


CAPÍTULO 2

EQUILIBRIO DEL CUERPO RÍGIDO LIBRE

La expresión “equilibrio del cuerpo rígido libre” significa estudiar y establecer las condiciones de reposo del mismo bajo la acción de un conjunto de fuerzas que actúan en puntos diversos del cuerpo.

El método a aplicar será el empleado para la partícula: Reducir el sistema de fuerzas a su mínima expresión e igualarlo a cero. De ello surgirán las condiciones de equilibrio del cuerpo. Pero ahora las fuerzas están aplicadas en diversos puntos del cuerpo y el efecto de las mismas consistirá no sólo en trasladarlo, o tender a trasladarlo, como en el caso de la partícula sino que se producirán además rotaciones o tendencia a rotar si el cuerpo estuviese fijo.

Para estudiar este nuevo efecto es necesario introducir los conceptos de Momento de una Fuerza respecto a un punto y a un eje. Previo a ello vamos a efectuar repaso de puntos del álgebra vectorial que nos requerirá nuestro estudio.

2. 1.- PRODUCTO DE VECTORES.-

Se define como Producto Vectorial de dos vectores coplanares \vec{V}_1 y \vec{V}_2 (fig. 2.1) a otro vector:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

que presenta las siguientes características:

- 1) Su módulo queda dado por la expresión

$$V = V_1 \cdot V_2 \cdot \text{sen } \theta$$

siendo θ el ángulo entre los vectores factores de valor igual o menor de 180° .

Obsérvese que V expresa el área del paralelogramo cuyos lados son \vec{V}_1 y \vec{V}_2

- 2) Su dirección es perpendicular al plano definido por \vec{V}_1 y \vec{V}_2

- 3) El sentido de V es tal que el observador ubicado en su extremo verá la rotación θ , que lleva el vector \vec{V}_1 (1^{er} factor) a coincidir con la dirección de \vec{V}_2 (2^{do} factor) en sentido contrario al de las agujas del reloj.

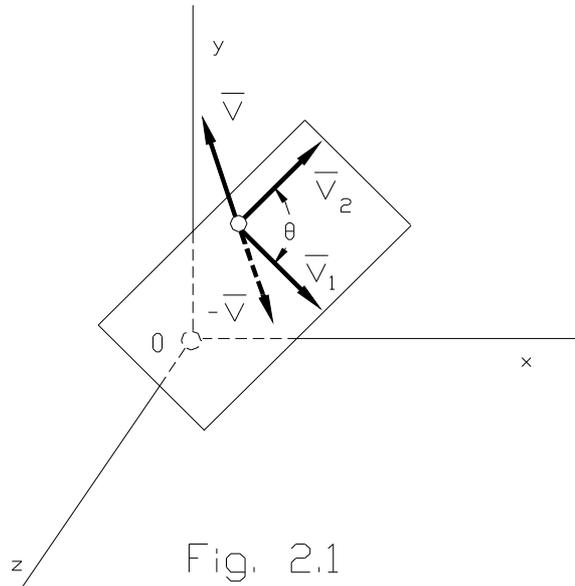


Fig. 2.1

La regla enunciada para el sentido del vector producto, coincide con la llamada regla de la mano derecha que consiste en colocar la palma de la mano derecha, arqueada, demarcando, desde la palma hacia el extremo de los dedos, la rotación θ antes descrita: el pulgar extendido nos da el sentido de \vec{V} .

Los tres vectores \vec{V}_1 , \vec{V}_2 y \vec{V} forman una terna de rosca derecha como la formada por los ejes x , y , z utilizada para el cálculo de las componentes rectangulares de las fuerzas.- El producto vectorial goza de la propiedad distributiva pero no se pueden conmutar los factores ya que al hacerlo se cambia el sentido del vector producto.



A menudo conviene expresar el producto vectorial en función de componentes rectangulares. Para ello expresemos ambos vectores en función de esas componentes.

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} \\ \bar{V}_2 &= X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k}\end{aligned}$$

Recordando:

$$\begin{aligned}\bar{i} \wedge \bar{i} &= 0 & \bar{i} \wedge \bar{j} &= \bar{k} & \bar{j} \wedge \bar{i} &= -\bar{k} \\ \bar{j} \wedge \bar{j} &= 0 & \bar{j} \wedge \bar{k} &= \bar{i} & \bar{k} \wedge \bar{j} &= -\bar{i} \\ \bar{k} \wedge \bar{k} &= 0 & \bar{k} \wedge \bar{i} &= \bar{j} & \bar{i} \wedge \bar{k} &= -\bar{j}\end{aligned}$$

y multiplicando:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2 = X_1 Y_2 \bar{k} - X_1 Z_2 \bar{j} - Y_1 X_2 \bar{k} + Y_1 Z_2 \bar{i} + Z_1 X_2 \bar{j} - Z_1 Y_2 \bar{i} \\ \bar{V} &= (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \bar{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) \bar{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \bar{k}\end{aligned}$$

y como:

$$\bar{V} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$$

Resulta:

$$\begin{aligned}X &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Y &= Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ Z &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2\end{aligned}$$

Expresiones que nos dan las tres componentes rectangulares del vector producto en función de las componentes x, y, z de los factores.

Si se tiene dificultad en recordar estas expresiones, obsérvese que la expresión obtenida,

$$\bar{V} = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \bar{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) \bar{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \bar{k}$$

no es otra cosa que el desarrollo del determinante

$$V = \bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Que desarrollado por sus menores complementarios, queda en la siguiente forma:

$$V = \bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2 = \bar{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \bar{j} \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

Finalmente digamos que si en lugar de establecer el sentido del vector aplicando la regla de la “mano derecha” se utilizara para ello la regla de la “mano izquierda”, los valores que se obtendrían para las componentes rectangulares del vector producto serían los indicados más arriba multiplicados por -1 : por lo tanto sólo debe “cambiárseles el signo” a los términos de las expresiones obtenidas.- Pasemos a ver otros modos de multiplicar vectores.-

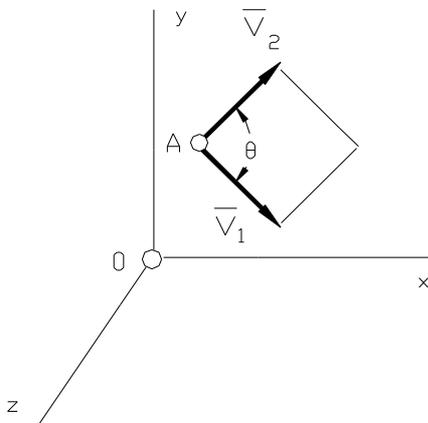


Fig. 2.2

El **producto escalar de dos vectores** (fig. 2.2) está dado por la expresión:

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = V_1 V_2 \cos \theta$$

Goza de las propiedades conmutativa y distributiva.

Se puede expresar en función de las componentes rectangulares de los vectores factores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} \\ \bar{V}_2 &= X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k}\end{aligned}$$

$$V_1 \cdot V_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$



Para llegar a este resultado se recuerda que:

$$\begin{array}{ll} \bar{i} \times \bar{i} = 1 & \bar{i} \times \bar{j} = 0 \\ \bar{j} \times \bar{j} = 1 & \bar{j} \times \bar{k} = 0 \\ \bar{k} \times \bar{k} = 1 & \bar{k} \times \bar{i} = 0 \end{array}$$

El ángulo de dos vectores se obtiene así :

$$\cos \theta = \frac{\bar{V}_1 \times \bar{V}_2}{V_1 V_2} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

Sea un vector \bar{V} aplicado en 0 (fig. 2.3) , se define como **proyección del vector \bar{V} sobre el eje Oe pasante por 0** al escalar:

$$V_e = V \cos \theta_e = [OA]$$

Que es igual a la longitud del segmento OA. Será positivo si coincide con el sentido del eje (lo que sucede para $\theta_e < 90^\circ$) y negativo cuando θ_e esté comprendido entre 90° y 180° . Para θ_e igual a 90° la proyección es nula.

Si llamamos \bar{e} al versor del eje se tiene:

$$\bar{V} \times \bar{e} = V \cos \theta_e = V_e = [OA]$$

Es decir que también podemos definir como proyección de un vector sobre un eje al producto escalar del vector por el versor del eje.

Expresada la proyección de un vector en función de las componentes rectangulares del vector y del versor tenemos:

$$V_e = \bar{V} \times \bar{e} = X e_x + Y e_y + Z e_z = X \cos \theta_{ex} + Y \cos \theta_{ey} + Z \cos \theta_{ez}$$

Se define finalmente como **triple producto escalar** o **triple producto mixto** de tres vectores a la expresión:

$$V_1 \wedge \bar{V}_2 \times \bar{V}_3$$

Tiene sentido efectuar primero el producto vectorial, y al vector producto que se obtiene se lo multiplica escalarmente por el tercer factor. El resultado del triple producto mixto es un escalar.

El orden de los factores en el triple producto mixto puede permutarse cíclicamente:

$$\bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2 \times \bar{V}_3 = \bar{V}_3 \wedge \bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \bar{V}_2 \wedge \bar{V}_3 \times \bar{V}_1$$

Expresando los tres vectores mediante sus componentes rectangulares se puede verificar fácilmente que el triple producto escalar de ellos resulta igual al desarrollo del siguiente determinante:

$$\bar{V}_1 \wedge \bar{V}_2 \times \bar{V}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Como caso particular que nos interesa recordemos que si dos factores son paralelos el triple producto escalar es nulo. Recordamos además que si la terna formada por los tres vectores es dextrógira su triple producto escalar es positivo y negativo cuando es levógira.

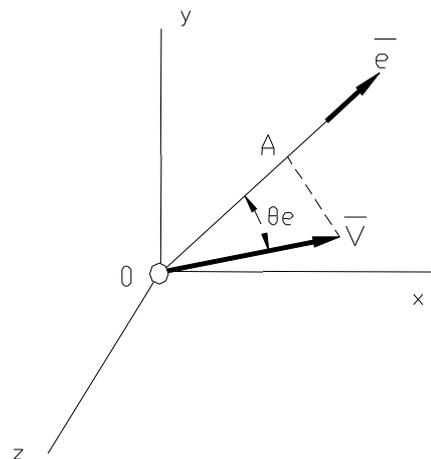


Fig. 2.3



2. 2. - MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO.-

Consideremos un cuerpo rígido en uno de cuyos puntos A está aplicada una fuerza \vec{F} . (fig. 2.4)

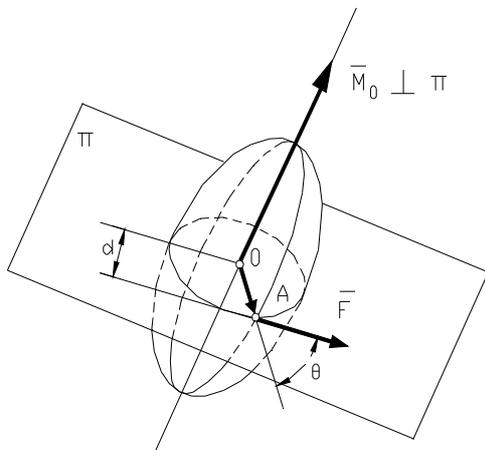


Fig. 2.4

La posición de A la damos con respecto a un punto fijo O mediante el vector posición \vec{OA} . El plano indicado en el gráfico es el determinado por \vec{OA} y \vec{F} .

Se define como **Momento de la Fuerza** \vec{M}_O respecto al punto O al producto vectorial de \vec{OA} por \vec{F} :

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Es un vector perpendicular al plano de \vec{OA} y \vec{F} aplicado en O.

Su sentido corresponde a la rotación θ a aplicarle a la recta de acción de \vec{OA} para llevarla a superponer con la de \vec{F} ; este sentido coincide con el de la rotación que la fuerza tiende a imprimirle al cuerpo alrededor de un eje pasante por O y perpendicular a π .

Si el observador se ubica en el extremo de \vec{M}_O debe ver esta rotación como antihoraria; se puede asimismo establecer el sentido de \vec{M}_O aplicando la regla de la “mano derecha”.

El módulo o intensidad de \vec{M}_O vale:

$$M_O = OA \cdot F \cdot \text{sen } \theta = Fd$$

Donde:

$$d = OA \cdot \text{sen } \theta$$

es la distancia perpendicular del centro de momento O a la recta de acción de la fuerza \vec{F} : se designa **Brazo de la Fuerza**. La dimensión del momento es por lo tanto una fuerza por una longitud y como unidad se toman: kgm, kgcm, tm, tcm ó Nm.

Para que M_O sea nulo debe ser:

$$F = 0$$

o bien:

$$d = 0$$

Esto último implica que la recta de acción de la fuerza pasa por el punto O.

Físicamente el vector \vec{M}_O caracteriza la rotación que la fuerza imprime al cuerpo, determinando: al eje de rotación por la recta de acción del vector, perpendicular al plano determinado por la fuerza y el punto centro de momento; el sentido de rotación por el sentido del vector; y la intensidad de la aceleración angular del movimiento de rotación es proporcional al módulo del vector.

Si expresamos la \vec{F} (X, Y, Z) y el vector posición \vec{OA} (x, y, z) por sus ecuaciones vectoriales y tomando el punto O (centro de momentos) como origen de coordenadas tendremos: (fig. 2.5)

$$\vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

$$\vec{OA} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

El momento respecto a O valdrá:



$$\overline{M}_0 = \overline{OA} \wedge \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \bar{k}$$

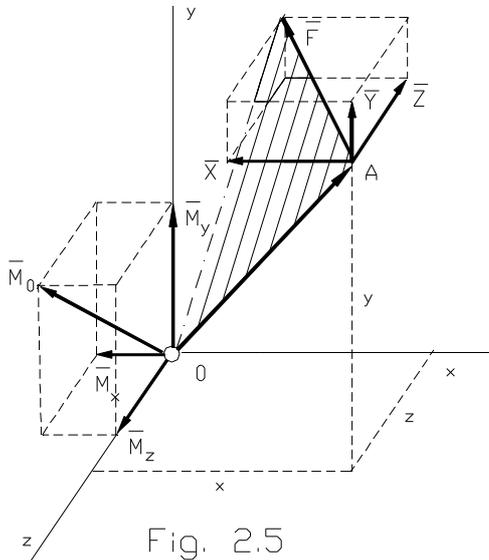


Fig. 2.5

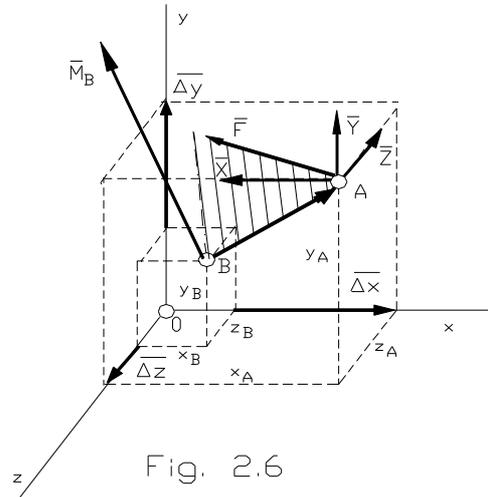


Fig. 2.6

Llamando M_X ; M_Y ; M_Z las componentes rectangulares de \overline{M}_0 será:

$$\overline{M}_0 = M_X \bar{i} + M_Y \bar{j} + M_Z \bar{k}$$

y desarrollando los menores complementarios resulta

$\begin{aligned} M_X &= yZ - zY \\ M_Y &= zX - xZ \\ M_Z &= xY - yX \end{aligned}$
--

expresiones que nos dan el valor de las componentes x , y , z del momento de una fuerza \overline{F} respecto a un punto O en función de las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza y de las componentes rectangulares de ésta.

Si el centro de momentos B , no coincide con el origen de coordenadas (fig. 2.6), será:

$$\overline{M}_B = \overline{BA} \wedge \overline{F}$$

con

$$\overline{BA} = (x_A - x_B) \bar{i} + (y_A - y_B) \bar{j} + (z_A - z_B) \bar{k}$$

en donde las primeras coordenadas corresponden al extremo del vector posición (punto de aplicación de la fuerza \overline{F} , y las segundas al punto respecto al cual tomamos momento. Estas componentes serán las que debemos introducir en el determinante representativo del producto vectorial.-



2.3.- MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE.-

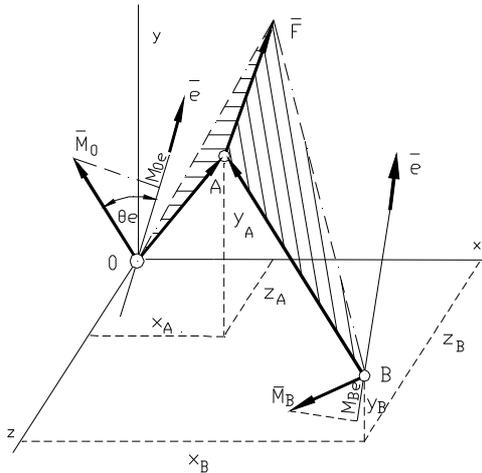


Fig. 2.7

Sea (fig. 2.7), $\vec{F}[X,Y,Z]$ una fuerza, $A(x,y,z)$ un punto de su recta de acción y, Oe un eje pasante por el punto fijo O cuyo versor es \vec{e} . Se define como **momento de la fuerza respecto al eje Oe** a la proyección, sobre dicho eje, del vector momento de la fuerza respecto a un punto del eje:

$$M_{0e} = M_0 \cos \theta_e = \vec{M}_0 \cdot \vec{e}$$

La última igualdad indica que al momento de la fuerza respecto al eje también podemos definirlo como el producto escalar del momento de la fuerza respecto a un punto del eje, \vec{M}_0 , por el versor del eje \vec{e} .

En función de las coordenadas rectangulares se tiene:

$$M_{0e} = \vec{M}_0 \cdot \vec{e} = \vec{OA} \wedge \vec{F} \cdot \vec{e} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix}$$

Es evidente que se trata de una magnitud escalar cuya intensidad es de igual dimensión que el momento respecto a un punto, (Fuerza x longitud). Si el eje, Be , tuviese igual versor que Oe pero no pasase por O , o sea que fuesen paralelos será:

$$M_{Be} = \vec{M}_B \cdot \vec{e} = \vec{BA} \wedge \vec{F} \cdot \vec{e}$$

Donde las componentes del vector posición, \vec{BA} , quedan dadas por la diferencia entre las coordenadas del extremo, A , menos las del origen, B .

Generalmente para designar al momento de una fuerza respecto a un eje utilizaremos como subíndice la letra correspondiente a la dirección del eje, M_e, M_x, M_y, \dots , dejando a un lado la indicación del punto del eje. Recurriremos a esto sólo cuando haya posibilidad de confusión, o que por cualquier circunstancia se requiera establecer los centros de momento, M_{0e}, M_{Be} , por no pertenecer O y B a un mismo eje, sino a ejes paralelos.

La expresión que hemos dado del momento de una fuerza respecto a un eje es de carácter matemático y no nos da el significado físico de esa magnitud. Para observarlo consideremos (fig. 2.8) un plano π pasante por A , punto de aplicación de \vec{F} , y perpendicular al eje Oe ; π corta al eje en el punto Q .

Descompongamos la fuerza \vec{F} en dos componentes tales que una de ellas, \vec{F}_1 , sea paralela al eje Oe y la otra, \vec{F}_2 , esté contenida en el plano π .

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Por otra parte:

$$\vec{OA} = \vec{OQ} + \vec{QA}$$

El momento de \vec{F} respecto al eje vale:

$$M_e = \vec{M}_0 \cdot \vec{e} = \vec{OA} \wedge \vec{F} \cdot \vec{e} = (\vec{OQ} + \vec{QA}) \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{e}$$

Operando:

$$M_e = \vec{OQ} \wedge \vec{F}_1 \cdot \vec{e} + \vec{OQ} \wedge \vec{F}_2 \cdot \vec{e} + \vec{QA} \wedge \vec{F}_1 \cdot \vec{e} + \vec{QA} \wedge \vec{F}_2 \cdot \vec{e}$$

Recordando el párrafo final de 2.1, el triple producto escalar es nulo cuando dos cualesquiera de los factores son vectores paralelos, por lo tanto los tres primeros términos del segundo miembro de la igualdad anterior son nulos. Queda entonces:

$$M_e = \overline{QA} \wedge \overline{F_2} \times \overline{e} = |\overline{QA}| F_2 \sin \theta_2 \cos \theta_e = F_2 d$$

En donde "d" es la distancia ortogonal de Q a $\overline{F_2}$ y $\cos \theta_e = 1$ por ser $[\overline{QA} \wedge \overline{F_2}]$ paralelo a \overline{e} .

Una primera conclusión a que nos lleva esta expresión es que **sólo produce momento respecto al eje Oe la componente $\overline{F_2}$ contenida en el plano π perpendicular al eje, la componente $\overline{F_1}$ paralela al eje no produce momento respecto al mismo.** $\overline{F_2}$ hace rotar el cuerpo alrededor del eje fijo, en cambio $\overline{F_1}$ tiende a trasladarlo a lo largo del mismo. Esto nos permite interpretar el efecto físico del momento de una fuerza respecto a un eje ya que, por la ley fundamental de la mecánica aplicada a los movimientos de rotación, el mismo es proporcional a la intensidad de la aceleración angular de la rotación que la fuerza imprime al cuerpo alrededor del eje.- En caso de existir dispositivos que impidan la rotación, el momento estático respecto del eje determina la intensidad de las fuerzas reactivas que deben oponer dichos dispositivos para impedir la rotación.

