε | λ_i | $U^2/2g$ (m) | Δi (m) |
|-----------------|----------------|------|------|-----|----------------|---------|----------|------|-------------|--------------|----------------|
| Pto A | embocadura | | 0,30 | | | 0,71 | | | 0,5000 | 0,0255 | 0,013 |
| Tramo AB | frotamiento | 40 | 0,30 | 133 | 1,52E-04 | 0,71 | 1,70E+05 | 1974 | 0,0195 | 0,0255 | 0,0664 |
| Pto B | estrechamiento | | 0,15 | | | 2,83 | | | 0,3750 | 0,4084 | 0,1532 |
| Tramo BC | frotamiento | 30 | 0,15 | 200 | 1,52E-04 | 2,83 | 3,40E+05 | 987 | 0,0205 | 0,4084 | 1,6746 |
| Pto C | desembocadura | | 0,15 | | | 2,83 | | | 1,0000 | 0,4084 | 0,4084 |
| | | | | | | | | | | | 2,3154 |

El nivel de agua en el segundo depósito es:

$$H_C = H_A - \sum \Delta_{frotamientos} + \sum \Delta_{singularidad} = 25 \text{ m} - 2,3154 \text{ m} = 22,6846 \text{ m}$$

H_c ≈ 22,7m

$$B_{B(A.Arr)} = B_{A(A.Arr)} - \Delta_{embocaduraA} - \Delta_{frot.AB} = 25 \text{ m} - 0,013 \text{ m} - 0,0664 \text{ m} = 24,9209 \text{ m}$$

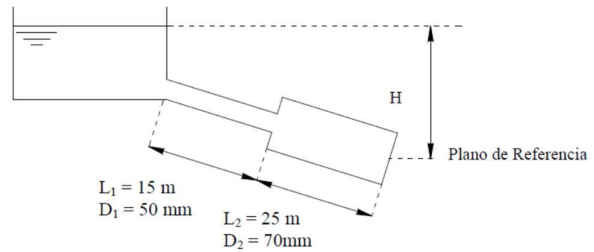
$$CP_{B(A.Arr)} = B_{B(A.Arr)} - \frac{U_{AB}^2}{2g} = 24,9209 \text{ m} - 0,0255 \text{ m} = \mathbf{24,8953 \text{ m}}$$

$$B_{B(A.Ab)} = B_{B(A.Arr)} - \Delta_{estrecha.B} = 24,9209 \text{ m} - 0,1532 \text{ m} = 24,7677 \text{ m}$$

$$CP_{B(A.Ab)} = B_{B(A.Ab)} - \frac{U_{BC}^2}{2g} = 24,7677 \text{ m} - 0,4084 \text{ m} = \mathbf{24,3592 \text{ m}}$$

Ejercicio 4.17

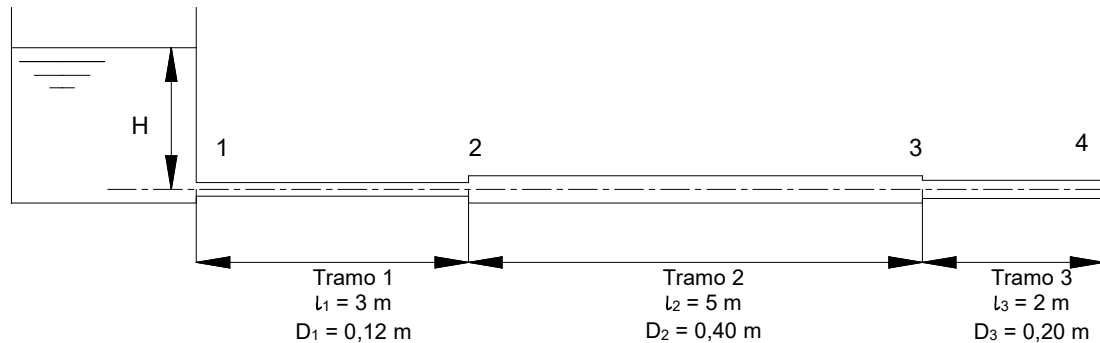
El tubo mostrado en la figura debe transportar un caudal de 3 l/s. El factor de fricción de cada tramo es $\lambda_1=0,048$, y $\lambda_2=0,058$. Calcular la carga hidráulica H necesaria para poder suministrar el caudal dato.



Respuesta: $H \approx 2,5 \text{ m}$

Ejercicio 4.18

Calcular la energía necesaria en el depósito de la figura, para que el sistema erogue un caudal de 60 l/s, considerando que el material usado es hierro galvanizado ($\epsilon=1,5 \times 10^{-4} \text{ m}$). Además, calcular las cotas piezométricas y la energía en cada punto característico.



Respuesta: $H \approx 3 \text{ m}$

Ejercicio 4.19

Una tubería de 20 cm de diámetro presenta un ensanche brusco de 50 cm de diámetro. Si la tubería transporta 400 l/s. Calcular:

1. La pérdida de energía por la singularidad presentada.
2. El aumento de presión por la singularidad, expresado en metros de columna de agua.

Respuesta: $\Delta s = 5,86 \text{ m}$ y $\Delta p/\gamma = 2,2 \text{ m}$

1.11 Perfil geométrico e hidráulico de una tubería

Para estudiar la diferencia de comportamiento entre el perfil geométrico de una tubería, dado por el eje hidráulico de la misma, y el perfil hidráulico, dado por la línea piezométrica, se analiza un tramo diferencial de longitud de una tubería, "ds", y se lo aísla para estudiar su comportamiento. En el gráfico de la Figura 4.7 se dan las magnitudes actuantes en ese tramo diferencial de la tubería.

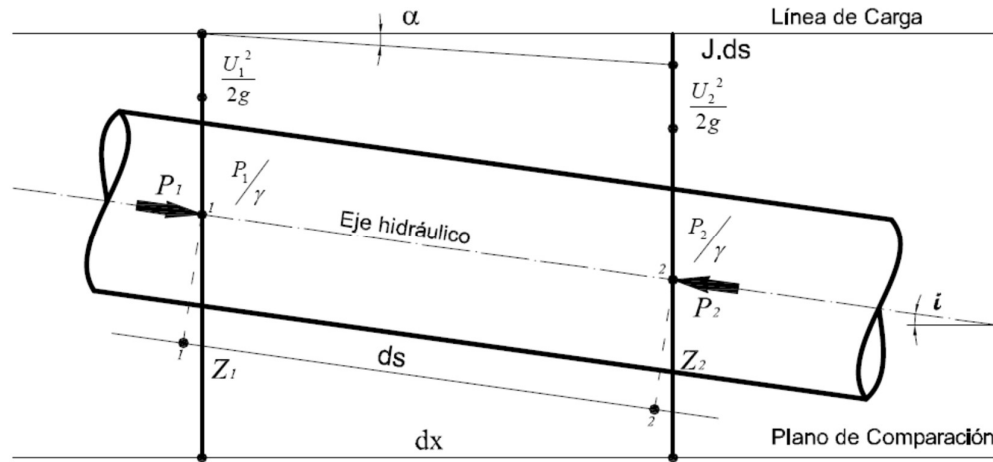


Figura 4.7. Tramo de tubería

Dada una cañería de longitud "ds", de desnivel piezométrico H, la pérdida de carga unitaria resultará $J=\Delta/ds$, es decir independiente del perfil geométrico. En tanto que la línea de energía sí será influenciada por el perfil geométrico, para encontrar dicha influencia analizamos lo siguiente. Considerando el triángulo rectángulo formado entre ds, dx (como proyección horizontal de ds) y dz (como diferencia entre las cotas extremas de la porción de tubería), se puede expresar lo siguiente:

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 \tag{4.32}$$

$$\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dz^2}{dx^2}$$

Si se llama "α" a la pendiente de la línea de energía e "i" a la pendiente geométrica del eje hidráulico de la tubería, podemos escribir las siguientes expresiones:

$$tg i = \frac{dz}{dx}$$

$$tg \alpha = J \frac{ds}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$tg \alpha = J \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$tg \alpha = J \sqrt{1 + (tg i)^2} \tag{4.33}$$

La Ecuación 4.33 permite observar que si $i = 0$, $\text{tg } \alpha = J$, es decir, que mientras más horizontal sea la cañería la pendiente de la línea de carga tiende al valor de J .

La pendiente geométrica podrá ser ascendente o descendente, es decir, negativa o positiva, pero como $\text{tg}^2 i$ siempre será positiva implica que la línea de energía siempre será descendente. Por ejemplo, una cañería que une dos depósitos y con una diferencia de nivel piezométrico H .

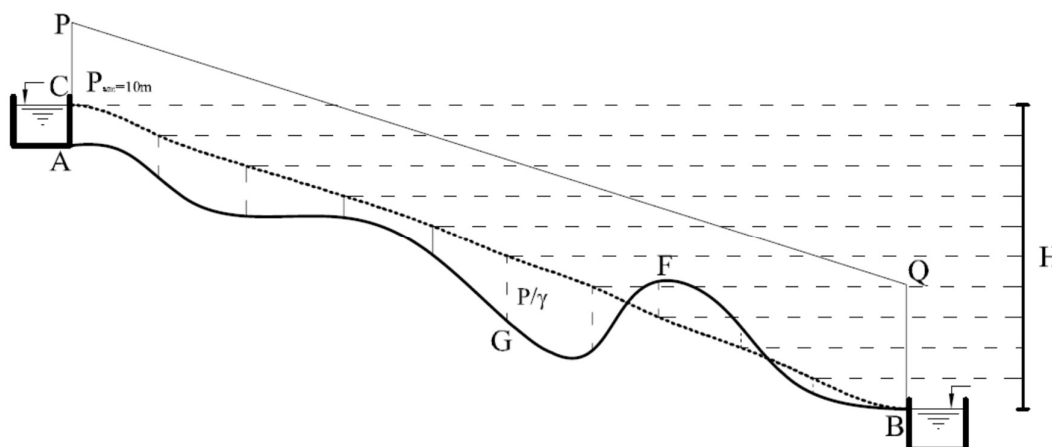


Figura 4.8. Tubería, línea piezométrica y línea de presiones totales

Si se supone además un diámetro constante y despreciando las pérdidas de cargas por singularidades, se puede dividir la tubería en n partes iguales, al igual que el desnivel H . Si ahora por cada uno de esos puntos se trazan horizontales y verticales, uniendo los puntos resultantes de la intersección se ubica la línea piezométrica de dicha tubería. Esto equivale decir que, por cada n parte de la longitud de la tubería que recorre el agua, la piezométrica desciende una n parte de H .

Conocida la línea piezométrica se puede obtener la línea total de presiones. Esto se logra sumando a la carga correspondiente la presión atmosférica ($p_{atm} = 10 \text{ mca}$). Es decir que, se puede trazar una paralela a la piezométrica pero diez metros por encima.

Para que haya escurrimiento es necesario que la línea PQ no corte el eje hidráulico de la cañería. En la Figura 4.8 el punto de presión mínima es el punto F , ya que resulta menor a la atmosférica.

Ya que la cota piezométrica está compuesta de la suma de dos términos, si la suma resulta negativa, porque se encuentra por debajo del eje hidráulico de la tubería, se debe analizar los valores posibles de los dos sumandos:

$$CP = z + \frac{p}{\gamma}$$

El primer sumando es la cota de posición que será constante y positiva, porque el eje de referencia pasa por la cota más baja, una vez que se fija el plano de comparación o referencia; entonces el valor del segundo sumando es negativo y mayor que el del primer sumando. Una cota de presión negativa implica que la presión es menor que la atmosférica.

Entonces, si la línea piezométrica corta al eje hidráulico, la presión total resultará menor que la atmosférica. El agua a temperatura ambiente y presión menor que la atmosférica vaporiza, acumulándose ese vapor que se desprende en la parte superior.

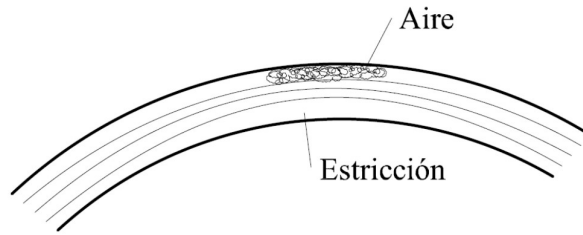


Figura 4.9. Desprendimiento de aire

Se produce una estricción de la corriente y aumenta la pérdida de carga, resultando necesario colocar dispositivos que dejen ingresar aire para que la presión aumente, por lo menos, hasta la presión atmosférica.

En el punto G, en cambio, se da la presión máxima de trabajo, esta presión será la que se usa para el cálculo estructural.

Si la línea PQ corta la cañería el escurrimiento es imposible.

1.12 Tubería de diámetro variable

En toda canalización cerrada se presentan pérdidas continuas y singulares. Es común expresar a estas últimas (codos, válvulas, cambios de sección) como una longitud equivalente, tal que, la pérdida por frotamiento de esa longitud equivale a la pérdida por singularidad. Por lo que, la longitud equivalente se suma a la longitud real de la cañería para el cálculo de las pérdidas de energía.

De igual manera, se puede plantear para distintos diámetros el cálculo del caudal obtenidos a través del **“DIÁMETRO MEDIO EQUIVALENTE”**.

Recordando la Ecuación 4.10 del movimiento turbulento:

$$J = K_t \frac{Q^2}{D^5} \tag{4.10}$$

Si la pérdida de carga total es la suma de las pérdidas de carga de cada uno de los tramos:

$$\Delta = J_1 l_1 + J_2 l_2 + J_3 l_3 + \dots + J_n l_n \tag{4.34}$$

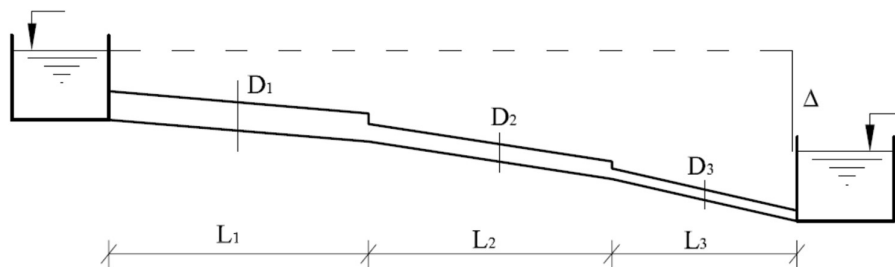


Figura 4.10. Tubería de sección variable

Reemplazando J, Ecuación 4.10 en 4.34.

$$\Delta = K_t \frac{Q^2}{D_1^5} l_1 + K_t \frac{Q^2}{D_2^5} l_2 + \dots + K_t \frac{Q^2}{D_n^5} l_n$$

$$\Delta = K_t Q^2 \left(\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \dots + \frac{l_n}{D_n^5} \right) \quad (4.35)$$

El diámetro medio que satisface la ecuación es D_m , y aplicando la expresión de la pérdida de carga a una tubería que tiene una longitud igual a la suma de la longitud de los tramos de la

misma. $J = \frac{H}{\sum l} = K_t \frac{Q^2}{D_m^5}$

Se obtiene la relación:

$$\frac{\sum l}{D_m^5} = \left(\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \dots + \frac{l_n}{D_n^5} \right) \quad (4.36)$$

La Ecuación 4.36 es conocida como **REGLA DE DUPUIT** para movimiento turbulento.

Para movimiento laminar, la expresión es la siguiente:

$$\frac{\sum L}{D_m^4} = \left(\frac{l_1}{D_1^4} + \frac{l_2}{D_2^4} + \dots + \frac{l_n}{D_n^4} \right) \quad (4.37)$$

La Ecuación 4.37 es conocida como **REGLA DE DUPUIT** para movimiento laminar.

1.13 Velocidad Límite

La velocidad de la tubería debe ser menor a aquella que produce vibraciones y daños en las juntas. La Tabla 4.9 muestra velocidades medias y caudales máximos admisibles para distintos diámetros

También puede aplicarse la regla de Unwin:

$$U_{m\acute{a}x} = 0,60 + 1,45 D \quad (4.38)$$

Donde $U_{m\acute{a}x}$ es la velocidad máxima admisible en m/s cuando el diámetro de la tubería se expresa en m.

Sin embargo, cabe aclarar que estos valores son sobrepasados en tuberías forzadas de ingreso a las salas de máquinas, por lo que se requiere de dispositivos especiales a efectos de disminuir el efecto del golpe de ariete.

Tabla 4.9. Velocidades medias máximas y caudales máximos admisibles. Domínguez (1999).

| D (m) | U (m/s) | Q (l/s) |
|-------|---------|---------|
| 0,05 | 0,60 | 1,2 |
| 0,10 | 0,80 | 6,0 |
| 0,20 | 1,00 | 30,0 |
| 0,40 | 1,30 | 165,0 |
| 0,60 | 1,60 | 450,0 |
| 0,80 | 1,80 | 900,0 |
| 1,00 | 2,00 | 1500,0 |
| 1,50 | 2,40 | 4200,0 |
| 2,00 | 2,70 | 8400,0 |
| 2,50 | 3,00 | 15000,0 |
| 3,00 | 3,25 | 22700,0 |
| 3,50 | 3,50 | 34000,0 |

1.14 Tubería de caudal variable

Las obras de conducción de diámetro constante van entregando caudal a lo largo del camino, por ejemplo, las cañerías de distribución de agua potable, las redes de riego por aspersión, por goteo, entre otros.

Se analizarán dos casos, el primero con ingreso de caudal por uno de los extremos de la tubería, y egreso de un caudal menor en el otro. El segundo caso corresponde a ingreso de caudal por ambos extremos, lo que supone que en algún punto de la conducción el gasto es nulo. En el primer caso los caudales tienen el mismo signo (igual sentido), y en el segundo signo distinto (distinto sentido).

Ingreso y egreso de caudal

Si se presenta una tubería por la que ingresa un caudal determinado Q_i y egresa un caudal menor Q_e significa que ha sido derivado un caudal en el camino.

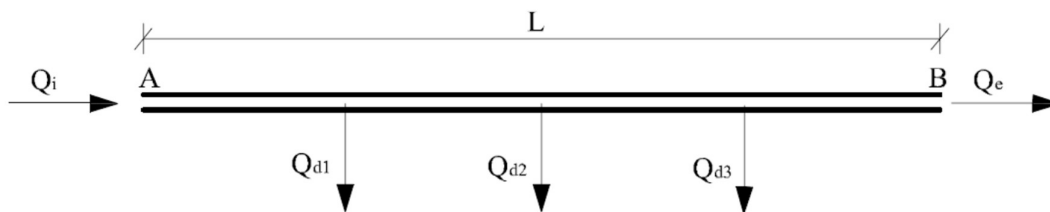


Figura 4.11. Tubería de gasto variable

En los puntos intermedios entre el de ingreso y el de egreso el caudal también variará a medida que vaya saliendo líquido. Lo que implica que habría que estudiar los n tramos intermedios en los cuales el caudal es diferente, pero para simplificar el problema se introduce una magnitud llamada “servicio en camino” o “servicio en ruta” (indicada con la letra q), la cual se define de la siguiente forma:

$$q = \frac{Q_i - Q_e}{l} \quad (4.39)$$

El servicio en camino o en ruta es el caudal medio que se va entregando o perdiendo por unidad de longitud. Se verifica también considerando que el caudal que se deriva es la suma de los caudales individuales derivados.

$$q L = Q_{1d} + Q_{2d} + \dots + Q_{nd} \quad (4.40)$$

Cálculo de la pérdida de energía en tuberías de caudal variable

Para calcular la pérdida de energía de una tubería que posee caudal variable se utiliza la relación entre la pérdida de carga J y el caudal, dada por la Ecuación 4.10, para movimiento turbulento:

$$J = K_t \frac{Q^2}{D^5} \quad (4.10)$$

Considerando el **diámetro constante** en el tramo analizado, la relación $\frac{K_t}{D^5}$ es constante también.

$$K = \frac{K_t}{D^5}$$

Entonces, considerando como caudal de referencia el caudal de egreso:

$$J = K Q^2 = K Q_e^2$$

A una distancia x del comienzo de la tubería la pérdida es:

$$J = K (Q_i - q x)^2$$

Desarrollando matemáticamente el cuadrado de un binomio:

$$J_x = K (Q_i^2 - 2 Q_i q x + q^2 x^2)$$

La pérdida de carga total será la integral de la pérdida de carga en el dx , con la longitud variando entre 0 y l : De esta manera se puede calcular la pérdida de carga total Δ , que es igual a la diferencia de cotas piezométricas H , según la Ecuación 4.4 de la Tubería.

Resolviendo matemáticamente dicha expresión, se puede simplificar obteniendo una fórmula más simple.

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^L J_x dx = \int_0^L K (Q_i^2 - 2 Q_i q x + q^2 x^2) dx = H \\ H &= K \left[Q_i^2 x - 2 Q_i q \frac{x^2}{2} + q^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^L \\ H &= K L \left(Q_i^2 - Q_i q l + q^2 \frac{l^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para obtener una expresión similar, pero en función de los caudales de ingreso y egreso:

$$\begin{aligned} H &= K L \left[Q_i \frac{(Q_i - ql)}{Q_e} + q^2 \frac{l^2}{3} \right] \\ H &= K L \left(Q_i Q_e + q^2 \frac{l^2}{3} \right) \\ H &= K L \left[Q_i Q_e + \frac{(Q_i - Q_e)^2}{3} \right] \\ H &= \frac{K L}{3} [3 Q_i Q_e + (Q_i - Q_e)^2] \\ H &= \frac{K L}{3} [3 Q_i Q_e + Q_i^2 - 2 Q_i Q_e + Q_e^2] \\ H &= \frac{K L}{3} (Q_i^2 + Q_i Q_e + Q_e^2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Las Ecuaciones 4.41 y 4.42 permiten calcular la energía H , como diferencia de cotas piezométricas, que se debe disponer en una cañería de longitud l , diámetro D y con un servicio en ruta q . (Solo válida para alimentación por un extremo).

Si en la 4.42 el caudal de egreso resulta nulo, resulta:

$$H = \frac{K l Q_i^2}{3} \quad (4.43)$$

Para el cálculo del diámetro, se utiliza un caudal constante medio que produce una pérdida de carga igual a la energía disponible H . Entonces:

$$\begin{aligned} J &= K Q_m^2 \\ H &= J l = K l Q_m^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Igualando Ecuación 4.44 con 4.41 ó 4.42, puede obtenerse el caudal medio:

$$Q_m = \sqrt{Q_i^2 - Q_i q l + q^2 \frac{l^2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{Q_i^2 + Q_i Q_e + Q_e^2} \quad (4.45)$$

En el caso que el caudal de egreso sea nulo, de la ecuación 4.45, el caudal medio será:

$$Q_m = \sqrt{\frac{Q_i^2}{3}} = 0,577 Q_i \quad (4.46)$$

Ingreso de caudal por los dos extremos

En caso de tener ingreso por los dos extremos, habrá una sección donde se anularán los caudales, ya que ambos son colineales, pero de sentido contrario.

