


CAPÍTULO 3

LA CHAPA Y EL CUERPO RÍGIDOS VINCULADOS

3.1.- LA CHAPA RIGIDA VINCULADA.-

Se ha definido en 2.7 como chapa rígida a un conjunto o sistema de puntos materiales rígidamente unidos entre sí, situados en un mismo plano, de forma periférica indefinida ya que representan esquemáticamente el plano de simetría de diversos tipos de estructuras planas. Se hayan sometidas únicamente a fuerzas y/o pares que actúan en su plano por no poseer capacidad para absorber y transmitir otro tipo de acción.

Para estudiar su equilibrio comenzamos por analizar los desplazamientos que puede efectuar en su plano. Se admite que no hay posibilidad de desplazamientos transversales lo que hace que la chapa sólo pueda moverse en su propio plano. Esta hipótesis se cumple en las aplicaciones ya que en ellas las estructuras planas están entrelazadas con estructuras transversales que le impiden esos desplazamientos.

3.1.1.- CINEMATICA DE LA CHAPA RIGIDA.- GRADOS DE LIBERTAD.-

Consideremos, fig. 3.1 un punto A en el plano x,y. Si debido a un movimiento cualquiera pasa a la posición A' se define como desplazamiento del punto A al vector $\overline{AA'}$ que va de una a otra posición, independientemente del camino recorrido para ello. Si se designan $\overline{\Delta x}$ y $\overline{\Delta y}$ las componentes rectangulares de $\overline{AA'}$ se tiene que:

$$\overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} = \overline{AA'}$$

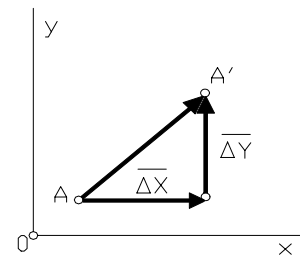


fig. 3.1

Los vectores $\overline{\Delta x}$ y $\overline{\Delta y}$ pueden ser concebidos como desplazamientos correspondientes a dos movimientos componentes, independientes, rectilíneos y paralelos a los ejes x e y. Se dice que el **punto en el plano tiene dos grados de libertad de movimiento (o simplemente grados de libertad)**, lo que significa que el punto tiene dos posibilidades de movimientos rectilíneos independientes en base a los cuales se puede expresar cualquier desplazamiento del punto en el plano.

Si se fija una condición a la posición del punto durante el movimiento, por ejemplo mantener constante su abscisa x_A , le queda sólo la posibilidad de moverse paralelamente al eje y: se ha quedado con un solo grado de libertad.- Si se fijan dos condiciones, $x_A = \text{cte.}$, $y_A = \text{cte.}$, el punto queda inmovilizado, fijo: han desaparecido sus dos grados de libertad.

Si el punto puede moverse en el espacio, un desplazamiento cualquiera puede expresarse por tres componentes rectangulares:

$$\overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z} = \overline{AA'}$$

el punto posee en el espacio tres grados de libertad y se requieren tres condiciones para inmovilizarlo.

Previo a establecer cuantos grados de libertad posee la chapa en su plano, estudiemos las características de los movimientos que puede efectuar cuando está constreñida por sus vínculos a moverse sólo en él. Esos movimientos son de dos clases:

Movimiento de traslación (fig. 3.2), en el cual todos sus puntos experimentan desplazamientos instantáneos iguales en intensidad, dirección y sentido:

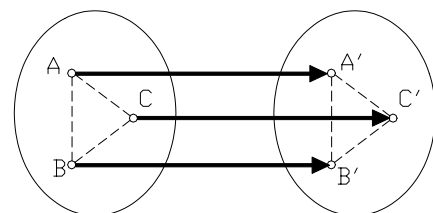


Fig. 3.2

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \dots$$



El cuerpo se desplaza paralelo a sí mismo. Geométricamente las trayectorias descritas por los puntos pueden tener cualquier forma, rectas como caso particular, pero son todas iguales, superponibles (congruentes).

Movimiento de rotación (fig. 3.3), en el cual los puntos describen como trayectorias arcos de circunferencias concéntricas: el centro común de las mismas se llama centro o polo de rotación que se caracteriza por experimentar un desplazamiento nulo. Los desplazamientos de otros puntos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ varían de punto a punto.