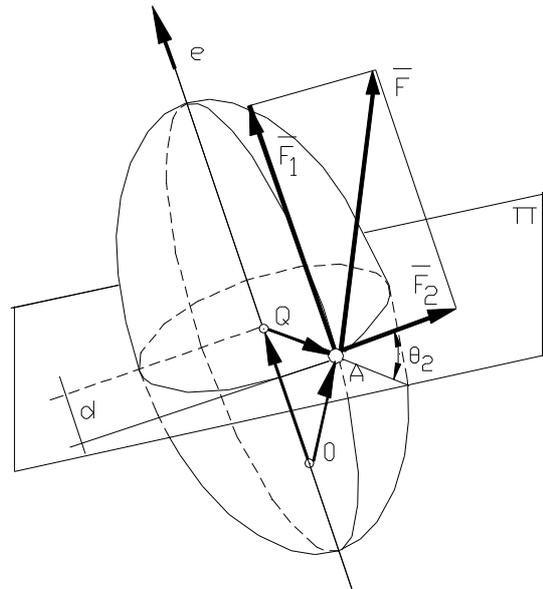


Fig. 2.8

De la expresión obtenida:

$$M_e = F_2 d$$

y como segunda conclusión podemos establecer que el **momento de una fuerza respecto a un eje** es el producto de la componente F_2 contenida en un plano perpendicular al eje (o proyección de \overline{F} sobre dicho plano) por la distancia "d" de esa componente al eje, es decir al punto Q intersección del plano π y el eje.

El momento respecto a un eje será nulo cuando $F_2 = 0$ ó cuando $d = 0$; en el primer caso la fuerza \overline{F} debe ser nula o paralela al eje y en el segundo debe cortarlo. Concluimos que para que sea nulo el momento de una fuerza respecto a un eje, éste y aquélla deben ser coplanares.

Finalmente de:

$$M_e = \overline{QA} \wedge \overline{F_2} \times \overline{e} = F_2 d$$

establecemos que el momento respecto a un eje será positivo si los vectores $[\overline{QA} \wedge \overline{F_2}]$ y \overline{e} tienen igual sentido y negativo en caso contrario. Aplicando la regla de la "mano derecha" los vectores mencionados resultan de igual sentido si el observador ubicado en la rama positiva del eje Oe ve que la fuerza tiende a imprimir una rotación antihoraria alrededor del eje, con lo que el momento respecto a este es positivo. Con la regla de "mano izquierda" serán en cambio positivos los momentos que originan fuerzas que tienden a hacer girar al cuerpo en sentido horario, supuesto el observador en la rama positiva del eje.

Expresemos ahora **el momento de una fuerza respecto a los ejes coordenados x, y, z.**- Vimos que el momento de una fuerza \overline{F} respecto a un punto O origen de los ejes, figura 2.5, es:

$$\overline{M}_o = \overline{OA} \wedge \overline{F} = M_x \overline{i} + M_y \overline{j} + M_z \overline{k}$$

donde M_x, M_y, M_z son las componentes x, y, z del vector \overline{M}_o , cuyos valores se han obtenido en 2.2.

Para obtener el momento respecto a los ejes Ox, Oy, Oz debemos proyectar el vector \overline{M}_o sobre dichos ejes, para lo cual hay que multiplicarlo escalarmente por los versores $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ de cada uno de los ejes; si además recordamos las expresiones finales del apartado 2.2 tendremos:

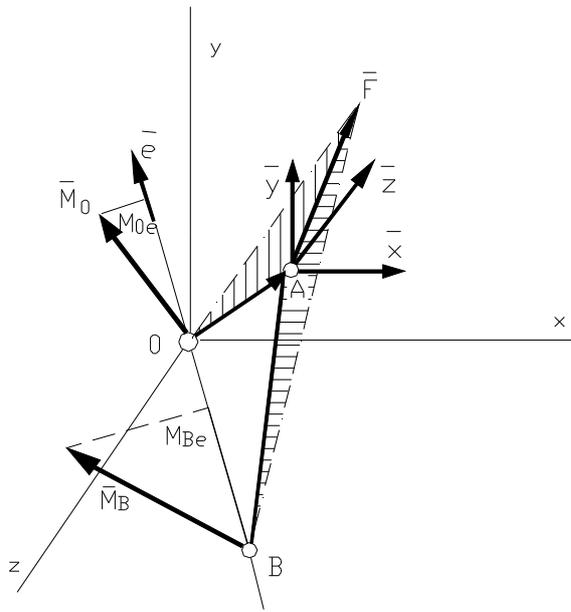


Fig. 2.9

$$M_{0x} = \bar{M}_0 \times \bar{i} = M_X = (yZ - zY)$$

$$M_{0y} = \bar{M}_0 \times \bar{j} = M_Y = (zX - xZ)$$

$$M_{0z} = \bar{M}_0 \times \bar{k} = M_Z = (xY - yX)$$

Se observa que *el momento de una fuerza F respecto a uno de los ejes de coordenadas Ox, Oy u Oz es, respectivamente igual a la componente x, y o z del M₀, momento de la fuerza respecto al punto O origen de los ejes.-*

Finalmente demostraremos (fig. 2.9), que si tomo momento respecto a dos puntos cualesquiera del eje y los proyecto sobre el eje obtengo valores iguales, lo que significa que *el momento de una fuerza respecto a un eje es independiente del punto del eje con respecto al cual se toma momento.-* Se sabe que:

$$M_{0e} = \bar{M}_0 \times \bar{e} = \overline{OA} \wedge \bar{F} \times \bar{e}$$

Por otra parte:

$$M_{Be} = \bar{M}_B \times \bar{e} = \overline{BA} \wedge \bar{F} \times \bar{e} = (\overline{BO} + \overline{OA}) \wedge \bar{F} \times \bar{e}$$

$$M_{Be} = \overline{BO} \wedge \bar{F} \times \bar{e} + \overline{OA} \wedge \bar{F} \times \bar{e} = 0 + M_{0e} = M_e$$

2.4.- PAR O CUPLA DE FUERZAS.-

2.4.1.- DEFINICIÓN Y REPRESENTACIÓN.-

Cuando dos fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo son de igual intensidad, rectas de acción paralelas y sentidos opuestos, constituyen un sistema especial de fuerzas llamado **Par** o **Cupla**. (fig. 2.10)

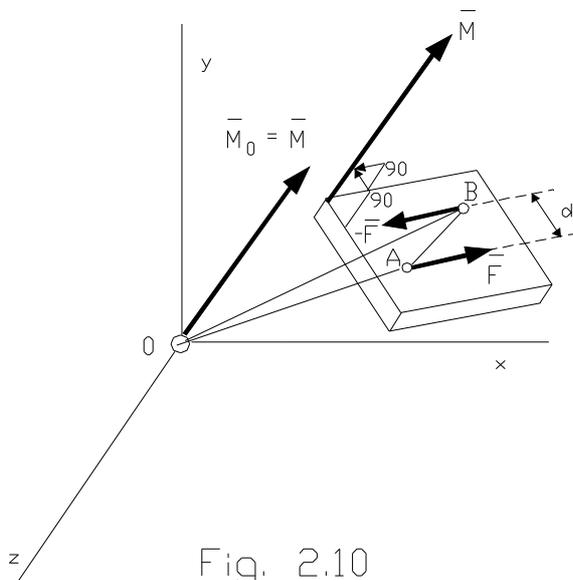


Fig. 2.10

La suma vectorial de las fuerzas del par es cero por lo tanto *la resultante de una cupla es nula.*

Esto constituye una de las características de este sistema de fuerzas; otra consiste en que *el momento del par con respecto a cualquier punto del espacio es constante.*

Efectivamente tomando momento respecto a 0:

$$\bar{M} = \overline{OA} \wedge \bar{F} + \overline{OB} \wedge (-\bar{F})$$

$$\bar{M} = (\overline{OA} - \overline{OB}) \wedge \bar{F}$$

$$\bar{M} = \overline{BA} \wedge \bar{F} = \overline{AB} \wedge (-\bar{F})$$



Esta expresión se designa **momento del par** y es un vector perpendicular al plano definido por las rectas de acción de las fuerzas del par, de sentido coincidente con el que define la rotación que tienden a imprimirle al cuerpo y de intensidad:

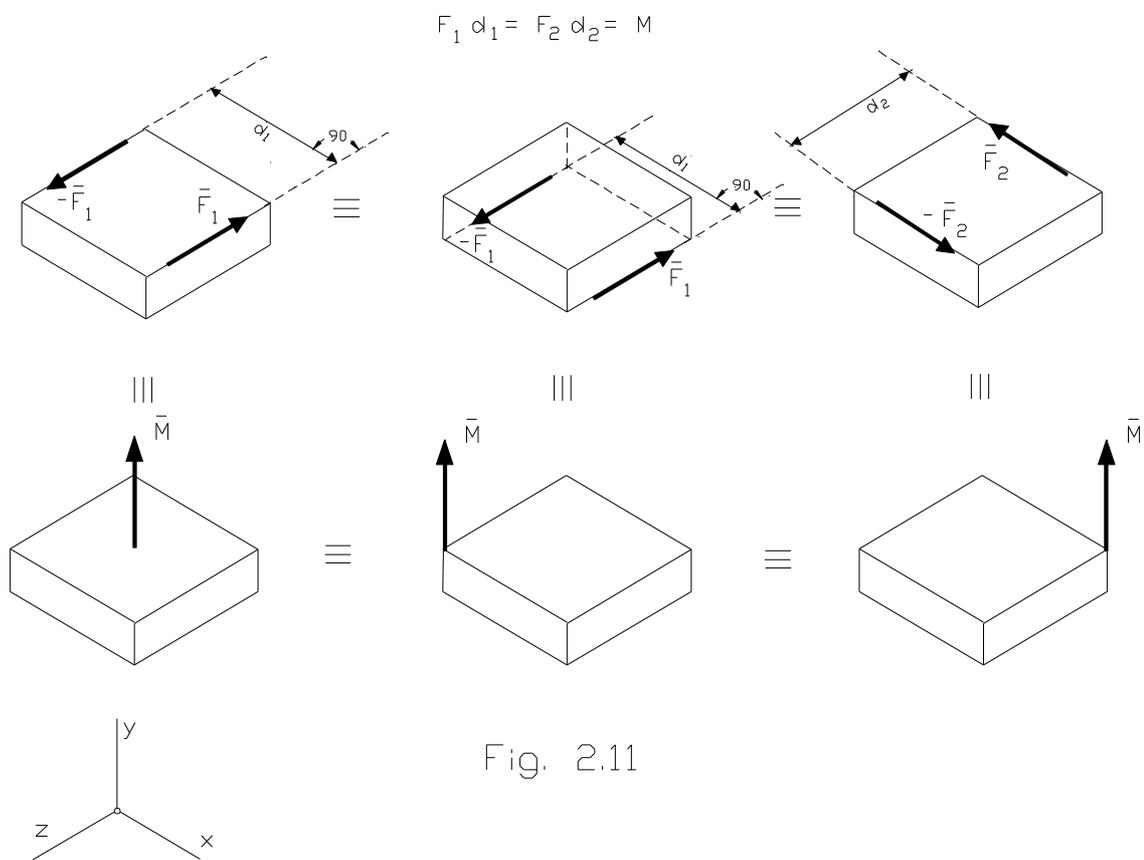
$$M = BA \cdot F \cdot \text{sen } \theta = Fd$$

donde “d” es la distancia ortogonal entre las rectas de acción de ambas fuerzas, designada “brazo del par”.

Como la expresión:

$$\vec{M} = \overline{BA} \wedge \vec{F}$$

no depende del punto que hayamos tomado como centro de momento es evidente que su valor será el mismo para cualquier punto del espacio. Además será también el mismo si varían simultáneamente la intensidad de las fuerzas y las distancias entre ellas, siempre y cuando su producto Fd se mantenga constante, y que el plano que las contiene se mantenga paralelo a sí mismo.



El par o cupla es entonces un sistema de dos fuerzas caracterizado por tener $\vec{R} = 0$ y $\vec{M} = \text{cte.} \neq 0$; su efecto consistirá en imprimirle al cuerpo sobre el que está actuando una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano del par, de sentido dado por el sentido del vector \vec{M} y de aceleración angular proporcional a su módulo. Si el cuerpo no estuviese libre, la acción del par consistirá en tender a imprimirle la rotación descrita originando reacciones en los enlaces o vínculos que lo ligan a otro u otros cuerpos.

Se deduce de lo expuesto que el vector momento de un par constituye un **Vector Libre**, que lo representa, y que produce igual efecto sea cual fuese el punto del cuerpo en que se aplique. Al par de fuerzas podemos desplazarlo paralelamente a sí mismo en su plano y en el espacio, variando incluso la intensidad, la dirección y la distancia entre las fuerzas siempre que su producto se mantenga constante. (fig. 2.11)



2.4.2.- COMPOSICIÓN DE PARES.-

Si se desea sumar dos o más pares que actúan sobre un cuerpo, (fig. 2.12) se los traslada a un mismo punto, A por ejemplo, y se los suma vectorialmente. El vector obtenido representa al par suma y da todas sus características.

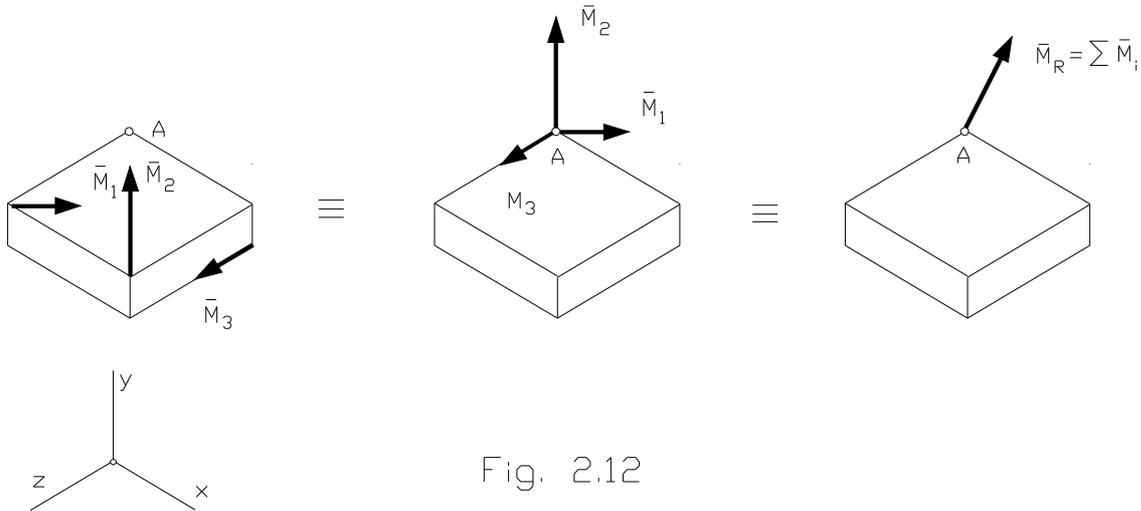


Fig. 2.12

2.4.3.- SISTEMA FUERZA-PAR.- COMPOSICIÓN DE UNA FUERZA Y UN PAR.-

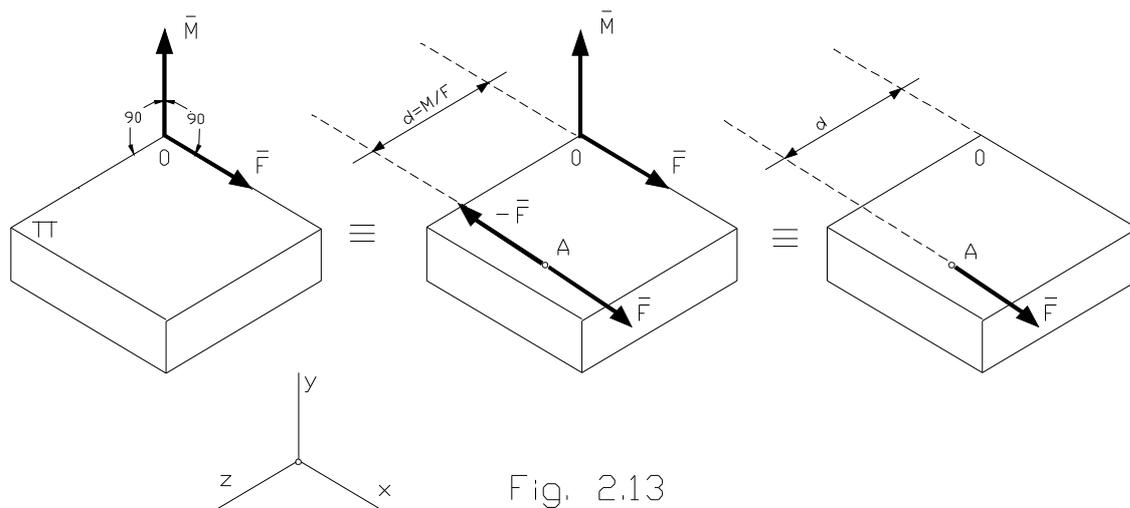


Fig. 2.13

Sea una fuerza \vec{F} aplicada en un punto O del cuerpo rígido; actúa además sobre el cuerpo un par \vec{M} que puede estar aplicado en cualquier punto del cuerpo, en particular en el mismo donde actúa la fuerza \vec{F} : al conjunto se lo designa **sistema fuerza par**, (fig. 2.13). En general \vec{M} y \vec{F} aplicados ambos en O forman un ángulo cualquiera. Pero vamos a considerar en particular, por ser de especial interés, el caso que los vectores sean normales entre sí. Consideremos además el plano π pasante por O, perpendicular a \vec{M} y que contendrá a \vec{F} . En el plano π tomamos un punto A situado a la distancia $d = M/F$ de la recta de acción de \vec{F} . En A se aplica un sistema nulo de dos fuerzas opuestas de igual intensidad y dirección que la fuerza dada. El par formado por la fuerza \vec{F} , aplicada en O, y la $-\vec{F}$, aplicada en A, constituyen un par opuesto al par M anulándose entre ellos, restando sólo la fuerza \vec{F} aplicada en A.

Se concluye que un sistema formado por **un par y una fuerza ortogonales entre sí, aplicados en un punto O, puede ser reducido a una única fuerza** de igual intensidad, dirección y sentido que la dada y actuante a una distancia $d = M/F$ del punto de aplicación dado. El punto A de aplicación de la fuerza única se ubica, respecto de O, del lado que tienda a imprimir igual sentido de rotación que el par.



Inversamente, cualquier fuerza que actúa sobre un punto A de un cuerpo rígido puede desplazarse a un punto arbitrario O, si se agrega un par de momento igual al momento de \vec{F} con respecto a O.

Finalmente se deja aclarado que si la fuerza \vec{F} y el par \vec{M} no fuesen ortogonales el sistema fuerza-par sólo puede reducirse a dos fuerzas no coplanares

2.5.- SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZAS NO CONCURRENTES.-

2.5.1. REDUCCIÓN DE SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZAS.-

Sea un sistema gaucho de fuerzas, \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 aplicadas en los puntos A_1 , A_2 , A_3 de un cuerpo rígido y sea O un determinado punto del mismo tomado como origen de coordenadas.- La secuencia de equivalencia de sistemas de fuerzas que se explica a continuación, se desarrolla en la figura 2.14.-

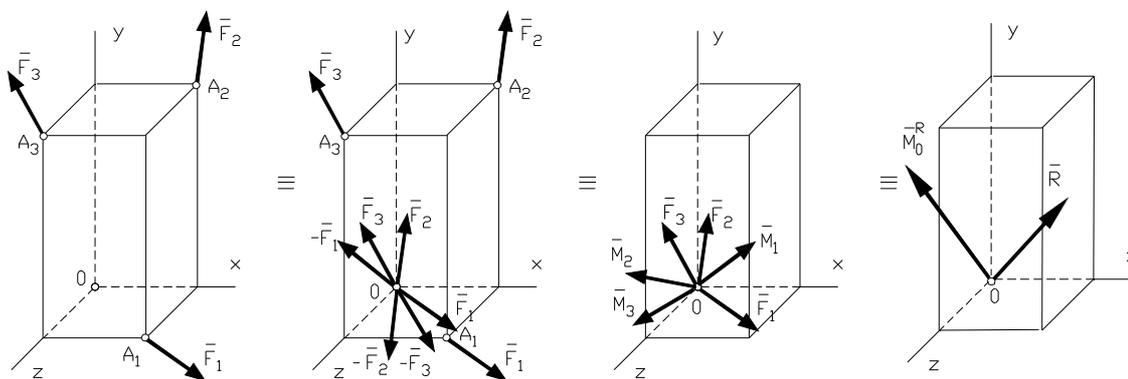


Fig. 2.14

Se aplican en O tres sistemas nulos: (\vec{F}_1 y $-\vec{F}_1$), (\vec{F}_2 y $-\vec{F}_2$), (\vec{F}_3 y $-\vec{F}_3$).- La fuerza \vec{F}_1 actuante en A_1 y la fuerza $-\vec{F}_1$ aplicada en O forman un par de momento:

$$\vec{M}_1 = \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1$$

que las reemplaza y cuyo vector representativo será perpendicular a la fuerza \vec{F}_1 aplicada en O.-

Resulta así el sistema fuerza par \vec{M}_1 , \vec{F}_1 aplicado en O. En forma similar se obtienen los sistemas de fuerza par \vec{M}_2 , \vec{F}_2 y \vec{M}_3 , \vec{F}_3 de elementos ortogonales y aplicados en O.-

Sumando las tres fuerzas \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 aplicadas en O :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum \vec{F}_i$$

que se designa **resultante de reducción** o también **fuerza-suma** del sistema.