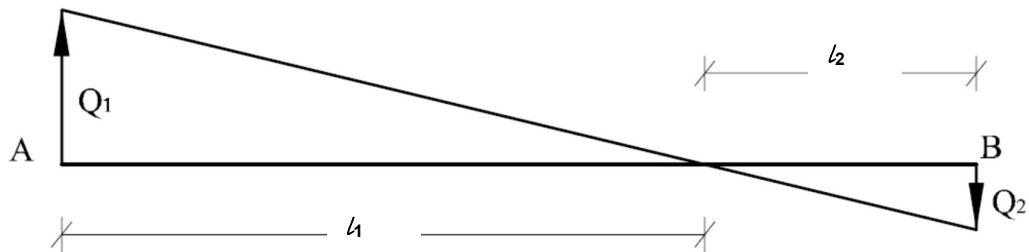


Figura 4.12. Tubería de gasto variable, con ingreso de caudal por los extremos

El caudal se puede cuantificar desde el punto A y desde el punto B.

Punto A: $Q_1 - q l_1 = 0$

Punto B: $Q_2 - q l_2 = 0$

Implica que las longitudes de los tramos son proporcionales a los valores de los caudales de ingreso:

$$Q_1 = q l_1 \wedge Q_2 = q l_2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad (4.47)$$

La Figura 4.13 muestra la línea piezométrica de la tubería de caudal variable, el punto donde el caudal es cero posee la cota piezométrica mínima. La diferencia de cotas piezométricas entre A y B (extremos de la tubería) es H, mientras que la diferencia de cotas piezométricas entre B y C es h.

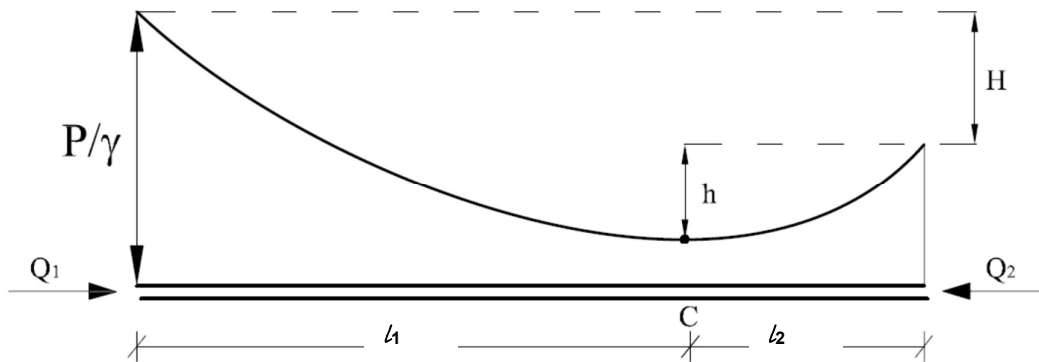


Figura 4.13. Línea piezométrica para una tubería con ingreso de caudal por los extremos

La tubería AB se puede dividir en dos tramos AC y BC, los cuales tienen caudales de ingreso Q_1 y Q_2 , respectivamente, y caudales de egreso nulos, de modo que se puede aplicar la ecuación 4.46 a ambos tramos. La pérdida de carga en AC resulta igual a la diferencia de cotas piezométricas entre los mismos puntos:

$$H + h = K \frac{l_1}{3} Q_1^2 \quad (4.48)$$

Lo mismo para el tramo BC:

$$h = K \frac{l_2}{3} Q_2^2 \quad (4.49)$$

Reemplazando la ecuación 4.49 en la 4.48:

$$H = \frac{K}{3} (l_1 Q_1^2 - l_2 Q_2^2) \quad (4.50)$$

Pero $l = l_1 + l_2$, y recordando que $l_2 = l_1 \frac{Q_2}{Q_1}$

Reemplazando en la ecuación 4.50:

$$H = \frac{K}{3} \frac{l_1}{Q_1} (Q_1^3 - Q_2^3) \quad (4.51)$$

Como : $Q_1 - q \frac{l_1}{l} = 0$

$$Q_1 - \left(\frac{Q_1 - Q_2}{l} \right) l_1 = 0$$

Despejando:

$$\left(\frac{l}{Q_1 - Q_2} \right) = \frac{l_1}{Q_1}$$

Y reemplazando en la ecuación 4.51

$$H = \frac{K}{3} l \left(\frac{Q_1^3 - Q_2^3}{Q_1 - Q_2} \right) \quad (4.52)$$

La Ecuación 4.52 permite calcular la pérdida de carga total, conocido el diámetro, la longitud de la tubería y los caudales de ingreso.

El punto C en la práctica no es cero, pero será el valor más bajo de caudal y de menor cota piezométrica.

Para el cálculo de diámetro, recordando que $K = \frac{K_t}{D^5}$ y reemplazando en la ecuación 4.52:

$$D = \sqrt[5]{\frac{K_t}{3} \frac{l}{H} \left(\frac{Q_1^3 - Q_2^3}{Q_1 - Q_2} \right)} \quad (4.53)$$

1.15 Cálculo de redes de tuberías

El caso práctico de aplicación de todos los conceptos vertidos es el proyecto de redes de agua potable, estas redes se las puede clasificar en:

- Redes abiertas
- Redes cerradas

Las redes abiertas, Figura 4.14, quedan limitadas en su uso para redes de alimentación a pequeñas poblaciones. El cálculo resulta sencillo ya que se procede a calcular conforme a los gastos requeridos, teniendo estos una magnitud y sentidos definidos.

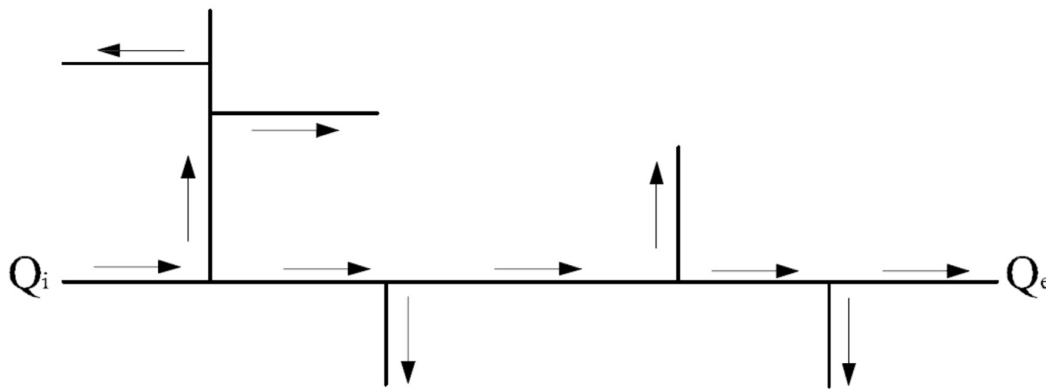


Figura 4.14. Red abierta

Mientras que las redes cerradas, también conocidas como red de mallas, ofrecen una mayor seguridad, pues permite entregar caudales accidentales, por lo que dentro de lo posible se deben proyectar este tipo de redes.

1.16 Red abierta de tuberías

Una red es abierta cuando las tuberías se ramifican, pero no se unen para formar circuitos. Los extremos finales pueden terminar en un recipiente o descargar a la atmósfera. Para el cálculo, conociendo las cargas iniciales disponibles en cada tramo y la longitud de los mismos, debe suponerse la dirección del caudal en los diversos tramos.

La Figura 4.15 muestra un esquema de red abierta, las flechas indican los sentidos de los caudales supuestos.

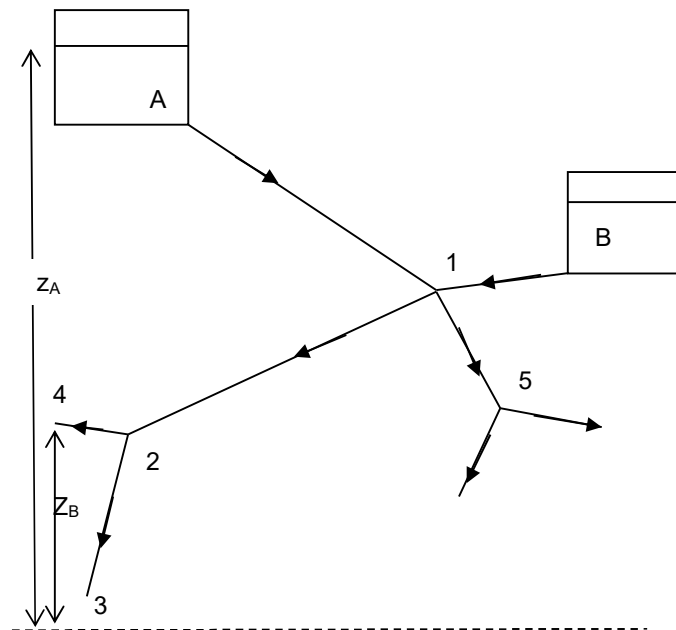


Figura 4.15. Red abierta

Aplicando Bernoulli entre el nivel superior del depósito A y el extremo final de una tubería se calcula la pérdida de carga en el tramo:

$$z_A - \left(z_f + \frac{U_f^2}{2g} \right) = \Delta \quad (4.54)$$

Donde

z_f es el nivel de la superficie libre de agua si la tubería descarga en un recipiente o el nivel del centro de gravedad de la tubería final si descarga al aire.

Δ es la sumatoria de las pérdidas de cargas entre de todos los tramos entre el punto A y la tubería final. Si el recorrido coincide con la dirección del gasto, la pérdida es positiva, en caso contrario es negativo.

Por ejemplo, la pérdida total entre el punto A y el 4 es:

$$z_A - \left(z_4 + \frac{U_4^2}{2g} \right) = \Delta_{A1} + \Delta_{12} + \Delta_{24}$$

Además, en cada nudo, la sumatoria de los caudales debe ser nula, tomando como convención que los caudales que salen son positivos y los que entran son negativos.

$$\sum Q = 0 \quad (4.55)$$

En el ejemplo analizado en el nudo 1, debe cumplirse que:

$$Q_{A1} + Q_{B1} - Q_{14} - Q_{15} = 0$$

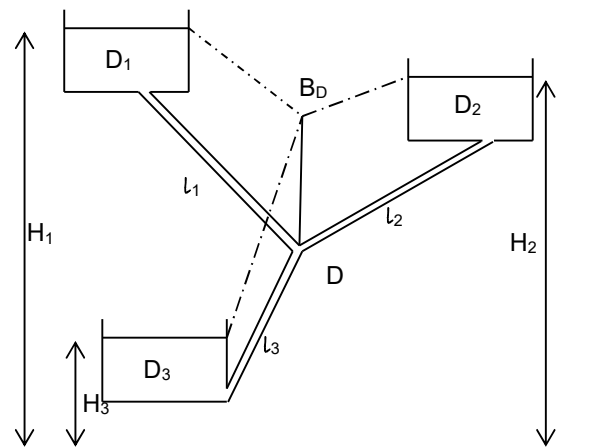
Si el problema es de determinación de caudales en cada tramo, el número de ecuaciones del tipo 4.54 será igual a la cantidad de extremos de tubería de la red, y el número de ecuaciones 4.55 igual a la cantidad de nudos.

Si el problema es el diseño de una red, donde se conocen los caudales se deben elegir al menos n-m diámetros, siendo n el número de tramos de la red, y m el número de extremos finales, para tener un sistema de ecuaciones determinado que permita el cálculo.

1.17 Ejercicios de redes abiertas

Ejercicio 4.20. Ejercicio adaptado de Mecánica de los Fluidos (Shames, 1995, pág. 376).

Encontrar los caudales de las tuberías que se muestran en la figura inferior. Adoptar un valor de viscosidad cinemática igual a $0,00000113 \text{ m}^2/\text{s}$.



| | | | |
|-----------------------|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| $l_1 = 200 \text{ m}$ | $D_1 = 0,3 \text{ m}$ | $D_1/\epsilon_1 = 5000$ | $H_1 = 700 \text{ m}$ |
| $l_2 = 300$ | $D_2 = 0,35 \text{ m}$ | $D_2/\epsilon_2 = 6667$ | $H_2 = 400 \text{ m}$ |
| $l_3 = 400$ | $D_3 = 0,4 \text{ m}$ | $D_3/\epsilon_3 = 10000$ | $H_3 = 100 \text{ m}$ |

Para resolver este ejercicio se debe suponer el sentido de circulación del caudal en cada tramo. Se parte de aquel que tiene mayor nivel, en este caso es el nivel del depósito 1. El depósito 3 es el menor, entonces puede ser que:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

ó

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Deberá estimarse una energía total en el punto D, B_D , intersección de las tres tuberías, de acuerdo a los siguientes criterios:

a) H_1 debe ser mayor que B_D estimada.

Si H_2 es menor que B_D estimada entonces el flujo va del punto D al punto 2.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

b) H_1 debe ser mayor que B_D estimada.

Si H_2 es mayor que B_D estimada entonces el flujo va desde el punto 2 al punto D.

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Al igual que todos los ejercicios donde la incógnita es el caudal debe iterarse para encontrar la solución.

Se plantea el Bernoulli en cada rama, despreciando las pérdidas localizadas:

$$H_1 = B_D + \Delta f_{1D}$$

$$\Delta f_{1D} = \lambda \frac{l_{1D}}{D_{1D}} \frac{U_{1D}^2}{2g}$$

$$H_1 - B_D = \Delta f_{1D} = \lambda \frac{l_{1D}}{D_{1D}} \frac{U_{1D}^2}{2g}$$

Igual para las ramas 2-D y 3-D

$$H_2 - B_D = \Delta f_{2D} = \lambda \frac{l_{2D}}{D_{2D}} \frac{U_{2D}^2}{2g}$$

$$H_3 - B_D = \Delta f_{3D} = \lambda \frac{l_{3D}}{D_{3D}} \frac{U_{3D}^2}{2g}$$

1º Iteración – se adopta $B_D = 350$ m

Entonces debe verificarse que: $Q_1 + Q_2 = Q_3$

$$700 - 350 = \Delta f_{1D} = \lambda_1 \left(\frac{200}{0,300} \right) \frac{U_{1D}^2}{2g}$$

$$400 - 350 = \Delta f_{2D} = \lambda_2 \left(\frac{300}{0,35} \right) \frac{U_{2D}^2}{2g}$$

$$350 - 100 = \Delta f_{3D} = \lambda_3 \left(\frac{400}{0,400} \right) \frac{U_{3D}^2}{2g}$$

Los valores de λ se estiman en la primer iteración, puede tomarse el valor correspondiente a movimiento de tubulento en tubería rugosa ($\lambda=f(D/\epsilon)$, es constante respecto de la velocidad U).

$$\lambda_1 = 0,014 \quad \lambda_2 = 0,0135 \quad \lambda_3 = 0,012$$

De las ecuaciones anteriores se despeja la velocidad media en cada tramo y luego se calcula el caudal ($Q = U \Omega$)

$$U_{1D} = 27,12 \text{ m/s} \quad U_{2D} = 9,21 \text{ m/s} \quad U_{3D} = 20,22 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = 1,92 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_2 = 0,89 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_3 = 2,54 \text{ m}^3/\text{s}$$

Debe verificarse que:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$1,92 \text{ m}^3/\text{s} + 0,89 \text{ m}^3/\text{s} = 2,86 \text{ m}^3/\text{s}$$

Como $2,86 \text{ m}^3/\text{s}$ es mayor al calculado $2,54 \text{ m}^3/\text{s}$, hay que realizar una segunda iteración.

Deberá tomarse un valor mayor de energía en el punto D.

2º iteración $B_D = 365$ m

Con las velocidades calculadas en la primera iteración, se determina el Re en cada tramo, mediante la ecuación $Re = \frac{UD}{\nu}$

$$Re_1 = 7,20 \cdot 10^6 \quad Re_2 = 2,85 \cdot 10^6 \quad Re_3 = 7,16 \cdot 10^6$$

Con estos valores de Re y la relación de D/ϵ en el ábaco de Moody se lee el valor de λ

$$\lambda_1 = 0,014 \quad \lambda_2 = 0,0135 \quad \lambda_3 = 0,012$$

Con estos valores se calcula la velocidad media en cada tramo:

$$U_{1D} = \sqrt{\frac{2g(700 - 365) \lambda_1}{\left(\frac{200}{0,300}\right)}} = 26,54 \text{ m/s}$$

Lo mismo para el tramo 2D y 3D

$$U_{2D} = 7,70 \text{ m/s} \quad U_{3D} = 20,82 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = 1,87 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_2 = 0,74 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_3 = 2,61 \text{ m}^3/\text{s}$$

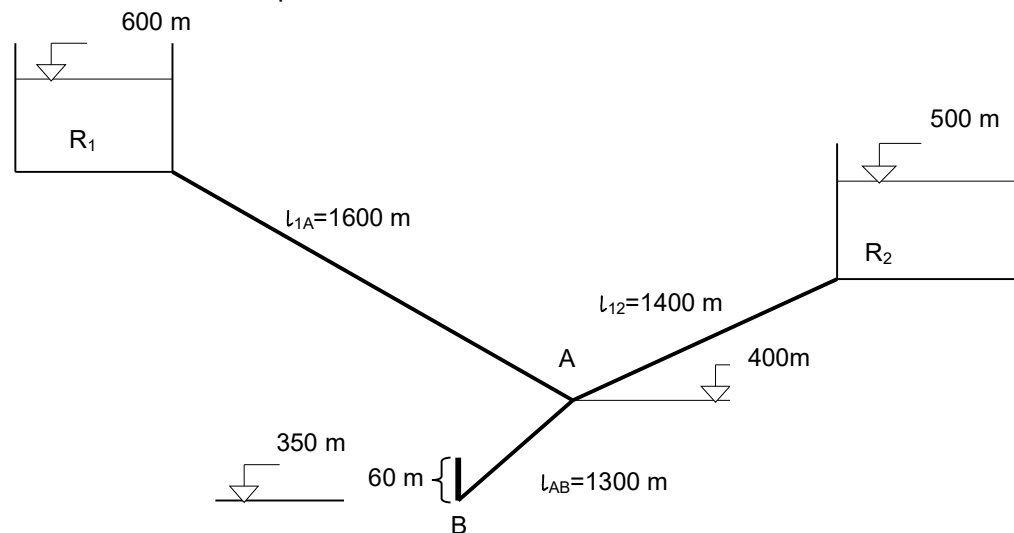
$$1,87 \text{ m}^3/\text{s} + 0,74 \text{ m}^3/\text{s} = 2,61 \text{ m}^3/\text{s}$$

La suma de $Q_1 + Q_2$ es igual al calculado $Q_3 = 2,61 \text{ m}^3/\text{s}$

Entonces los caudales finales son: $Q_1 = 1,87 \text{ m}^3/\text{s}$ $Q_2 = 0,74 \text{ m}^3/\text{s}$ $Q_3 = 2,61 \text{ m}^3/\text{s}$

Ejercicio 4.21

Determinar los diámetros de los tramos R_1A , R_2A y AB , de la red abierta de la figura inferior. Se conocen los niveles de agua de los dos reservorios, el requerimiento de presión en el punto B es de 60 mca y el caudal de salida requerido en ese mismo punto es de 82 l/s. Considerar $1/\nu = 873000 \text{ s/m}^2$. Graficar la línea piezométrica.



Este es un caso de diseño de una red abierta, donde el número de tramos (n) es 3, y el número de extremo de tubería (m), es 1. Entonces deberán adoptarse 2 diámetros ($n-m$) para que el sistema de ecuaciones sea determinado.

En el punto A debe cumplirse que:

$$Q_{1A} + Q_{2A} = Q_{AB}$$

Además, se utilizarán las ecuaciones que permiten calcular la pérdida de carga en cada tramo.

Como el problema no indica material, se adopta un material, en este caso asbesto cemento con una aspereza de $\epsilon = 0,0000125 \text{ m}$.

Se adopta un $D_{AB} = 0,25 \text{ m}$ y $D_{1A} = 0,1 \text{ m}$

Hay que plantear Bernoulli en cada tramo, despreciando las pérdidas de energía localizadas

Tramo AB

En este tramo se conoce el diámetro (fue adoptado) y el caudal de salida (dato)

$$B_A = B_B + \Delta f_{AB}$$

$$\Delta f_{AB} = \lambda \frac{l_{AB}}{D_{AB}} \frac{U_{AB}^2}{2g}$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{\frac{\pi D_{AB}^2}{4}} = \frac{0,082 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi (0,25\text{m})^2}{4}} = 1,67 \text{ m}$$

Con la velocidad se calcula el Re y con la relación diámetro-aspereza puede encontrarse el valor de λ_{AB} en el ábaco de Moody.

$$Re = \frac{U_{AB} D_{AB}}{\nu} = \frac{1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,25 \text{ m}}{\frac{1 \text{ s}}{873000 \text{ m}^2}} = 3,6 \cdot 10^5$$

$$\frac{D_{AB}}{\varepsilon} = \frac{0,25 \text{ m}}{0,0000125 \text{ m}} = 20000$$

$$\lambda_{AB} = 0,0145$$

$$B_A = B_B + \lambda \frac{l_{AB}}{D_{AB}} \frac{U_{AB}^2}{2g}$$

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_{AB}^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_{AB}^2}{2g} + \lambda_{AB} \frac{l_{AB}}{D_{AB}} \frac{U_{AB}^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \lambda_{AB} \frac{l_{AB}}{D_{AB}} \frac{U_{AB}^2}{2g} = 350\text{m} + 60 \text{ m} + 0,0145 \frac{1300\text{m}}{0,25\text{m}} \frac{(1,67\text{m})^2}{2g} = 420,73\text{m}$$

$$\text{Cota Piezométrica A} = CP_A = 420,73 \text{ m}$$

Tramo 1A

En este tramo conocemos el diámetro (fue adoptado) y la CP_A , pero se desconoce el Q_{1A} .

$$B_1 = H_1 = B_A + \Delta f_{1A} = B_A + \lambda_{1A} \frac{l_{1A}}{D_{1A}} \frac{U_{1A}^2}{2g} = \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{CP_A} + \frac{U_{1A}^2}{2g} + \lambda_{1A} \frac{l_{1A}}{D_{1A}} \frac{U_{1A}^2}{2g}$$

De esta ecuación se despeja la velocidad, y se adopta un valor de λ

$$\frac{D_{1A}}{\varepsilon} = \frac{0,10 \text{ m}}{0,0000125 \text{ m}} = 8000$$

1° iteración

Para movimiento turbulento en tubería rugosa, $\lambda_{1A} = 0,013$

$$U_{1A} = \sqrt{2g \left(\frac{H_1 - CP_A}{1 + \lambda_{1A} \frac{l_{1A}}{D_{1A}}} \right)} = \sqrt{2g \left(\frac{600\text{m} - 420,71\text{m}}{1 + 0,013 \frac{1600\text{m}}{0,10\text{m}}} \right)} = 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2° iteración

Con este valor se recalcula Re, λ y U

$$Re_{1A} = \frac{U_{1A} D_{1A}}{\nu} = 4,1 \frac{m}{s} \times 0,1m \times 873000 \frac{s}{m^2} = 3,6 \cdot 10^5$$

$$\lambda = 0,0158 \quad U_{1A} = 3,72 \text{ m/s} \quad Re_{1A} = 3,2 \cdot 10^5$$