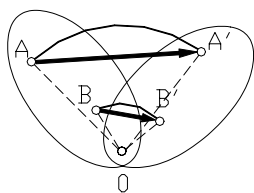


Fig. 3.3

La rotación de la chapa se caracteriza por el ángulo θ girado por la recta que une el polo con un punto cualquiera de la chapa, fig. 3.4. En las aplicaciones relativas a las estructuras el valor de θ es muy pequeño por lo que se considera que las rotaciones que experimentan las chapas son infinitesimas.

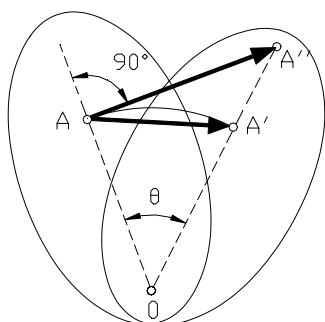


Fig. 3.4

En este caso si θ se hace infinitamente pequeño, A' tiende a coincidir con A , y el vector desplazamiento $\overline{AA'}$ secante a la circunferencia, tiende a coincidir con el vector $\overline{AA''}$, tangente a la circunferencia y perpendicular a la recta OA que une el punto considerado con el polo.

Para una rotación finita se tiene que:

$$\overline{AA''} = OA \cdot \text{tg } \theta$$

y cuando θ se hace infinitamente pequeña en el límite, para $\theta \rightarrow 0$, la intensidad del desplazamiento vale:

$$\overline{AA'} = \overline{AA''} = OA \cdot \theta$$

En resumen, en las rotaciones a considerar en el estudio de las chapas rígidas los desplazamientos de los puntos son de dirección perpendicular a la recta que une el punto considerado con el polo y de intensidad proporcional a la distancia entre ambos.

Para conocer la posición del polo de rotación de una chapa es necesario conocer el desplazamiento de dos de sus puntos.

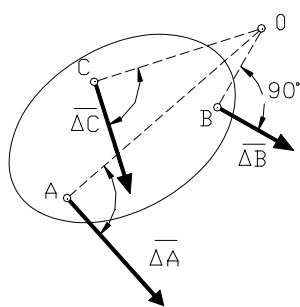


Fig. 3.5

Sea, fig. 3.5 una chapa en la cual se conoce los desplazamientos del punto A , $\overline{\Delta A}$ y del punto B , $\overline{\Delta B}$.

Se trazan por A y B las normales a ambos desplazamientos y en su intersección estará el polo O .

Conociendo éste se puede establecer la dirección del desplazamiento de cualquier otro punto C , ya que el mismo será normal a la recta que lo une con el polo O .

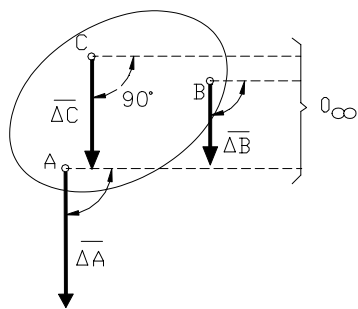


Fig. 3.6

Si la chapa experimenta una traslación (fig. 3.6), se sabe que:

$$\overline{\Delta A} = \overline{\Delta B} = \overline{\Delta C}$$

Por ello aplicando el procedimiento anterior, resulta que el polo es el punto impropio de la dirección normal a los desplazamientos.

Por lo tanto, todo movimiento de una chapa en su plano es una rotación con centro en un punto propio o impropio del mismo.-



Pasemos ahora a establecer los grados de libertad que posee una chapa en su plano. Para ello supongamos que la misma pasa de la posición S a la posición S₁, fig. 3.7.

El punto A experimenta un desplazamiento AA₁ y el B, BB₁. Podemos expresarlos en función de tres desplazamientos componentes independientes:

$$\overline{AA_1} = \overline{AA'} + \overline{A'A''} + \overline{A''A_1}$$

$$\overline{BB_1} = \overline{BB'} + \overline{B'B''} + \overline{B''B_1}$$

Donde $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son desplazamientos de los puntos A y B en el movimiento componente de traslación según la dirección x; $\overline{A'A''}$ y $\overline{B'B''}$ corresponde a la traslación según el eje y; por último $\overline{A''A_1}$ y $\overline{B''B_1}$ son los desplazamientos correspondientes a la rotación de la chapa alrededor de 0.