Sumando los tres pares aplicados en O :

$$\vec{M}_O^R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \sum \vec{M}_i = \sum (\vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i)$$

que se designa **momento resultante** o **momento-suma** del sistema de fuerzas dado respecto a O.-

Se comprende fácilmente que \vec{R} y \vec{M}_O^R no son en general perpendiculares entre sí.-La reducción efectuada puede hacerse para cualquier sistema de fuerzas espaciales en su forma más general. **Es decir que un sistema cualquiera de fuerzas puede siempre ser reducido a un sistema par-fuerza aplicado en un punto del cuerpo rígido elegido a discreción.-**



La resultante de reducción y el momento resultante pueden ser expresados analíticamente en función de sus componentes rectangulares:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}} &= X \bar{\mathbf{i}} + Y \bar{\mathbf{j}} + Z \bar{\mathbf{k}} \\ \bar{\mathbf{M}}_O^R &= M_{Ox}^R \bar{\mathbf{i}} + M_{Oy}^R \bar{\mathbf{j}} + M_{Oz}^R \bar{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

En donde M_{Ox}^R se lee: **componente x del momento resultante respecto al punto O**; en forma similar se leen las otras componentes.- Si las fuerzas del sistema se expresan también en componentes rectangulares se tendrán seis ecuaciones escalares: tres ecuaciones de componentes rectangulares de fuerzas

$$\bar{\mathbf{R}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i \quad \equiv \quad \begin{cases} X = \sum X_i = \sum F_i \cos \mathbf{q}_{ix} \\ Y = \sum Y_i = \sum F_i \cos \mathbf{q}_{iy} \\ Z = \sum Z_i = \sum F_i \cos \mathbf{q}_{iz} \end{cases}$$

y tres ecuaciones de momento donde, por sencillez de nomenclatura, suprimimos el subíndice genérico i, indicativo de la fuerza y de su punto de aplicación, ya que es evidente que las sumas se extienden a todas las fuerzas que componen el sistema.- En ellas, $\sum M_x$ se lee **suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto al eje x**; de igual modo se lee para los otros ejes.-

$$\bar{\mathbf{M}}_O^R = \sum \bar{\mathbf{M}}_0 = \sum (\overline{\mathbf{OA}} \wedge \bar{\mathbf{F}}) \quad \equiv \quad \begin{cases} M_{Ox}^R = \sum M_x = \sum (yZ - zY) \\ M_{Oy}^R = \sum M_y = \sum (zX - xZ) \\ M_{Oz}^R = \sum M_z = \sum (xY - yX) \end{cases}$$

Las componentes X, Y, Z representan, respectivamente, las sumas de las componentes X_i, Y_i, Z_i de las fuerzas dadas y miden la tendencia del sistema de fuerzas a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en las direcciones x, y ó z respectivamente.

Similarmente, las componentes $M_{Ox}^R, M_{Oy}^R, M_{Oz}^R$ representan las sumas de los momentos de todas las fuerzas dadas con respecto a los ejes x, y, z respectivamente, y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x, y ó z.

Si se desea encontrar la intensidad y dirección de $\bar{\mathbf{R}}$ y $\bar{\mathbf{M}}_O^R$, pueden calcularse utilizando sus respectivas componentes x, y, z mediante las fórmulas vistas con anterioridad:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \bar{\mathbf{M}}_O^R = \sqrt{M_{Ox}^R{}^2 + M_{Oy}^R{}^2 + M_{Oz}^R{}^2}$$

ídem para los cosenos directores de ambos vectores.

Siguiendo igual procedimiento que el explicado para el punto O, **reduzcamos, (fig. 2.15), el sistema de fuerzas respecto a otro punto del cuerpo, Q por ejemplo.** La resultante de reducción será:

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 + \bar{\mathbf{F}}_3 = \sum \bar{\mathbf{F}}_i$$

que es un vector igual al obtenido para el punto O; sólo se distingue por el punto de aplicación. Se llegaría al mismo resultado si se tomara cualquier otro punto como centro de reducción, por ello a la resultante de reducción se la llama **“primer invariante o invariante vectorial del sistema de fuerzas”**.



El momento resultante será:

$$\bar{M}_Q^R = \Sigma \bar{M}_Q = \Sigma (\bar{Q}A \wedge \bar{F})$$

que es distinto al momento resultante respecto a O ya que cambian los vectores posición de todas las fuerzas.

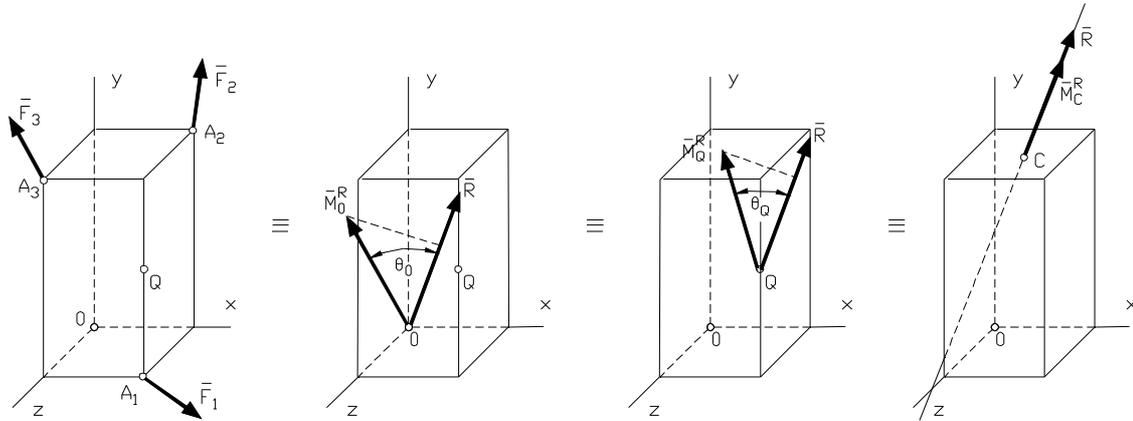


Fig. 2.15

Operando y recordando que las sumatorias se extienden a todas las fuerzas del sistema, será:

$$\bar{M}_Q^R = \Sigma (\bar{Q}A \wedge \bar{F}) = \Sigma [(\bar{Q}O + \bar{O}A) \wedge \bar{F}] = \Sigma (\bar{Q}O \wedge \bar{F}) + \Sigma (\bar{O}A \wedge \bar{F})$$

Observando que $\bar{Q}O$ es factor común; y como $\Sigma \bar{F} = \bar{R}$ y $\Sigma (\bar{O}A \wedge \bar{F}) = \bar{M}_O^R$ tenemos:

$$\bar{M}_Q^R = \bar{Q}O \wedge \bar{R} + \bar{M}_O^R$$

Esta expresión permite obtener importantes conclusiones, y nos dice que *el momento resultante de un sistema gaussiano de fuerzas respecto a un punto Q cualquiera del cuerpo es igual a la suma del momento resultante respecto a otro punto O del mismo más el momento de la resultante de reducción R, aplicada en O, respecto a Q.*

2.5.2.- INVARIANTE ESCALAR.-

Efectuamos el producto escalar de la resultante de reducción por el momento resultante respecto a Q:

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_Q^R = \bar{R} \cdot (\bar{Q}O \wedge \bar{R} + \bar{M}_O^R) = \bar{R} \cdot \bar{Q}O \wedge \bar{R} + \bar{R} \cdot \bar{M}_O^R = \bar{R} \cdot \bar{M}_O^R = \mathbf{I}$$

El resultado obtenido para Q se repetirá con cualquier otro punto, lo que permite expresar que el producto escalar de la resultante de reducción de un sistema de fuerzas por su momento resultante es invariable sea cual fuese el centro de reducción que se adoptase. Por eso se lo llama “segundo invariante o invariante escalar del sistema de fuerzas”.

Se puede completar esta conclusión desarrollando los productos escalares:

$$\begin{aligned} \bar{R} \cdot \bar{M}_Q^R &= \bar{R} \cdot \bar{M}_O^R \\ \bar{R} \cdot \bar{M}_O^R \cos \theta_0 &= \bar{R} \cdot \bar{M}_Q^R \cos \theta_Q \end{aligned}$$

en donde θ_0 y θ_Q son los ángulos formados entre \bar{R} y los momentos resultantes \bar{M}_O^R y \bar{M}_Q^R

$$M_O^R \cos \theta_0 = M_Q^R \cos \theta_Q$$



Los dos miembros de esta igualdad representan la proyección de los vectores momento resultante respecto a O y Q sobre la dirección de la resultante de reducción y se deduce que esa proyección es igual para cualquier otro punto que se adoptase como centro de reducción del sistema de fuerzas.

2.5.3.- EJE CENTRAL.-

Al variar el centro de reducción de un determinado sistema de fuerzas, la resultante de reducción se mantiene invariable, en cambio el momento resultante varía en intensidad y dirección manteniendo invariable su proyección sobre la dirección de aquélla. Se concibe que habrá puntos para los cuales coincidirá la dirección de ambos vectores es decir que el ángulo θ valdrá 0° ó 180° : El lugar geométrico de los puntos para los cuales el momento resultante es de dirección coincidente con la resultante de reducción se llama “*eje central o eje de momentos mínimos*” del sistema de fuerzas y es una recta coincidente con la recta de acción de \bar{R} , como se indica en la (fig. 2.15).

El sistema par-fuerza correspondiente a los puntos del eje central se llama “*torsor o tornillo de fuerzas*” y representa un sistema constituido por una fuerza que traslada al cuerpo según su dirección y un par (que actúa en un plano ortogonal a aquélla) que lo hace rotar alrededor de la recta de acción de la fuerza. Se produce un movimiento helicoidal y se aplica en dinámica en el estudio del movimiento de un cuerpo rígido concebido como una sucesión de movimientos helicoidales tangentes.

2.5.4.- TEOREMA DE VARIGNON GENERALIZADO.-

Recordemos que *todos los sistemas de fuerzas pueden ser reducidos a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en cualquier punto del cuerpo, constituido por la resultante de reducción (invariante) y el momento resultante (variable punto a punto)*. En muchos casos, ésta no es la última reducción posible siendo factible reducir el sistema a un único elemento: un vector momento libre, que es el caso de las cuplas, o una única fuerza llamada resultante del sistema. Nuestra finalidad es determinar en que sistemas esto es posible y que característica común presentan.

Analicemos la ecuación obtenida en 2.5.1:

$$\bar{M}_Q^R = \overline{QO} \wedge \bar{R} + \bar{M}_O^R$$

Observando siempre la fig. 2.15 vemos que el primer miembro representa el momento resultante del sistema respecto a Q ó sea la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a Q . En el segundo miembro \bar{M}_O^R tiene igual significado pero referido a O , y el término $\overline{QO} \wedge \bar{R}$ representa el momento de la resultante de reducción, aplicada en O , respecto a Q . Si suponemos que el *sistema de fuerzas es tal que pueda reducirse a una única fuerza* y que O sea un punto de ella, la resultante de reducción se transformará en la resultante del sistema y \bar{M}_O^R será igual a 0.

Se tiene entonces que:

$$\bar{M}_Q^R = \overline{QO} \wedge \bar{R}$$

o sea que si *un sistema de fuerzas puede reducirse a una única fuerza resultante se cumplirá que la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a un punto cualquiera Q es igual al momento de la resultante del sistema respecto a ese mismo punto Q .*

Esto constituye el teorema de Varignon en su forma más general y es válido para todo sistema de fuerzas que pueda reducirse a una única fuerza; ellos son:

1. Los *sistemas de fuerzas concurrentes* ya que ni las fuerzas componentes ni la resultante producen momento respecto al punto de concurrencia 0: $\bar{M}_O^R = 0$, $\bar{R} \neq 0$.-
2. Todos los sistemas para los cuales la resultante es normal al momento resultante (apartado 2.4.3.). Esta condición se cumple en los *sistemas planos de fuerzas* y en los *sistemas de fuerzas paralelos*, y



se caracteriza matemáticamente porque su invariante escalar, $\mathbf{I} = \overline{\mathbf{M}}_O^R \times \overline{\mathbf{R}} = 0$ ya que el ángulo entre $\overline{\mathbf{R}}$ y $\overline{\mathbf{M}}$ vale 90° y tiene nulo su coseno. **Por tener los vectores momentos igual dirección en los sistemas planos se aplica Varignon escalarmente, en cambio en los sistemas espaciales concurrentes y paralelos debe aplicarse vectorialmente.**

2.5.5.- EQUILIBRIO DE SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZAS.-

Se ha visto que cualquier sistema de fuerzas puede ser sustituido por otro sistema equivalente constituido por una fuerza y un par tales que:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}} &= \sum \overline{\mathbf{F}} \\ \overline{\mathbf{M}}_O^R &= \sum \overline{\mathbf{M}}_o = \sum (\overline{\mathbf{OA}} \wedge \overline{\mathbf{F}}) \end{aligned}$$

Se ha visto además que por el tercer principio de la Estática, para que un punto material o partícula se encuentre en reposo bajo la acción de un sistema de fuerzas es necesario que la resultante de las mismas sea nula. Decir que la partícula está en reposo significa que las traslaciones que podría experimentar en las direcciones de los tres ejes x,y,z son nulas. Para que el cuerpo rígido esté en reposo, no es suficiente que sean nulas las traslaciones según x, y, z, pues existe la posibilidad de que el cuerpo gire alrededor de esos ejes. Para que esto no suceda tendrá que ser nulo el momento resultante del sistema de fuerzas respecto de cualquier punto del plano.

Por lo tanto la condición requerida para que un **cuerpo rígido libre esté en reposo, consiste en que el sistema de fuerzas que sobre él actúa se reduzca a un sistema fuerza-par nulo respecto a cualquier punto del espacio.** Decir que el cuerpo se encuentra en reposo bajo un determinado sistema de fuerzas significa que **éste está en equilibrio.**

La condición formulada se expresa vectorialmente con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}} &= \sum \overline{\mathbf{F}} = 0 \\ \overline{\mathbf{M}}_O^R &= \sum \overline{\mathbf{M}}_o = 0 \end{aligned}$$

(1)

o por seis ecuaciones escalares:

$\begin{aligned} X &= \sum X_i = 0 \\ Y &= \sum Y_i = 0 \\ Z &= \sum Z_i = 0 \\ M_{Ox}^R &= \sum \overline{M}_x = 0 \\ M_{Oy}^R &= \sum \overline{M}_y = 0 \\ M_{Oz}^R &= \sum \overline{M}_z = 0 \end{aligned}$	o simplemente	$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 \\ \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned}$	(2)
--	---------------	--	-----

Estas ecuaciones expresan que para que un sistema de fuerzas espaciales cualesquiera se encuentre en equilibrio es condición necesaria y suficiente que las sumas de las proyecciones de todas las fuerzas sobre los tres ejes Ox, Oy, Oz sean nulas, y que las sumas de los momentos de todas las fuerzas con respecto a esos mismos tres ejes sean también nulas.

En las (2) se pueden sustituir las tres condiciones de suma de componentes de fuerzas por tres condiciones de momentos respecto a otros tres ejes u, v, w

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \\ \sum M_u &= 0 \\ \sum M_v &= 0 \\ \sum M_w &= 0 \end{aligned}$$

(3)



El cumplimiento de estas seis ecuaciones alternativas es condición necesaria de equilibrio pero, para ser suficiente debe verificarse geoméricamente que no existe recta alguna que intercepte a los seis ejes. Si existiese una recta que interceptase a x-y-z-u-v-w el sistema de fuerzas puede ser tal que admita una resultante según la dirección de esa recta. En este caso las seis ecuaciones de nulidad de momento (3) estarían satisfechas, pero podría existir una resultante, $\bar{R} \neq 0$, y el sistema no sería nulo.-

En muchos problemas resulta conveniente plantear las condiciones de equilibrio del cuerpo rígido en forma vectorial a partir directamente de las (1), donde expresamos las fuerzas \bar{F} y los vectores posición \bar{OA} por medio de sus componentes rectangulares y de los versores de los ejes de coordenadas. En seguida efectuamos los productos vectoriales, ya sea directamente o por determinantes. Escribimos entonces:

$$\bar{R} = \sum \bar{F} = \sum (X_i \bar{i} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k}) = 0$$

$$\bar{M}_O^R = \sum (\bar{OA} \wedge \bar{F}) = \sum [(x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}) \wedge (X_i \bar{i} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k})]$$

o bien

$$\bar{M}_O^R = \sum (\bar{OA} \wedge \bar{F}) = \sum \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

Igualando a cero los coeficientes de los versores \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} en cada una de las dos ecuaciones anteriores obtenemos las seis ecuaciones escalares buscadas.

2.5.6.- DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO.-

Los principales problemas posibles y determinados que se presentan son:

- 1º.- Descomposición de una fuerza \bar{F} en tres componentes con rectas de acción dadas, que se cortan en un punto de \bar{F} . Este problema fue tratado en el apartado 1.6.-
- 2º.- Descomposición de una fuerza \bar{F} en seis componentes con rectas de acción dadas, que cumplen la condición de no ser interceptadas por una misma recta. Este tema será tratado para la determinación de reacciones en el espacio: se determinarán las seis equilibrantes de una fuerza en el espacio que, como se sabe, se diferencian de las componentes sólo en el signo.

2.6.- SISTEMAS ESPACIALES DE FUERZAS PARALELAS.-

2.6.1.- REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS.-

Sea (fig. 2.16), un sistema espacial de fuerzas cuyas rectas de acción son paralelas a una determinada dirección, el eje O_y en nuestro caso. Tanto las componentes x como las componentes z de estas fuerzas serán nulas; serán nulos también sus momentos respecto a dicho eje ya que son coplanares con él.

Por lo tanto las ecuaciones de reducción expresadas en 2.5.1. quedan de la siguiente forma:

$$\bar{R} = \sum \bar{F} \equiv \begin{cases} X = \sum X_i = 0 \\ Y = \sum Y_i = \sum F_i \\ Z = \sum Z_i = 0 \end{cases}$$

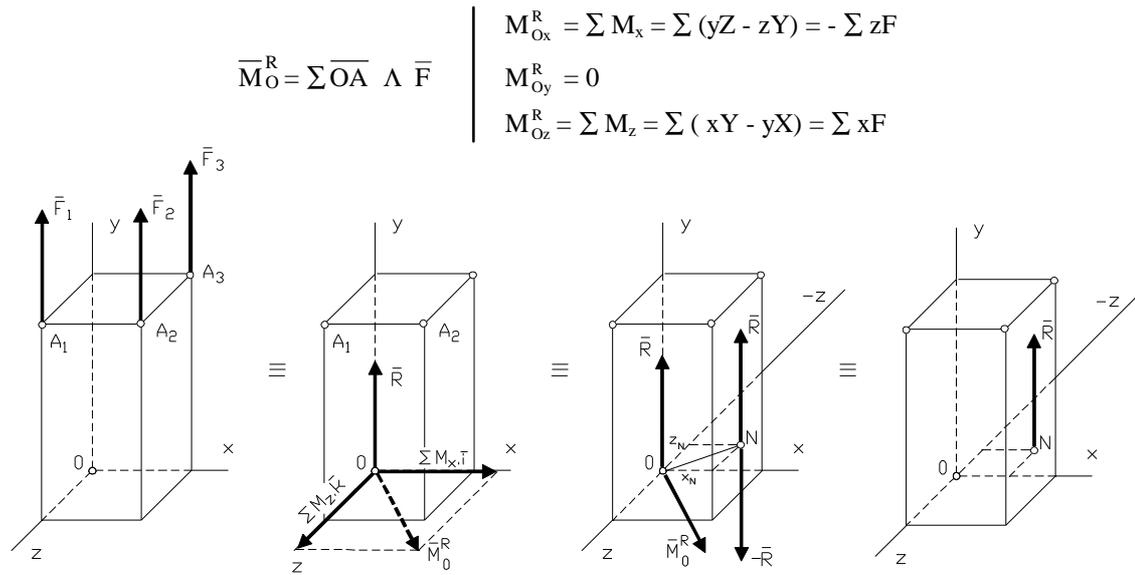


Fig. 2.16

Quedan sólo tres ecuaciones escalares:

$\begin{aligned} R &= \sum F \\ M_{Ox}^R &= \sum M_x \\ M_{Oz}^R &= \sum M_z \end{aligned}$

Estas ecuaciones expresan que:

- 1)- *La intensidad y el sentido de la resultante del sistema quedan dados por la suma de las intensidades de todas las fuerzas del sistema.*
- 2)- *La componente “x” del momento resultante respecto al origen O es la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al eje O_x perpendicular a ellas.*
- 3)- *La componente “z” del momento resultante respecto al origen O es la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto al eje O_z perpendicular a ellas.*

La primera de estas ecuaciones determina la intensidad y sentido de la **resultante del sistema** cuya dirección es la de las fuerzas constitutivas. Las dos ecuaciones restantes permiten calcular las coordenadas x_N , z_N del punto N de intersección de su recta de acción con el plano xz.- La posición graficada para este punto en la figura 2.16 es supuesta: queda sujeta a la verificación que se verá más abajo.-

Recordemos que por ser $\overline{R} \perp \overline{M}_O^R$ el sistema de fuerzas paralelas puede reducirse a una única fuerza, la **resultante del sistema**.- Es aplicable el teorema de Varignon y, dado que los vectores momento de las “i” fuerzas del sistema no son colineales, debemos plantearlo en forma vectorial de donde surgirán las ecuaciones escalares de aplicación.

$$\overline{M}_O^R = \overline{ON} \wedge \overline{R}$$

poniendo \overline{R} y \overline{M}_O^R en función de sus componentes rectangulares:

$$M_{Ox}^R \overline{i} + M_{Oz}^R \overline{k} = (x_N \overline{i} + z_N \overline{k}) \wedge R \overline{j}$$

$$M_{Ox}^R \overline{i} + M_{Oz}^R \overline{k} = x_N R \overline{k} - z_N R \overline{i}$$

para que se cumpla esta igualdad debe ser:



$$+_{-}\uparrow M_{Ox}^R = \sum M_x = -z_N R \quad \therefore \quad z_N = -\frac{\sum M_x}{R} \quad (1)$$

$$+_{-}\uparrow M_{Oz}^R = \sum M_z = x_N R \quad \therefore \quad x_N = \frac{\sum M_z}{R} \quad (2)$$

Estas expresiones se cumplen si se adoptan como positivos los momentos antihorarios; si se adoptase la convención +z (momentos horarios positivos) valen esas expresiones con los signos cambiados.