Con este valor de Re, λ no cambia, entonces $U_{1A} = 3,72 \text{ m/s}$

$$Q_{1A} = 3,72 \frac{m}{s} \frac{\pi (0,1 \text{ m})^2}{4} = 0,029 \frac{m^3}{s}$$

Tramo 2A

En este tramo se conoce el caudal y la cota en el punto A, puede calcularse el diámetro, pero hay que hacerlo mediante aproximaciones sucesivas ya que el diámetro no se puede despejar directamente de una ecuación.

$$Q_{1A} + Q_{2A} = Q_{AB}$$

$$Q_{2A} = 0,082 \frac{m^3}{s} - 0,029 \frac{m^3}{s} = 0,053 \frac{m^3}{s}$$

$$B_2 = H_2 = B_A + \Delta f_{2A} = B_A + \lambda \frac{l_{2A}}{D_{2A}} \frac{U_{2A}^2}{2g} = \underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{CPA} + \frac{U_{2A}^2}{2g} + \lambda \frac{l_{2A}}{D_{2A}} \frac{U_{2A}^2}{2g}$$

$$H_2 - CPA = \frac{16 Q_{2A}^2}{\pi^2 D_{2A}^4} \left(1 + \lambda \frac{l_{2A}}{D_{2A}} \right)$$

1º adoptamos un diámetro $D_{2A} = 0,20m$

$$\frac{D_{2A}}{\varepsilon} = \frac{0,20 \text{ m}}{0,0000125 \text{ m}} = 16000$$

$$U_{2A} = \frac{Q_{2A}}{\Omega_{2A}} = 1,69 \text{ m/s} \quad Re = \frac{UD}{\nu} = 2,95 \cdot 10^5 \text{ del ábaco de Moody } \lambda = 0,015$$

$$500m - 420,71m = \frac{16 \times (0,053)^2}{\pi^2 0,2^4} \left(1 + 0,015 \frac{1400}{0,2} \right)$$

$$79,29 \text{ m} \neq 15,4 \text{ m}$$

Es necesario disminuir el diámetro para aumentar el 2º miembro, se toma un diámetro de 0,15m

$$D_{2A} = 0,15m$$

$$\frac{D_{2A}}{\varepsilon} = \frac{0,15m}{0,0000125 \text{ m}} = 12000$$

$$U_{2A} = \frac{Q_{2A}}{\Omega_{2A}} = 3 \text{ m/s} \quad Re = \frac{UD}{\nu} = 3,9 \cdot 10^5 \text{ del ábaco de Moody } \lambda = 0,0148$$

$$79,29 = \frac{16 \times (0,053)^2}{\pi^2 0,15^4} \left(1 + 0,0148 \frac{1400}{0,15} \right)$$

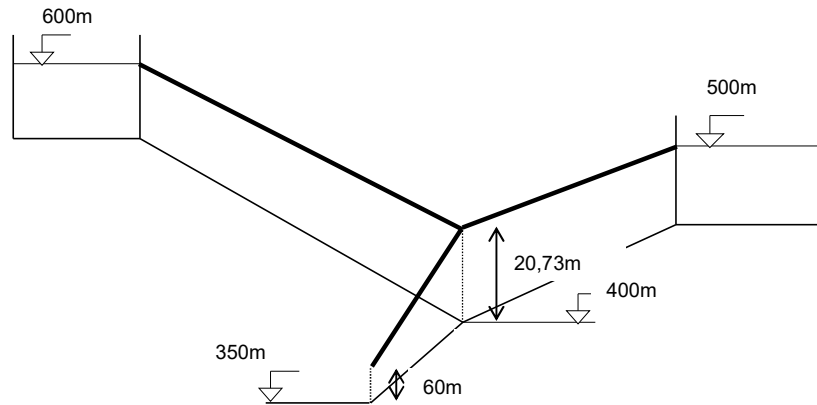
$$79,29 \text{ m} \neq 63,85 \text{ m}$$

Para aumentar el 2º miembro podría disminuirse el diámetro aún más. Si el diámetro es de 0,145 el 2º miembro es de 75,63 m, energía menor a la disponible.

Otra opción podría ser cambiar el material de la tubería aumentando la aspereza de la misma.

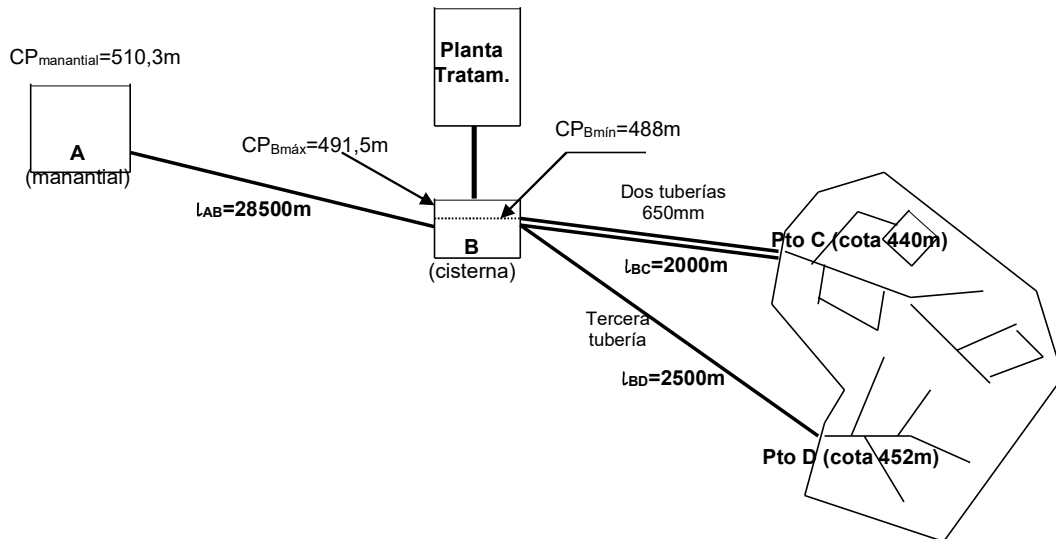
Resultado: $D_{AB} = 0,25 \text{ m}$ $D_{1A} = 0,10 \text{ m}$ $D_{2A} = 0,145m$

La línea piezométrica se grafica en el siguiente croquis fuera de escala.



Ejercicio 4.22

Una ciudad planea mejorar su servicio de abastecimiento de agua mediante el aprovechamiento de un nuevo manantial de 300 l/s y por medio de la instalación de una tercera tubería de distribución ($\epsilon=0,05\text{mm}$), que unida a las dos existentes de 650 mm de diámetro cada una, $\epsilon=0,05\text{mm}$, deben conducir 2700 l/s al punto de origen de la red. La cota de los ejes de las tuberías existentes en el arranque de la citada red es de 440 m, mientras que la del ramal nuevo es de 452m. Dimensionar la nueva tubería desde el manantial al depósito o cisterna y dimensionar el nuevo ramal, requiriendo en cada punto de arranque una presión de 3 atm. (30,99m.c.a.). Las condiciones topográficas son las de la figura. Trazar la línea piezométrica. Tomar $\nu=1,3 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$



Respuesta: $D_{AB}=700\text{mm}$ y $D_{BD}=900\text{mm}$

1.18 Red Cerrada de tuberías

En general hay dos tipos de problemas: Proyecto de una red y la Verificación de una red.

Para comenzar con el estudio de redes cerradas deben realizarse hipótesis de partida, en las que se basa el Método de Cross:

- Los consumos de servicio en ruta se concentran en los nudos, por lo que el número de servicios en ruta interiores coinciden con el número de lados de la red.
- La suma de los caudales entregados y consumidos resulta nula. De modo que en un nudo, la sumatoria de caudales resulta nula, considerando positivos los caudales que salen y negativos los que entran al mismo.
- La sumatoria de las pérdidas de carga en una malla es cero. Es decir que, fijado un sentido positivo se calculan las pérdidas de carga en una malla cerrada, y existirán términos negativos y positivos de modo que la sumatoria de ellos resulta cero.

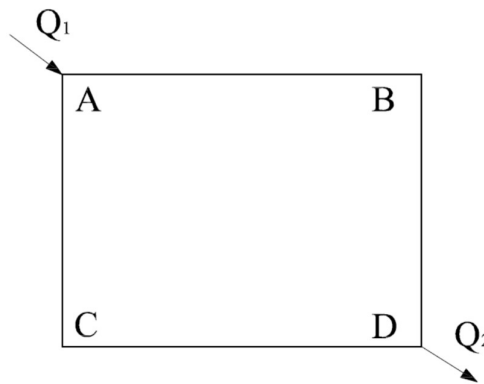


Figura 4.16. Esquema de malla – Método de Cross

La solución del problema bajo estas hipótesis fue dada por Cross, y está basado en un método iterativo, o de aproximaciones sucesivas, en el cual se calcula la pérdida de carga de cada tramo de la malla cuadrada usando la ecuación de la pérdida de energía del movimiento turbulento. Como cada tramo tiene diámetro constante, en la Ecuación 4.10, se puede incluir el diámetro dentro de la constante de la pérdida de carga, y por lo tanto la ecuación queda más simplificada:

$$J = K_t \frac{Q^2}{D^5}$$

$$J = K Q^2$$

Se plantean las pérdidas de carga por el camino ABD de la Figura 4.16:

$$\Delta_{ABD} = J_{ABD} l = J_{AB} l_{AB} + J_{BD} l_{BD}$$

$$\Delta_{ABD} = K_{AB} Q_{AB}^2 l_{AB} + K_{BD} Q_{BD}^2 l_{BD}$$

Agrupando el coeficiente K_j con la longitud por tramo l_j :

$$\Delta = \sum \underbrace{K_j l_j}_{r_j} Q_j^2$$

$$\Delta = \sum r_j Q_j^2 \tag{4.56}$$

Donde el coeficiente r_j toma el valor de la siguiente expresión:

$$r_j = \frac{8 \lambda_j l_j}{\pi 2g D_j^5} = 0,083 \frac{\lambda_j l_j}{D_j^5} \quad (4.57)$$

Con λ función del Re y de la aspereza relativa. El valor de r_j es conocido como "resistencia del tramo".

Ahora si se analiza la pérdida de carga por el camino ACD, se arriba al mismo valor, pero de distinto signo, ya que la sumatoria de las pérdidas de carga en una malla cerrada resulta cero.

$$\begin{aligned} H_{ACD} &= J_{ACB}L = J_{AC}L_{AC} + J_{CD}L_{CD} \\ \Delta_{ACD} &= J_{AC}l = J_{AC}l_{AC} + J_{BC}l_{BC} \\ -\Delta &= \sum r_j Q_j^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por lo tanto, al sumar todos los términos $r_j \cdot Q_j^2$ de la malla con los signos correspondientes tendremos:

$$\Delta = \sum r_j Q_j^2 = 0 \quad (4.59)$$

El método entonces consiste en, fijados los caudales de alimentación y los de cada nudo y tramo, se adopta un diámetro y se determina la pérdida de carga en cada tramo. Sin embargo, se debe partir de un caudal inicial supuesto " Q_0 " que debe ir corrigiéndose a través del método de iteraciones sucesivas (sumándole o restándole un error de aproximación ΔQ_0) hasta encontrar el valor final " Q_r ". Se puede suponer entonces que:

$$\sum \Delta_j = 0 = \sum r_j Q_j^2 = \sum r_j (Q_0 + \Delta Q_0)^2$$

Si se desarrolla la última expresión:

$$\sum r_j (Q_0^2 + 2 Q_0 \Delta Q_0 + \Delta Q_0^2) = 0$$

Si se desprecia el último término, por ser el cuadrado de un valor pequeño:

$$\begin{aligned} \sum (r_j Q_0^2 + 2 r_j Q_0 \Delta Q_0) &= 0 \\ \Delta Q_0 &= -\frac{\sum r_j Q_0^2}{\sum 2 r_j Q_0} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Analizando la última expresión se ve que el numerador es la suma algebraica de las pérdidas de carga del tanteo o iteración, y es el término que posee el signo del cociente de la Ecuación 4.60.

Aplicación del Método de Cross

Se asigna a cada lado de la malla una caudal inicial, siempre considerando que en el nudo donde ingresa caudal exterior, la sumatoria de los caudales debe ser cero. Se asigna sentidos de circulación del caudal a cada tramo de cada malla cerrada.

Para la cuantificación de la pérdida de carga de cada tramo, se fija un sentido positivo para cada malla, puede adoptarse el sentido horario como positivo. Lo que implica que las pérdidas de carga que tengan sentido horario son positivas, mientras las que sean antihorarias serán negativas.

Se calcula $\sum r_j Q_0^2$ en cada tramo de la malla con el signo que resulte después de haber adoptado la convención, es necesario recordar que esta expresión es la pérdida de carga de cada tramo.

Luego se calcula $2 r_j Q_0$, y mediante la aplicación de la Ecuación 4.60 se obtiene el valor de ΔQ_0 . El que permite corregir el valor inicial del caudal adoptado.

Se realizan las sucesivas iteraciones hasta que el valor de ΔQ_0 se hace cero, y se llega al valor final del caudal por tramo.

Se verifica que $\sum r_j Q_0^2$

A continuación, se muestran las tablas de valores que resultan aconsejables realizar para la aplicación del método de iteraciones sucesivas.

Para cada tramo de cada malla se debe construir la variación de $r_j Q_0^2$ y de $r_j Q_0$, en función de Q_0 . Ver Figura 4.31.

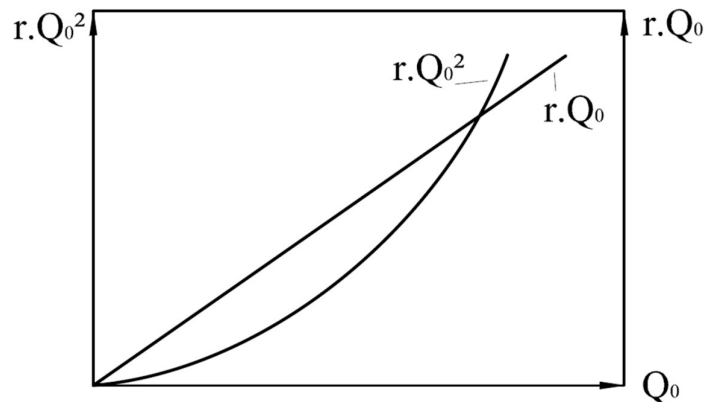


Figura 4.17. Variación de $r_j Q_0^2$ y de $r_j Q_0$, en función de Q_0

Para ello resulta práctico la Tabla 4.10, que es una planilla de cálculo del caudal inicial para comenzar el tanteo.

Tabla 4.2. Planilla modelo para determinar Q_0

| Q (l/s) | $D U$ (m ² /s) | Re | λ (Moody) | J (m/m) | $r_j Q_0^2=J$ l(m) | $r_j Q_0$ (m/s ²) |
|-----------|---------------------------|----|-------------------|---------|--------------------|-------------------------------|
| | | | | | | |

Determinada la función de Q , realizamos el primer tanteo para cada malla.

La Tabla 4.11, muestra una planilla de cálculo para la determinación de los caudales en cada tramo de la malla. El procedimiento debe continuarse hasta que $\Delta Q_0 = 0$. El valor de ΔQ_0 se obtiene mediante la Ecuación 4.60.

Tabla 4.11. Planilla modelo para cálculo de caudales de la malla

| Tramo | Q (l/s) | $r_j Q_0$ (m/s ²) | $2 r_j Q_0$ (m/s ²) | $r_j Q_0^2=J$ (m) |
|-------|-----------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------|
| AB | | | | |
| BD | | | | |
| AC | | | | |
| CD | | | | |

La otra verificación es la cota piezométrica (CPi) en cada punto. Para lo cual se partirá de una CP conocida y como se tendrán los valores de $J l$ en cada ramal, se obtendrán por diferencia los valores de cota piezométrica en cada nudo.

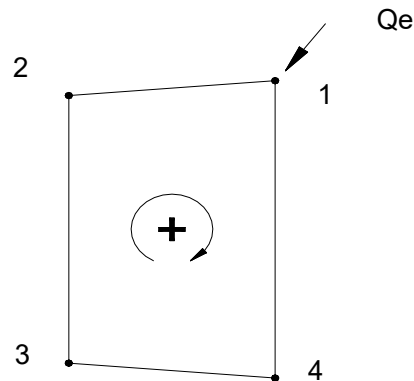
1.19 Ejercicios de red cerrada de tuberías (aplicación del Método de Cross)

Ejercicio 4.23

Calcular una iteración de los caudales ΔQ de la red cerrada de la figura de abajo. Tomando los λ del cálculo de r de la aproximación inicial: Calcular la cota piezométrica (CP) del sistema.

Datos: $P_1/\gamma=20\text{m.c.a.}$, $Q_{12}=0,6 Q_e$; $Q_e=200\text{l/s}$; $q_{ruta}=0,100\text{l/(s m)}$; $\varepsilon=0,05\text{ mm}$

$L_{12}=120\text{m} - D_{12}=200\text{mm}$
 $L_{23}=180\text{m} - D_{23}=150\text{mm}$
 $L_{14}=200\text{m} - D_{14}=200\text{mm}$
 $L_{34}=140\text{m} - D_{34}=120\text{mm}$



$$Q_{12} = 0,6 \times Q_e = 0,6 \times 200 \frac{\text{l}}{\text{s}} = 120 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$Q_{14} = 0,4 \times Q_e = 0,4 \times 200 \frac{\text{l}}{\text{s}} = 80 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$Q_{23} = Q_{12} - q_{ruta} \times L_{12} = 120 \frac{\text{l}}{\text{s}} - 0,1 \frac{\text{l}}{\text{s} \cdot \text{m}} \times 120\text{m} = 108 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$Q_{43} = Q_{14} - q_{ruta} \times L_{14} = 80 \frac{\text{l}}{\text{s}} - 0,1 \frac{\text{l}}{\text{s} \cdot \text{m}} \times 200\text{m} = 60 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

Los datos se encuentran resumidos en el cuadro siguiente:

| Malla | Tramo | D (m) | L (m) | Q_0 (l/s) |
|-------|-------|-------|-------|-------------|
| I | 1-2 | 0,2 | 120 | 120 |
| | 2-3 | 0,15 | 180 | 108 |
| | 3-4 | 0,12 | 140 | 60 |
| | 4-1 | 0,2 | 200 | 80 |

Con Re y D/ε se entra en el ábaco de Moody para obtener λ y así calcular r como:

$$r_j = \frac{8 \lambda_j l_j}{\pi 2g D_j^5} = 0,083 \frac{\lambda_j l_j}{D_j^5}$$

Las ecuaciones a utilizar son:

$$\Delta Q_0 = - \frac{\sum r_j Q_0^2}{\sum 2 r_j Q_0}$$

$$Q^* = Q_0 + \Delta$$

Las iteraciones se resumen en la planilla siguiente, considerando los signos respectivos.

Planilla de cálculo de las iteraciones de caudales

| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
|-------|-------|----------------|-----|------|------|---------|------|--------|-----------------------------|--------|--------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------------------|
| I | 1-2 | 120 | 120 | 0,2 | 3,82 | 6,1E+05 | 4444 | 0,0159 | 14400 | 493,2 | 118359,0 | -7101540,5 | 5,57 | 114,43 |
| | 2-3 | 108 | 180 | 0,15 | 6,11 | 7,3E+05 | 3333 | 0,0163 | 11664 | 3195,7 | 690270,4 | -37274601,5 | | 102,43 |
| | 2-4 | 60 | 140 | 0,12 | 5,31 | 5,1E+05 | 2667 | 0,017 | 3600 | 7911,0 | 949322,2 | 28479667,3 | | 65,57 |
| | 4-1 | 80 | 200 | 0,2 | 2,55 | 4,1E+05 | 4444 | 0,0162 | 6400 | 837,4 | 133991,3 | 5359653,2 | | 85,57 |
| | | | | | | | | | | | 1891943,0 | -10536821,5 | | |
| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
| I | 1-2 | 114,4 | 120 | 0,2 | 3,64 | 5,8E+05 | 4444 | 0,0157 | 13094 | 487,0 | 111446,2 | -6376430,3 | -0,20 | 114,63 |
| | 2-3 | 102,4 | 180 | 0,15 | 5,80 | 7,0E+05 | 3333 | 0,016 | 10492 | 3136,9 | 642625,5 | -32912286,3 | | 102,63 |
| | 2-4 | 65,6 | 140 | 0,12 | 5,80 | 5,6E+05 | 2667 | 0,0168 | 4299 | 7817,9 | 1025234,9 | 33611974,8 | | 65,37 |
| | 4-1 | 85,6 | 200 | 0,2 | 2,73 | 4,4E+05 | 4444 | 0,016 | 7322 | 827,1 | 141550,0 | 6056166,0 | | 85,37 |
| | | | | | | | | | | | 1920856,6 | 379424,2 | | |
| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
| I | 1-2 | 114,6 | 120 | 0,2 | 3,65 | 5,8E+05 | 4444 | 0,0157 | 13140 | 487,0 | 111638,5 | -6398463,1 | 0,00 | 114,63 |
| | 2-3 | 102,6 | 180 | 0,15 | 5,81 | 7,0E+05 | 3333 | 0,016 | 10533 | 3136,9 | 643864,8 | -33039345,6 | | 102,63 |
| | 2-4 | 65,4 | 140 | 0,12 | 5,78 | 5,6E+05 | 2667 | 0,0168 | 4273 | 7817,9 | 1022146,4 | 33409766,6 | | 65,37 |
| | 4-1 | 85,4 | 200 | 0,2 | 2,72 | 4,4E+05 | 4444 | 0,016 | 7288 | 827,1 | 141223,2 | 6028238,1 | | 85,37 |
| | | | | | | | | | | | 1918872,9 | 195,9 | | |

Para el cálculo de las cotas piezométricas se utilizan las ecuaciones siguientes:

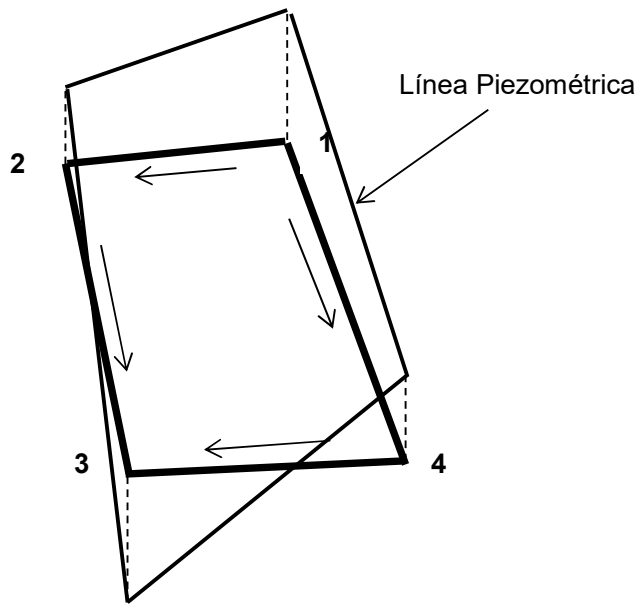
$$J_j = \frac{\lambda_j}{D_j} \frac{U_j^2}{2g} \quad \Delta_j = J_j l_j$$

Los cálculos están resumidos en la planilla siguiente.