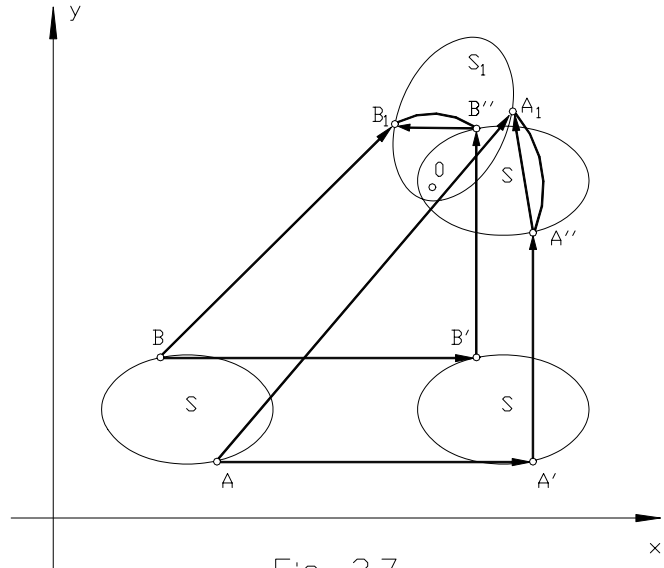


Fig. 3.7

Por lo tanto **la chapa en su plano posee tres grados de libertad de movimiento: dos traslaciones y una rotación.**

Si fijamos una condición - la ordenada de uno de sus puntos - la chapa sólo puede trasladarse según el eje x y rotar; si fijamos dos condiciones - las coordenadas de uno de sus puntos - la chapa sólo puede rotar alrededor del punto fijo; y **si fijamos tres condiciones** - las dos coordenadas de uno de sus puntos y una coordenada de otro punto - **la chapa a sido inmovilizada.**

Si hacemos extensivo el razonamiento anterior a **un cuerpo que se puede mover en el espacio se concluye que posee seis grados de libertad:** tres traslaciones según los ejes x, y, z y tres rotaciones alrededor de los mismos. **Son los seis movimientos independientes de un cuerpo en el espacio.**

3.1.2.- VÍNCULOS PLANOS.-

“Todo dispositivo que condiciona total o parcialmente los movimientos de un chapa o cuerpo se llama vínculo, enlace o conexión”. Pueden ser externos o absolutos si el movimiento impedido es con respecto a la tierra, e internos o relativos si el movimiento impedido es con respecto a otra chapa o cuerpo.

Se los clasifica por el número de desplazamientos componentes e independientes impedidos; en base a ello se distinguen tres tipos de vínculos para la estructuras planas:

- vínculos o enlaces de primera especie que impiden uno de los desplazamientos componentes, o sea que restringen un grado de libertad.
- vínculos o enlaces de segunda especie que restringen dos grados de libertad.
- vínculos o enlaces de tercera especie que restringen tres grados de libertad

a) Vínculos de primera especie o simples.

Un dispositivo constituido por una pieza prismática de sección triangular en cuya arista superior se inserta un pasador, perno o articulación, que lo une al punto A de la chapa, y en su base apoya sobre rodillos que pueden rodar sobre un plano fijo a tierra se llama **apoyo móvil.**

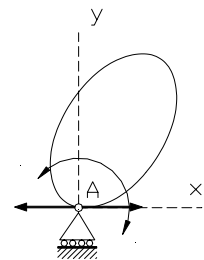


Fig. 3.8



Está impedida la traslación de la chapa en la dirección “y”, pero puede rotar alrededor de A y trasladarse en dirección “x”, es decir según el plano de rodamiento, que llamaremos *dirección del apoyo móvil*, fig.3.8. Cuando el punto A puede tender a levantarse, el enlace debe ser de doble efecto para impedir el levantamiento mediante la colocación de dispositivos adecuados a ello.-

Algunos dispositivos usados como vínculos simples se esquematizan en la fig. 3.9 cuyos nombres, de izquierda a derecha, son los siguientes:

- 1- Apoyo móvil
- 2- Biela o barra de enlace articulada en sus extremos: impide todo movimiento de traslación en la dirección de su propio eje.
- 3- Cable: impide la traslación en dirección del eje “y” siempre que las fuerzas, actuantes sobre la chapa tiendan a alargarlo.
- 4- Apoyo sobre superficie sin rozamiento: vínculo simple de un solo efecto.
- 5- Balancín: vínculo simple de un solo efecto.