Las ecuaciones obtenidas, $\sum M_x = -z_N R$ y $\sum M_z = x_N R$, expresan escalarmente el teorema de Varignon para sistemas espaciales de fuerzas paralelas y establecen que **el momento de todas las fuerzas del sistema respecto a los ejes “Ox” y “Oz” son respectivamente iguales al momento de la resultante respecto a cada uno de ellos.**- Aplicando esto verifiquemos, en forma directa y objetiva, si en la fig. 2.16 (primero y último gráficos) el sentido supuesto para \bar{R} y la posición asignada al punto de aplicación N (con $x_N > 0$ y $z_N < 0$) son correctos.

Evidentemente siendo todas las fuerzas de sentido positivo, el sentido supuesto a la resultante también es positivo. De igual manera, si nos ubicamos en el extremo positivo del eje z, el momento de \bar{R} es antihorario como la suma de los momentos de las fuerzas \bar{F}_2 y \bar{F}_3 lo que nos indica que la abscisa x_N , supuesta positiva es correcta.- En cambio ubicándose el observador en el extremo positivo del eje x se observa que el momento de \bar{R} es antihorario no coincidiendo con la suma de los momentos horarios de las fuerzas \bar{F}_1 y \bar{F}_2 .-

Esto nos dice que si bien el sentido de \bar{R} ha sido supuesto correctamente, la ordenada z_N de su punto de aplicación no puede ser negativa (atrás del plano xy) pues N se ubica en el primer octante con $z_N > 0$.-

Alternativamente se puede reducir el sistema en forma directa: de la expresión $R = \sum F_i$ se obtiene R en intensidad, dirección y sentido.- Luego, aplicando el teorema de Varignon, se iguala el momento de la resultante respecto al eje “x” y al eje “z” con la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a esos mismos ejes, y se obtiene la posición de uno de sus puntos, N.- Efectivamente:

$$+_{-}\uparrow \quad z_N R = \sum M_x = F_1 z_1 + F_2 z_2 > 0 \quad \therefore \quad z_N = \frac{\sum M_x}{R} > 0$$

$$+_{-}\uparrow \quad x_N R = \sum M_z = -F_2 x_2 - F_3 x_3 < 0 \quad \therefore \quad x_N = -\frac{\sum M_z}{R} > 0$$

(La diferencia de signo con las (1) y (2) se debe al cambio de convención: los resultados no varían).-

2.6.2.- EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS.-

Si al sistema de ecuaciones de reducción que hemos establecido en 2.6.1. le imponemos la condición general de equilibrio:

$$\bar{R} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \bar{M}_O^R = 0$$

resulta necesario y suficiente para que un sistema espacial de fuerzas paralelas se encuentre en equilibrio que se cumpla que:

$R = \sum F = 0$ $M_{Ox}^R = \sum M_x = 0$ $M_{Oz}^R = \sum M_z = 0$	o sucintamente	$\sum F = 0$ $\sum M_x = 0$ $\sum M_z = 0$
--	----------------	--



2.6.3. - DESCOMPOSICION DE UNA FUERZA EN TRES PARALELAS.-

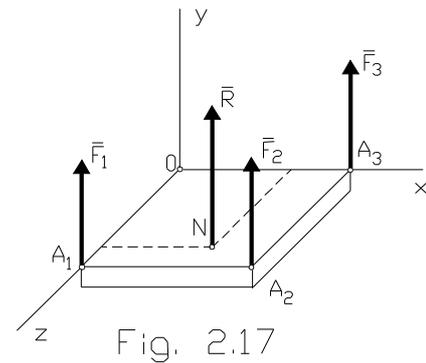
Sea, (fig. 2.17), una fuerza \bar{R} paralela al eje “y”; queremos descomponerla en tres fuerzas $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ cuyas rectas de acción no son coplanares, pero las tres son paralelas a la de \bar{R} .

Sean $N(x_N, y_N, z_N), A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$ y $A_3(x_3, y_3, z_3)$ puntos de las rectas de acción de la resultante y de las tres componentes. Las tres ecuaciones de reducción obtenidas en 2.6.1. :

$$\begin{aligned} R &= \sum F \\ M_{Ox}^R &= \sum M_X = -z_N R \\ M_{Oz}^R &= \sum M_Y = x_N R \end{aligned}$$

nos permiten resolver el problema. A tal efecto las desarrollamos aplicando el teorema de Varignon suponiendo positivos los sentidos de las fuerzas, los puntos indicados ubicados en el primer octante y adoptando como positivos los momentos antihorarios:

$$\begin{aligned} +\uparrow \quad R &= F_1 + F_2 + F_3 \\ +_-\uparrow \quad -z_N R &= -z_1 F_1 - z_2 F_2 - z_3 F_3 \\ +_-\uparrow \quad x_N R &= x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 \end{aligned}$$



que nos brinda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, F_1, F_2, F_3 que nos da la solución única del problema.

En caso de que el sentido de la resultante o las coordenadas de los puntos de aplicación de las incógnitas no coincidieran con el sentido u octante supuestos, los signos correspondientes deben introducirse en las ecuaciones anteriores. Si los resultados son positivos los sentidos asignados a las incógnitas son correctas, debiendo cambiarse en caso contrario. Evidentemente, si tenemos confusión en la memorización de las ecuaciones escalares de reducción, el problema se puede resolver directamente tomando la resultante con su verdadero sentido; con sentidos supuestos las incógnitas, y los puntos de aplicación de éstas en su posición en el espacio. Aplicando Varignón, ubicándonos en los extremos positivos de los ejes Ox y Oz para la toma de momentos, y utilizando la primer ecuación $R = F_1 + F_2 + F_3$, tendremos las tres ecuaciones que nos resuelven el problema.

2.7.- SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS NO CONCURRENTES.-

En muchas obras de ingeniería se utilizan estructuras cuyos largo y ancho son mucho mayor que el espesor y que frecuentemente poseen un plano de simetría paralelo al largo y ancho, ubicado a mitad del espesor. Las fuerzas o cargas a que se hayan sometidas, están distribuidas simétricamente respecto a dicho plano, de forma tal que **la resultante de cada par de fuerzas simétricas a uno y otro lado del mismo actúan en él**. Armaduras, vigas, pórticos, arcos, etc., son ejemplos de este tipo de estructuras.

Para el estudio de la estática a estas estructuras se las considera rígidas, se las designa con el nombre de **CHAPAS RIGIDAS** y se las define como **un conjunto o sistemas de partículas rígidamente unidas entre sí ubicadas en un mismo plano, de forma indefinida ya que representan simbólicamente a diversos tipos de estructuras planas, y sometidas únicamente a fuerzas que actúan en su plano**. Tomaremos los ejes x e y coplanares con la chapa y el eje z perpendicular a ella.



Sea S una chapa sometida a una fuerza \vec{F} de las características expresadas (fig. 2.18), aplicada en un punto A y tomemos en O el origen de coordenadas. La fuerza \vec{F} poseerá sólo las componentes X e Y ya que $Z = 0$; las coordenadas de A serán x e y pues $z = 0$. El vector posición \vec{OA} será también coplanar y sus componentes quedan dadas por las coordenadas del punto A.

El momento de la fuerza \vec{F} respecto al punto O será:

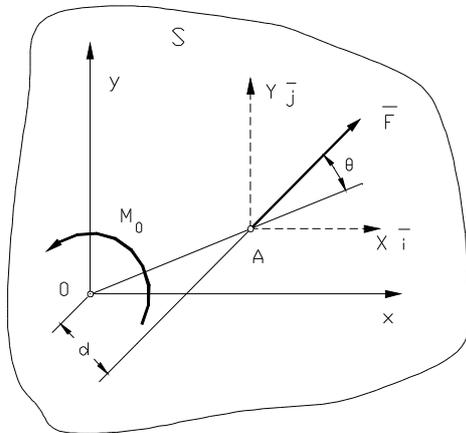


Fig. 2.18

$$\vec{M}_o = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

de intensidad

$$M_o = OA \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d$$

y de dirección perpendicular al plano xy. Es decir que la recta de acción del vector \vec{M}_o será el eje z que intercepta a la chapa en el centro de momento O en este caso.- Cualquier otra fuerza actuante tendrá por momento con respecto a O un vector de igual recta de acción, y sólo será necesario establecer su intensidad y sentido para que esté perfectamente determinado.

Por ello, cuando se trata de sistemas planos de fuerzas los momentos de las fuerzas quedan determinados indicando el centro de momento, la intensidad y el sentido. Esto se obtiene expresando la intensidad M_o y un arco de circunferencia de centro en O orientado en el sentido de la rotación

que la fuerza tiende a imprimir a la chapa alrededor de O.

En función de las componentes rectangulares de la fuerza y del vector posición, el momento será:

$$\vec{M}_o = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \vec{k} = \{xY - yX\} \vec{k}$$

$$M_o = M_z = xY - yX$$

Como para todas las fuerzas sus momentos son vectores paralelos, la suma vectorial tiene por módulo un valor igual a la suma escalar de los módulos de los vectores sumando. Se concluye que al trabajar con sistemas planos de fuerzas es posible y conveniente operar con valores escalares.

De acuerdo a la terna de ejes adoptados y a la regla de la mano derecha resulta positivo el momento de las fuerzas que tienden a producir rotación antihoraria y negativo para una rotación horaria.-Si hubiera que precisar el sentido del vector momento recuérdese que para esta convención la rotación antihoraria define el sentido de un vector que sale del plano del papel hacia el ojo del observador.

Frecuentemente se opera tomando como positivo el correspondiente a rotación horaria, regla de la mano izquierda. Para evitar confusión adoptaremos la práctica de indicar con los símbolos

$$+ \uparrow \quad \circ \quad + \downarrow$$

la convención que se aplica. Esta indicación se coloca a la izquierda de la operación que se practica.-

2. 7. 1.- REDUCCION DE SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS.-

Si se reduce un sistema plano de fuerzas que actúa sobre una chapa (fig.2.19), al origen O de los ejes x e y partiendo de las ecuaciones generales de reducción, se tiene:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = X \vec{i} + Y \vec{j} \quad \left| \begin{array}{l} X = \sum X_i \\ Y = \sum Y_i \\ Z = \sum Z_i = 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_O^R \quad \text{con} \quad \begin{cases} M_{Ox}^R = \sum M_x^i = 0 & \text{por ser coplanares fuerzas y eje} \\ M_{Oy}^R = \sum M_y^i = 0 & \text{por ser coplanares fuerzas y eje} \\ M_{Oz}^R = \sum M_z^i = \sum (xY - yX) \end{cases}$$

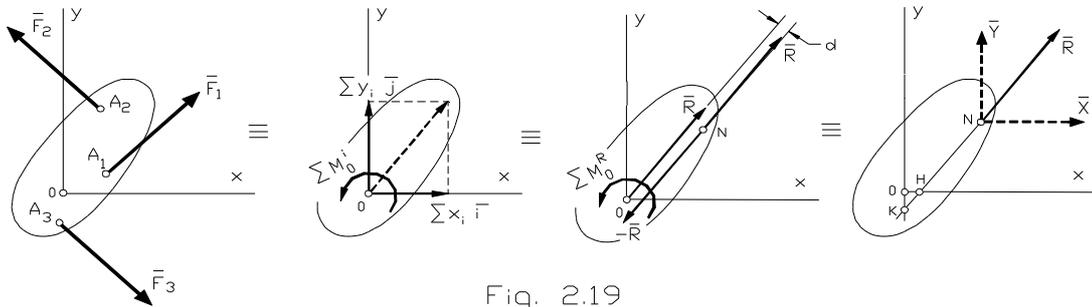


Fig. 2.19

El sistema queda entonces expresado por tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} X &= \sum X_i \\ Y &= \sum Y_i \\ M_O^R &= \sum M_0^i = \sum F_i d_i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) \end{aligned}$$

Nos dicen que:

- **Las componentes X e Y de la resultante de reducción de un sistema plano de fuerzas son iguales a las sumas de las componentes rectangulares respectivas X_i e Y_i de todas las fuerzas del sistema.-**
- **El momento resultante respecto a un punto cualquiera del plano de ese sistema de fuerzas es igual a la suma de los momentos de las “i” fuerzas del sistema respecto al mismo centro de reducción.-**

Pero como $\vec{R} \perp \vec{M}_O^R$, la reducción enunciada no es la última que puede efectuarse ya que sabemos que en estos casos se puede llegar a una **Resultante única** si se determina la posición de la recta de acción para la cual $M_N^R = \sum M_N^i = 0$. Para ello si aplicamos en N un sistema nulo, \vec{R} y $(-\vec{R})$ a una distancia $d = M_O^R / R$, se tendrá el par formado por \vec{R} (aplicada en O) y $-\vec{R}$ (aplicada en N) que se anula con M_O^R , quedando sólo \vec{R} aplicada en N.

Considerando que la resultante \vec{R} está aplicada en N (punto genérico de coordenadas x_N e y_N), sustituyéndola por sus componentes \vec{X} e \vec{Y} se toman momentos con respecto a O; por Varignon se obtiene:

$$+_ \uparrow \quad x_N Y - y_N X = \sum M_0^i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$$

que es la ecuación de la recta de acción de la resultante. Se determinan dos puntos de la misma si se dan dos valores cualesquiera a x_N y se calculan las y_N correspondientes.

Muy simple resulta también determinar las coordenadas en el origen de esta recta de acción.- Calculamos con las expresiones anteriores X, Y, $\sum M_0^i$: con las dos primeras se calcula R y θ faltando solamente determinar la posición de su recta de acción.- Sean H y K las intersecciones de los ejes “x” e “y” con la recta de acción de la resultante, fig. 2-19; asignamos signo a la abscisa de H (x_H) y a la ordenada de K (y_K) lo que implica ubicar la recta de acción de la resultante.- Situamos las componentes X e Y de \vec{R} primero en H y luego en K, figura 2.20, y aplicamos Varignon en ambas posiciones. Como se conoce en valor y signo $\sum M_0^i$ los signos resultantes de x_H e y_K nos dirán si los asignados son correctos o erróneos.

$$\begin{aligned} +_ \uparrow \quad x_H Y &= \sum M_0^i & \therefore & \quad x_H = \frac{\sum M_0^i}{Y} \\ +_ \uparrow \quad y_K X &= \sum M_0^i & \therefore & \quad y_K = \frac{\sum M_0^i}{X} \end{aligned}$$

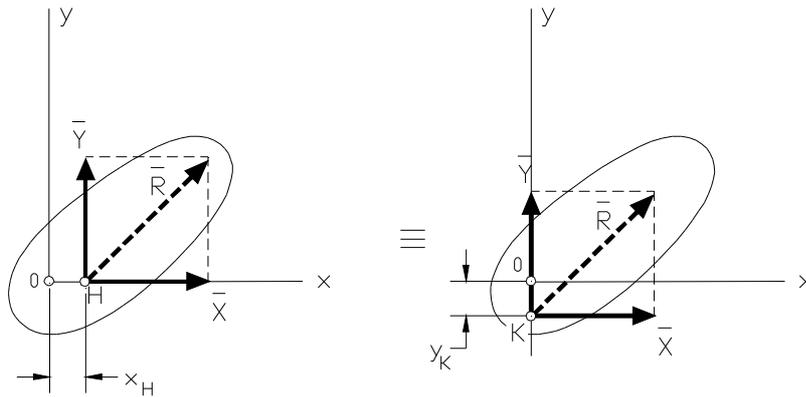


fig. 2.20

2.7.2.- EQUILIBRIO DE SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS.-

Un sistema plano de fuerzas puede siempre reducirse a un sistema fuerza-par con respecto a cualquier punto del plano, en particular al origen O de coordenadas. Al variar el centro de reducción o sea el punto en que se aplica el sistema fuerza-par, la equivalencia con el sistema de fuerzas dado requiere que la fuerza se mantenga constante y que el par varíe de punto a punto.

Para que la chapa sobre la que actúan las fuerzas se mantengan en reposo es necesario y suficiente que el sistema fuerza-par equivalente sea nulo independientemente del centro de reducción que se considere. Las ecuaciones generales de equilibrio.

$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0$	$\bar{M}_0^R = \sum \bar{M}_0^i = 0$
--------------------------------	--------------------------------------

Se expresan escalarmente para los sistemas planos por tres ecuaciones, de acuerdo a lo visto en 2.7.1. :

$\begin{aligned} X &= \sum X_i = 0 \\ Y &= \sum Y_i = 0 \\ M_0^R &= \sum M_0^i = \sum F_i d_i = 0 \end{aligned}$	o simplemente	$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 \\ \sum M_0^i &= 0 \end{aligned}$
--	---------------	---

que establecen como condición necesaria y suficiente de equilibrio que sean respectivamente nulas las sumas de las componentes o proyecciones de todas las fuerzas sobre los ejes "x" e "y", como así también la suma de sus momentos respecto a cualquier punto del plano.

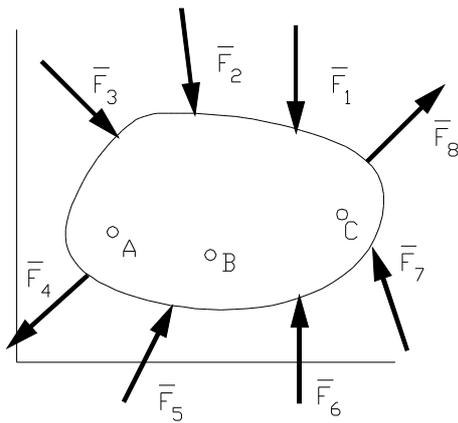


Fig. 2.21

Para el esquema de la figura 2.21 las condiciones de equilibrio serán:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 \\ \sum M_A^i &= 0 \end{aligned}$$

Sistema de tres ecuaciones que permite determinar tres incógnitas cualesquiera que pudiesen existir en el sistema de fuerzas. Estas incógnitas son generalmente las intensidades y/o direcciones de las fuerzas reactivas que se expresan mediante sus componentes x e y.

Se puede plantear la nulidad de la suma de momentos con respecto a otro punto del plano: $\sum M_B^i = 0$. Pero no es una ecuación independiente ya que no expresa una condición de equilibrio distinta a la establecida por la nulidad del sistema fuerza par para cualquier punto de la chapa donde actuase.

Esta expresión, $\sum M_B^i = 0$, no permite resolver una cuarta incógnita sino que constituye una ecuación de cumplimiento necesario y que podemos utilizar como alternativa para verificación de las operaciones de



cálculo: con tres de las cuatro ecuaciones planteadas determinamos los valores de las incógnitas y con la cuarta verificamos los resultados. Es conveniente la sustitución de condiciones de suma de componentes por suma de momentos por cuanto permiten el planteo de ecuaciones tales que, eligiendo adecuadamente el centro de momentos, presentan una sola incógnita que se despeja en forma inmediata.-

El cumplimiento del sistema [$\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$; $\sum M_A^i = 0$] es condición necesaria y suficiente de equilibrio.-

En cambio el cumplimiento del sistema [$\sum X_i = 0$; $\sum M_A^i = 0$; $\sum M_B^i = 0$] es condición necesaria pero no suficiente ya que podría existir una resultante $\bar{R} \neq 0$ pasante por A y por B, en cuyo caso, si los puntos A y B son tales que la dirección por ellos determinada fuese perpendicular al eje de proyección, se cumpliría la nulidad del sistema de ecuaciones al ser nula la proyección de esa resultante sobre el eje "x", y nulos los momentos respecto a los puntos A y B.- **Por lo tanto los centros de momentos A y B deben seleccionarse evitando que la recta por ellos determinada sea normal al eje de proyección.-**

Otro grupo alternativo de ecuaciones es: [$\sum M_A^i = 0$; $\sum M_B^i = 0$; $\sum M_C^i = 0$] siempre que los puntos A, B y C no estén alineados. Si lo estuviesen podría existir una resultante \bar{R} distinta de cero que pasara por los tres puntos la cual cumpliría las ecuaciones de equilibrio, sin que el sistema lo estuviese.- **Por ello se puede sustituir las dos condiciones de suma de componentes por suma de momentos respecto a otros puntos si los centros de momentos A, B y C adoptados no están situados sobre una recta.-**

2.7.3.- CASOS PARTICULARES DE EQUILIBRIO EN EL PLANO.-

Es conveniente analizar particularmente las condiciones de equilibrio de sistemas de dos y tres fuerzas pues se obtienen características de los mismos que resultan de utilidad en muchas aplicaciones.