Planilla cálculo de cotas piezométricas

| Malla | Tramo | Q ₀ (m ³ /s) | l(m) | D(m) | U(m/s) | λ | J | Δ _l (m) | CP _j (m) |
|-------|--------|------------------------------------|------|------|--------|--------|--------|--------------------|---------------------|
| I | 1 | | | | | | | | 20 |
| | 1-2 | 114,63 | 120 | 0,2 | 3,65 | 0,0157 | 0,0533 | 6,40 | |
| | 2 | | | | | | | | 13,60 |
| | 2-3 | 102,63 | 180 | 0,15 | 5,81 | 0,016 | 0,1836 | 33,04 | |
| | 3 | | | | | | | | -19,44 |
| | 3-4 | 65,372 | 140 | 0,12 | 5,78 | 0,168 | 0,2386 | 33,41 | |
| | 4 | | | | | | | | 13,97 |
| 4-1 | 85,372 | 200 | 0,2 | 2,72 | 0,016 | 0,0301 | 6,03 | | |

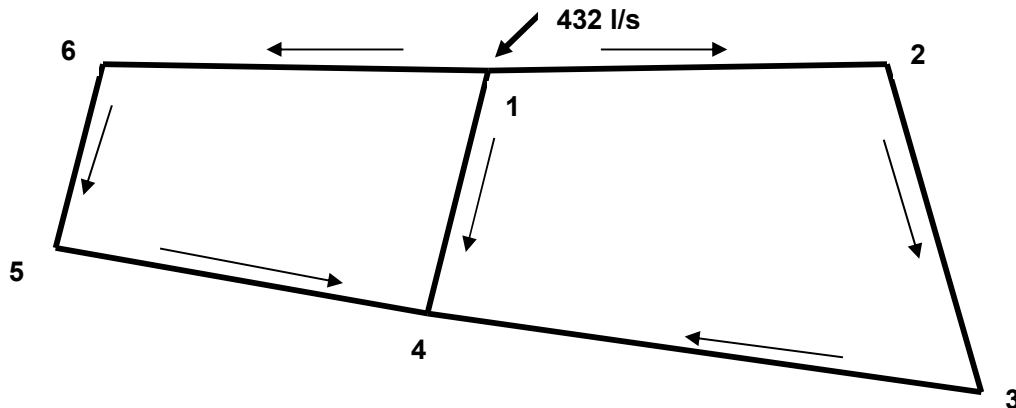
$$CP_1 = 20m \rightarrow CP_2 = CP_1 - \Delta_{f_{12}} \rightarrow CP_3 = CP_2 - \Delta_{f_{23}} \rightarrow CP_4 = CP_1 - \Delta_{f_{14}} \rightarrow CP_3 = CP_4 - \Delta_{f_{34}}$$



Esquema de Línea piezométrica

Ejercicio 4.24

Calcular los caudales en los tramos y las cotas piezométricas de los nudos en el sistema de la figura; la cota piezométrica del nudo 1 es de 17 m.c.a. y el gasto en ruta es de 8 l/s por cada 100 m. El material de la tubería es acero ($\epsilon=0,000045\text{m}=0,045\text{mm}$), la viscosidad cinemática $1,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Trazar la línea piezométrica de la red.



Se adoptan los caudales para cada tramo de tubería, considerando que en el nudo 1, la sumatoria de los caudales que entran y salen debe ser cero. Por lo tanto, la suma de los caudales Q_{12} , Q_{14} y Q_{16} debe ser igual a los 432 l/s, que entra a la red.

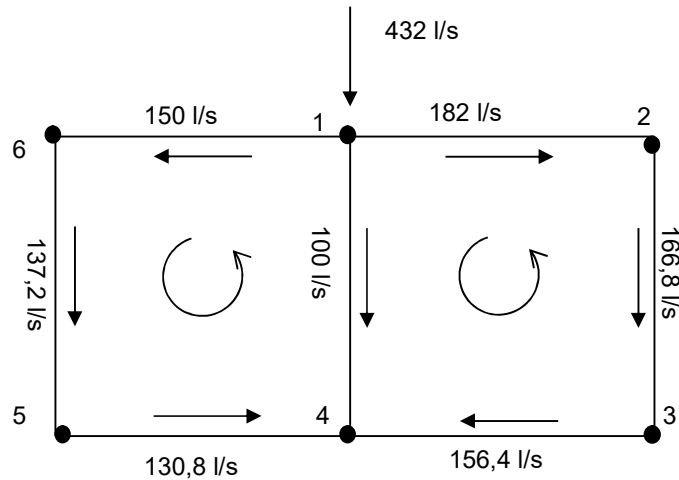
$$Q_{16} = 150 \text{ l/s} \quad Q_{12} = 182 \text{ l/s} \quad Q_{14} = 100 \text{ l/s}$$

$$Q_{65} = \left(150 - 160 \frac{8}{100}\right) \text{ l/s} = 137,2 \text{ l/s}$$

$$Q_{54} = \left(137,2 - 80 \frac{8}{100}\right) \text{ l/s} = 130,8 \text{ l/s}$$

$$Q_{23} = \left(182 - 190 \frac{8}{100}\right) \text{ l/s} = 166,8 \text{ l/s}$$

$$Q_{34} = \left(166,8 - 130 \frac{8}{100}\right) \text{ l/s} = 156,4 \text{ l/s}$$



Esquema de distribución de caudales iniciales

Se calculan los parámetros de cada tramo de las redes, con los diámetros y longitudes de cada tramo, según las fórmulas que se detallan a continuación. Los cálculos se encuentran resumidos en la planilla que se adjunta para la primera iteración realizada con los valores de caudales supuestos anteriores.

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad r = 0,083 \lambda \frac{l}{D^5} \quad U = \frac{Q}{\Omega} \quad \Delta Q_0 = -\frac{\sum r_j Q_0^2}{\sum 2 r_j Q_0}$$

λ se extrae del Gráfico de Moody.

Planilla de cálculo de la primera iteración

| Malla | Tramo | Q_0 | l | D | U | Re | D/ϵ | λ | Q_0^2 | r | $2 r Q_0$ | $r Q_0^2$ | ΔQ_0 | Q_0^* |
|-------|-------|-------|-----|------|------|---------|--------------|-----------|---------|-------|-----------|-------------|--------------|---------|
| I | 1-4 | 100 | 110 | 0,25 | 2,04 | 4,1E+05 | 5556 | 0,0158 | 10000 | 147,2 | 29440,2 | -1472012,2 | -38,11 | 206,77 |
| | 4-5 | 130,8 | 170 | 0,25 | 2,67 | 5,3E+05 | 5556 | 0,0155 | 17109 | 223,2 | 58382,1 | 3818191,9 | | 92,69 |
| | 5-6 | 137,2 | 80 | 0,3 | 1,94 | 4,7E+05 | 6667 | 0,0152 | 18824 | 41,4 | 11357,2 | 779107,2 | | 99,09 |
| | 6-1 | 150 | 160 | 0,32 | 1,87 | 4,8E+05 | 7111 | 0,015 | 22500 | 59,2 | 17747,8 | 1331084,3 | | 111,89 |
| | | | | | | | | | | | 116927,4 | 4456371,1 | | |
| Malla | Tramo | Q_0 | l | D | U | Re | D/ϵ | λ | Q_0^2 | r | $2 r Q_0$ | $r Q_0^2$ | ΔQ_0 | Q_0^* |
| II | 1-2 | 182 | 190 | 0,35 | 1,89 | 5,3E+05 | 7778 | 0,0148 | 33124 | 44,3 | 16119,0 | -1466829,2 | 68,66 | 113,34 |
| | 2-3 | 166,8 | 130 | 0,27 | 2,91 | 6,3E+05 | 6000 | 0,015 | 27822 | 112,4 | 37497,6 | -3127300,2 | | 98,14 |
| | 3-4 | 156,4 | 220 | 0,2 | 4,98 | 8,0E+05 | 4444 | 0,0152 | 24461 | 864,3 | 270361,4 | -21142263,0 | | 87,74 |
| | 4-1 | 100 | 110 | 0,25 | 2,04 | 4,1E+05 | 5556 | 0,0158 | 10000 | 147,2 | 29440,2 | 1472012,2 | | 206,77 |
| | | | | | | | | | | | 353418,3 | -24264380,2 | | |

Los caudales encontrados de la última columna pasan a ser los caudales iniciales para la iteración siguiente, cuyos cálculos se resumen en la planilla siguiente.

Planilla de cálculo de la segunda iteración

| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
|-------|-------|----------------|-----|------|------|---------|------|--------|-----------------------------|-------|--------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------------------|
| I | 1-4 | 206,8 | 110 | 0,25 | 4,21 | 8,4E+05 | 5556 | 0,0149 | 42753 | 138,8 | 57405,7 | -5934847,7 | 22,82 | 195,55 |
| | 4-5 | 92,7 | 170 | 0,25 | 1,89 | 3,8E+05 | 5556 | 0,0158 | 8591 | 227,5 | 42171,6 | 1954393,5 | | 115,51 |
| | 5-6 | 99,1 | 80 | 0,3 | 1,40 | 3,4E+05 | 6667 | 0,0158 | 9818 | 43,0 | 8526,1 | 422417,7 | | 121,91 |
| | 6-1 | 111,9 | 160 | 0,32 | 1,39 | 3,6E+05 | 7111 | 0,0157 | 12519 | 61,9 | 13856,2 | 775168,7 | | 134,71 |
| | | | | | | | | | | | 121959,6 | -2782867,8 | | |
| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
| II | 1-2 | 113,3 | 190 | 0,35 | 1,18 | 3,3E+05 | 7778 | 0,0157 | 12847 | 47,0 | 10648,8 | -603489,5 | 11,60 | 101,74 |
| | 2-3 | 98,1 | 130 | 0,27 | 1,72 | 3,7E+05 | 6000 | 0,0156 | 9632 | 116,9 | 22945,8 | -1125993,6 | | 86,54 |
| | 3-4 | 87,7 | 220 | 0,2 | 2,79 | 4,5E+05 | 4444 | 0,0162 | 7699 | 921,2 | 161657,4 | -7092210,0 | | 76,14 |
| | 4-1 | 206,8 | 110 | 0,25 | 4,21 | 8,4E+05 | 5556 | 0,0148 | 42753 | 137,9 | 57020,4 | 5895016,5 | | 195,55 |
| | | | | | | | | | | | 252272,4 | -2926676,6 | | |

Planilla de cálculo de la tercera iteración

| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
|-------|-------|----------------|-----|------|------|---------|------|--------|-----------------------------|-------|--------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------------------|
| I | 1-4 | 195,6 | 110 | 0,25 | 3,99 | 8,0E+05 | 5556 | 0,0149 | 38241 | 138,8 | 54291,6 | -5308410,6 | 4,47 | 197,38 |
| | 4-5 | 115,5 | 170 | 0,25 | 2,35 | 4,7E+05 | 5556 | 0,0155 | 13342 | 223,2 | 51555,6 | 2977479,6 | | 119,98 |
| | 5-6 | 121,9 | 80 | 0,3 | 1,73 | 4,1E+05 | 6667 | 0,0157 | 14861 | 42,8 | 10423,1 | 635320,4 | | 126,38 |
| | 6-1 | 134,7 | 160 | 0,32 | 1,68 | 4,3E+05 | 7111 | 0,0154 | 18146 | 60,7 | 16363,2 | 1102108,1 | | 139,18 |
| | | | | | | | | | | | 132633,5 | -593502,5 | | |
| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
| II | 1-2 | 101,7 | 190 | 0,35 | 1,06 | 3,0E+05 | 7778 | 0,0159 | 10352 | 47,6 | 9680,6 | -492466,6 | 6,30 | 95,44 |
| | 2-3 | 86,5 | 130 | 0,27 | 1,51 | 3,3E+05 | 6000 | 0,0159 | 7490 | 119,1 | 20622,6 | -892363,9 | | 80,24 |
| | 3-4 | 76,1 | 220 | 0,2 | 2,42 | 3,9E+05 | 4444 | 0,0162 | 5798 | 921,2 | 140283,4 | -5340764,1 | | 69,84 |
| | 4-1 | 195,6 | 110 | 0,25 | 3,99 | 8,0E+05 | 5556 | 0,0149 | 38241 | 138,8 | 54291,6 | 5308410,6 | | 197,38 |
| | | | | | | | | | | | 224878,2 | -1417184,0 | | |

Planilla de cálculo de la cuarta iteración

| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
|-------|-------|----------------|-----|------|------|---------|------|--------|-----------------------------|-------|--------------------|-------------------------------|-----------------|-----------------------------|
| I | 1-4 | 197,4 | 110 | 0,25 | 4,02 | 8,0E+05 | 5556 | 0,0149 | 38959 | 138,8 | 54798,9 | -5408078,4 | 2,65 | 196,21 |
| | 4-5 | 120,0 | 170 | 0,25 | 2,45 | 4,9E+05 | 5556 | 0,0155 | 14395 | 223,2 | 53552,9 | 3212646,9 | | 122,63 |
| | 5-6 | 126,4 | 80 | 0,3 | 1,79 | 4,3E+05 | 6667 | 0,0155 | 15972 | 42,2 | 10668,1 | 674119,1 | | 129,03 |
| | 6-1 | 139,2 | 160 | 0,32 | 1,73 | 4,4E+05 | 7111 | 0,0152 | 19371 | 59,9 | 16687,2 | 1161265,8 | | 141,83 |
| | | | | | | | | | | | 135707,0 | -360046,6 | | |
| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ [*] |
| II | 1-2 | 95,4 | 190 | 0,35 | 0,99 | 2,8E+05 | 7778 | 0,0158 | 9109 | 47,3 | 9023,9 | -430623,1 | 1,48 | 93,96 |
| | 2-3 | 80,2 | 130 | 0,27 | 1,40 | 3,0E+05 | 6000 | 0,016 | 6439 | 119,9 | 19241,1 | -771957,0 | | 78,76 |
| | 3-4 | 69,8 | 220 | 0,2 | 2,22 | 3,6E+05 | 4444 | 0,0163 | 4878 | 926,9 | 129467,0 | -4521018,7 | | 68,36 |
| | 4-1 | 197,4 | 110 | 0,25 | 4,02 | 8,0E+05 | 5556 | 0,0149 | 38959 | 138,8 | 54798,9 | 5408078,4 | | 196,21 |
| | | | | | | | | | | | 212530,9 | -315520,4 | | |

Planilla de cálculo de la quinta iteración

| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ * |
|-------|-------|----------------|-----|------|------|---------|------|--------|-----------------------------|-------|--------------------|-------------------------------|-----------------|------------------|
| I | 1-4 | 196,2 | 110 | 0,25 | 4,00 | 8,0E+05 | 5556 | 0,0149 | 38499 | 138,8 | 54474,5 | -5344233,8 | 0,58 | 196,34 |
| | 4-5 | 122,6 | 170 | 0,25 | 2,50 | 5,0E+05 | 5556 | 0,0155 | 15039 | 223,2 | 54737,1 | 3356299,8 | | 123,21 |
| | 5-6 | 129,0 | 80 | 0,3 | 1,83 | 4,4E+05 | 6667 | 0,0155 | 16650 | 42,2 | 10892,1 | 702719,9 | | 129,61 |
| | 6-1 | 141,8 | 160 | 0,32 | 1,76 | 4,5E+05 | 7111 | 0,0152 | 20117 | 59,9 | 17005,3 | 1205960,8 | | 142,41 |
| | | | | | | | | | | | 137108,9 | -79253,2 | | |
| Malla | Tramo | Q ₀ | l | D | U | Re | D/ε | λ | Q ₀ ² | r | 2 r Q ₀ | r Q ₀ ² | ΔQ ₀ | Q ₀ * |
| II | 1-2 | 94,0 | 190 | 0,35 | 0,98 | 2,7E+05 | 7778 | 0,0158 | 8828 | 47,3 | 8883,5 | -417330,5 | 0,71 | 93,25 |
| | 2-3 | 78,8 | 130 | 0,27 | 1,38 | 3,0E+05 | 6000 | 0,016 | 6202 | 119,9 | 18885,1 | -743656,2 | | 78,05 |
| | 3-4 | 68,4 | 220 | 0,2 | 2,18 | 3,5E+05 | 4444 | 0,0163 | 4673 | 926,9 | 126715,0 | -4330856,6 | | 67,65 |
| | 4-1 | 196,2 | 110 | 0,25 | 4,00 | 8,0E+05 | 5556 | 0,0149 | 38499 | 138,8 | 54474,5 | 5344233,8 | | 196,34 |
| | | | | | | | | | | | 208958,1 | -147609,6 | | |

Para el cálculo de las cotas piezométricas es necesario calcular las pérdidas de energía unitarias J_j para cada tramo, luego los valores de Δ_j y con ellos las cotas piezométricas, siguiendo siempre el sentido del caudal de cada tramo, recordando que la $CP_1=17m$.

Para el caso del punto 4 habrá tres valores de cota piezométrica, uno resolviendo la malla I, otro resolviendo la malla II y otro desde el punto 1 hacia el punto 4. La diferencia entre los valores obtenidos debe ser pequeña, y tienen su origen en las aproximaciones de los cálculos.

$$J_j = \frac{\lambda_j}{D_j} \frac{U_j^2}{2g} \quad \Delta_j = J_j l_j$$

$$CP_1 = 17m$$

$$CP_2 = CP_1 - \Delta_{12} \rightarrow CP_3 = CP_2 - \Delta_{23} \rightarrow CP_4 = CP_3 - \Delta_{34}$$

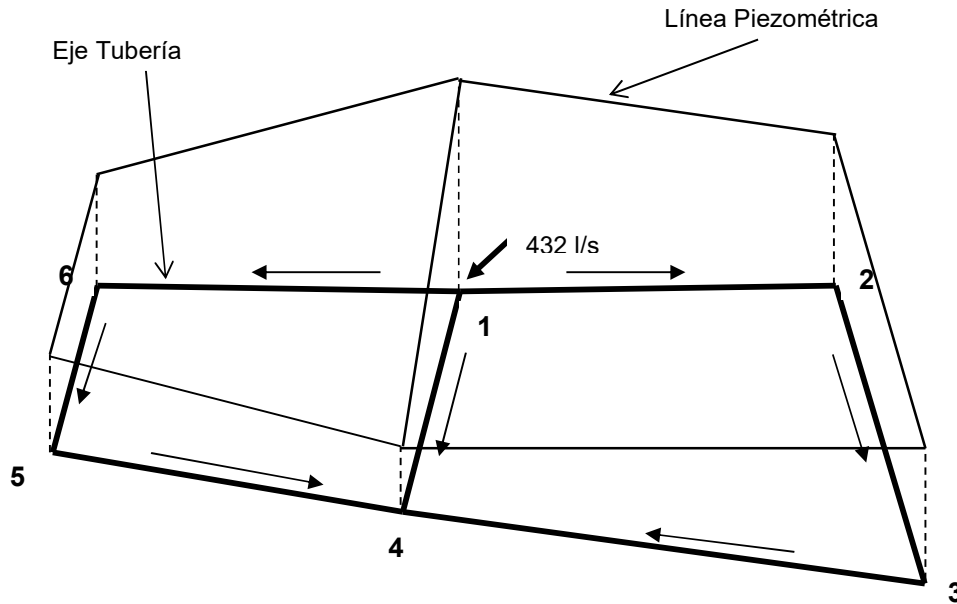
$$CP_6 = CP_1 - \Delta_{16} \rightarrow CP_5 = CP_6 - \Delta_{65} \rightarrow CP_4 = CP_5 - \Delta_{54}$$

$$CP_4 = CP_1 - \Delta_{14}$$

Los tres valores encontrados para la CP_4 son: 11,65m; 11,62m y 11,69m.

Planilla de cálculo de las cotas piezométricas

| MALLA | TRAMO | Q | L | D | U | Re | D/ε | λ | J | Δf | CPi (m) |
|-------|-------|--------|-----|------|------|---------|--------|--------|-----------|------|---------|
| I | 1 | | | | | | | | | | 17 |
| | 1-4 | 196.34 | 110 | 0.25 | 4.00 | 8.0E+05 | 5555.6 | 0.0149 | 0.0486475 | 5.35 | |
| | 4 | | | | | | | | | | 11.65 |
| | 4-5 | 123.21 | 170 | 0.25 | 2.51 | 5.0E+05 | 5555.6 | 0.0155 | 0.0199295 | 3.39 | |
| | 5 | | | | | | | | | | 15.08 |
| | 5-6 | 129.61 | 80 | 0.3 | 1.83 | 4.4E+05 | 6666.7 | 0.0155 | 0.0088629 | 0.71 | |
| | 6 | | | | | | | | | | 15.78 |
| | 6-1 | 142.41 | 160 | 0.32 | 1.77 | 4.5E+05 | 7111.1 | 0.0152 | 0.0075988 | 1.22 | |
| MALLA | TRAMO | Q | L | D | U | Re | D/ε | λ | J | Δf | CPi (m) |
| II | 1 | | | | | | | | | | 17 |
| | 1-2 | 93.25 | 190 | 0.35 | 0.97 | 2.7E+05 | 7777.8 | 0.0158 | 0.0021636 | 0.41 | |
| | 2 | | | | | | | | | | 16.59 |
| | 2-3 | 78.05 | 130 | 0.27 | 1.36 | 2.9E+05 | 6000 | 0.016 | 0.0056183 | 0.73 | |
| | 3 | | | | | | | | | | 15.86 |
| | 3-4 | 67.65 | 220 | 0.2 | 2.15 | 3.4E+05 | 4444.4 | 0.0163 | 0.0192809 | 4.24 | |
| | 4 | | | | | | | | | | 11.62 |
| | 4-1 | 196.34 | 110 | 0.25 | 4.00 | 8.0E+05 | 5555.6 | 0.0149 | 0.0486475 | 5.35 | |



Representación de la línea piezométrica de la red cerrada

2. Movimiento en tuberías de fluidos en general

Hasta ahora se ha considerado el movimiento del agua en tuberías. Si se plantea la generalización a cualquier fluido incompresible y newtoniano podemos seguir aplicando las mismas ecuaciones que se han desarrollado.

2.1 Ecuaciones para fluidos incompresibles

Se aplican las Ecuaciones 4.2, 4.4 y la Ecuación Darcy-Weisbach (Ecuación 3.18), y con algunas operaciones algebraicas se obtiene la Ecuación 4.61:

$$J D = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad (3.18)$$

$$\Delta = J l = J D = \lambda \frac{U^2 l}{2g D}$$

$$\Delta = H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \quad (4.4)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H - (z_1 - z_2) \quad (4.2)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma} = \lambda \frac{U^2 l}{2g D} - (z_1 - z_2) \quad (4.61)$$

Donde:

- z_1 es la cota de posición de la sección inicial de la tubería medida en (m).
- z_2 es la cota de posición de la sección final de la tubería medida en (m).
- p_1 la presión de trabajo en la sección inicial de la tubería medida en (N/m²).
- p_2 la presión de trabajo en la sección final de la tubería medida en (N/m²).
- γ es el peso específico del fluido en (N/m³).
- λ es el factor de resistencia de la tubería por efecto del frotamiento, es adimensional.
- l es la longitud de la tubería en (m).
- D es el diámetro de la tubería en (m).
- U es la velocidad media de la tubería en (m/seg).
- g es la aceleración de la gravedad y vale 9,81m/s².
- δ es la densidad del fluido en (kg/m³).