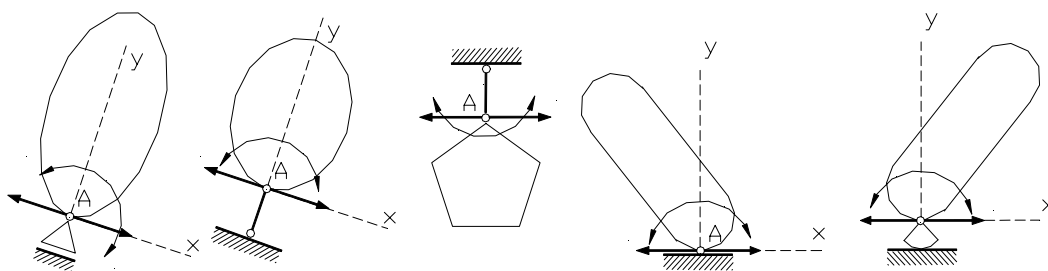


Fig. 3.9

En las máquinas se utiliza una gran variedad de enlaces y conexiones entre sus elementos que constituyen vínculos de este tipo.

b) Vínculos de segunda especie o dobles

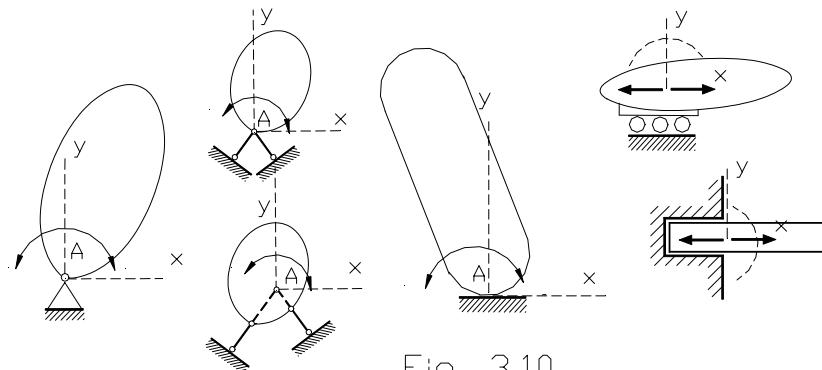


Fig. 3.10

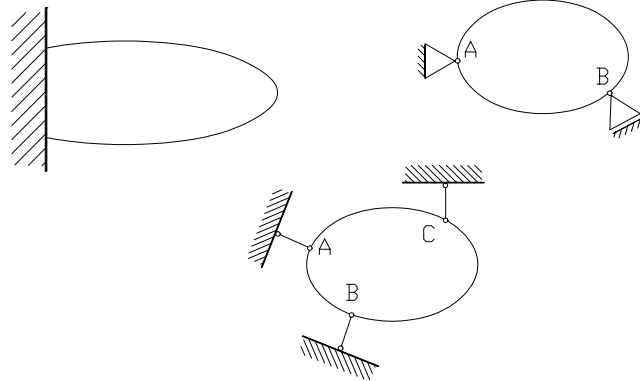
Si la base de la pieza prismática descrita en a) está fija a tierra se tiene un dispositivo llamado *apoyo fijo o articulación* que restringe dos grados de libertad a la chapa: las dos traslaciones “x” e “y”, quedando sólo un grado de libertad el de rotar alrededor de A, fig. 3.10.