Se vio que para que **dos fuerzas estuviesen en equilibrio era necesario que fuesen opuestas, es decir de igual intensidad, recta de acción coincidente y sentidos contrarios.** Verifiquemos estas características aplicando las ecuaciones de equilibrio.

Sea una chapa, fig. 2.22 sobre la que actúan sólo dos fuerzas \bar{F}_1 y \bar{F}_2 aplicadas en los puntos A y B de la chapa. Para que se cumpla la ecuación $\sum M_A = 0$ la recta de acción de \bar{F}_2 debe pasar por A, y como está aplicada en B coincidirá con la recta AB.

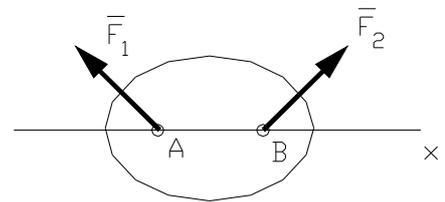


Fig. 2.22

Si se plantea la ecuación $\sum M_B = 0$ se concluye que la recta de acción de \bar{F}_1 también es coincidente con AB y consecuentemente con \bar{F}_2

Finalmente haciendo coincidir AB con el eje x al aplicar la ecuación $\sum X_i$ se deduce que las intensidades son iguales y los sentidos contrarios.

El otro caso es aquél de una chapa sometida a la acción de tres fuerzas o, de manera general, una chapa rígida sometida a la acción de fuerzas que actúan sólo en tres puntos, fig. 2.23

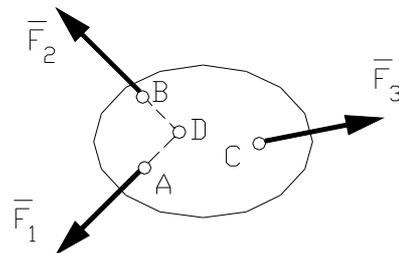


Fig. 2.23

Consideramos la chapa rígida sometida a un sistema de fuerzas que puede reducirse a tres fuerzas \bar{F}_1 , \bar{F}_2 y \bar{F}_3 actuando respectivamente en los puntos A, B y C. Se demostrará que si la **chapa se encuentra en equilibrio, las rectas de acción de las tres fuerzas deben concurrir o ser paralelas.**

Como la chapa está en equilibrio la suma de los momentos de \bar{F}_1 , \bar{F}_2 y \bar{F}_3 respecto a cualquier punto debe ser cero.- Si se toma momentos respecto a D intersección de dos de ellas, \bar{F}_1 y \bar{F}_2 en este caso, para que se cumpla que $\sum M_D = 0$ la recta de acción de \bar{F}_3 también debe pasar por D.-



Si las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 fuesen paralelas se interceptarían en el punto impropio de esa dirección, por el que también pasará \vec{F}_3 : será paralela a \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

2.8.- REDUCCIÓN Y EQUILIBRIO GRÁFICOS DE SISTEMAS PLANOS DE FUERZAS.-

2.8.1.- POLÍGONO DE RESULTANTES SUCESIVAS.-

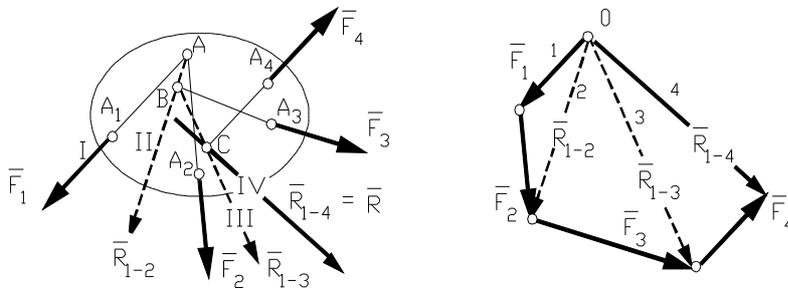


Fig. 2.24

de la resultante del sistema. Si unimos O con el extremo de cada una de las fuerzas obtenemos los rayos 1, 2, 3, 4 que, respectivamente, constituyen los valores representativos de las resultantes parciales siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{F}_1 \\ \vec{R}_{1-2} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{R}_{1-3} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \vec{R}_{1-4} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \end{aligned}$$

Se observa que cada uno de estos lados constituyen el vector representativo de la resultante de las fuerzas situadas a su izquierda, es decir de las resultantes sucesivas de las fuerzas del sistema consideradas de izquierda a derecha. Sabemos que en las intersecciones de

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \text{ con } \vec{F}_2, \text{ punto A, está aplicada } \vec{R}_{1-2} \\ \vec{R}_{1-2} \text{ con } \vec{F}_3, \text{ punto B, está aplicada } \vec{R}_{1-3} \\ \vec{R}_{1-3} \text{ con } \vec{F}_4, \text{ punto C, está aplicada } \vec{R}_{1-4} \end{aligned}$$

El polígono formado por las rectas de acción de estas resultantes parciales designadas I-II-III-IV, se llama polígono de resultantes sucesivas. Toda esta construcción debe efectuarse tomando longitudes y fuerzas a escala.

No siempre se puede construir el polígono de resultantes sucesivas ya que los puntos A, B, C frecuentemente no caen dentro de los límites del dibujo. Por esto, su uso se limita en la práctica a la determinación gráfica de la resultante de los esfuerzos internos de arcos sometidos a ciertos sistemas de fuerzas.-

2.8.2.- POLIGONO FUNICULAR: REDUCCION Y EQUILIBRIO.-

Representemos, fig. 2.25, la posición de las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ de un sistema plano actuante sobre una chapa en una cierta escala de longitudes, $\frac{\alpha \cdot m}{cm}$. Sabemos que por tratarse de un sistema plano puede reducirse a una única fuerza resultante y hemos visto como se hace esta reducción por proceso analítico: nuestro problema ahora es hacerlo gráficamente en el supuesto de que no sea aplicable el método indicado en el apartado anterior.

Construimos el polígono de fuerzas en escala $\frac{\beta \cdot kg}{cm}$, adoptamos un punto O cualquiera del plano llamado polo y lo unimos con el origen, con el extremo y con cada uno de los vértices intermedios del polí-

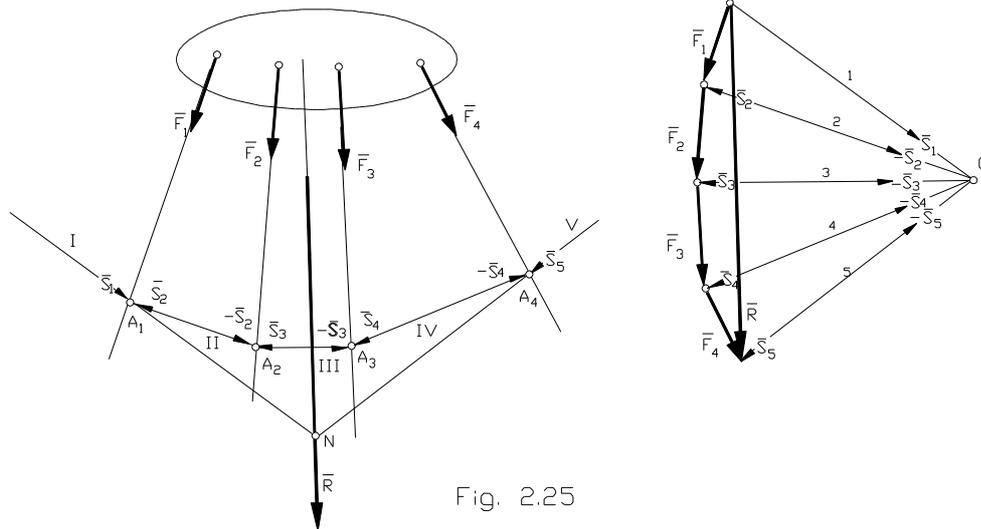


Fig. 2.25

gono de fuerzas quedando determinados los **rayos polares** 1, 2, 3, 4 y 5. Uniendo el origen de \bar{F}_1 con el extremo de \bar{F}_4 tenemos el vector \bar{R} que representa la resultante en intensidad, dirección y sentido, faltando sólo determinar su posición sobre la chapa.

Para ello, por un punto A_1 de la recta de acción de F_1 trazamos la recta o **lado I** paralelo al **rayo 1**; a continuación y por el mismo punto A_1 se traza el **lado II** paralelo al **rayo 2** hasta cortar en A_2 a \bar{F}_2 ; por A_2 se traza el **lado III** paralelo al **rayo 3** hasta interceptar en A_3 a \bar{F}_3 ; se prosigue en A_3 trazando el **lado IV** paralelo al **rayo 4** hasta cortar en A_4 a \bar{F}_4 ; finalmente por A_4 se traza el **lado V** paralelo al **rayo 5**.

El polígono I-II-III-IV-V construido se llama **polígono funicular** que recibe su nombre por representar la configuración de equilibrio que adquiriría un cable o hilo flexible, inextensible y sin peso bajo la acción del sistema de fuerzas dado. El esfuerzo que se originaría en cada lado del funicular estaría medido por el rayo polar correspondiente.

Si prolongamos el primero y último lados del funicular hasta interceptarse en el punto N se obtiene un punto de la recta de acción de \bar{R} .

Efectivamente si en A_1 descomponemos \bar{F}_1 según las direcciones concurrentes I y II, sus componentes quedan determinadas por los rayos polares 1 y 2 y las llamamos \bar{S}_1 y \bar{S}_2 , que ubicamos en posición y sentido sobre el funicular en I y II: podemos sustituir en el sistema de fuerzas dado \bar{F}_1 por sus componentes \bar{S}_1 y \bar{S}_2 .

En igual forma procedemos en A_2 descomponiendo \bar{F}_2 según II y III; las componentes serán $(-\bar{S}_2)$ y \bar{S}_3 que llevamos al funicular y con ellas se sustituye \bar{F}_2 en el sistema de fuerzas.

En forma análoga se procede con las restantes fuerzas, y se tendrá:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \\ \bar{F}_2 &= (-\bar{S}_2) + \bar{S}_3 \\ \bar{F}_3 &= (-\bar{S}_3) + \bar{S}_4 \\ \bar{F}_4 &= (-\bar{S}_4) + \bar{S}_5 \end{aligned}$$

Si sumamos miembro a miembro estas cuatro igualdades, en el primer miembro tendremos la resultante \bar{R} y en el segundo se nos anularán las componentes intermedias quedando sólo la primera \bar{S}_1 y la última \bar{S}_5 :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + (-\bar{S}_2) + \bar{S}_3 + (-\bar{S}_3) + \bar{S}_4 + (-\bar{S}_4) + \bar{S}_5$$

$$\bar{R} = \bar{S}_1 + \bar{S}_5$$



El sistema de fuerzas originales se ha reducido a dos componentes: Necesariamente la resultante del sistema \bar{R} pasará por su punto de intersección N. En síntesis la **resultante queda determinada en intensidad, dirección y sentido por el polígono de fuerzas, y en posición por el polígono funicular**.

Recalquemos el significado de la expresión que hemos recuadrado renglones más arriba: **se trata de una igualdad entre tres sistemas de fuerzas que nos establece que el sistema de fuerzas dado, su resultante, y el polígono funicular trazado constituyen sistema de fuerzas equivalentes**.

Un polígono de fuerzas como el obtenido, en que el origen de la primer fuerza es un punto distinto del extremo de la ultima se llama **polígono de fuerzas abierto** y da lugar a una resultante distinta de cero. Si el origen de la primer fuerza coincidiese con el extremo de la ultima **polígono de fuerzas sería cerrado** y la resultante nula. Veamos como es el polígono funicular correspondiente a un sistema cuyo polígono

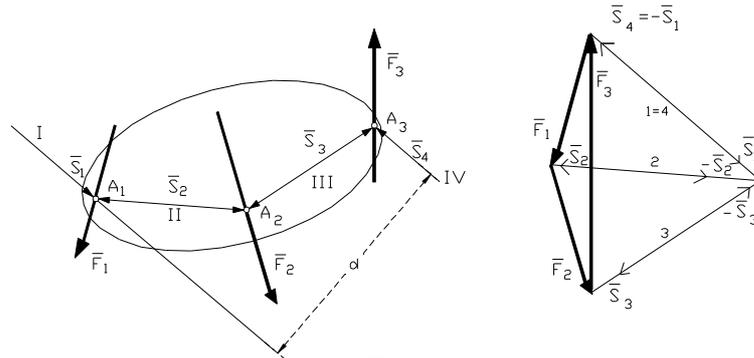


Fig. 2.26

de fuerzas es cerrado y determinemos a que se reduce dicho sistema, fig. 2.26.

Se efectúa la construcción del polígono funicular como en el caso anterior, es decir se construye el polígono de fuerzas, se adopta el polo 0 y se trazan los rayos polares 1-2-3-4:

Se puede observar que el primero y el último son coincidentes.

Por A_1 se traza el lado I paralelo al rayo 1; luego el lado II paralelo al rayo 2 hasta cortar a \bar{F}_2 en A_2 ; se sigue en A_2 con el lado III paralelo al rayo 3 y finalmente por A_3 el lado IV paralelo al rayo 4: los lados del funicular I y IV serán paralelos por ser 1 y 4 coincidentes.

Si sustituimos las fuerzas del sistema por sus componentes según los lados del funicular se tiene :

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \\ \bar{F}_2 &= (-\bar{S}_2) + \bar{S}_3 \\ \bar{F}_3 &= (-\bar{S}_3) + \bar{S}_4 \\ 0 &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + (-\bar{S}_2) + \bar{S}_3 + (-\bar{S}_3) + \bar{S}_4 \\ 0 &= \bar{S}_1 + \bar{S}_4 \end{aligned}$$

El sistema se ha reducido a dos fuerzas \bar{S}_1 y \bar{S}_4 de direcciones paralelas, intensidades iguales y sentidos opuestos, o sea **un par o cupla de fuerzas** de momento:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \overline{A_1 A_3} \wedge \bar{S}_4 \\ M &= S_4 \cdot d \end{aligned}$$

Los lados del funicular I y IV son paralelos y no coincidentes lo que significa que se cortan en el punto impropio de la dirección de I y de IV.



Cuando el primero y último lado del funicular se cortan, como en los casos vistos, en puntos propios o impropios se dice que *el funicular es abierto*.

Finalmente si el polígono de fuerzas fuese cerrado, (lo que implica resultante nula) y el polígono funicular también fuese cerrado o sea que su primer y último lados coinciden (lo que implica par nulo) el sistema de fuerzas está en equilibrio.

Destacando esto se concluye que las condiciones gráficas de equilibrio de un sistema plano de fuerzas son:

1a.- *POLIGONO DE FUERZAS CERRADO* para lo cual debe coincidir el origen de la primer fuerza con el extremo de la última. Significa que la resultante es nula e implica dos condiciones analíticas:

$$\mathbf{X} = \sum \mathbf{X}_i = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{Y} = \sum \mathbf{Y}_i = \mathbf{0}$$

2a.- *POLIGONO FUNICULAR CERRADO* para lo cual deben coincidir su primero y último lados; representa la condición analítica de que el momento resultante sea nulo:

$$M_O^R = \sum M_O^i = 0$$

2.8.3.- PROPIEDADES DEL POLIGONO FUNICULAR.-

2.8.3.1.- Primera Propiedad.-

Dado un determinado sistema de fuerzas el polígono funicular que hemos trazado en figura 2.25, puede modificarse por las siguientes causas: variación del orden en que se consideren las fuerzas al trazar el polígono de fuerzas; desplazamiento del primer lado al variar la posición del punto de arranque A_1 , sobre la recta de acción de F_1 ; cambio de polo.

Si se altera el orden de un grupo intermedio de fuerzas, se modifican sólo los lados del funicular comprendidos entre esas fuerzas.

Si se varía el punto de arranque A_1 se obtendrá un nuevo funicular de lados paralelos al primitivo.

Si se cambia el polo, el funicular cambia de forma. Quiere ello decir que el sistema de fuerzas tiene infinitos polígonos funiculares equivalentes cuyo primero y último lados se cortarán en puntos de la recta de acción de la resultante. Pero como ésta es ÚNICA se concluye que *el lugar geométrico de los puntos de intersección de los lados extremos de los infinitos funiculares equivalentes a un determinado sistema de fuerzas es una recta coincidente con la recta de acción de la resultante del sistema*.

Esto constituye una primera propiedad de los polígonos funiculares.

2.8.3.2.- Polígono Funicular y Polígono de Fuerzas como Figuras Recíprocas.-

Sea, fig. 2.27 un sistema plano de fuerzas $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ actuantes sobre una chapa y concurrentes al punto B. De la manera conocida se construye el polígono de fuerzas, los rayos polares y el polígono funicular.

A la figura dibujada a la izquierda, formada por el funicular I-II-III-IV-V y las rectas de acción de $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ y \bar{R} la designamos en forma genérica *polígono funicular*. A la figura de la derecha constituida por el polígono de fuerzas $\bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3 - \bar{F}_4 - \bar{R}$ y los rayos polares 1-2-3-4-5 lo designaremos como *polígono polar*.

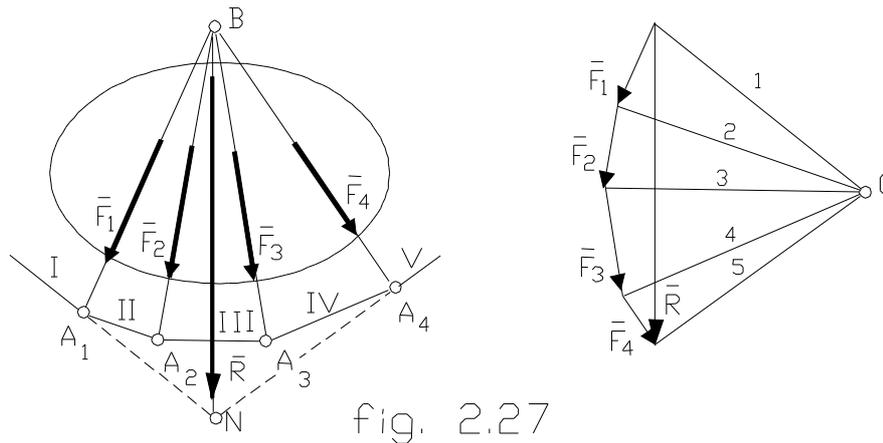


fig. 2.27

Se puede observar que **a cualquier triángulo del “polígono polar” corresponde un haz de tres rayos paralelos en el “polígono funicular” y viceversa**. Por ejemplo al triángulo de lados 1-F₁-2 del “polígono polar” corresponde el haz de rayos paralelos I - F₁ - II de centro A₁ en el “polígono funicular”. Recíprocamente al triángulo de lados F₁ - II - F₂ del “funicular” corresponde en el “polar” un haz F₁-2-F₂ de rayos paralelos a los respectivos lados del triángulo. Esto es extensivo a cualquier triángulo o haz de una u otra figura: todos tienen su correspondiente haz o triángulo de lados paralelos en la otra figura.

En el caso de sistemas de fuerzas concurrentes esta reciprocidad alcanza a los polígonos: al polígono de fuerzas \bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3 - \bar{F}_4 - \bar{R} del “polar” corresponde el haz de rayos paralelos F₁- F₂- F₃ - F₄- R y centro B en el “funicular”.

Recíprocamente al polígono funicular propiamente dicho I-II-III-IV-V del “funicular” corresponde el haz de rayos paralelos 1-2-3-4-5 con centro en el polo 0 . **En otras palabras el polígono funicular y el polígono de fuerzas son figuras recíprocas en el caso de que el sistema de fuerzas sea concurrente.**

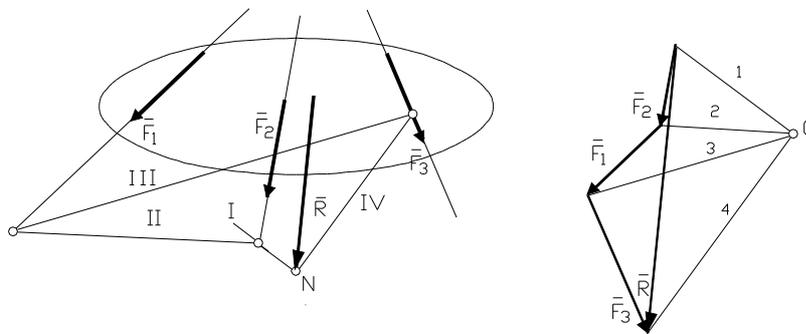


fig. 2.28

Si el sistema de fuerzas no es concurrente desaparece el haz de centro B y no hay reciprocidad entre los polígonos de fuerza y funicular, pero subsiste entre todos los triángulos o haces de tres rayos que puedan formarse en el “polígono funicular” o en el “polígono polar”; cada uno tiene su correspondiente haz de tres rayos paralelos o triángulo también de lados paralelos en el otro.

Esta propiedad es muy útil cuando se construye el funicular alterando el orden de las fuerzas, fig. 2.28, al trazar el polígono de fuerzas como así también en aplicaciones que veremos más adelante.