La Ecuación 4.61 permite calcular la pérdida de presión en una tubería por la que circula un fluido incompresible y newtoniano.

2.2 Ejercicios de tuberías con fluidos incompresibles distintos del agua

Ejercicio 4.25

Una tubería de acero ($\varepsilon=0,3\text{mm}$) de 15 cm de diámetro y 3000m de longitud impulsa 120 t/h de petróleo viscoso. Calcular la pérdida de carga con una temperatura media de 35°C. Comparar con las condiciones de escurrimiento para 20°C y para 50°C. Los parámetros físicos del petróleo se resumen en la tabla siguiente.

| Densidad y viscosidad cinemática | | |
|----------------------------------|-------------------------------|---|
| Temperatura (°C) | Densidad (kg/m ³) | Viscosidad cinemática $\nu \cdot 10^{-6}$ (m ² /s) |
| 20 | 930 | 1000 |
| 35 | 920 | 300 |
| 50 | 910 | 100 |

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0,15 \text{ m})^2}{4} = 0,0177 \text{ m}^2$$

El problema entrega como dato el caudal másico en toneladas masa por hora (t/h):

$$Q_m = \delta U \Omega$$

$$U = \frac{Q_m}{\delta \Omega} = \frac{120 \text{ t}}{h} \frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ t}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \frac{1 \text{ m}^3}{920 \text{ kg}} \frac{1}{0,0177 \text{ m}^2} = 2,05 \text{ m/s}$$

$$Re_{35^\circ\text{C}} = \frac{U D}{\nu} = \frac{2,05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0,15 \text{ m}}{0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}} = 1025$$

Es Movimiento Laminar

$$Re \lambda = 64$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1025} = 0,0624$$

$$\Delta_{35^\circ\text{C}} = \lambda \frac{U^2 L}{2g D} = 0,0624 \frac{(2,05 \text{ m})^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \frac{3000 \text{ m}}{0,15 \text{ m}} = 267,31 \text{ m}$$

Cálculo de la pérdida de presión (Ecuación 4.61)

Como la tubería es horizontal y de sección constante:

$$\Delta p = \gamma \Delta = \delta g \Delta$$

La caída de presión depende de la temperatura, ya que la densidad es una función de ella.

Para 20°C

$$U_{20^\circ\text{C}} = 2,02 \text{ m/s}$$

$$Re_{20^\circ\text{C}} = 303$$

$$\lambda_{20^\circ\text{C}} = 0,21$$

$$\Delta_{20^\circ\text{C}} = 873,5 \text{ m}$$

$$\Delta p_{20^\circ\text{C}} = \gamma \Delta = \delta_{20^\circ\text{C}} g \Delta_{20^\circ\text{C}} = 930 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 873,5 \text{ m} \times \frac{1 \overline{\text{kgf}}}{9,8 \text{ N}} \times \frac{\text{m}^2}{10^4 \text{ cm}^4} = 81,31 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{cm}^4}$$

$$\Delta p_{20^{\circ}C} = 81,31 \overline{kgf/cm^2}$$

Para 50°C

$$U_{50^{\circ}C} = 2,07 \text{ m/s}$$

$$Re_{50^{\circ}C} = 3105$$

Movimiento turbulento. El valor de λ se determina en función del Re y $D/\epsilon = 500$ en el ábaco de Moody.

$$\lambda_{50^{\circ}C} = 0,046$$

$$\Delta_{50^{\circ}C} = 200,9 \text{ m}$$

$$\Delta p_{50^{\circ}C} = \gamma \Delta = \delta_{50^{\circ}C} g \Delta_{50^{\circ}C} = 910 \frac{kg}{m^3} \times 9,81 \frac{m}{s^2} \times 200,9 \text{ m} \times \frac{1 \overline{kgf}}{9,8 \text{ N}} \times \frac{m^2}{10^4 cm^4} = 18,3 \frac{\overline{kgf}}{cm^4}$$

$$\Delta p_{50^{\circ}C} = 18,3 \overline{kgf/cm^2}$$

Como conclusión, a medida que aumenta la temperatura del petróleo, disminuye la pérdida de carga por frotamiento del mismo, al disminuir su viscosidad, ya que se trata de un movimiento laminar.

Ejercicio 4.26

Calcular la pérdida de presión en un oleoducto para transportar 70 m³/h de petróleo ligero en una distancia de 20km en una tubería de acero ($\epsilon=0,2\text{mm}$) de 125 mm de diámetro. La tubería está en superficie sin aislamiento. La temperatura oscila entre los 0°C y 20°C.

Densidad y viscosidad cinemática del petróleo ligero

| Temperatura (°C) | Densidad (kg/m ³) | Viscosidad cinemática $\nu \cdot 10^{-6}$ (m ² /s) |
|------------------|-------------------------------|---|
| 20 | 850 | 8,5 |
| 0 | 865 | 20 |

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0,125 \text{ m})^2}{4} = 0,0123 \text{ m}^2$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = 70 \frac{m^3}{h} \frac{1h}{3600s} \frac{1}{0,0123 \text{ m}^2} = 1,58 \text{ m/s}$$

$$Re_{20^{\circ}C} = \frac{U D}{\nu} = \frac{1,58 \frac{m}{s} \times 0,125m}{8,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/s} = 2,4 \cdot 10^4$$

$$Re_{20^{\circ}C} = \frac{1,58 \frac{m}{s} \times 0,125m}{20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/s} = 9,9 \cdot 10^3$$

En el Gráfico de Moody se determinan los valores de λ

Con $D/\epsilon = 125 \text{ mm}/0,2 \text{ mm} = 625$

$$\lambda_{20^{\circ}C} = 0,0285$$

$$\lambda_{0^{\circ}C} = 0,0315$$

Cálculo de la pérdida de energía

Considerando sólo frotamiento: $\Delta = \lambda \frac{U^2}{2g} \frac{L}{D}$

$$\Delta_{20^{\circ}C} = 0,0285 \frac{(1,58 \text{ m/s})^2}{2g} \frac{20000 \text{ m}}{0,125\text{m}} = 580,2 \text{ m}$$

$$\Delta_{0^{\circ}C} = 0,0315 \frac{\left(1,58 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2g} \frac{20000 \text{ m}}{0,125\text{m}} = 641,3$$

Cálculo de la pérdida de presión

Por ser tubería horizontal y de sección constante

$$\Delta p = \gamma \Delta = \delta g \Delta$$

$$\Delta p_{20^{\circ}C} = \gamma \Delta = \delta_{20^{\circ}C} g \Delta_{20^{\circ}C} = 850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 580,2 \text{ m} \times \frac{1 \overline{\text{kgf}}}{9,8 \text{ N}} \times \frac{\text{m}^2}{10^4 \text{cm}^4} = 49,37 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{cm}^4}$$

$$\Delta p_{20^{\circ}C} = 49,37 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{cm}^4}$$

$$\Delta p_{0^{\circ}C} = \gamma \Delta = \delta_{0^{\circ}C} g \Delta_{0^{\circ}C} = 865 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 641,3 \text{ m} \times \frac{1 \overline{\text{kgf}}}{9,8 \text{ N}} \times \frac{\text{m}^2}{10^4 \text{cm}^4} = 55,53 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{cm}^4}$$

$$\Delta p_{0^{\circ}C} = 55,53 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{cm}^4}$$

2.3 Ecuaciones para fluidos compresibles (gases)

En esta sección se incluyen conceptos fundamentales para poder desarrollar las ecuaciones que permiten el cálculo de tuberías simples por las que circulan fluidos compresibles.

Los fluidos compresibles se caracterizan por no tener una densidad constante. El estudio se realizará para flujo permanente y unidimensional (las propiedades del fluido son constantes en la sección transversal). En general, las fuerzas másicas debidas al campo gravitatorio, son despreciables y por lo tanto no se tienen en cuenta y el problema se limita a determinar la variación de presión. Aunque hay algunas excepciones, especialmente cuando la diferencia de altura entre los dos puntos no es despreciable.

Las tuberías para transporte y distribución de aire o de un gas de asimilable a él, presentan poca variación de densidad y se denominan de baja presión, mientras que los gases combustibles o de uso industrial son de media a alta presión, y en ellos los cambios de presión producen cambios importantes en su densidad.

Las condiciones de servicio a veces se indican en condiciones normales, es decir referidas a temperatura normal ($T_N=273^{\circ}\text{K}=0^{\circ}\text{C}$) y presión normal ($p_N=1\text{atm}$). Si el gas se comporta como gas perfecto se pueden calcular presión, temperatura y densidad de servicio o trabajo mediante la Ley de Mariotte y de Gay Lussac.

Para calcular la caída de presión en fluidos compresible es necesario conocer la relación entre la presión y el volumen específico V_0 . El volumen específico es la inversa de la densidad ($V_0 = \frac{1}{\delta}$)

Cuando un gas es perfecto o ideal cumple con la Ecuación 4.62:

$$p V_0^n = \text{constante} \tag{4.62}$$

n varía de 0 a ∞ . Cuando $n=1$ el flujo se denomina isotérmico, es un proceso que se desarrolla a temperatura constante. Cuando no se produce transferencia de calor del medio al gas o viceversa entonces se denomina adiabático.

El flujo adiabático es característico de tuberías cortas, de altas velocidades o perfectamente aisladas. Y el flujo isotérmico se encuentra en tuberías largas sin aislación, como la de gasoductos.

Aplicación de la Ecuación de Bernoulli

La ecuación genérica del teorema Bernoulli es:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + J l = B = cte$$

Diferenciando la ecuación genérica, considerando que el plano de comparación coincide con el eje hidráulico de la tubería ($z=0$) y haciendo coincidir el eje "x" con el del movimiento del agua en la misma, resulta:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{2U}{2g} dU + J dx = 0$$

Diferenciando y reemplazando J por la ecuación de de Darcy –Weisbach:

$$\frac{dp}{\gamma} + \frac{U}{g} dU + \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} dx = 0 \quad (4.63)$$

En la Ecuación 4.63 se ha despreciado, tal como se dijo anteriormente, el término de fuerzas másicas. Esta ecuación se puede expresar también como:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\gamma} + \frac{U}{g} dU + \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} dx &= 0 \\ \frac{dp}{\delta} + U dU + \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2} dx &= 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Para determinar la variación de presión mediante la Ecuación 4.64, se deben tener las siguientes consideraciones:

- 1) Si la caída de presión es menor al 10 % de la presión de entrada, (como sucede en la mayoría de las instalaciones de acondicionamiento de aire), la ecuación es igual a la de fluidos incompresibles.

$$\frac{\Delta p}{\delta} - \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2} = 0 \quad (4.65)$$

Siendo δ la densidad a las condiciones de entrada o de salida, dependiendo de cuál se conozca.

- 2) Si la caída de presión calculada está entre el 10 y 40% de la presión de entrada puede usarse la misma ecuación (de fluidos incompresibles), utilizando una densidad promedio de entrada y salida:

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad (4.66)$$

- 3) Cuando la caída de presión sea mayor al 40% de la inicial, deberá usarse uno de los siguientes métodos:
 - ✓ Flujo isotérmico
 - ✓ Flujo adiabático
 - ✓ Flujo de gas con comportamiento real

El Flujo adiabático queda fuera del presente estudio.

No se puede considerar que el fluido compresible mantiene su volumen con las variaciones de presión de trabajo, y, por lo tanto, es necesario incluir el concepto de densidad del fluido a través de la ecuación universal de los **gases ideales**, cuya expresión es la siguiente:

$$p = \frac{R T M}{V} \quad (4.67)$$

Donde:

p la presión a la que está sometido el fluido bajo estudio en (N/m²).

R es la constante universal de los gases.

T es la temperatura absoluta de los gases en (°K).

M es la masa del gas en (kg).

V es el volumen que ocupa el gas en (m³).

La Ecuación 4.67 da la relación entre la presión de trabajo y el volumen del gas compresible, mientras la temperatura del gas se mantiene constante, eso es lo que se llama un **PROCESO ISOTÉRMICO IDEAL**.

Fluidos compresibles isotérmicos (gas ideal)

Tal como se ha anticipado se basan en la Ecuación 4.67. La densidad del fluido es el cociente entre la masa y el volumen del mismo. Si se reemplaza en la mencionada ecuación queda:

$$p = R T \frac{M}{\underbrace{V}_{\delta}} = R T \delta \quad (4.68)$$

La densidad, entonces, se puede despejar de la Ecuación 4.68, quedando una función de la presión y la temperatura. Y si además se considera que el gas es isotérmico ideal, la temperatura permanece constante, y la densidad es sólo función de la presión de trabajo, varía linealmente con la presión:

$$\delta = \frac{p}{R T} \quad (4.69)$$

$$\frac{p}{\delta} = cte, \text{ para } T = \text{constante} \quad (4.70)$$

Se aplica la ecuación de continuidad al escurrimiento de los gases, teniendo en cuenta que el volumen varía con la presión de trabajo, de modo que el caudal volumétrico no es constante, sino que el caudal másico lo es. Para mantener la constancia del caudal másico hay que incluir el concepto de densidad en la ecuación de la continuidad, lo que lleva a expresarla de la siguiente manera:

$$\delta_1 U_1 = \delta_2 U_2 \quad (4.71)$$

Operando matemáticamente en el Ecuación 4.70, se obtiene una expresión que relaciona la densidad y la velocidad en dos secciones de una tubería. Y si se incluye la Ecuación 4.71, se encuentra una relación entre las velocidades, las densidades y las presiones en dos secciones de una tubería.

$$\begin{aligned} \delta_1 U_1 &= \delta_2 U_2 \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} &= \frac{U_1}{U_2} = \frac{p_2}{p_1} \end{aligned} \quad (4.72)$$

De la ecuación 4.72 se despeja dp

$$\begin{aligned} \frac{dp}{\delta} + U dU + \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2} dx &= 0 \\ -dp &= \delta U dU + \delta \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2} dx \end{aligned} \quad (4.73)$$

El término $\delta U dU$, no es nulo, pero puede despreciarse ya que es pequeño comparado con el término de resistencia. Esto es válido para velocidades del gas menores a 35 m/s (Valiente Barderas, 2002, pág. 351).

$$-dp = \delta \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2} dx \quad (4.74)$$

Pero de la ecuación 4.72:

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{U_1}{U}$$

$$U^2 = U_1^2 \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^2$$

Reemplazando:

$$-dp = \delta \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} U_1^2 \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^2 dx$$

$$-dp = \frac{1}{\delta} \frac{\lambda}{D} \frac{1}{2} U_1^2 \delta_1^2 dx \quad (4.75)$$

De la ecuación 4.72

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{p}{p_1}$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{p_1}{p \delta_1}$$

Reemplazando

$$-dp = \frac{p_1}{p} \frac{\lambda}{\delta_1} \frac{1}{D} \frac{1}{2} U_1^2 \delta_1^2 dx$$

Agrupando, operando e integrando:

$$-2 \int p dp = p_1 \frac{\lambda}{D} U_1^2 \delta_1 \int dx$$

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} U_1^2 \delta_1 l$$

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} U_1^2 \delta_1 l \quad (4.76)$$

La Ecuación 4.76 se aplica a una tubería por la que circula un gas compresible isotérmico. Conocida la presión inicial, se puede calcular la presión final, en función del factor de resistencia λ que se puede obtener del Gráfico de Moody.

La ecuación 4.76 se puede expresar en función del caudal másico:

$$Q_m = Q \delta$$

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} \left(\frac{Q_m}{\delta_1 \Omega}\right)^2 \delta_1 l$$

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} \left(\frac{Q_m}{\Omega}\right)^2 \frac{1}{\delta_1} l \quad (4.77)$$

Considerando la ecuación de estado para gases ideales:

$$P V = n R T \quad (4.78)$$

En donde:

- P es la presión absoluta
- V es el Volumen
- n es el número de moles
- R es la Constante universal para gases ideales
- T es la temperatura absoluta

Reemplazando la Ecuación 4.78 en la 4.77, de estado volumen en función del peso molar (PM) y la densidad:

$$\frac{P}{\delta} PM = R T$$

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{1}{\delta_1} p_1 \frac{\lambda}{D} \left(\frac{Q_m}{\Omega} \right)^2 l$$

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{T R \lambda}{PM D} \left(\frac{Q_m}{\Omega} \right)^2 l \quad (4.79)$$

Pérdidas localizadas

Las pérdidas se calculan mediante el método de longitud equivalente, es decir se calcula una longitud adicional a la de la tubería, cuya pérdida de carga por frotamiento sea igual a la suma de las pérdidas de carga por singularidad, generando la misma disminución de presión:

$$\Delta = \lambda_f \frac{U^2}{2g} \frac{L_e}{D} = \sum \lambda_s \frac{U^2}{2g}$$

$$\lambda_f \frac{L_e}{D} = \sum \lambda_s$$

$$L_e = D \frac{\sum \lambda_s}{\lambda_f} \quad (4.80)$$

Los valores de λ_s se obtienen de tablas específicas suministradas por el fabricante.

Gases Reales

Son gases que no se comportan como gases ideales, como es el caso de gases a altas temperaturas y bajas presiones. La ecuación general de estado para gases es:

$$P V = z (P, T) \quad (4.81)$$

Siendo z el coeficiente de compresibilidad, que para gases perfectos es igual a 1.

2.4 Ejercicios de tuberías con fluidos compresibles

Ejercicio 4.27

Una tubería de acero de diámetro 100 mm, conduce aire a presión y tiene una longitud de 1200m. La presión absoluta en la tubería es de 8 atm, y la temperatura es de 20°C. El caudal en condiciones normales de presión y temperatura (273°K y 1 atm) es de 850 m³/h. Calcular la capacidad a temperatura y presión de trabajo y la pérdida de carga o presión.

Como el caudal está referido a condiciones normales, es necesario encontrar el caudal en condiciones de servicio u operación. Considerando que el gas se comporta como ideal, se cumple:

$$\frac{P V}{T} = n R = \frac{P_N V_N}{T_N}$$

$$Q = \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} \rightarrow V = \frac{P_N V_N T}{T_N P}$$

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{T P_N V_N}{P T_N t}$$

$$Q = \frac{T}{P} \frac{P_N Q_N}{T_N} = \frac{(273 + 30)^\circ K}{8 \text{ atm}} \frac{1 \text{ atm}}{273^\circ K} 850 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 114 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 0,0317 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Velocidad

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,0317 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\frac{\pi (0,1\text{m})^2}{4}} = 4,04 \text{ m/s}$$

La tubería es horizontal y de sección constante, la pérdida de presión es igual a las pérdidas de energía por frotamiento. Como la velocidad es baja, se puede suponer que las pérdidas por frotamiento también lo son y puede aplicarse la ecuación de Bernoulli de fluidos incompresibles, Ecuación 4.65.

$$\frac{\Delta p}{\delta} - \lambda \frac{l U^2}{D} = 0$$

$$\Delta p = \delta \lambda \frac{l U^2}{D}$$

Determinación de λ

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{4,04 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1\text{m}}{1,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 2,1 \cdot 10^5$$

El valor de viscosidad cinemática también se toma de Tabla 4.13 del Anexo para 20°C, y para corregir a la presión de trabajo (leer pie de tabla)

$$\nu = \frac{\nu_{\text{tabla}}}{p(\text{en atm})} = \frac{1,516 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{8} = 1,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

En el Gráfico de Moody con el valor de $\frac{D}{\epsilon} = 0,1\text{m}/0,0002\text{m} = 500$ y $Re = 2,1 \cdot 10^5$

$$\lambda = 0,025$$

De Tabla 4.13 del Anexo, el valor de densidad a 20°C y 1 atm es 1,204 kg/m³

Las condiciones de trabajo son 20°C y 8 atm, entonces debe corregirse el valor para esta presión:

$$\frac{p}{\delta} = \text{cte} = \frac{1 \text{ atm}}{1,204 \text{ kg/m}^3} = \frac{8 \text{ atm}}{\delta}$$

$$\delta = 9,632 \text{ kg/m}^3$$

En el Gráfico de Moody con el valor de $\frac{D}{\epsilon} = 0,1\text{m}/0,0002\text{m} = 500$

Reemplazando los valores de δ y λ

$$\Delta p = \delta \lambda \frac{l U^2}{D} = 9,632 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,025 \times \frac{1200 \text{ m}}{0,1\text{m}} \times \frac{(4,04 \text{ m/s})^2}{2} = 23581 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}^2} = 23581 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta p = 23581 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{1 \text{ atm}}{101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,23 \text{ atm}$$

$$\Delta p = 0,23 \text{ atm}$$

Menor al 10% de la presión inicial, y por lo tanto es válida la utilización de la ecuación para fluidos incompresibles.

Ejercicio 4.28

Determinar la pérdida de presión en una tubería que conduce aire a 25°C y a una presión de 0,8 atm. La tubería tiene un diámetro de 10 cm, 40 m de longitud y presenta un desnivel entre el punto inicial y final de 30 m. La velocidad es de 10 m/s. Considerar $\varepsilon = 0,05 \text{ mm}$

Considerando que la variación de densidad es pequeña, las velocidades en la sección 1 y 2 serán casi iguales (ecuación de continuidad, Ecuación 4.71). Entonces la ecuación de Bernoulli para fluidos incompresibles queda de la siguiente manera:

$$z_1 g + \frac{p_1}{\delta} + \frac{U^2}{2} = z_2 g + \frac{p_2}{\delta} + \frac{U^2}{2} + \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2}$$

$$\Delta p = \delta g(z_2 - z_1) + \delta \lambda \frac{l}{D} \frac{U^2}{2}$$

De la Tabla 4.13 del Anexo, la densidad para 25° y 1 atm es de 1,184 kg/m³

Para 0,8 atm es:

$$\delta = 0,8 \times 1,184 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,947 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Determinación de λ

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{m}}{1,95 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 5,1 \cdot 10^4$$

El valor de viscosidad cinemática también se toma de Tabla 4.13 del Anexo, y para corregir a la presión de trabajo (leer pie de tabla)

$$\nu = \frac{\nu_{\text{tabla}}}{p(\text{en atm})} = \frac{1,562 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{0,8} = 1,95 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

En el Gráfico de Moody con el valor de $\frac{D}{\varepsilon} = 100\text{mm}/0,05\text{mm} = 2000$ y $Re = 5,1 \cdot 10^4$

$$\lambda = 0,022$$

Reemplazando:

$$\Delta p = \left[9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (30\text{m}) + 0,022 \frac{40 \text{ m}}{0,1 \text{ m}} \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} \right] \times 0,947 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta p = \left[734,3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \times 0,947 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 695,4 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{ m}^2} = 695,4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta p = 695,4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{1 \text{ atm}}{101325} = 0,0068 \text{ atm}$$

$$\Delta p = 0,0068 \text{ atm}$$

La variación de presión es menor al 10% de la presión inicial (0,8 atm), por lo tanto es válida la utilización de la ecuación para fluidos incompresibles.