2.8.3.3.- Eje Polar.-

Si se considera, fig. 2.29, un sistema plano de fuerzas \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 y adoptando como polos los puntos 0 y 0' se construyen los respectivos polígonos funiculares I-II-III-IV y I'-II'-III'-IV'.



Los cuadrángulos completos $B_1B_2A_1A_1'$ y C_1C_200' por construcción tienen cinco pares de lados paralelos: se deduce que B_1B_2 es paralela a $00'$; es decir que los primeros y segundos lados de ambos funiculares se cortan sobre una recta paralela a la recta $00'$. Del mismo modo se demostraría que cualquier otro par de lados correspondientes se cortan en puntos de la misma recta.

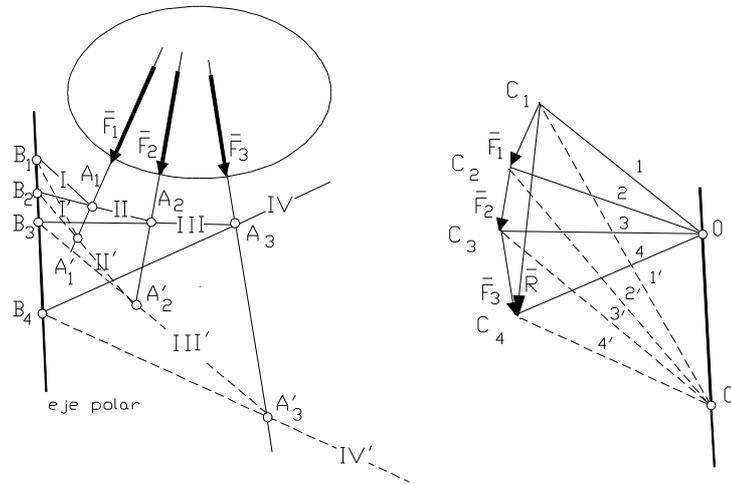


fig. 2.29

Esto constituye otra propiedad del polígono funicular que podemos enunciar así: **Los lados correspondientes (u homólogos) de dos polígonos funiculares de un mismo sistema de fuerzas construidos con polos 0 y $0'$ distintos, se interceptan en puntos de una recta paralela a la recta de los polos llamada eje polar o eje de homología.-**

2.8.3.4.- Polígono Funicular pasante por dos Puntos.-

Se ha dicho en 2.8.3.1 que para el trazado de un polígono funicular debemos fijar tres parámetros: la posición del punto de arranque A_1 sobre la recta de acción de la primer fuerza y las dos coordenadas del polo O . No habiendo condicionamientos para alguno de ellos, como ser la posición del punto de arranque o las coordenadas del polo para que el funicular pase por puntos determinados, es posible una triple infinidad de trazados. En cambio si el funicular debe pasar por uno o dos puntos existirá un doble o simple infinidad de trazados, y si debe pasar por tres puntos, será posible un único trazado cuyo polo habrá que determinar. El caso más frecuente de estos condicionamientos se presenta en la determinación gráfica de reacciones de vínculos (que oportunamente veremos) en que uno de los lados del funicular deba pasar por un punto.

Veamos ahora el trazado de funiculares de un sistema de fuerzas imponiendo la condición que determinados lados pasen por dos puntos prefijados del plano. Entre las diversas construcciones que se pueden efectuar, veamos la siguiente:

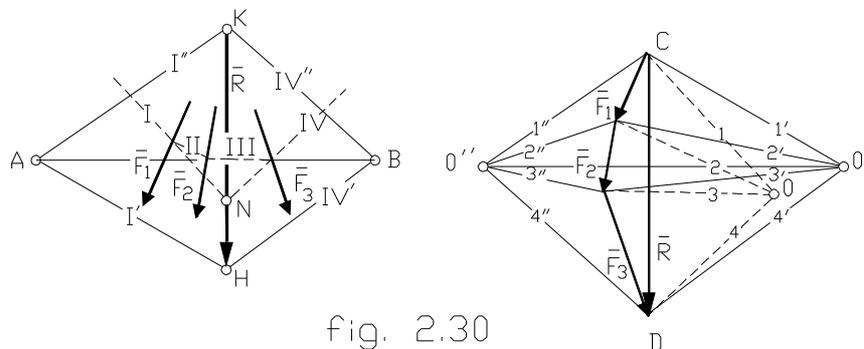


fig. 2.30

Sea $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ el sistema de fuerzas, fig. 2.30; A y B los puntos por los cuales se desea que pasen los lados extremos (primero y último) de los funiculares. Con polo arbitrario 0 se traza un funicular auxiliar que permite determinar la resultante del sistema.



Dos rectas cualesquiera que se corten en un punto de la recta de acción de \bar{R} pueden considerarse como lados extremos de un polígono funicular del sistema. En consecuencia trazando por A y B dos rectas cualesquiera que se corten en H, por ejemplo, las mismas serán los lados extremos, I' - IV', de un polígono funicular del sistema, dado que cumplen la condición impuesta.

Trazando, por el origen y extremo del vector representativo de la resultante del polígono de fuerzas, rayos 1' y 4' paralelos a los lados I' - IV', en su intersección O' tendremos el polo del funicular buscado.- Si se desea se completan los rayos polares 2' - 3' y los lados intermedios II' - III' del funicular, trazado éste que no se ha efectuado en el dibujo por razones de claridad de las figuras.

Se traza ahora dos nuevas rectas que cumplen la condición de cortarse sobre \bar{R} en K, por ejemplo, y que pasen por A y B. Sus paralelas 1'', por el origen de \bar{R} , y 4'', por el extremo de \bar{R} , determinan el polo O''.

Comparando los cuadrángulos CO'DO'' y AHBK se observa que por construcción tienen cinco lados paralelos, por lo tanto los sextos lados O'O'' y AB también serán paralelos.

De lo expresado y teniendo en cuenta que los funiculares que se pueden trazar como el I'IV' y el I''IV'', son infinitos, se enuncia esta propiedad de los funiculares de la siguiente manera: **el lugar geométrico de los polos de los infinitos polígonos funiculares de un mismo sistema de fuerzas pasantes por dos puntos coplanares determinados, es una recta que pasando por el polo de uno cualquiera de ellos, es paralela a la recta definida por los dos puntos.**

2.8.3.5.- Funicular pasante por Tres Puntos.-

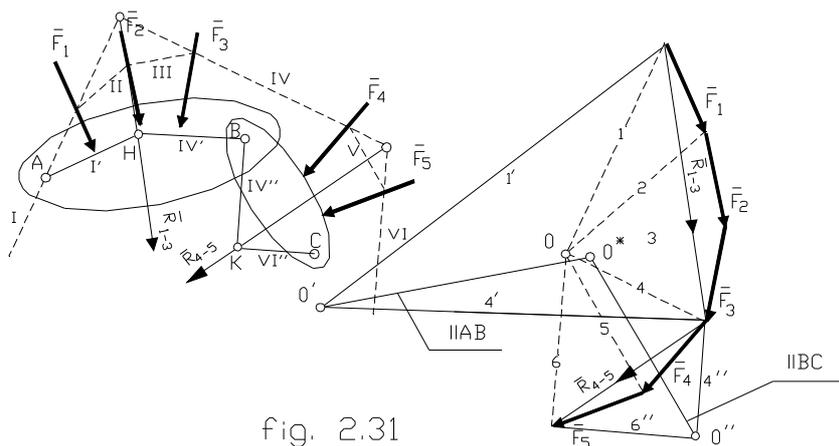


fig. 2.31

Sea, fig. 2.31 un sistema plano de fuerzas $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ y \bar{F}_5 y se necesita trazar el funicular de las mismas cuyo primer lado pasa por A, el cuarto por B y el sexto por C. Ya se ha dicho que este funicular es único y para determinararlo se procede así:

Construido el polígono de fuerzas se adopta un polo arbitrario O y se traza el funicular auxiliar I-II-III-IV-V-VI. Se determinan las resultantes \bar{R}_{1-3} y \bar{R}_{4-5} de las fuerzas que actúan entre A y B y entre B y C separadamente.

Se fija un punto cualquiera H de la resultante parcial \bar{R}_{1-3} y se lo une con A y B; estas rectas I' y IV' pueden considerarse como lados extremos de un funicular de $\bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3$ que pasa por A y B y cuyo polo será el punto O' de intersección de los rayos polares paralelos a los mismos trazados por el origen de \bar{F}_1 y el extremo de \bar{F}_3 , respectivamente, en el polígono de fuerzas.

El lugar geométrico de los polos de los infinitos funiculares de $\bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3$ que cumplen la condición que sus lados extremos, I' y IV', pasan por A y B, será una recta O'O* paralela a AB trazada por O'

A partir del punto K de la recta de acción de \bar{R}_{4-5} se repite el procedimiento y se obtiene un polo O'' de un funicular de $\bar{F}_4 - \bar{F}_5$; cuyos lados extremos, IV'' y VI'', pasan por B y C respectivamente; el lugar geométrico de los polos de los infinitos funiculares pasantes por B y C será la paralela O''O* a BC trazada por O''



La intersección de las rectas paralelas a \overline{AB} y \overline{BC} trazadas por O' y O'' , respectivamente, será el polo O^* buscado correspondiente a un funicular de $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ y \overline{F}_5 cuyo primer lado pasa por A, el cuarto por B y el sexto por C.

Obteniendo O^* se trazan los rayos polares y el funicular a partir del punto A; esta construcción no se ha efectuado por claridad de la figura.

2.8.4.- DETERMINACION DE MOMENTOS POR EL FUNICULAR.-

Utilizando el polígono funicular se puede determinar el momento de una fuerza, o de un sistema de fuerzas, respecto a un punto.-

Sea, fig. 2.32 la fuerza \overline{F} y el punto A que ubica a una distancia d (m) de la recta de acción de \overline{F} ; se quiere determinar gráficamente el momento de \overline{F} respecto de A.

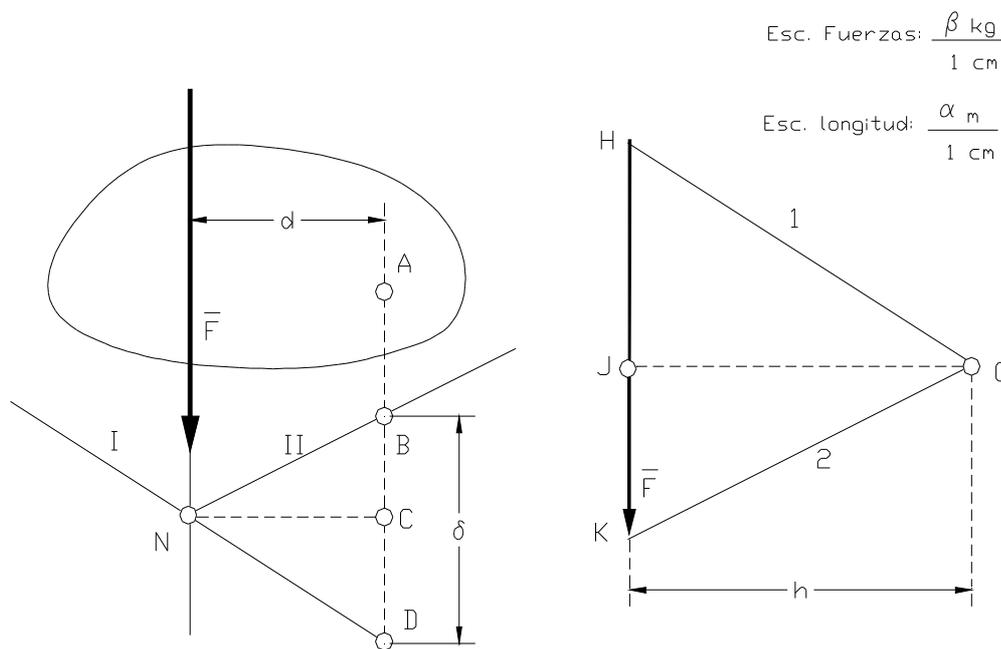


Fig. 2.32

Construyamos en escala el vector representativo de \overline{F} , adoptamos un polo O, se trazan los rayos polares y el funicular I-II de la fuerza. Por A se traza una paralela a la recta de acción de \overline{F} y se determinan las intersecciones B y D con los lados del funicular. Llamamos δ (cm) el segmento BD.

La distancia OJ, del polo a la fuerza, se denomina “distancia polar” y se la designa con la letra “h”.

Si comparamos los triángulos BND y KOH se observa que tienen sus tres lados paralelos, consecuentemente serán semejantes y se tiene que:

$$\frac{HK}{OJ} = \frac{BD}{NC} \quad (1)$$

Pero:

$$HK = F / \text{Esc. Fuerzas}$$

$$OJ = h$$

$$NC = d / \text{Esc. longitudes}$$

$$BD = \delta$$



Luego substituyendo en (1):

$$\frac{F / \text{Esc. Fuerzas}}{h} = \frac{\delta}{d / \text{Esc. Longitudes}}$$

Ordenando:

$$Fd = \delta \cdot h \cdot \text{Esc. Longitudes} \times \text{Esc. Fuerzas}$$

Pero:

$$Fd = M$$

Luego:

$$M = \delta(\text{cm}) \cdot h(\text{cm}) \times \alpha \text{ m / l cm} \times \beta \text{ kg / cm}$$

o sea:

$$M (\text{kgm}) = \delta (\text{cm}) \text{ Esc. Momentos}$$

donde la escala de momentos queda expresada por:

$$\text{Esc. Mom.} = h (\text{cm}) \cdot \text{Esc. Long.} \times \text{Esc. Fuerza} = \frac{h \cdot a \cdot b (\text{kgm})}{\text{cm}}$$

Es decir que el momento de \vec{F} respecto de A queda expresado por el producto del segmento δ (cm) por la escala de momentos. El segmento δ queda determinado por las intersecciones de los lados del funicular de la fuerza con la recta paralela a su recta de acción pasante por el punto A.

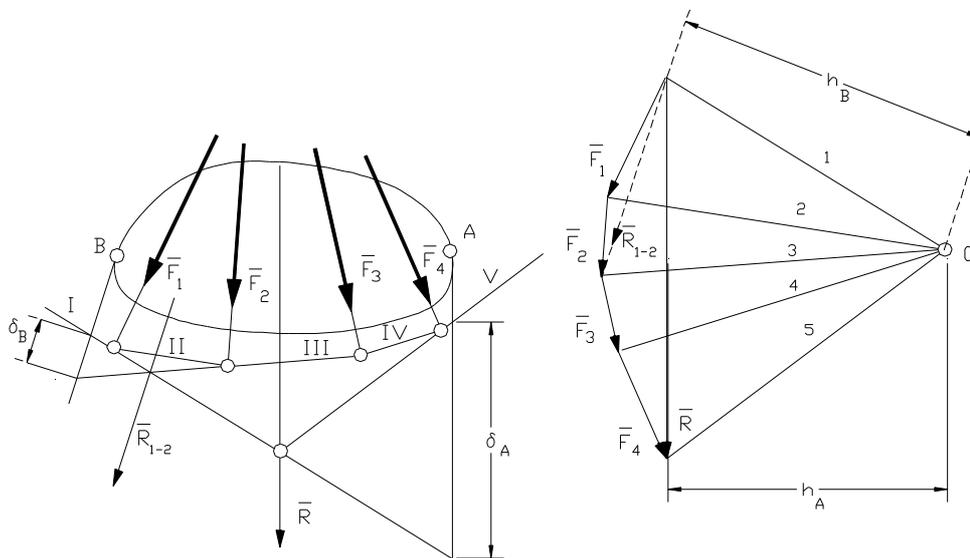


Fig. 2.33

Dado un sistema plano de fuerzas cualesquiera, se puede utilizar el polígono funicular para determinar su momento respecto a un punto del plano, fig. 2.33. Se trazan los polígonos de fuerza y funicular del sistema. A continuación se prolongan el primer y último lado de éste hasta cortar una recta paralela a la resultante que pase por el punto respecto al cual se quiere tomar momento. El segmento δ_A medido en centímetros y multiplicado por la escala de momentos nos da el momento de la resultante del sistema de fuerzas que, por Varignon, es igual al de éste.



El mismo funicular nos permite determinar también el momento de un grupo de fuerzas del sistema con respecto a cualquier punto del plano. Se ha determinado en la figura el momento de:

$$\bar{R}_{1-2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

con respecto al punto B. Para ello se ha interceptado con los lados extremos de \bar{R}_{1-2} (lados I y III) la paralela a \bar{R}_{1-2} pasando por el centro de momentos B. El segmento δ_B en su escala nos da el momento pedido.

$$M_A^R = \delta_A \cdot h_A \cdot \text{Esc. Fuerzas} \times \text{Esc. long.} = \delta_A \text{ (cm) Esc. mom.}$$

$$M_B^{R_{1-2}} = \delta_B \cdot h_B \cdot \text{Esc. Fuerzas} \times \text{Esc. long.} = \delta_B \text{ (cm) Esc. mom.}$$

Obsérvese que al ser distintas las distancias polares, $h_A \neq h_B$, la escala de momentos varía según la dirección de la fuerza cuyo momento se busca.

Si las fuerzas son paralelas la distancia polar "h" es la misma para todas las fuerzas del sistema que se considera y el procedimiento gráfico indicado alcanza su máxima utilidad en las aplicaciones, fig. 2.34.

$$\text{Escala de momentos} = h \cdot \text{Esc. long.} \times \text{Esc. fuerzas} = \frac{h \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \text{kgm}}{\text{cm}}$$

$$\text{Momento del sistema respecto de A: } M_A^R = \delta \text{ (cm) Esc. Mom.}$$

$$\text{Momento de } \bar{F}_1 \text{ respecto de A: } M_A^{F_1} = \delta_1 \text{ (cm) Esc. Mom.}$$

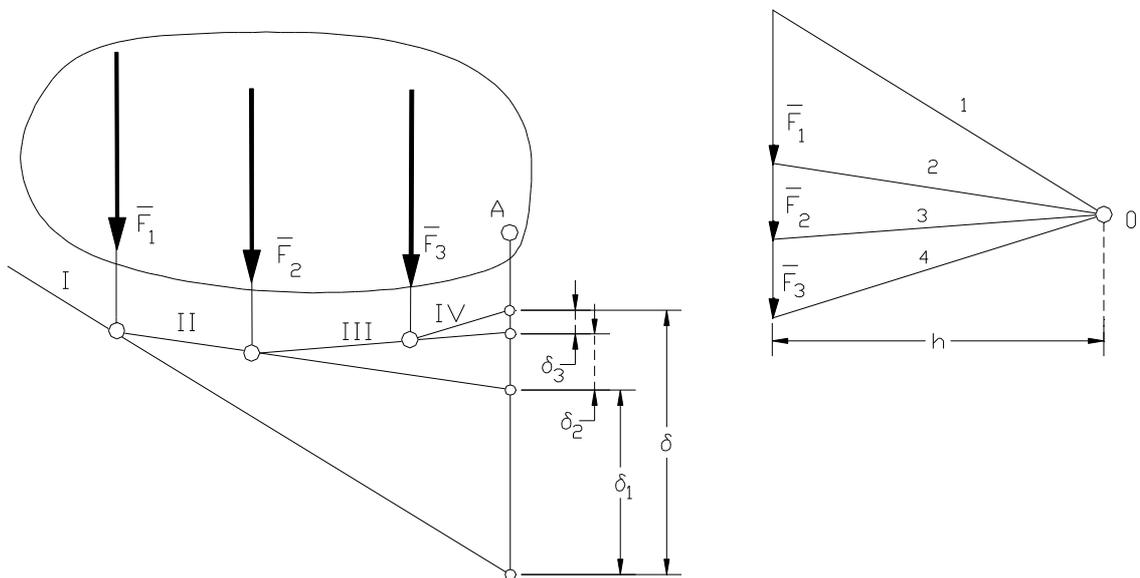


Fig. 2.34

$$\text{Momento de } \bar{F}_2 \text{ respecto de A: } M_A^{F_2} = \delta_2 \text{ (cm) Esc. Mom.}$$

$$\text{Momento de } \bar{F}_3 \text{ respecto de A: } M_A^{F_3} = \delta_3 \text{ (cm) Esc. Mom.}$$



2.9.- DESCOMPOSICION DE UNA FUERZA EN EL PLANO.-

2.9.1.- DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN DOS.-

En el cálculo de las reacciones de los apoyos, que se verá en el Capítulo III, es necesario resolver el problema de la descomposición de una fuerza dada en dos fuerzas que le sean equivalentes o que la equilibren y que satisfagan además determinadas condiciones.

Descomponer una fuerza según dos direcciones que se interceptan en un punto que no pertenece a la recta de acción de la fuerza, es un problema imposible por cuanto ésta última debe ser resultante de las componentes buscadas y estar aplicada en el punto de intersección de las mismas.

El problema es posible sólo cuando las direcciones de las componentes que se buscan se corten sobre la fuerza dada.

Este problema se ha tratado en forma analítica y gráfica en el Capítulo I; ahora se lo verá con un planteo distinto que es como se presenta en la determinación de reacciones.