Ejercicio 4.29. Ejercicio de Problemas de Flujo de Fluidos (Valiente Barderas, 2002, pág. 366)

Por una tubería de fundición revestida de asfalto con un diámetro de 10 cm y 600 metros de longitud circulan 1200 kg/h de aire a 30°C. Si la presión a la entrada es de $3 \overline{\text{kgf}}/\text{cm}^2$ absolutos, calcular la presión a la salida. Considerar una aspereza de 0,00015 m.

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} U_1^2 \delta_1 l$$

$$Re = \frac{U D}{\nu} = \frac{\frac{Q_m}{\delta \Omega} D \delta}{\frac{\frac{Q_m}{\pi D^2} D}{\mu}} = \frac{4 Q_m}{\pi D \mu}$$

$$U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q_m}{\delta \Omega}$$

$$Q_m = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 0,33 \text{ kg/s}$$

$$Re = \frac{4 Q_m}{\pi D \mu} = \frac{4 \times 0,33 \text{ kg/s}}{\pi \times 0,10 \text{ m} \times 1,872 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}} = 2,2 \cdot 10^5$$

Siendo $\mu_{30^\circ\text{C}} = 1,872 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$ y $\delta_{30^\circ\text{C}} = 1,164 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ de Tabla 4.13 del Anexo

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{0,10 \text{ m}}{0,00015 \text{ m}} = 667$$

Del Gráfico de Moody $\lambda = 0,023$

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (0,1 \text{ m})^2}{4} = 0,00785 \text{ m}^2$$

$$U_1 = \frac{Q}{\Omega} = \frac{Q_m}{\delta_1 \Omega} = \frac{Q_m}{\delta_1 \Omega} = \frac{0,33 \text{ kg/s}}{3,380 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,00785 \text{ m}^2} = 12,44 \text{ m/s}$$

La densidad de tabla, $\delta_{30^\circ\text{C}} = 1,164 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ está determinada para una presión de $1 \text{ atm} = 10330 \overline{\text{kgf}}/\text{m}^2$. Para una presión de $30000 \overline{\text{kgf}}/\text{m}^2$ corresponde:

$$\frac{p_1}{\delta_1} = \frac{p}{\delta}$$

$$\delta_1 = \delta \frac{p_1}{p} = 1,164 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{30000}{10330} = 3,380 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Reemplazando

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} U_1^2 \delta_1 l$$

$$p_2^2 = \left(30000 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{m}^2} \right)^2 - 30000 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{m}^2} \times \frac{0,023}{0,1 \text{ m}} (12,44 \text{ m/s})^2 \times 3,380 \text{ kg/m}^3 \times 600 \text{ m}$$

$$p_2^2 = \left(30000 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{m}^2} \right)^2 - 2165498076 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{m}^2} \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}^2} \frac{1 \overline{\text{kgf}}}{9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}} =$$

$$p_2 = 2,6 \frac{\overline{\text{kgf}}}{\text{cm}^2}$$

Ejercicio 4.30

Para los mismos datos del ejercicio anterior, considerando que la tubería presenta 2 codos y 3 válvulas. Considerar $\lambda_{codo} = 0,4$ $\lambda_{válvula} = 3,6$

$$L_e = D \frac{\sum \lambda_s}{\lambda_f} = \frac{0,10m (2 \times 0,4 + 3 \times 3,6)}{0,023} = 50,4m$$

$$p_1^2 - p_2^2 = p_1 \frac{\lambda}{D} U_1^2 \delta_1 l$$

$$p_2^2 = \left(30000 \frac{kgf^2}{m^2} \right) - 30000 \frac{kgf^2}{m^2} \times \frac{0,023}{0,1m} (12,44m/s)^2 \times 3,380 \frac{kg}{m^3} \times 650,4m$$

$$p_2 = 2,57 \frac{kgf}{cm^2}$$

3. Movimiento impermanente en tuberías

3.1 Primera Ecuación de Saint-Venant

Recordando la definición de movimiento impermanente, como aquél donde las circunstancias del escurrimiento varían en el espacio y en el tiempo. Las ecuaciones de la hidrodinámica en coordenadas cartesianas vistas en la Unidad II son:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + X = \delta a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + Y = \delta a_y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + Z = \delta a_z$$

Para mayor simplificación se supone una corriente unidireccional predominante en el eje x, por lo que resultan despreciables las componentes de velocidad en los ejes y, z, luego $v = w = 0$, o bien, $a_y = a_z = 0$.

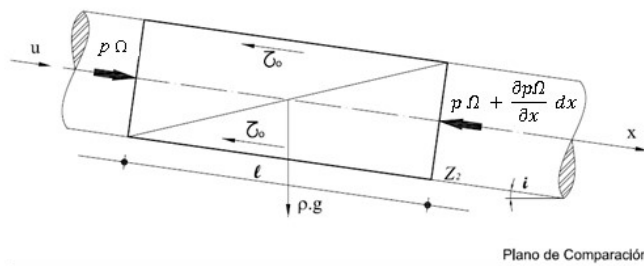


Figura 4.18. Sección de tubería: análisis de fuerzas actuantes. Movimiento Impermanente

Recordando que:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + X = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Ahora, el problema se limita a reemplazar el valor de la fuerza másica por unidad de volumen **X**, que tendrá dos sumandos, la componente del peso propio del líquido en la dirección del

movimiento (con signo positivo porque la tubería es descendente) y la otra componente es la resistencia por frotamiento, o sea el producto de la tensión de corte hidráulico por la sección en donde actúa, Figura 4.18.

Resta nada más, entonces, que remplazar los valores de las componentes y por aplicación, cambiar el signo de $\frac{\partial p}{\partial x}$, ya que la componente de la presión tiene sentido hacia las caras o secciones y no desde las mismas.

La fuerza másica debida al peso propio X_p es:

$$F_{\text{peso}} = \gamma \Omega l \text{sen}(i)$$

Pero:

$$X_p = \frac{F_{\text{peso}}}{\text{Volumen}} = \frac{\gamma \Omega l \text{sen}(i)}{\Omega l}$$

$$X_p = \gamma \text{sen}(i) = \delta g \text{sen}(i)$$

La fuerza másica por unidad de volumen debida al frotamiento X_f , es función de la tensión de corte hidráulico (Unidad III), es:

$$\tau_0 = \gamma R_H J$$

La componente de frotamiento, tiene la misma dirección que el peso propio, pero de sentido contrario, se calcula como:

$$F_{\text{frotamiento}} = \tau_0 \chi l$$

En tanto que la fuerza másica por unidad de volumen es:

$$X_p = \frac{F_{\text{frotamiento}}}{\text{Volumen}} = \frac{\tau_0 \chi l}{\Omega l} = \frac{\tau_0}{R_H} = \frac{\gamma R_H J}{R_H} = \gamma J$$

Es necesario aclarar que la pérdida de carga unitaria J corresponde al valor del movimiento turbulento, ya que el movimiento laminar es permanente. Entonces, reemplazando en la ecuación de origen cada término con su signo, queda:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \text{sen}(i) - \gamma J = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Dividiendo por γ :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + \text{sen}(i) - J = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (4.82)$$

La Ecuación 4.82 es la denominada **PRIMERA ECUACIÓN DE SAINT-VENANT** aplicada a movimiento impermanente en tuberías.

Como la única variable es x , se puede expresar la PRIMERA ECUACIÓN DE SAINT-VENANT en función del recorrido del agua, y se pasa de derivadas parciales a derivadas totales:

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} + \text{sen}(i) - J = \frac{1}{g} \left(\frac{du}{dx} u + \frac{du}{dt} \right)$$

Operando

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \text{sen}(i) + J + \frac{1}{g} \left(\frac{du}{dx} u + \frac{du}{dt} \right) = 0$$

Pero $\frac{dz}{dx} = \text{sen}(i)$ (el signo negativo indica que z disminuye, o sea que la tubería es descendente):

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \frac{dz}{dx} + J + \frac{1}{g} \left(\frac{du}{dx} u + \frac{du}{dt} \right) = 0 \quad (4.83)$$

La Ecuación 4.83 es la **PRIMERA ECUACIÓN DE SAINT-VENANT** aplicada a una tubería con movimiento impermanente unidireccional y de trazado geométrico descendente. El sumando dz/dx puede ser positivo o negativo, cuando la tubería es descendente dz/dx es negativo, si la tubería es ascendente el dz/dx es positivo.

Cada término significa lo siguiente:

J : es la pérdida de carga o energía cinética por frotamiento.

$\text{sen}(i) = dz/dx$: es la variación de la energía potencial.

$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx}$: es la variación de la energía de presión.

$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right)$: es la variación de la energía cinética en el tiempo y en el espacio.

Si en la Ecuación 4.83 se considera que la velocidad no varía con respecto al tiempo, queda:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \frac{dz}{dx} + J + \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = 0 \quad (4.84)$$

Se obtiene la Ecuación 4.84 que es válida para los **MOVIMIENTOS PERMANENTES VARIADOS**.

Si a su vez las circunstancias hidráulicas no varían tampoco respecto del espacio, la Ecuación 4.84 todavía queda aún más simplificada:

$$\begin{aligned} -i + J &= 0 \\ i = J &= \frac{dz}{dx} = \text{sen}(i) \\ i = J &= \frac{dz}{dx} = \text{sen}(i) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Se obtiene la Ecuación 4.85 que es la **ECUACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS PERMANENTES UNIFORMES**.

3.2 Segunda Ecuación de Saint-Venant

De acuerdo a los conceptos de cinemática de la Unidad II, para un fluido incompresible, la segunda ecuación de Saint-Venant, se obtiene de la ecuación de continuidad para movimientos impermanentes, cuya expresión es la siguiente:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (4.86)$$

Pero para el caso de los fluidos compresibles, y la aplicación al fenómeno del Golpe de Ariete, se debe introducir el concepto de compresibilidad del agua, ya que para valores muy altos de la presión el agua cambia de volumen, y ese cambio de volumen implica un cambio en la densidad del agua. Por ello se debe introducir la densidad en la ecuación de la continuidad para mantener la suma constante, y la Ecuación 4.86 se transforma en la Ecuación 4.87:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(\delta \Omega)}{\partial t} = 0 \quad (4.87)$$

Si se multiplica esta ecuación por dx :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial(\delta \Omega)}{\partial t} dx = 0$$

Y reemplazando el caudal por el producto de la velocidad y la sección transversal $Q = u \Omega$:

$$\frac{\partial(\delta u \Omega)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\delta \Omega)}{\partial t} dx = 0$$

Resolviendo matemáticamente las derivadas parciales:

$$\delta u \frac{\partial(\Omega)}{\partial x} dx + \delta \Omega \frac{\partial(u)}{\partial x} dx + u \Omega \frac{\partial(\delta)}{\partial x} dx + \delta \frac{\partial(\Omega)}{\partial t} dx + \Omega \frac{\partial(\delta)}{\partial t} dx = 0$$

Si dividimos por $\delta \Omega dx$

$$\frac{u \partial(\Omega)}{\Omega \partial x} + \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{u \partial(\delta)}{\delta \partial x} + \frac{1 \partial(\Omega)}{\Omega \partial t} + \frac{1 \partial(\delta)}{\delta \partial t} = 0$$

También:

$$\frac{u \partial \Omega}{\Omega \partial x} + \frac{1 \partial \Omega}{\Omega \partial t} + \frac{u \partial \delta}{\delta \partial x} + \frac{1 \partial \delta}{\delta \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.88)$$

Pero considerando que la sección transversal es una función del espacio y del tiempo su diferencia se obtiene así:

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx$$

Si dividimos por dt, y reemplazamos dx/dt por u:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} u$$

Luego:

$$\frac{1 d\Omega}{\Omega dt} = \frac{1 \partial \Omega}{\Omega \partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{u}{\Omega}$$

De manera que la Ecuación 4.88 puede escribirse así:

$$\frac{1 d\Omega}{\Omega dt} + \frac{u \partial \delta}{\delta \partial x} + \frac{1 \partial \delta}{\delta \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.89)$$

Pero:

$$d\delta = \frac{\partial \delta}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta}{\partial t} dt$$

En forma análoga se puede obtener:

$$\frac{1 d\delta}{\delta dt} = \frac{u \partial \delta}{\delta \partial x} + \frac{1 \partial \delta}{\delta \partial t}$$

Por lo que, la ecuación 4.89 se transforma en:

$$\underbrace{\frac{1 d\Omega}{\Omega dt}}_A + \underbrace{\frac{1 d\delta}{\delta dt}}_B + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_C = 0 \quad (4.90)$$

La Ecuación 4.90 representa la ecuación de la continuidad como la suma de tres términos.

$$A = \frac{1 d\Omega}{\Omega dt}$$

El término A representa la variación unitaria de la sección transversal de una tubería sometida a presión (es decir, el cociente de la deformación de la sección transversal $d\Omega$ respecto de su magnitud inicial Ω), con respecto al tiempo, debido a la elasticidad del material de la tubería. Este término se puede calcular aplicando la Ley de Hooke a la tubería de diámetro D sometida a una presión p:

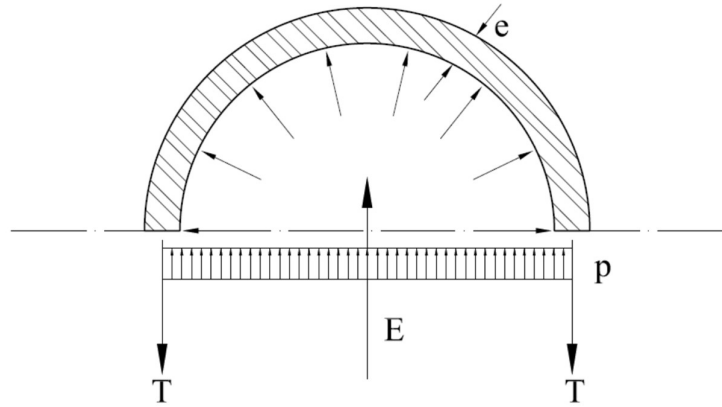


Figura 4.19. Análisis de sección transversal de tubería

El empuje resultante será: $p \cdot D = E$, donde $E = 2 \cdot T$; $T = p \cdot D / 2$

La tensión σ será: $\sigma = T / e = p \cdot D / 2 \cdot e$

Diferenciando la expresión de σ , queda:

$$d\sigma = \frac{dp D}{2 e}$$

La Ley de Hooke, en la cual la tensión normal se calcula en función de la deformación y del módulo de elasticidad del material "E": $\sigma = E \cdot \varepsilon$, siendo ε la deformación de la tubería igual a: $\varepsilon = dD / D$. O sea, que la ecuación diferencia de tensión queda:

$$d\sigma = E \frac{dD}{D} = \frac{dp D}{2 e}$$

$$dD = \frac{dp D^2}{2 e E}$$

Si la sección transversal de la tubería es: $\Omega = \frac{\pi D^2}{4}$, el diferencial es: $d\Omega = \frac{\pi D dD}{2}$

Luego:

$$d\Omega = \frac{\pi D}{2} \frac{dp D^2}{2 e E} = \frac{\pi D^2}{\underbrace{4}_{\Omega}} \frac{dp D}{e E}$$

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{dp D}{e E}$$

Dividiendo por dt :

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{D}{e E} \frac{dp}{dt} \tag{4.91}$$

La Ecuación 4.91 nos da la transformación del primer sumando A.

Para el segundo sumando B, de la Ecuación 4.90:

$$B = \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt}$$

El término B representa la compresibilidad del agua con respecto al tiempo. Toda materia, tanto líquida, gaseosa o sólida se caracteriza por un módulo volumétrico de elasticidad, que es la relación entre un esfuerzo de compresión unitario diferencial y la reducción relativa en el volumen que dicha compresión produce. Por lo tanto, una disminución en el volumen de cualquier cuerpo debe estar acompañada de un aumento proporcional de su densidad, el módulo de elasticidad volumétrico para el agua puede expresarse así:

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{dp}{\frac{d\delta}{\delta}} \\ \frac{d\delta}{\delta} &= \frac{dp}{E_a} \\ \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} &= \frac{1}{E_a} \frac{dp}{dt} \end{aligned} \quad (4.92)$$

El tercer sumando: $C = \frac{\partial u}{\partial x}$ de la Ecuación 4.90, representa la variación de la velocidad en el espacio, y se aplica sin transformación alguna.

Reemplazando las ecuaciones 4.91 y 4.92 en la 4.90, se obtiene la Segunda Ecuación de Saint-Venant aplicable a líquidos compresibles.

$$\frac{D}{e E} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{E_a} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.93)$$

La Ecuación 4.93 es la **SEGUNDA ECUACIÓN DE SAINT-VENANT** aplicable a líquidos compresibles en movimiento impermanente. Si se saca factor común la presión nos queda:

$$\frac{dp}{dt} \left(\frac{D}{e E} + \frac{1}{E_a} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.94)$$

Si se introduce un valor c, "celeridad de la onda de presión" que resulta igual a:

$$\delta \left(\frac{D}{e E} + \frac{1}{E_a} \right) = \frac{1}{c^2} \quad (4.95)$$

Donde:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\delta \left(\frac{D}{e E} + \frac{1}{E_a} \right)}}$$

c tiene dimensiones de velocidad [L/T].

Reemplazando la ecuación 4.95 en la 4.94, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\delta c^2} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Si se reemplaza la variación de la presión en función de la altura piezométrica del agua, resulta: $dp = \gamma \cdot dh$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\delta c^2} \frac{dh}{dt} &= - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\delta g}{\delta c^2} \frac{dh}{dt} &= \frac{g}{c^2} \frac{dh}{dt} = - \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{g}{c^2} \frac{dh}{dt} \quad (4.96)$$

La Ecuación 4.96 es la **SEGUNDA ECUACIÓN DE SAINT-VENANT** adaptada para su uso en el estudio del golpe de ariete, la que también puede expresarse en derivadas totales en lugar de parciales.

$$\frac{du}{dx} = -\frac{g}{c^2} \frac{dh}{dt} \quad (4.96)$$

3.3 Golpe de Ariete

Este fenómeno se produce en las tuberías al cerrar o abrir una válvula que regula el paso del agua, o bien, al disminuir o aumentar bruscamente el caudal. Es importante esta evaluación del fenómeno en tuberías forzadas de centrales hidráulicas, donde se regula el caudal de ingreso a turbinas acopladas o alternadores.

En el estudio de este fenómeno hay que abandonar la hipótesis del fluido incompresible y a su vez tener en cuenta la elasticidad de la tubería, por lo tanto el golpe de ariete es un fenómeno transitorio o impermanente. Si observamos la Figura 4.20, donde se representa una tubería alimentada por un embalse, cuya longitud es L , espesor e y diámetro D , cuyo caudal se regula por una válvula V , podemos suponer: que la válvula V se cierra. Luego como el caudal previo al cierre tiene con una velocidad u , la energía cinética $u^2/2g$, al disminuir la velocidad, se va transformando en trabajo de compresión del fluido que llena la tubería y en trabajo de dilatación de la tubería. Como consecuencia de esto, se produce una sobrepresión en la cañería que se denomina h_c , o golpe de ariete positivo, y la onda de sobrepresión viaja con una velocidad igual a c , llamada celeridad de la onda, desde la válvula hacia el depósito.

Al abrir la válvula rápidamente, se puede generar una depresión o golpe de ariete negativo.

Es necesario ver cuáles son los factores que intervienen a los efectos de evaluar el fenómeno, lo que permitirá el diseño adecuado del espesor de la tubería.

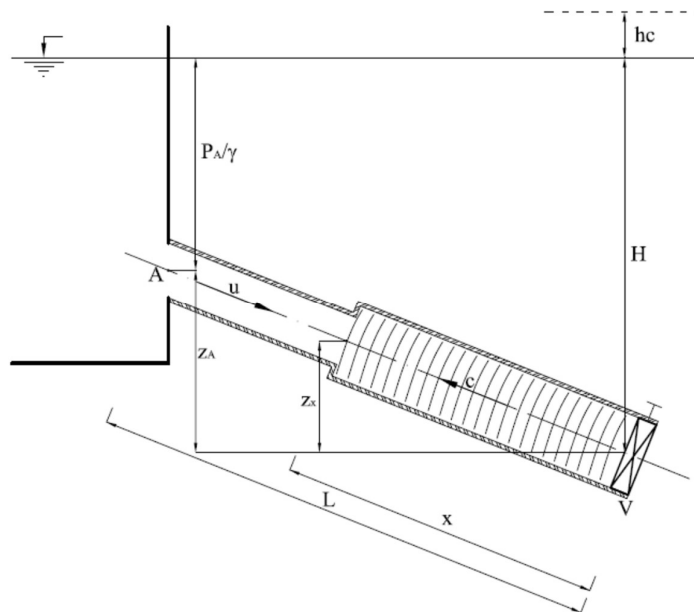


Figura 4.20. Análisis de sección transversal de tubería

Este movimiento que se produce producto del accionamiento de válvulas es un movimiento impermanente y, por lo tanto, se aplica la Ecuación 4.83:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \frac{dz}{dx} + J + \frac{1}{g} \left(\frac{du}{dx} u + \frac{du}{dt} \right) = 0 \quad (4.83)$$

Que se puede expresar también como:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \frac{dz}{dx} + J + \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} = 0 \quad (4.97)$$

En esta ecuación se realizan las siguientes hipótesis:

- La influencia de la viscosidad es despreciable frente a los valores mayores de las presiones involucradas, por lo que la pérdida de carga por frotamiento es despreciable y entonces $J \approx 0$.
- Si la velocidad de circulación es u , la energía cinética será $u^2/2g$, la que resulta menor en comparación con el valor de H , al que se considera constante, por suponer un embalse de capacidad infinita.

De esta manera la ecuación 4.97 queda, y, multiplicando por dx :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \frac{dz}{dx} + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} = 0 \quad (4.98)$$

$$\frac{1}{\gamma} dp - dz + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} dx = 0$$

E integrando entre el punto A (embalse) y el punto V (válvula) de la Figura 4.20:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_{p_A}^{p_V} dp - \int_{z_A}^{z_V} dz + \frac{1}{g} \int_0^L \frac{du}{dt} dx &= 0 \\ \frac{p_V}{\gamma} - \frac{p_A}{\gamma} - \underbrace{z_V + z_A}_H &= -\frac{1}{g} \frac{du}{dt} L \\ \frac{p_V}{\gamma} - H &= -\frac{1}{g} \frac{du}{dt} L \end{aligned}$$

Pero la aceleración será positiva si la válvula se abre, porque hay un aumento de la velocidad del agua en la tubería, y $du/dt > 0$, y negativa cuando se cierra, $du/dt < 0$. Luego el segundo miembro de la ecuación puede tener signo positivo o signo negativo:

$$\frac{p_V}{\gamma} - H = \pm \frac{1}{g} \frac{du}{dt} L \quad (4.99)$$

Según la Ecuación 4.99, la sobrepresión "hc" será mayor cuanto más alta sea la variación de velocidad en el tiempo, lo que se conseguirá cuanto más rápido se ejecute el cierre o la apertura de la válvula.

3.4 Teoría de Allieve. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver son las Ecuaciones 4.96 y 4.98:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} - \frac{dz}{dx} + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} = 0 \quad (4.98)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{g}{c^2} \frac{dh}{dt} \quad (4.96)$$

Despejando y reemplazando $p = \gamma h$:

$$\frac{du}{dt} = g \frac{dz}{dx} - g \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} = g i - g \frac{\gamma}{\gamma} \frac{dh}{dx}$$

El sistema queda:

$$\frac{du}{dt} = g i - g \frac{dh}{dx} \quad (4.100)$$

$$\frac{du}{dx} = - \frac{g}{c^2} \frac{dh}{dt} \quad (4.101)$$

Derivando la Ecuación 4.100 respecto del espacio (x), y la 4.101 respecto al tiempo (t), considerando la pendiente de la tubería constante.

$$\frac{d^2u}{dx dt} = 0 - g \frac{d^2h}{dx^2} \quad (4.102)$$

$$\frac{d^2u}{dx dt} = - \frac{g}{c^2} \frac{d^2h}{dt^2} \quad (4.103)$$

Igualando las Ecuaciones 4.102 y 4.103 y despejando la derivada segunda de la altura piezométrica de la sobrepresión h respecto del tiempo:

$$g \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{g}{c^2} \frac{d^2h}{dt^2}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = c^2 \frac{d^2h}{dx^2} \quad (4.104)$$

La Ecuación 4.104 se conoce como la **PRIMERA ECUACIÓN DE ALLIEVE**.

Si ahora se deriva la Ecuación 4.100 respecto del tiempo y la 4.101 respecto del espacio:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0 - g \frac{d^2h}{dx dt}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = - \frac{g}{c^2} \frac{d^2h}{dx dt}$$

Despejando e igualando:

$$\frac{d^2h}{dx dt} = - \frac{1}{g} \frac{d^2u}{dt^2} = - \frac{c^2}{g} \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2u}{dx^2} \quad (4.105)$$

La Ecuación 4.105 es la **SEGUNDA ECUACIÓN DE ALLIEVE**.

Las dos ecuaciones de Allieve fueron integradas por D'Alembert y la solución responde a las siguientes funciones periódicas:

$$h = F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + F_2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$u = u_x - \frac{g}{c} \left[F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + F_2\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \quad (4.106)$$

De las soluciones obtenidas se desprende que la sobrepresión h, también llamada h_c, en una sección ubicada a una distancia x de la válvula se obtiene como la suma de dos funciones

periódicas desfasadas un argumento $2x/c$ entre sí. Efectivamente, cuando no hay sobrepresión, la presión total es igual a H, luego $h_c=0$. Por lo que:

$$0 = F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + F_2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) = -F_2\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (4.107)$$

Entonces, en tiempos espaciados $2L/c$, al efecto de la primera función se le superpone el efecto de la segunda, siendo funciones constantes, pero de sentido contrario. La F_1 nace desde la válvula hacia el embalse, como una sobrepresión y la F_2 comienza actuar un tiempo $2L/c$ después y representa una depresión.

Llamando $2L/c$ al tiempo que tarda la onda en ir desde V hasta A y volver a V nuevamente, cuando el tiempo sea $t < 2L/c$, la onda de presión habrá pasado por una sección, solamente una vez, es decir, que aún no ha vuelto a V. Luego, sólo hay F_1 , pero no F_2 .

$$\left. \begin{aligned} hc &= F_1(t) \\ u &= u_x - \frac{g}{c} [F_1(t)] \end{aligned} \right\} \text{para } x = 0$$

En tanto que para una sección x , en un tiempo $t < x/c$, la onda no habrá llegado a la sección, por lo tanto, no se manifiesta la sobrepresión en la misma:

$$\begin{aligned} hc &= 0 \\ u &= u_x \end{aligned} \quad (\text{el movimiento sigue permanente})$$

Para una sección genérica y para un tiempo $x/c < t < 2L/c$

$$\begin{aligned} hc &= F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ u &= u_x \pm \frac{g}{c} \left[F_1\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \end{aligned}$$

3.5 Celeridad de la Onda

La Ecuación 4.93, Segunda Ecuación de Saint-Venant para el golpe de ariete, se introdujo una magnitud c , que tiene dimensiones de velocidad, el valor de c es conocido como **celeridad de la onda**. La expresión de c puede transformarse así:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\delta \left(\frac{eE + DE_a}{eE E_a} \right)}} = \sqrt{\frac{E_a/\delta}{\left(\frac{eE + DE_a}{eE} \right)}} = \sqrt{\frac{E_a/\delta}{\left(1 + \frac{DE_a}{eE} \right)}} \quad (4.108)$$

Donde:

- E_a : es el módulo de elasticidad volumétrico del agua o fluido.
- δ : es la densidad del agua o fluido.
- E : es el módulo de elasticidad del material de la tubería.
- e : es el espesor de la tubería.
- D : es el diámetro interno de la tubería.

La Tabla 4.12 muestra los valores de la celeridad de la onda para distintos materiales para el agua.

Tabla 4.12. Valores de c (m/s) para $E_a = 2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ y $\delta = 1000 \text{ kg/m}^3$

| D/e | Material - Modulo Elasticidad E(N/m2) | | | | | |
|-----|---------------------------------------|----------------|----------|--------------------|---------------|------------------|
| | Acero | Hierro Fundido | PVC | Hormigón sin armar | Fibroce mento | PE alta densidad |
| | 2,06E+11 | 9,8E+11 | 2,75E+09 | 1,96E+10 | 1,8E+10 | 8,83E+08 |
| 500 | 589 | 1018 | 74 | 196 | 189 | 42 |
| 200 | 838 | 1232 | 117 | 306 | 295 | 66 |
| 100 | 1031 | 1340 | 165 | 424 | 409 | 94 |
| 50 | 1198 | 1406 | 232 | 577 | 558 | 132 |
| 10 | 1410 | 1467 | 494 | 1018 | 997 | 291 |

3.6 Descripción del Fenómeno

Para entender el fenómeno del golpe de ariete se supone un cierre instantáneo de la válvula, lo cual es impracticable en la realidad, pero facilita la explicación. Entonces, se distinguen las etapas características en función del tiempo, considerando el punto medio de la tubería, cuando $x=L/2$. Se supone una cañería de longitud L , siendo la velocidad de circulación igual a u y c es la celeridad de la onda de presión que se forma cuando se cierra la válvula V , el tiempo que la onda tarda en recorrer la distancia L es $t_0=L/c$.

Antes del cierre de la válvula, el caudal escurre desde el embalse hacia la válvula en régimen permanente. Para $T=0$, si la válvula se cierra instantáneamente, la velocidad del agua en la cercanía de la válvula se hace nula, pero no en forma instantánea en toda la tubería, y se origina una onda de presión positiva, o sea, sobrepresión en la tubería, Figura 4.21.

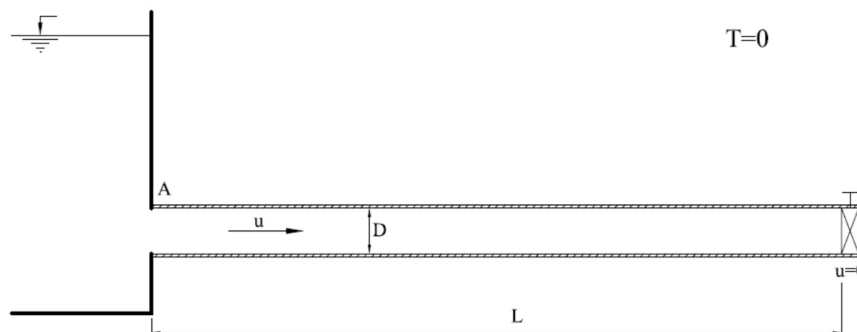


Figura 4.21. Golpe de ariete para $T=0$

La Figura 4.22 muestra la tubería en un tiempo $T=t_0/2$, la onda de sobrepresión se propaga desde la válvula al embalse con una celeridad c y alcanza hasta la mitad de la longitud de la tubería originando una dilatación de la misma, debido a la elasticidad del material de la tubería. El caudal sigue circulando desde el embalse hasta la mitad de la tubería con una velocidad u , en tanto que no existe circulación en la mitad aguas abajo hacia la válvula.

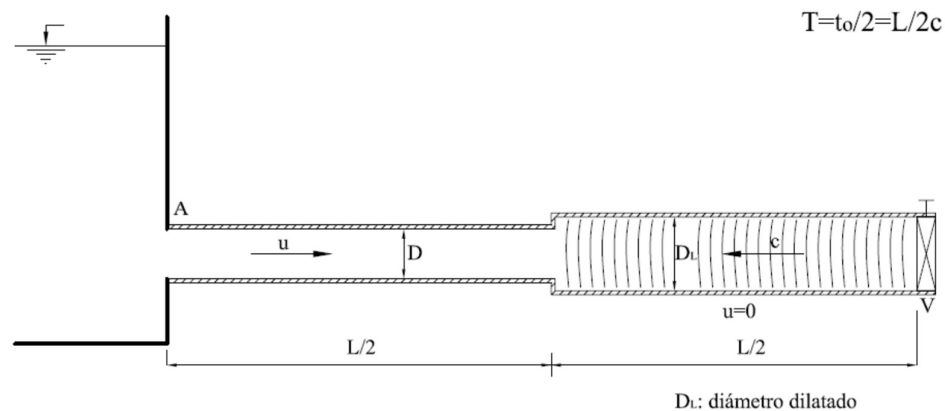


Figura 4.22. Golpe de ariete para $T = t_0/2 = L/2c$

Para $T = t_0 = L/c$, la onda de sobrepresión ha alcanzado el embalse, no existe circulación y toda la tubería se encuentra dilatada, Figura 4.23.

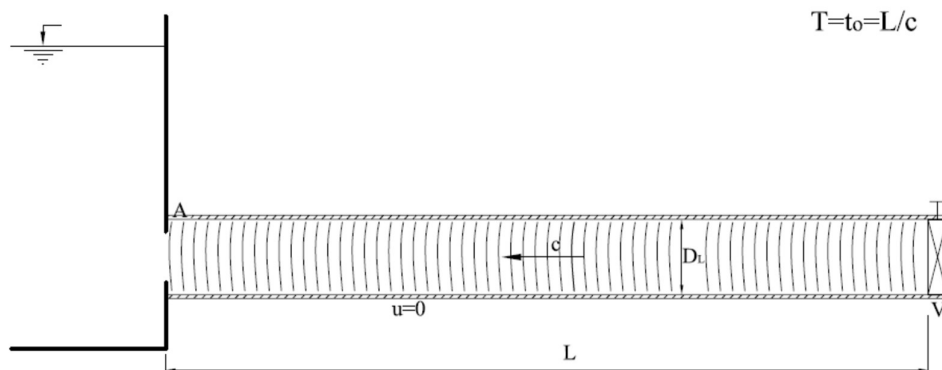


Figura 4.23. Golpe de ariete para $T = t_0 = L/c$

Para $T = 3t_0/2 = 3L/2c$, la onda se refleja en el embalse y vuelve hacia la válvula alcanzando la mitad de la tubería, la que se encuentra en su diámetro normal, y con circulación hacia el embalse, desde la mayor a la menor presión, Figura 4.24.

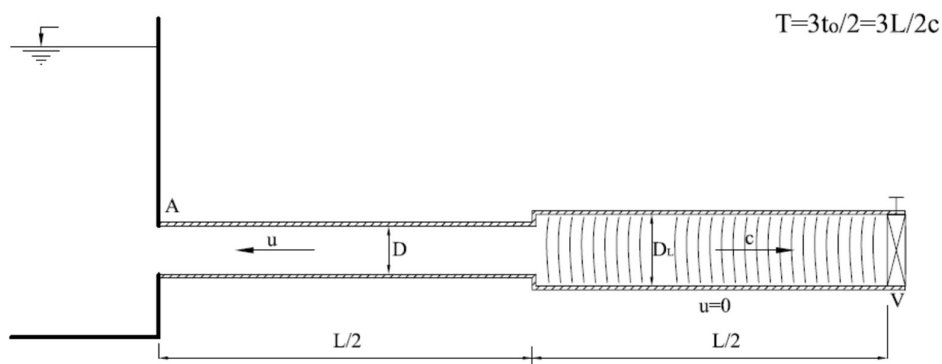


Figura 4.24. Golpe de ariete para $T = 3 t_0/2 = 3 L/2c$

Para $T = 2t_0 = 2L/c$, la onda ha alcanzado la válvula, toda la tubería se encuentra con diámetro normal y la circulación de agua es desde la válvula al embalse con velocidad u , Figura 4.25.

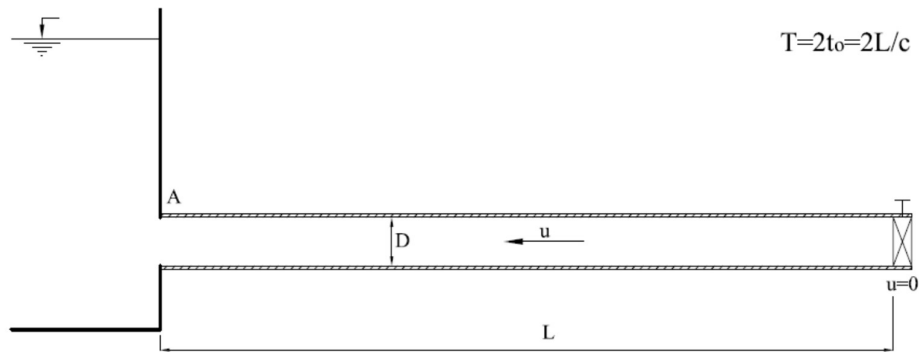


Figura 4.25. Golpe de ariete para $T = 2 t_0 = 2 L/c$

Una vez que la onda elástica alcanzó la válvula V , por la inercia de la misma, se reflejará en V y se propagará desde V hacia el embalse, pero con depresión (debido al aumento de la velocidad de circulación del agua y a la función F_2).

Para $T = 5t_0/2 = 5L/2c$, la onda de depresión alcanza la mitad derecha de la tubería, la que contiene agua en reposo y tiene un diámetro contraído $D_c < D$ debido a la depresión, Figura 4.26.

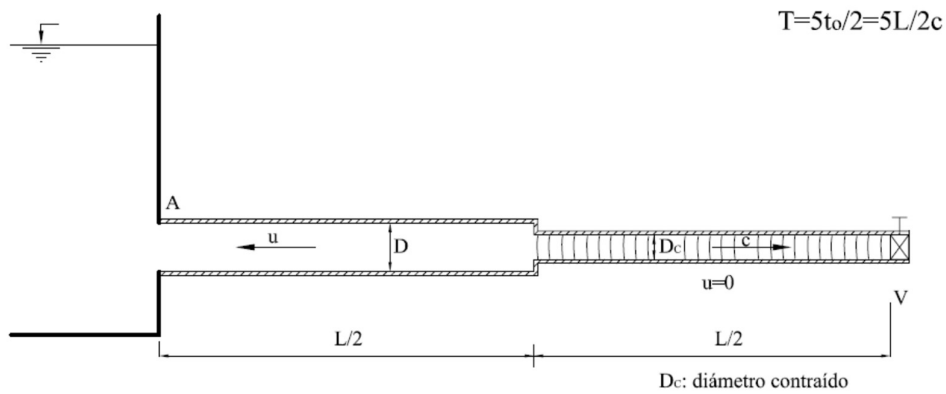


Figura 4.26. Golpe de ariete para $T = 5 t_0/2 = 5 L/2c$

Para $T = 3t_0 = 3L/c$, la onda de depresión alcanzó el embalse, todo el fluido está en reposo y la tubería entera se encuentra contraída, Figura 4.27.

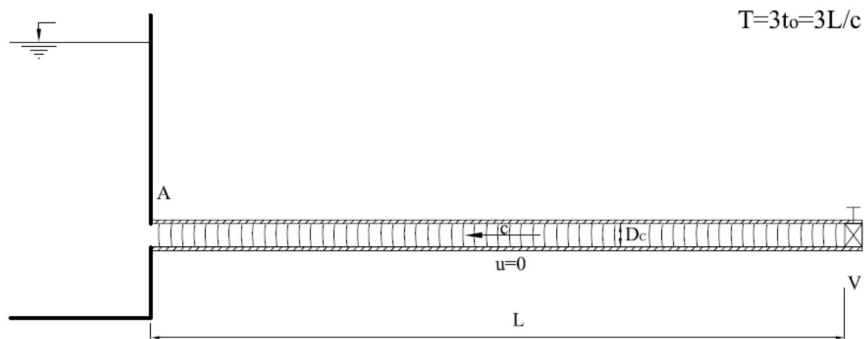


Figura 4.27. Golpe de ariete para $T = 3 t_0 = 3 L/c$

Para $T=7t_0/2=7L/2c$, el fluido circula hacia la válvula alcanzando la mitad de la tubería, la que a su vez ha recuperado el tamaño normal, la mitad derecha se encuentra contraída y en reposo, Figura 4.28.

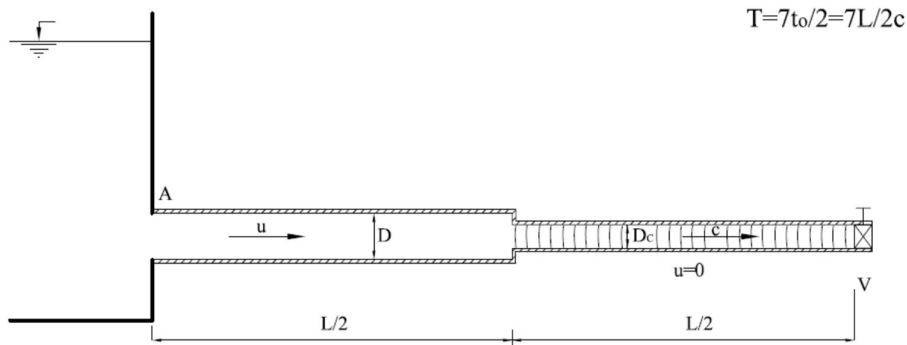


Figura 4.28. Golpe de ariete para $T = 7 t_0/2 = 7 L/2 c$

Para $T=4t_0=4L/c$, todo el fluido se encuentra circulando desde el embalse con velocidad u hacia la válvula, habiendo recuperado la tubería su diámetro normal, Figura 4.29.

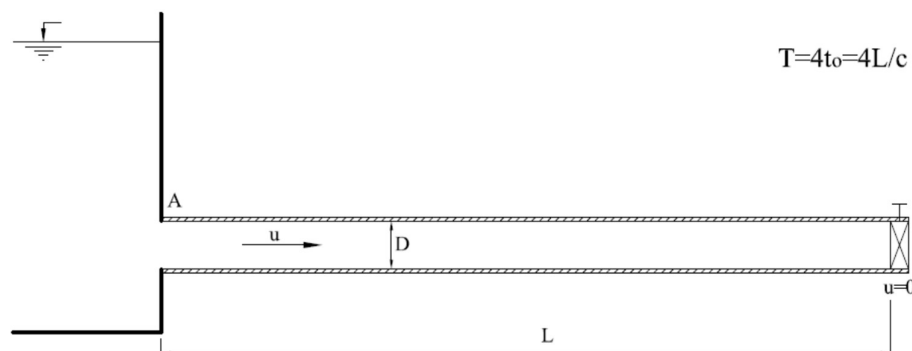


Figura 4.29. Golpe de ariete para $T = 4 t_0 = 4 L/c$

A partir de aquí comienza nuevamente a repetirse el fenómeno teóricamente en forma indefinida, pero la viscosidad y las resistencias pasivas de las oscilaciones van amortiguando la amplitud de las ondas de presión hasta disiparse por completo. El período del fenómeno es $4t_0=4L/c$.

Todo el análisis anterior se ha realizado en base a un cierre instantáneo de la válvula, lo que en realidad no ocurre, pudiendo distinguirse tres casos a los efectos de evaluar el fenómeno:

- ✓ Cierre Instantáneo (caso teórico), $t_c=0$
- ✓ Cierre Rápido, $0 < t_c < 2t_0$
- ✓ Cierre Lento, $t_c > 2t_0$

3.7 Sobrepresión Máxima

Para el cálculo de la sobrepresión máxima suponemos un tiempo $t < 2t_0$, durante el cual se presenta una variación de la sobrepresión h_c y de la velocidad u dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta h = F_1 (t - L/c) = h - h_0$$

$$\Delta u = \frac{g}{c} F_1 (t - L/c) = u - u_x$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones y luego multiplicando por γ para encontrar la presión p :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{\Delta u} &= \frac{c}{g} \\ \Delta h &= \frac{c}{g} \Delta u \\ \Delta h \gamma &= \gamma \frac{c}{g} \Delta u \\ \Delta p &= \gamma \frac{c}{g} \Delta u \end{aligned} \quad (4.109)$$

O también:

$$\Delta p = \gamma \frac{c}{g} \frac{\Delta Q}{\Omega} \quad (4.110)$$

De las Ecuaciones 4.109 y 4.110 se desprende que el valor máximo de Δp ó Δh se obtiene cuanto mayor sea el Δu , situación que se consigue cuando $u_x=0$.

Entonces:

$$\Delta h_{m\acute{a}x} = \frac{c}{g} u \quad (4.111)$$

$$\Delta p_{m\acute{a}x} = \gamma \frac{c}{g} u \quad (4.112)$$

Las Ecuaciones 4.111 y 4.112 se conocen con el nombre de Fórmulas de Joukowski.

La sobrepresión máxima calculada es válida tanto para el cierre instantáneo, como para el cierre rápido, pero la variación de la misma en función del tiempo es distinta, tal como puede observarse en las Figuras 3.30 y 4.31, para el cierre instantáneo el cambio de sobrepresión a depresión se realiza en una misma abscisa, mientras que para el cierre rápido va disminuyendo progresivamente.