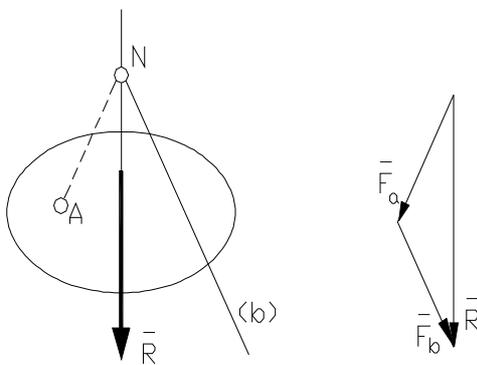


Fig. 2.35

Se trata de descomponer (o equilibrar) una fuerza \vec{R} según dos componentes, una de dirección conocida (b), y otra que pasa por un punto prefijado A fig. 2.35.

Gráficamente se procede determinando la intersección N de la dirección (b) con la recta de acción de \vec{R} . Si llamamos \vec{F}_a y \vec{F}_b a las dos componentes buscadas debe ser:

$$\vec{R} = \vec{F}_a + \vec{F}_b$$

y por el principio del paralelogramo \vec{F}_a debe también concurrir a N; por lo tanto la dirección de \vec{F}_a quedará determinada por los puntos N y A.

Conocidas las direcciones de \vec{F}_a y \vec{F}_b se procede construyendo el triángulo de fuerzas que nos brinda en la escala adoptada las intensidades de ambas componentes.

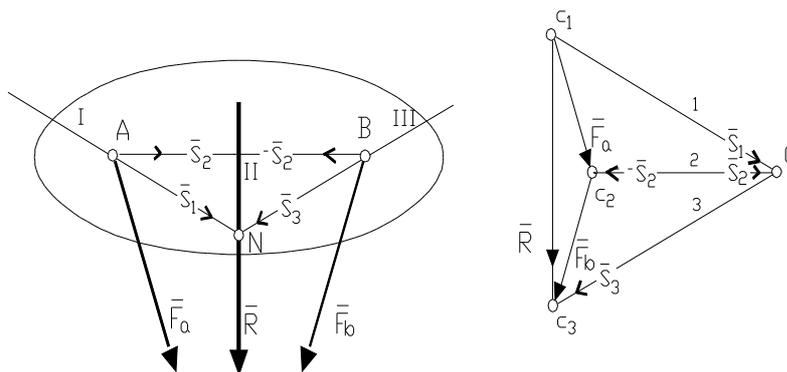


Fig. 2.36

*Frecuentemente el punto N de intersección cae fuera de los límites del dibujo; se recurre entonces al polígono funicular, fig. 2.36. Se lleva en escala un vector representativo de \vec{R} ; se adopta un polo 0 y se trazan los rayos polares 1 y 3 y los lados I y III del funicular teniendo la precaución de **hacer pasar el primer lado por A, único punto conocido de la recta de acción de \vec{F}_a** .- Estos dos*

lados por constituir un funicular de \vec{R} serán simultáneamente los lados extremos de un funicular de componentes \vec{F}_a y \vec{F}_b .

Uniéndolo el punto A con la intersección B, de III con la dirección (b) dada, se obtiene el lado intermedio II del funicular de \vec{F}_a y \vec{F}_b . Paralelo al lado intermedio II se hace pasar por 0 el rayo polar 2. Se traza luego por C_3 una paralela a la dirección (b) hasta cortar al rayo 2 en C_2 y se une este punto con C_1 . Se han obtenido las componentes buscadas, \vec{F}_a pasante por A y \vec{F}_b según la dirección (b).



Efectivamente en N y de acuerdo a la construcción efectuada se tiene:

$$\bar{R} = \bar{S}_1 + \bar{S}_3$$

Pero \bar{S}_1 y \bar{S}_3 pueden ser descompuestas en A y B respectivamente y se tiene :

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \bar{F}_a + \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 &= (-\bar{S}_2) + \bar{F}_b \end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la anterior:

$$\bar{R} = \bar{S}_1 + \bar{S}_3 = \bar{F}_a + \bar{S}_2 - \bar{S}_2 + \bar{F}_b = \bar{F}_a + \bar{F}_b$$

Se destaca que si el punto donde debe pasar una de las componentes está ubicado a la derecha de la fuerza y la dirección de la otra componente a la izquierda, el trazado del funicular se inicia haciendo pasar el lado III por B y luego se determina el punto A como intersección de I con la dirección (a) conocida.

Este procedimiento es de especial aplicación si la fuerza y la dirección dada son paralelas, en cuyo caso la otra componente también será paralela a ellas; **en otras palabras el problema consiste en descomponer una fuerza según dos direcciones paralelas**. Se aplica el procedimiento a continuación en los casos que la fuerza dada sea interior o exterior a las componentes: en el primero son de igual sentido, y en el segundo de sentidos contrarios, fig. 2.37.

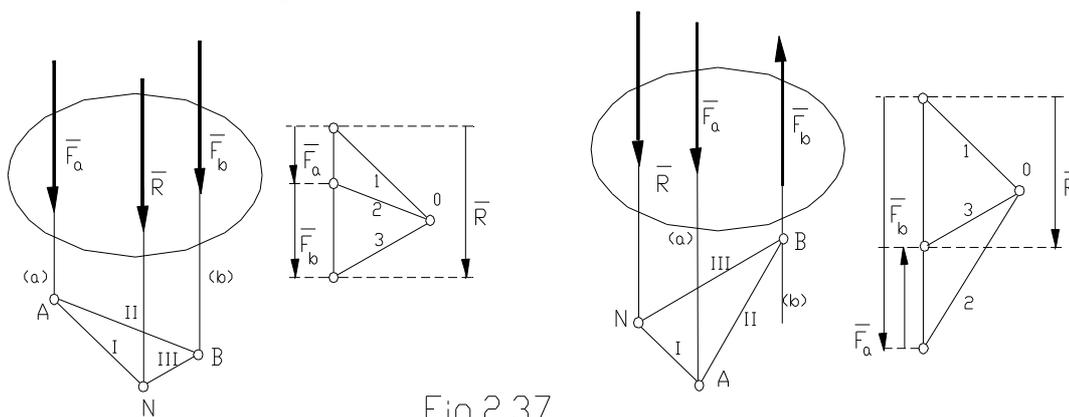


Fig.2.37

La descomposición analítica de una fuerza según dos direcciones concurrentes ha sido tratada en el Capítulo I.

Se verá a continuación la descomposición de una fuerza en dos componentes, una de dirección conocida y la otra pasante por un punto prefijado A. Designamos F_b a la primera y X_A e Y_A las componentes rectangulares de la segunda, fig. 2.38.

Si recordamos las expresiones que permiten reducir un sistema plano de fuerzas.

$$X = \Sigma X_i$$

$$Y = \Sigma Y_i$$

$$M_O^R = \Sigma M_O^i$$

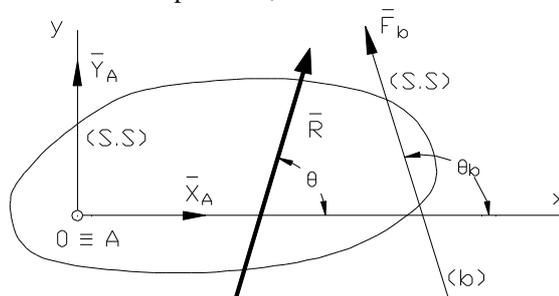


Fig. 2.38

Se tiene que al desarrollar estas tres ecuaciones, queda planteado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que nos resuelve el problema, sobre el que no se insistirá ahora por tratarse detenidamente en el próximo capítulo del programa. Sólo se dirá que frecuentemente conviene sustituir las ecuaciones de suma de componentes por ecuaciones de suma de momentos respecto a diversos puntos.



Por ejemplo se tiene que descomponer \bar{R} según dos componentes cuyas rectas de acción (a) y (b) son paralelas a \bar{R} , fig. 2.39.

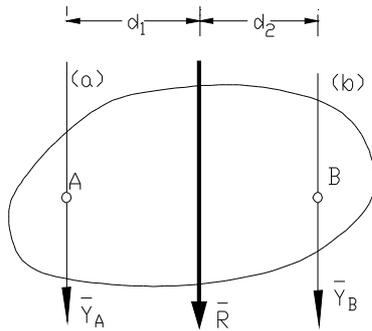


Fig. 2.39

Aplicando Varignon se plantean los momentos de la resultante y de sus componentes incógnitas respecto de A y se despeja Y_B ; luego se repite respecto de B y se obtiene Y_A .

$$+\curvearrowleft \Sigma M_A : R \cdot d_1 = Y_B \cdot (d_1 + d_2) \quad \therefore Y_B = \frac{R \cdot d_1}{d_1 + d_2}$$

$$+\curvearrowleft \Sigma M_B : -R \cdot d_2 = -Y_A \cdot (d_1 + d_2) \quad \therefore Y_A = \frac{R \cdot d_2}{d_1 + d_2}$$

2.9.2.- DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN TRES.-

Interesa el caso en que se dan las tres rectas de acción (1), (2), (3), de las fuerzas incógnitas cuya intensidad y sentido se buscan.

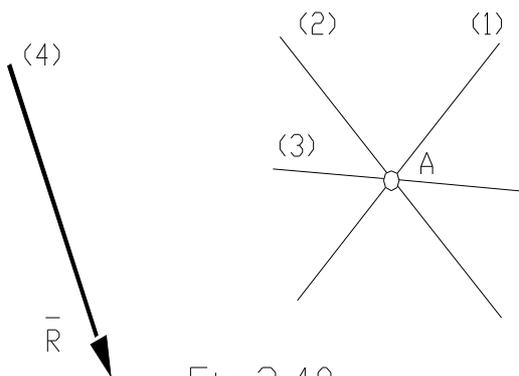


Fig. 2.40

El problema es imposible si las tres rectas (1), (2), (3), se cortan en un punto no perteneciente a la recta (4) de la fuerza dada, porque la resultante de las tres fuerzas debe pasar por su punto de intersección y no podría ser \bar{R} , fig. 2.40.-

Si las cuatro rectas se cortan en un punto el problema es indeterminado, como se vio en 1.5.-

El problema es posible y determinado en el caso general en que las cuatro rectas [(1), (2), (3), (4)] se cortan dos a dos formando un cuadrilátero. Se lo puede resolver gráficamente, mediante la construcción de CULMANN, o analíticamente por el método RITTER.

CONSTRUCCIÓN DE CULMMAN, fig. 2.41.-

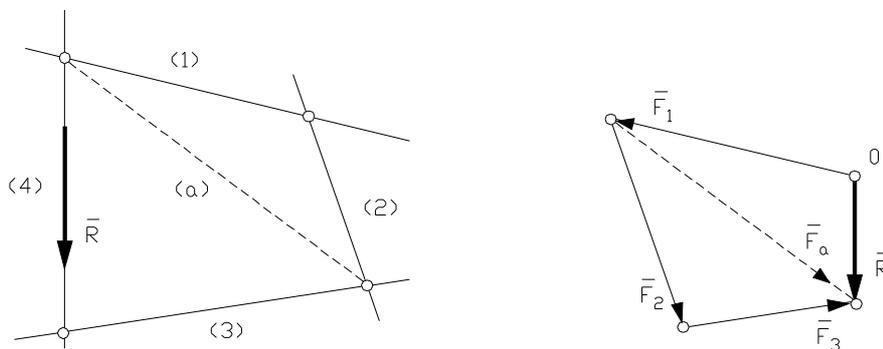


Fig. 2.41

Se descompone la fuerza \bar{R} en una fuerza que actúa, por ejemplo, según la recta (1) y en otra fuerza auxiliar \bar{F}_a que pasa por los puntos de intersección de las rectas (1) con (4) y de (2) con (3), extremos de una cualquiera de las diagonales del cuadrilátero; después se descompone \bar{F}_a según las rectas (2) y (3) obteniéndose las componentes \bar{F}_2 y \bar{F}_3 .



Evidentemente:

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_a \\ \text{y} & \bar{\mathbf{F}}_a = \bar{\mathbf{F}}_2 + \bar{\mathbf{F}}_3 \\ \text{luego} & \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 + \bar{\mathbf{F}}_3 \end{aligned}$$

MÉTODO DE RITTER, fig. 2.42.-

La suma de los momentos de las tres componentes desconocidas debe ser igual al momento de la fuerza $\bar{\mathbf{R}}$ respecto a un punto cualquiera del plano. Adoptando tres puntos no alineados, se establecería un sistema de tres ecuaciones que permite determinar las tres incógnitas, es decir las intensidades $\bar{\mathbf{F}}_1$, $\bar{\mathbf{F}}_2$, $\bar{\mathbf{F}}_3$ de las tres componentes.

Si se eligen, como centro de momento, los puntos A, B y C determinados por las intersecciones de las rectas de acción de las incógnitas, se plantea un sistema de tres ecuaciones con sólo una incógnita cada una de ellas. Se supone un sentido a cada componente y se aplica Varignon:

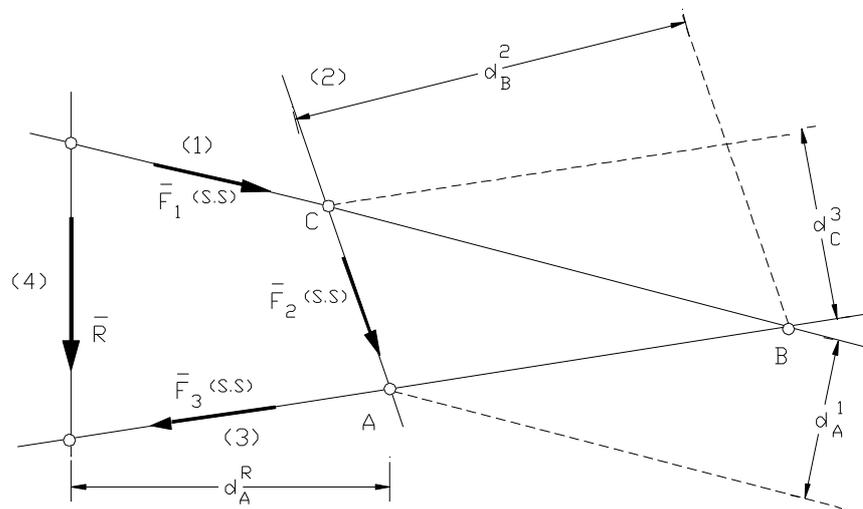


Fig. 2.42

$$+\curvearrowleft \Sigma M_A : d_A^1 \cdot F_1 = -d_A^R \cdot R \quad \therefore \quad \bar{F}_1 = -\frac{d_A^R \cdot R}{d_A^1}$$

$$+\curvearrowleft \Sigma M_B : -d_B^2 \cdot F_2 = -d_B^R \cdot R \quad \therefore \quad \bar{F}_2 = \frac{d_B^R \cdot R}{d_B^2}$$

$$+\curvearrowleft \Sigma M_C : d_C^3 \cdot F_3 = -d_C^R \cdot R \quad \therefore \quad \bar{F}_3 = -\frac{d_C^R \cdot R}{d_C^3}$$

En donde al brazo d_A^1 lo leemos: distancia de $\bar{\mathbf{F}}_1$ al punto A.- Los signos menos para $\bar{\mathbf{F}}_1$ y $\bar{\mathbf{F}}_3$ significan que los sentidos supuestos para ellas son erróneos y deben ser cambiados.-



2.10.- FUERZAS DISTRIBUIDAS.- REDUCCION.-

2.10.1.- FUERZAS DISTRIBUIDAS SOBRE LINEAS Y SUPERFICIES.-

Hasta el momento se ha considerado a las fuerzas concentradas en un punto, lo que es válido en tanto y en cuanto actúen sobre superficies pequeñas.

Sin embargo, las cargas o fuerzas que actúan sobre las estructuras frecuentemente están distribuidas sobre volúmenes, superficies o líneas. Son fuerzas distribuidas sobre volúmenes las fuerzas de masa como el peso de los cuerpos, las fuerzas de inercia y las fuerzas magnéticas. Son fuerzas distribuidas sobre superficies, el peso de cuerpos apoyados sobre áreas de contacto, el empuje debido a la presión de los fluidos, viento, agua o de tierras y materiales almacenados a granel, el rozamiento, etc.- Tenemos fuerzas distribuidas sobre líneas en el caso de cables sometidos a su propio peso, a la acción del viento o de la nieve.-

Es frecuente la existencia de fuerzas simétricamente distribuidas respecto a la línea media de la franja de superficie sobre la que actúan.

Vamos a caracterizar este tipo de fuerzas y determinar su resultante, fig. 2.43.

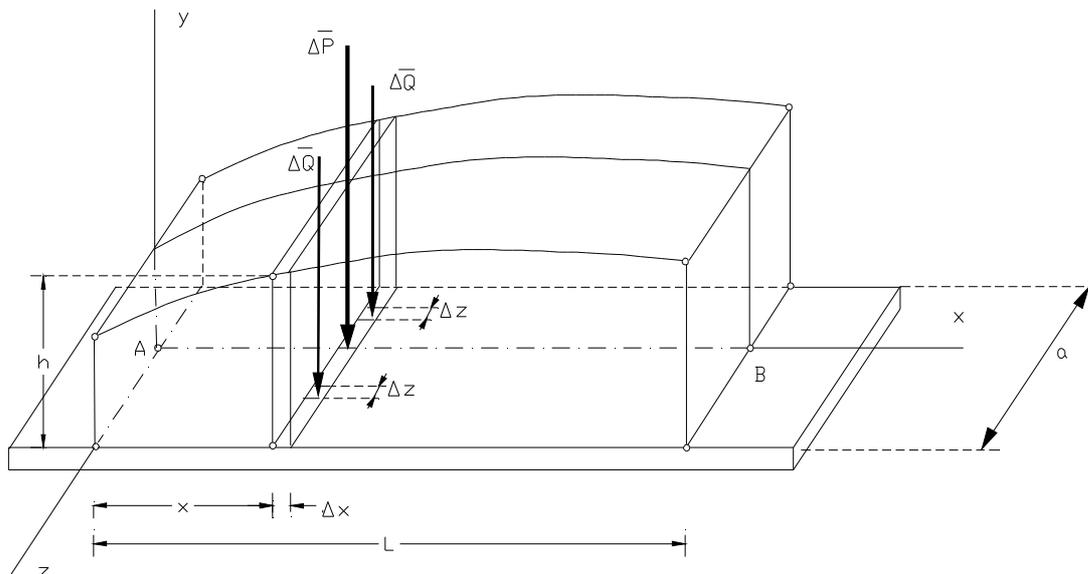


Fig. 2.43

Sea un material, arena por ejemplo, apoyado sobre una superficie plana de ancho "a" y largo L, repartido simétricamente respecto al plano vertical xy pasante por la línea media AB de la superficie que, si suponemos plana, será un segmento de recta representada por el eje de la viga o losa de apoyo.

El peso de la arena que incide sobre un área elemental de ancho "a" y largo " Δx ", y designando con h y γ la altura y peso específico aparente del material será:

$$\Delta P = \gamma \cdot a \cdot h \cdot \Delta x \text{ (kg.)}$$

Este peso se distribuye en todo el ancho "a" pero, dada la simetría supuesta, la resultante, o sea $\bar{\Delta P}$, tendrá su recta de acción sobre la línea media AB de la franja. Esta conclusión es válida no sólo para el peso incidente sobre el área elemental, $a \cdot \Delta x$, sino también para toda la superficie cargada, aL , lo que permite **sustituir el peso del material distribuido sobre toda la franja, por un sistema de fuerzas paralelas \bar{DP} actuantes a lo largo de la línea media AB, que llamaremos en forma general "línea cargada"**.



Si establecemos ahora el cociente:

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = p_m \quad [\text{kg./m}]$$

tenemos expresada la intensidad media de la fuerza (o carga) distribuida en la longitud Δx de la línea cargada AB.

Si hacemos Δx infinitamente pequeño:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dP}{dx} = p \quad [\text{kg./m}]$$

Se obtiene la intensidad de la carga distribuida en el punto de abscisa x **de la línea cargada:** caracteriza el tipo de carga distribuida, que podrá ser constante o variar según determinada ley: $p = p(x)$.

Si conocemos la intensidad de la carga p , la fuerza infinitésima que actúa sobre una longitud dx de la línea cargada será:

$$dP = p dx$$

y la carga total que actúa sobre la línea AB de longitud L será:

$$P = \int_0^L p dx$$

en muchas aplicaciones de la ingeniería **es suficiente tomar como intensidad de carga en un punto, la intensidad media correspondiente a una longitud unitaria.**- Si $\Delta x = 1$ m la intensidad se podría tomar:

$$p = \frac{\Delta P}{1\text{m}}$$

y se define entonces como **intensidad de carga a la carga por unidad de longitud.**

Si en lugar de establecer la relación entre el peso ΔP del material apoyado en la superficie de área $a \cdot \Delta x$ y la longitud Δx de línea cargada, hubiésemos establecido la relación entre el peso $\overline{\Delta Q}$ del material que apoya en el elemento del área $\Delta x \Delta z$ y el valor de ésta

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta z} = q \quad [\text{kg/m}^2]$$

tendríamos el valor de la intensidad media de carga en el área $\Delta x \Delta z$. Si en vez de ésta tomásemos la unidad del área se tendría la carga por unidad de superficie.

Dada la simetría que hemos supuesto para la carga respecto al plano xy es evidente que q es constante en todo el ancho de la franja cargada, resultando.

$$q_a = p \quad [\text{kg/m}]$$

que expresa la relación entre las intensidades de carga por unidad de longitud y de superficie en el supuesto de la simetría planteada, o sea de $h = \text{cte}$ en el sentido de las z .

La intensidad de carga “ p ” puede ser constante o variable a lo largo de la línea cargada. La variación puede ser aleatoria o seguir una determinada ley. Su **representación gráfica define una línea llamada línea de carga: el área delimitada por la línea de carga, la línea cargada y las ordenadas extremas se denomina diagrama de carga**, fig. 2.44. Frecuentemente se asimila la intensidad de carga “ p ” a leyes de simple variación que origina diagramas de cargas consistentes en figuras geométricas cuya área y bari-centros son de fácil determinación, a saber:



- $p = \text{cte}$ el diagrama de carga es un rectángulo
- $p = ax$ el diagrama de carga es un triángulo
- $p = p_0 + bx$ el diagrama de carga es un trapecio

en donde “a” y “b” son constantes.

2.10.2.- RESULTANTE DE UNA FUERZA DISTRIBUIDA.-

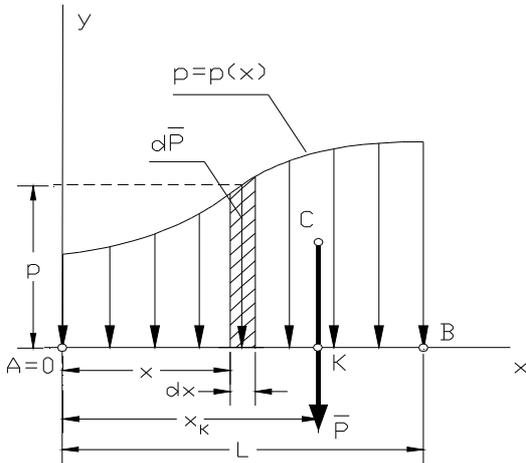


Fig. 2.44

Sea una fuerza distribuida sobre la línea AB representada por su diagrama de carga, fig.2.44.

Una fuerza distribuida sobre una línea recta constituye un sistema de infinitas fuerzas paralelas infinitamente próximas de intensidad:

$$dP = p dx$$

Se sabe que todo sistema plano de fuerzas paralelas puede reducirse a una única fuerza de igual dirección, la resultante del sistema, cuya intensidad vale:

$$P = \int_0^L dP = \int_0^L p \cdot dx$$

Veamos su interpretación en el diagrama de cargas. Representando a la intensidad de carga y las longitudes en las escalas gráficas respectivas, será :

$$dP = p dx = dA$$

Es decir que la intensidad de la fuerza que actúa sobre la longitud dx está dada por el área del rectángulo infinitésimo rayado en el diagrama de carga.

La resultante de la carga distribuida en toda la longitud L de la línea cargada será:

$$P = \int_0^L dP = \int_0^L p \cdot dx = \int_0^L dA = A$$

O sea que *la intensidad de la resultante de una carga distribuida sobre una línea recta, está determinada por el área del diagrama de carga.*

El punto K en que la resultante corta a la línea cargada se denomina **centro de presión**. Para determinar su posición respecto al punto A aplicamos Varignon con respecto al mismo punto:

$$x_K P = \int_0^L x \cdot dP \quad \therefore \quad x_K = \frac{\int_0^L x \cdot dP}{P}$$

Si sustituimos dP y P por sus iguales del diagrama de carga dA y A tenemos:

$$x_K = \frac{\int_0^L x \cdot dP}{P} = \frac{\int_0^L x \cdot dA}{A} = \frac{S_y}{A} = x_c$$

Donde S_y es el momento estático del área del diagrama de carga respecto al eje “y” y x_c la abscisa de su baricentro. (Los conceptos adquiridos por el alumno en Física I sobre baricentro y momento estático son ampliados en el capítulo 4).

Sintetizando podemos decir que: *Una carga distribuida sobre una línea recta constituye un sistema de infinitas fuerzas paralelas que pueden representarse por un diagrama de carga, cuya área expresa la intensidad de su resultante y su baricentro determina un punto de su recta de acción de dirección paralela a las fuerzas dadas.-*

En lo expuesto hemos considerado implícitamente que la dirección de las fuerzas es normal a la línea cargada, lo que responde al caso frecuente en que la carga es el peso de cuerpos apoyados sobre una viga horizontal. Si la viga no fuese horizontal, la carga distribuida que apoya sobre ella, continúa siendo un sistema de fuerzas paralelas, sólo que ahora no es normal a la línea cargada. La reducción del sistema se efectúa en la forma descripta.

2.10.3.- EMPUJE DEL AGUA SOBRE SUPERFICIES PLANAS.-

Consideremos otra clase de fuerza distribuida: la originada por la presión de los líquidos sobre las paredes y fondo de los recipientes que los conducen y/o contienen. Tomemos una sección transversal de un canal o un depósito de agua, fig. 2.45. Sabemos que la presión hidrostática, “p”, a la profundidad “h” se transmite en todas direcciones con la misma intensidad y que ésta, es igual al peso de la columna líquida que incide sobre una superficie horizontal de área unitaria situada a esa profundidad:

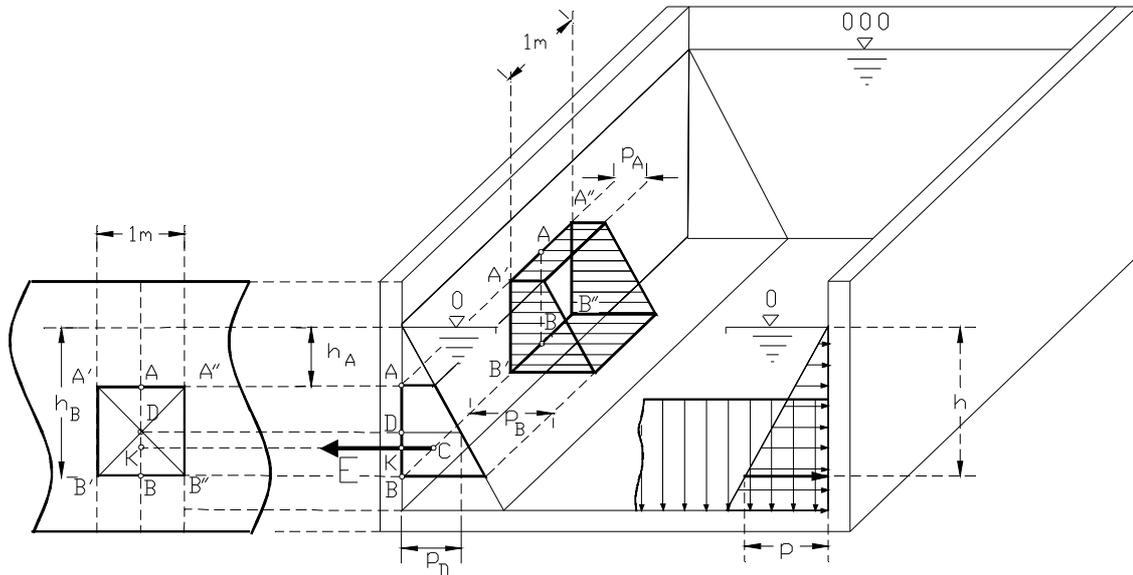


Fig. 2.45

$$p = \gamma[\text{kg}/\text{m}^3].h[\text{m}] = \gamma.h[\text{kg}/\text{m}^2]$$

donde γ es el peso específico del líquido. Por lo tanto la presión del líquido que incidirá normal a la pared variará proporcionalmente a la profundidad “h” del punto considerado en las paredes laterales y se mantendrá constante en el fondo horizontal, tal como se observa en los diagramas de presiones trazados en ambas paredes y parte del fondo de la sección transversal dibujada.

Al diagrama de presiones podemos tomarlo como diagrama de carga de una faja de pared de ancho unitario con sólo multiplicarlo por el ancho “a” igual a 1 metro (apartado 2.10.1).-

En el caso de la superficie A'A''B'B'', la línea cargada AB demarcada sobre la pared, corresponde a la intersección de ésta con el plano vertical de simetría de la cuña de presiones representada en la figura ; en ésta al diagrama de presiones se lo ha traído a un primer plano de la pared izquierda asociándolo a una vista frontal del área A'A''B'B''B' obtenida rebatiendo 90° la faja de la pared de ancho unitario. La fuerza resultante de esa cuña de presiones será normal a la superficie sobre la que incide y su intensidad estará



dada por el área del diagrama de carga y pasará por el baricentro C del mismo : se designa **empuje del agua** y está aplicado en su intersección con la línea cargada AB que, sabemos, es el centro de presión K.- Llamando L a la longitud de la línea cargada AB , tendremos :

$$E[\text{kg.}] = p_D [\text{kg/m}^2] \cdot l[\text{m}]. \quad L[\text{m}] = p_D [\text{kg/m}^2] \cdot A[\text{m}^2]$$

Podemos entonces decir que el **empuje del agua sobre una superficie sumergida rectangular plana es igual al producto del área de la superficie sumergida por la presión hidrostática en correspondencia con el baricentro de la misma.**

$$E = p_D A$$

donde p_D es la presión en kg/m^2 en correspondencia con el baricentro de la superficie sumergida cuya área vale A. Esta conclusión que hemos obtenido para superficies planas rectangulares es válida para cualquier forma de superficie plana: circular, triangular, trapecial, etc. esto se obtiene simplemente integrando la expresión $dE = p \cdot dA$ en donde: dE es el empuje infinitésimo que actúa sobre un elemento dA de área, y $p = \gamma \cdot h$ la presión hidrostática.-

El empuje E sobre la superficie sumergida no pasa por el baricentro D de ésta, sino por el centroide C del diagrama de presiones, interceptando a la superficie en K. Los puntos D y K coinciden en el caso de superficie rectangular y diagrama de presiones también rectangular.

Para la determinación de las coordenadas del centro de presión de superficies planas no rectangulares no es suficiente la aplicación de momentos de primer orden : se necesitan los momentos de segundo orden.

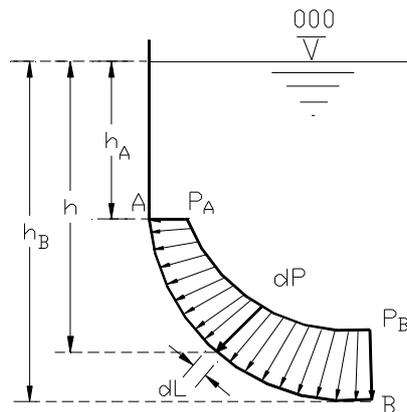


Fig.2.46

Consideremos finalmente una superficie curva, cilíndrica por ejemplo, de ancho unitario sometida a la presión del agua como es el caso de compuertas de sector circular, perfil de diques, álabes, etc., fig. 2.46

Si trazamos el diagrama de presiones observamos que la fuerza distribuida ha dejado de ser **un sistema de infinitas fuerzas infinitésimas** paralelas y no son por lo tanto válidas las conclusiones obtenidas para las superficies planas.

Si la curva directriz de la superficie cilíndrica es una circunferencia la presión del agua originará un sistema plano de infinitas fuerzas infinitésimas concurrentes al centro de la directriz. Las expresiones:

$$X = \sum X_i \quad e \quad Y = \sum Y_i$$

nos permiten reducir este sistema introduciendo integrales en lugar de sumatorias, coordenadas polares y expresando la ley de variación de las presiones en función de la profundidad y la ecuación de la directriz.



Si la directriz de la superficie cilíndrica es otra curva el sistema de fuerzas infinitésimas equivalentes a la presión del agua será plano no concurrente y para reducirlo habrá que recurrir a las tres expresiones conocidas:

$$X = \sum X_i \qquad Y = \sum Y_i \qquad M_O^R = \sum M_O$$

No entraremos en el procedimiento por tratarse de un problema de Hidráulica Aplicada que el alumno verá en su oportunidad. Sí veremos, en cambio, el procedimiento gráfico para el trazado de la curva funicular de una carga distribuida por cuanto lo aplicaremos en el trazado de diagramas de esfuerzos internos.

2.10.4.- REDUCCION GRAFICA DE FUERZAS DISTRIBUIDAS.-

El procedimiento del polígono funicular puede extenderse también a la reducción de fuerzas repartidas sobre una línea.

En la fig. 2.47 se tiene una línea curva plana AB cargada con fuerzas distribuidas cuyo diagrama de carga conocemos. Hemos visto que éste representa un sistema de infinitas fuerzas infinitésimas. En su lugar concibamos al sistema formado por un elevado número de fuerzas muy pequeñas pero finitas. El polígono de fuerzas “amn” tendrá también un elevado número de lados y rayos polares y con el polígono funicular sucederá lo mismo siendo sus lados extremos paralelos a los rayos polares Oa y Ob .- Si las fuerzas tienden a ser infinitamente pequeñas, en el límite los polígonos de fuerzas y funicular se transformarían **en la curva de fuerzas y la curva funicular, respectivamente, y los lados extremos del funicular serán las tangentes extremas de la funicular.** Esto que se ha enunciado para el diagrama de carga total, es válido para cada uno de los tramos parciales en que pueda dividirse el mismo.

Dividamos ahora el diagrama de carga en diagramas parciales trazando las rectas MM' y NN' perpendiculares a la línea cargada AB. Estas rectas se denominan **divisorias de carga** y si las prolongamos cortan a la curva funicular (supuesta conocida) en M_1 y N_1 . Las tangentes en M_1 , t_m y en A_1 , t_a , serán los lados extremos del funicular de la resultante \bar{R}_1 de las fuerzas distribuidas entre A y M, y su intersección determina un punto de la recta de acción de \bar{R}_1 .- Otro punto de esta recta está dado por el baricentro del diagrama parcial de cargas con lo que queda determinada la posición de \bar{R}_1 . Lo dicho es extensivo a los otros dos tramos MN y NB de la línea cargada.

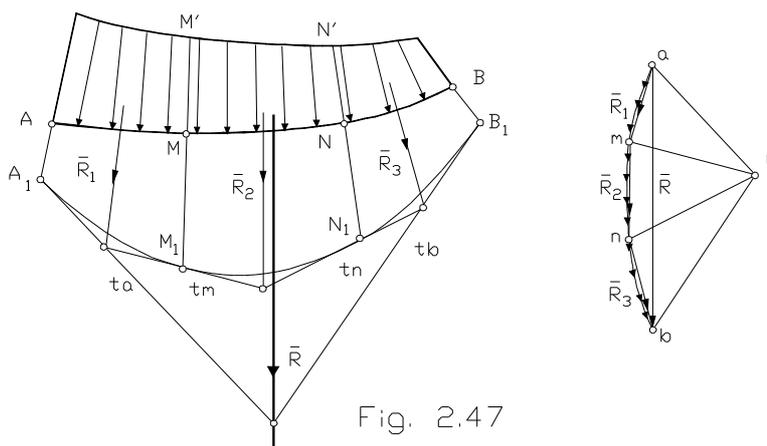


Fig. 2.47

Si por el polo O de la curva de fuerzas trazamos paralelas a las tangentes intermedias t_m y t_n determinarán sobre la curva de fuerzas los puntos “m” y “n” tales que

$$\bar{am} = \bar{R}_1 \qquad \bar{mn} = \bar{R}_2 \qquad \bar{nb} = \bar{R}_3$$

Dada la reciprocidad existente entre los triángulos del polígono de las fuerzas y los haces de tres rayos del funicular y recíprocamente (apartado 2.8.3.2), **el polígono $t_a-t_m-t_n-t_b$ es polígono funicular de las resul-**



tantes parciales $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ en que se ha dividido el diagrama de cargas. Observando la fig. 2.47 vemos que el polígono funicular de las resultantes es circunscrito a la curva funicular.

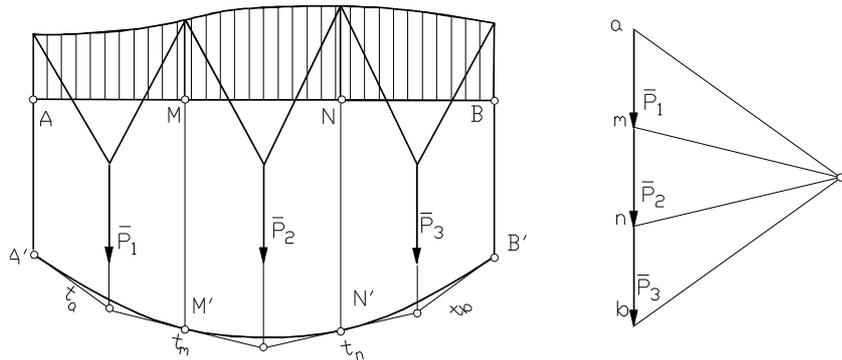


Fig.2.48

Veamos ahora como trazamos la curva funicular en base a lo expuesto, fig. 2.48. Digamos en primer término que la línea cargada AB se la ha tomado como recta por ser el caso más frecuente. En los puntos M y N se han trazado ortogonalmente divisorias de carga que dividen la línea cargada en tres tramos AM, MN y NB. Al variar la intensidad de carga “p” según una ley no lineal, el distanciamiento entre divisorias de carga debe ser tal que los diagramas de carga puedan considerarse, sin error sensible, una figura geométrica cuya área y posición del baricentro resulten fácilmente determinables, trapecios en el caso de la fig. 2.49.

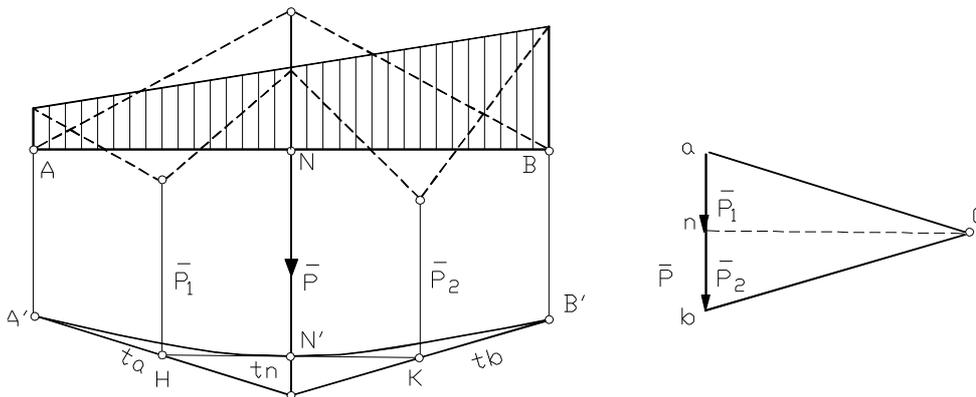


Fig.2.49

Determinadas las áreas de los diagramas parciales y la posición de sus baricentros (tema que se verá en el capítulo 3) se conocen las resultantes parciales \bar{P}_1, \bar{P}_2 y \bar{P}_3 y sus posiciones en la línea cargada AB, de la fig. 2.48. Se construyen los polígonos de fuerzas y funicular de las resultantes parciales y se prolongan las divisorias de carga hasta interceptar en M' y N' los lados intermedios t_m y t_n del funicular. Se determinan cuatro puntos de la curva funicular $A'-M'-N'-B'$ y sus respectivas tangentes $t_a-t_m-t_n-t_b$ con lo que podemos trazar la curva funicular en forma aproximada.

Si “p” es constante o varía según una ley lineal, lo que implica diagramas de carga rectangular, triangular o trapezoidal, se puede trazar la curva funicular siguiendo el procedimiento descrito, que admite una mayor simplificación recurriendo a tangentes intermedias entre las dos extremas. Para ello se determina el área y el baricentro del diagrama de carga total con lo que se obtiene \bar{P} , en valor y posición posibilitando la construcción del funicular de lados t_a-t_b , fig. 2.49

Se toma ahora la recta de acción de la resultante \bar{P} como divisoria de cargas que divide el diagrama en dos parciales. Determinando el baricentro de cada una de ellos quedan ubicadas las resultantes parciales \bar{P}_1, \bar{P}_2 paralelas a \bar{P} , cuyas rectas de acción cortan los lados extremos del funicular de \bar{P} , t_a-t_b en dos



puntos, H y K, que determinan la tangente intermedia con punto de tangencia N' en la intersección con la divisoria de cargas. Si necesitamos más tangentes y puntos de tangencia intermedios se repite la construc-

ción tomando como divisorias de cargas las resultantes parciales \bar{P}_1 - \bar{P}_2 y así sucesivamente hasta obtener la aproximación requerida.

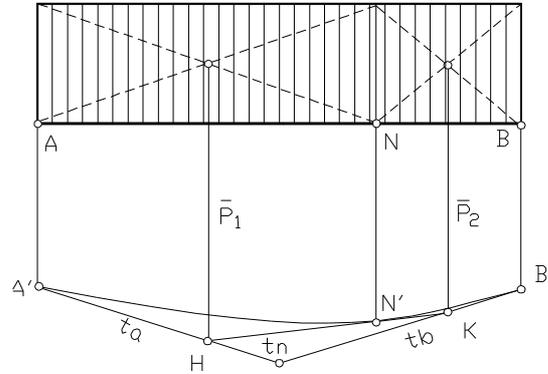


Fig.2.50

Si en lugar de querer trazar la tangente intermedia en correspondencia con el punto de intersección de la resultante parcial P con la línea cargada, se quisiera trazar en otro punto intermedio cualquiera N, fig. 2.50, es válido el procedimiento que se ha explicado. Se lo ha repetido en la figura mencionada, en la cual se dan por determinadas las tangentes extremas lo se efectúa con un funicular o por otro medios que veremos mas adelante. Esto se puede repetir para tantos puntos intermedios como se desee.-