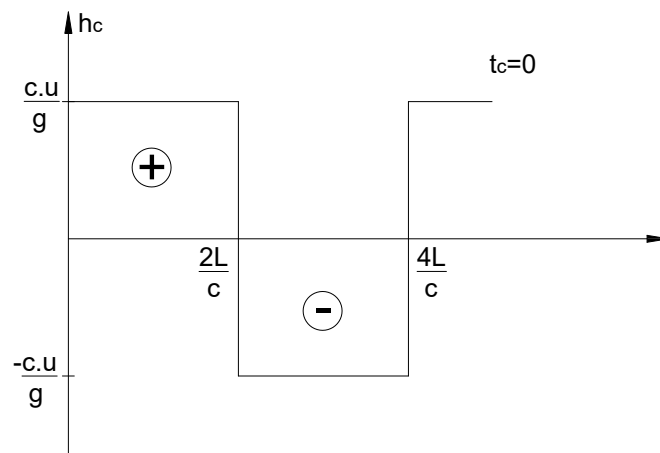


Figura 4.30. Variación de la sobrepresión máxima para cierre instantáneo en función del tiempo

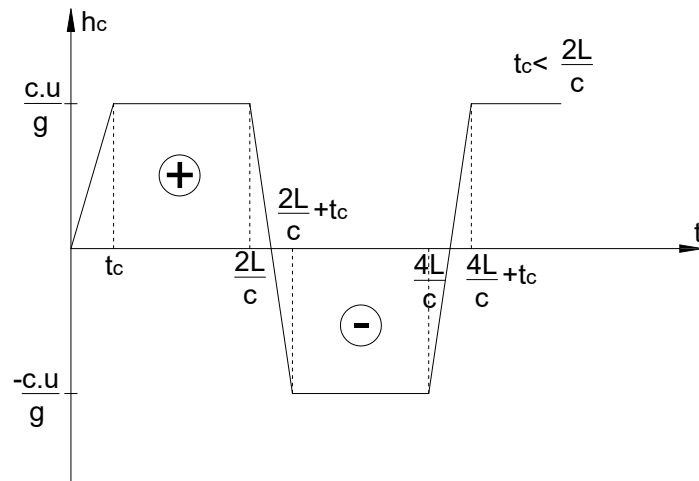


Figura 4.31. Variación de la sobrepresión máxima para cierre rápido en función del tiempo

Sobrepresión Máxima en Cierre Lento, $t_c > 2L/c$

El cálculo de la sobrepresión para cierre lento, se realiza en base a la teoría de Michaud. El análisis es como si fuera un cierre rápido, pero con una longitud a recorrer por la onda mayor ($c \cdot t_c$), es decir, considerando que la onda recorre dicha longitud, $c \cdot t_c$, y considerando cierre rápido. ($t_{cR} = t_c < 2L/c$). Si se grafican las líneas piezométricas correspondientes a las distintas etapas de recorrido de la onda en función del tiempo se obtiene la Figura 4.32, en la cual la distancia 4-5 representa la sobrepresión debida al cierre rápido de longitud ($c \cdot t_c$) y tiempo de cierre $t_{cR} < 2c \cdot t_c/c$.

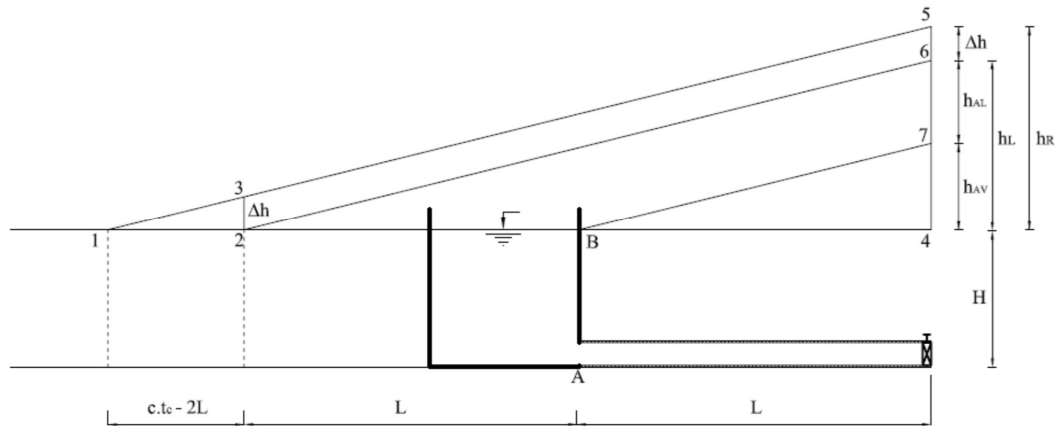


Figura 4.32. Variación de la sobrepresión máxima para cierre rápido en función del tiempo

La línea piezométrica de la sobrepresión 4-5, es la que corresponde al cierre rápido de longitud $c \cdot t_c$.

El punto 1 surge de considerar el recorrido de la onda V-A y A-V, su posición en la línea piezométrica que corresponde a $u=0$ (1-4), da origen al punto 2, a partir del cual se traza una paralela a la 1-5, para obtener el punto 6 sobre la ordenada de V. De igual forma se traza la paralela a 1-5 a partir del punto B, obteniendo el punto 7 sobre la misma ordenada. La distancia 6-7 es la sobrepresión en el tramo A-V.

Para hallar la sobrepresión que corresponde al cierre lento, se suman los valores de 6-7 y 7-4, y para hallar su valor se plantea semejanza entre los triángulos 123 y 145. De modo que:

$$\frac{2-3}{4-5} = \frac{1-2}{1-4}$$

$$\frac{\Delta h}{h_R} = \frac{c t_c - 2 L}{2 L + c t_c - 2 L}$$

Despejando Δh :

$$\Delta h = \frac{c t_c - 2 L}{c t_c} h_R$$

Pero:

$$h_R = \frac{c u}{g}$$

Reemplazando:

$$\Delta h = \frac{c t_c - 2 L}{c t_c} \frac{c u}{g}$$

Para calcular la sobrepresión debida al cierre lento:

$$h_L = h_R - \Delta h$$

$$h_L = \frac{c u}{g} \left(1 - \frac{c t_c - 2 L}{c t_c} \right) = \frac{c u}{g} \left(\frac{c t_c - c t_c + 2 L}{c t_c} \right)$$

$$h_L = \frac{c u}{g} \left(1 - \frac{c t_c - 2 L}{c t_c} \right) = \frac{c u}{g} \left(\frac{c t_c - c t_c + 2 L}{c t_c} \right) = \frac{c u}{g} \frac{2 L}{c t_c}$$

$$h_L = \frac{u}{g} \frac{2 L}{t_c} \tag{4.113}$$

Consideraciones Finales

El efecto de sobrepresión depende del tiempo de cierre de la válvula.

- Cierre Rápido; $0 < t_c < 2 t_0$

En este caso el valor de la sobrepresión es el mismo que en el caso hipotético del cierre instantáneo $t_c=0$, aunque la curva o diagrama de sobrepresiones en función del tiempo resulte distinto.

- Cierre Lento: $t_c > 2 t_0$

En cambio en el cierre lento la sobrepresión h_c resulta menor que los casos anteriores, por cuanto la depresión de la onda elástica alcanza a actuar antes de finalizar el tiempo de cierre.

En definitiva, el valor de la sobrepresión resultará proporcional a la longitud y sección transversal de la tubería, velocidad del fluido y densidad del mismo e inversamente proporcional al tiempo de cierre.

3.8 Ejercicio de aplicación

Ejercicio 4.31

Calcular el valor de la sobrepresión alcanzada en una tubería de acero $E=20000000 \text{ N/cm}^2$, con un diámetro igual a 50cm, y un espesor de 1cm, por la que circula agua con una velocidad de 3m/s, para un cierre rápido de la válvula.

Para calcular la sobrepresión se usa la Ecuación 4.112.

$$\Delta p = \gamma \frac{c}{g} u = \delta c u$$

Se necesita calcular el valor de la celeridad c :

$$c = \sqrt{\frac{E_a / \delta}{\left(1 + \frac{D E_a}{e E}\right)}}$$

El módulo de elasticidad del agua $E_a = 2,2 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$.

Reemplazando: $c = 1198 \text{ m/s}$.

La sobrepresión resulta:

$$\Delta p = \delta c u = 3,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\Delta p = 3,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

3.9 Métodos para controlar el golpe de ariete

Hay distintos procedimientos para evitar que las acciones producidas por un golpe de ariete dañen la instalación:

La solución más elemental es calcular cuidadosamente la sobrepresión y diseñar una tubería suficientemente resistente. Si la sobrepresión es importante, este método conduce a una solución onerosa. De todas formas, en cualquier caso, la tubería deberá resistir la sobrepresión y la depresión que se produzcan.

Si se aumenta el diámetro de la conducción, se reduce el valor de la velocidad y proporcionalmente los valores de sobrepresión y depresión. También es un método muy caro, pero en algunas conducciones de poca importancia se emplea con frecuencia, usando velocidades de 0,3 m/s para minimizar el riesgo para las tuberías.

Otra alternativa es la chimenea de equilibrio, que consiste en una tubería de diámetro superior al de la tubería, colocada verticalmente y abierta en su extremo superior a la atmósfera, de tal forma que su altura sea siempre superior a la presión de la tubería en el punto donde se instala en régimen permanente. Cuando el diámetro de esta chimenea es suficientemente amplio, la energía del golpe de ariete se disipa en oscilaciones controladas de la masa líquida dentro de la chimenea y el valor de la sobrepresión se reduce mucho, desapareciendo la depresión en la práctica.

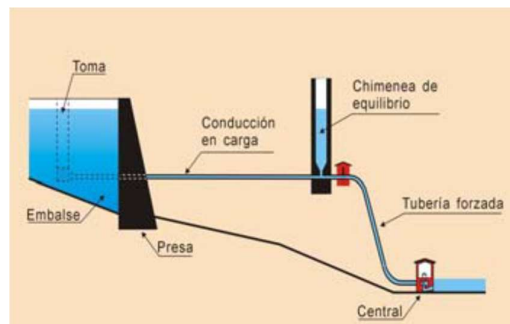


Figura 4.33. Chimenea de equilibrio en un aprovechamiento hidráulico

La instalación de un volante de inercia, que consiste en incorporar a la parte rotatoria del grupo de impulsión un volante cuya inercia retarde la pérdida de revoluciones del motor, y en consecuencia,

aumente el tiempo de parada de la bomba, con la consiguiente minoración de las sobrepresiones. Este sistema crea una serie de problemas mecánicos, mayores cuanto mayor sea el peso del volante.

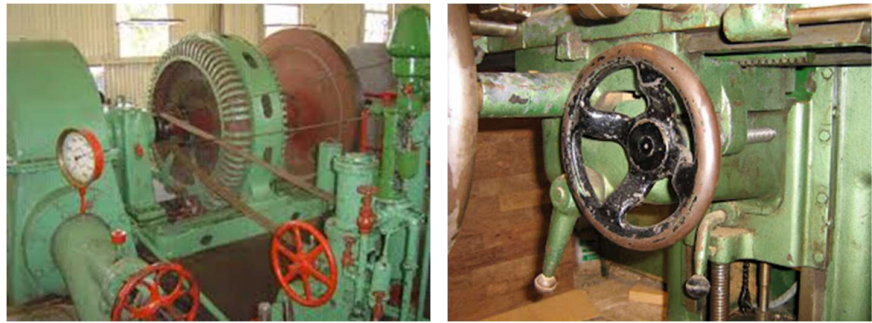


Figura 4.34. Ejemplos de volante de inercia

La colocación de un calderín de aire comprimido, que consiste en un recipiente metálico parcialmente lleno de aire que se encuentra comprimido a la presión manométrica. Existen modelos en donde el aire se encuentra aislado del fluido mediante una vejiga, con lo que se evita su disolución en el agua. El calderín amortigua las variaciones de presión debido a la expansión prácticamente adiabática del aire al producirse una depresión en la tubería, y posteriormente a la compresión, al producirse una sobrepresión en el ciclo de parada y puesta en marcha de una bomba. Se ubica junto a la bomba y aguas abajo de la válvula de retención de la bomba. Se instala en derivación y con una válvula de cierre para permitir su aislamiento.

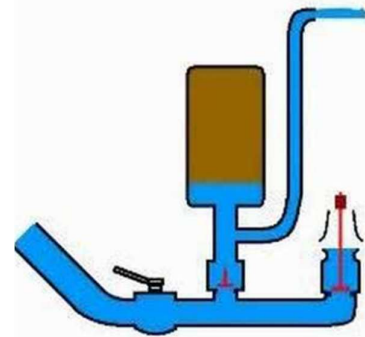


Figura 4.35. Calderín de aire comprimido

Actuando en la misma forma que el calderín, se pueden colocar una o varias válvulas evacuadoras de presión que reducen sustancialmente las sobrepresiones. Este método es especialmente recomendable para conducciones muy largas.

Un modelo de válvula evacuadora de presión está constituido básicamente por un pequeño depósito a presión que tiene una tapa sujeta mediante resortes calibrados. Al elevarse la presión, la tapa se abre y se perturba el avance de la onda de presión. Las válvulas basadas en este principio actúan cuando la tubería ya está soportando una sobrepresión. Si su acción no es muy rápida, el efecto protector puede ser muy reducido en golpes de ariete muy rápidos que se producen en tuberías con mucha pendiente geométrica. Más eficaces, pero más complicadas en su mecanismo, son las que se basan para la apertura en la depresión inicial. De esta forma cuando sobreviene el golpe de ariete positivo, la válvula puede estar abierta o en fase de apertura y su incidencia es mucho mayor.

Un método bastante económico de controlar el golpe de ariete es colocar en la tubería de elevación varias clapetas a intervalos estudiados de forma que la conducción queda compuesta entonces por varias tuberías cortas unidas secuencialmente. El funcionamiento de las clapetas si es bueno, permite reducir, en gran medida, las sobrepresiones, pero se recomienda que el número de clapetas no sea superposición de ondas reflejadas. Las clapetas a utilizar actúan mejor si son del tipo de cierre avanzado. Es decir, cierran antes de que se produzca la inversión de flujo.



Figura 4.36. Tubería con clapetas

El uso de válvulas anti-retorno que cuentan con un dispositivo que controla el tiempo de cierre y sería el que permite utilizar la fórmula de Michaud, si tuviese una ley lineal.

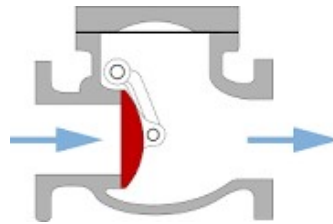


Figura 4.37. Válvula anti-retorno

También son recomendables las válvulas de vejiga de goma cuya apertura o cierre se produce por el desinflado o inflado de un manguito de elastómetro sobre un huso metálico en el interior de un tubo. Como las alteraciones de flujo se producen lentamente en las conducciones equipadas con estas válvulas, es posible estudiar una solución que las incorpore.

4. Anexo de Tablas

Tabla 4.13. Propiedades del aire. Mecánica de los Fluidos (Cengel & Cimbala, 2006)

| Propiedades del aire a 1 atm de presión | | | | | | | |
|---|-----------------------------------|---|--|---|---|--|----------------------------|
| Temp. $T, ^\circ\text{C}$ | Densidad $\rho, \text{kg/m}^3$ | Calor específico c_p $\text{J/kg} \cdot \text{K}$ | Conductividad térmica $k, \text{W/m} \cdot \text{K}$ | Difusividad térmica $\alpha, \text{m}^2/\text{s}$ | Viscosidad dinámica $\mu, \text{kg/m} \cdot \text{s}$ | Viscosidad cinemática $\nu, \text{m}^2/\text{s}$ | Número de Prandtl Pr |
| -150 | 2.866 | 983 | 0.01171 | 4.158×10^{-6} | 8.636×10^{-6} | 3.013×10^{-6} | 0.7246 |
| -100 | 2.038 | 966 | 0.01582 | 8.036×10^{-6} | 1.189×10^{-5} | 5.837×10^{-6} | 0.7263 |
| -50 | 1.582 | 999 | 0.01979 | 1.252×10^{-5} | 1.474×10^{-5} | 9.319×10^{-6} | 0.7440 |
| -40 | 1.514 | 1002 | 0.02057 | 1.356×10^{-5} | 1.527×10^{-5} | 1.008×10^{-5} | 0.7436 |
| -30 | 1.451 | 1004 | 0.02134 | 1.465×10^{-5} | 1.579×10^{-5} | 1.087×10^{-5} | 0.7425 |
| -20 | 1.394 | 1005 | 0.02211 | 1.578×10^{-5} | 1.630×10^{-5} | 1.169×10^{-5} | 0.7408 |
| -10 | 1.341 | 1006 | 0.02288 | 1.696×10^{-5} | 1.680×10^{-5} | 1.252×10^{-5} | 0.7387 |
| 0 | 1.292 | 1006 | 0.02364 | 1.818×10^{-5} | 1.729×10^{-5} | 1.338×10^{-5} | 0.7362 |
| 5 | 1.269 | 1006 | 0.02401 | 1.880×10^{-5} | 1.754×10^{-5} | 1.382×10^{-5} | 0.7350 |
| 10 | 1.246 | 1006 | 0.02439 | 1.944×10^{-5} | 1.778×10^{-5} | 1.426×10^{-5} | 0.7336 |
| 15 | 1.225 | 1007 | 0.02476 | 2.009×10^{-5} | 1.802×10^{-5} | 1.470×10^{-5} | 0.7323 |
| 20 | 1.204 | 1007 | 0.02514 | 2.074×10^{-5} | 1.825×10^{-5} | 1.516×10^{-5} | 0.7309 |
| 25 | 1.184 | 1007 | 0.02551 | 2.141×10^{-5} | 1.849×10^{-5} | 1.562×10^{-5} | 0.7296 |
| 30 | 1.164 | 1007 | 0.02588 | 2.208×10^{-5} | 1.872×10^{-5} | 1.608×10^{-5} | 0.7282 |
| 35 | 1.145 | 1007 | 0.02625 | 2.277×10^{-5} | 1.895×10^{-5} | 1.655×10^{-5} | 0.7268 |
| 40 | 1.127 | 1007 | 0.02662 | 2.346×10^{-5} | 1.918×10^{-5} | 1.702×10^{-5} | 0.7255 |
| 45 | 1.109 | 1007 | 0.02699 | 2.416×10^{-5} | 1.941×10^{-5} | 1.750×10^{-5} | 0.7241 |
| 50 | 1.092 | 1007 | 0.02735 | 2.487×10^{-5} | 1.963×10^{-5} | 1.798×10^{-5} | 0.7228 |
| 60 | 1.059 | 1007 | 0.02808 | 2.632×10^{-5} | 2.008×10^{-5} | 1.896×10^{-5} | 0.7202 |
| 70 | 1.028 | 1007 | 0.02881 | 2.780×10^{-5} | 2.052×10^{-5} | 1.995×10^{-5} | 0.7177 |
| 80 | 0.9994 | 1008 | 0.02953 | 2.931×10^{-5} | 2.096×10^{-5} | 2.097×10^{-5} | 0.7154 |
| 90 | 0.9718 | 1008 | 0.03024 | 3.086×10^{-5} | 2.139×10^{-5} | 2.201×10^{-5} | 0.7132 |
| 100 | 0.9458 | 1009 | 0.03095 | 3.243×10^{-5} | 2.181×10^{-5} | 2.306×10^{-5} | 0.7111 |
| 120 | 0.8977 | 1011 | 0.03235 | 3.565×10^{-5} | 2.264×10^{-5} | 2.522×10^{-5} | 0.7073 |
| 140 | 0.8542 | 1013 | 0.03374 | 3.898×10^{-5} | 2.345×10^{-5} | 2.745×10^{-5} | 0.7041 |
| 160 | 0.8148 | 1016 | 0.03511 | 4.241×10^{-5} | 2.420×10^{-5} | 2.975×10^{-5} | 0.7014 |
| 180 | 0.7788 | 1019 | 0.03646 | 4.593×10^{-5} | 2.504×10^{-5} | 3.212×10^{-5} | 0.6992 |
| 200 | 0.7459 | 1023 | 0.03779 | 4.954×10^{-5} | 2.577×10^{-5} | 3.455×10^{-5} | 0.6974 |
| 250 | 0.6746 | 1033 | 0.04104 | 5.890×10^{-5} | 2.760×10^{-5} | 4.091×10^{-5} | 0.6946 |
| 300 | 0.6158 | 1044 | 0.04418 | 6.871×10^{-5} | 2.934×10^{-5} | 4.765×10^{-5} | 0.6935 |
| 350 | 0.5664 | 1056 | 0.04721 | 7.892×10^{-5} | 3.101×10^{-5} | 5.475×10^{-5} | 0.6937 |
| 400 | 0.5243 | 1069 | 0.05015 | 8.951×10^{-5} | 3.261×10^{-5} | 6.219×10^{-5} | 0.6948 |
| 450 | 0.4880 | 1081 | 0.05298 | 1.004×10^{-4} | 3.415×10^{-5} | 6.997×10^{-5} | 0.6965 |
| 500 | 0.4565 | 1093 | 0.05572 | 1.117×10^{-4} | 3.563×10^{-5} | 7.806×10^{-5} | 0.6986 |
| 600 | 0.4042 | 1115 | 0.06093 | 1.352×10^{-4} | 3.846×10^{-5} | 9.515×10^{-5} | 0.7037 |
| 700 | 0.3627 | 1135 | 0.06581 | 1.598×10^{-4} | 4.111×10^{-5} | 1.133×10^{-4} | 0.7092 |
| 800 | 0.3289 | 1153 | 0.07037 | 1.855×10^{-4} | 4.362×10^{-5} | 1.326×10^{-4} | 0.7149 |
| 900 | 0.3008 | 1169 | 0.07465 | 2.122×10^{-4} | 4.600×10^{-5} | 1.529×10^{-4} | 0.7206 |
| 1000 | 0.2772 | 1184 | 0.07868 | 2.398×10^{-4} | 4.826×10^{-5} | 1.741×10^{-4} | 0.7260 |
| 1500 | 0.1990 | 1234 | 0.09599 | 3.908×10^{-4} | 5.817×10^{-5} | 2.922×10^{-4} | 0.7478 |
| 2000 | 0.1553 | 1264 | 0.11113 | 5.664×10^{-4} | 6.630×10^{-5} | 4.270×10^{-4} | 0.7539 |

Nota: Para gases ideales, c_p , k , μ y Pr son independientes de la presión. Las propiedades ρ , ν y α a una presión P distinta a 1 atm se determinan cuando se multiplican los valores de ρ a la temperatura dada por P (en atm) y cuando se dividen ν y α entre P (en atm).

Fuente: Datos generados a partir del Software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Keenan, Chao, Keyes, Gas Tables, Wiley, 198; and Thermophysical Properties of Matter, Vol. 3: Thermal Conductivity, Y. S. Touloukian, P. E. Liley, S. C. Saxena, Vol. 11: Viscosity, Y. S. Touloukian, S. C. Saxena, y P. Hestermans, IFI/Plenum, NY, 1970, ISBN 0-306067020-8.

5. Referencias y Bibliografía

- Asignatura de Física, Carrera de Arquitectura. (2015 de junio de 14). Recuperado el 25 de marzo de 2019, de sitio web de Universidad Politécnica de Catalunya: <https://www.docsity.com/es/diagrama-moody/3973145/>
- Cengel, Y. A., & Cimbala, J. M. (2006). *Mecánica de los Fluidos* (1º ed.). Mexico: Mc Graw Hill.
- Dominguez, F. J. (1999). *Hidraulica* (6º ed.). Universitaria.
- Franzini, J. B., & Finnemore, J. E. (1999). *Mecánica de los fluidos con aplicaciones en Ingeniería* (9 ed.). Madrid, España: Mc Graw Hill.
- Rouse, H. (1960). *Mecánica Elemental de Fluidos*. Madrid, España. Editorial Dossat SA.
- Saldarriaga, J. (2007). *Hidráulica de Tuberías*. Colombia. Alfaomega.
- Shames, I. H. (1995). *Mecánica de los Fluidos* (3º ed.). Colombia: McGraw-Hill.
- Sotelo Avila, G. (1997). *Hidráulica General* (Vol. 1). D.F, México: LIMUSA S.A.
- Streeter, V. & Wylie, B. (1986). *Mecánica de los Fluidos*. México. Mc Graw Hill
- Valiente Barderas, A. (2002). *Problemas de Flujo de Fluidos* (2º ed.). D.F., Mexico: LIMUSA. Noriega Editores.