Otro dispositivo equivalente se obtiene con dos barras doblemente articuladas o bielas no alineadas. También se está ante este vínculo de segunda especie cuando se apoya la chapa sobre superficie rugosa siempre que la componente “x” de la acción sea menor que la resistencia al rozamiento y que pueda rotar la chapa alrededor del punto de contacto. Existen vínculos que sólo permiten la traslación en una dirección: caso del carro sin articulación o del empotramiento deslizante sobre rodillos o superficie lisa; su uso se limita prácticamente al campo mecánico.

Los enlaces de segunda especie equivalen a dos vínculos de primera especie o simples, razón por la cual se los llama también dobles.

c) *Vínculos de tercera especie o triples.*

Si se fija un punto de la chapa y una dirección, se inmovilizará totalmente la misma suprimiéndose sus tres grados de libertad. Este enlace se *designa empotramiento*, fig. 3.11



Con tres bielas no concurrentes o una articulación y un apoyo móvil se obtiene el mismo efecto.

Un empotramiento equivale a tres vínculos simples.

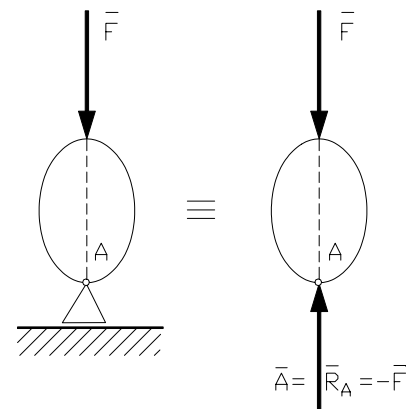
Fig. 3.11

3.1.3.- *REACCIONES DE VÍNCULO.-*

Consideremos una chapa vinculada a tierra en A mediante un apoyo móvil, fig. 3.12. Si sobre ella se ejerce una acción F, para que la chapa se encuentre en reposo es necesario que *F pase por A y que sea normal al plano de deslizamiento*.

Esta acción F ejercida sobre la chapa se transmite al apoyo por el punto A. La reacción que por el cuarto principio de la estática, nace en el vínculo será opuesta a aquélla: se la llama *reacción de vínculo* o simplemente *reacción en A*.

$$\bar{R}_A = -\bar{F} \quad \text{ó} \quad \bar{A} = -\bar{F}$$



Si se supone suprimido el apoyo y se coloca en su lugar la reacción, la chapa permanecerá en reposo. Esta operación de suprimir el enlace y colocar en su lugar la reacción que en él se origina se llama *poner en evidencia la reacción*.

Fig. 3.12

Por lo tanto cuando en una chapa hay colocados un apoyo móvil o cualquier otro enlace de primera especie, se conoce el punto de aplicación y la dirección de la reacción de vínculo, desconociéndose su intensidad. *Determinar la reacción de un vínculo de primera especie implica entonces el cálculo de una sola incógnita*, la intensidad ya que el sentido surge del signo de ésta.

Consideremos ahora que la chapa tenga un vínculo de segunda especie, fig. 3.13; la acción F debe pasar por A para que la chapa permanezca en reposo. La reacción de vínculo podrá tener cualquier dirección, conociéndose sólo su punto de aplicación A: determinar la *intensidad y dirección o sus dos componentes x e y*.

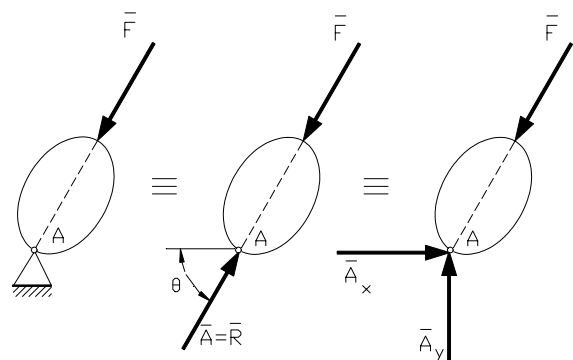


Fig. 3.13



Consideremos finalmente que la chapa esté empotrada siendo A el baricentro de la sección de empotramiento, fig. 3.14. La chapa está inmovilizada y permanecerá en reposo sea cual fuese la acción que sobre ella se ejerza. La reacción debe ser opuesta a la acción y si esta se aplica en B, un punto cualquiera de la chapa, en él no hay vínculo alguno capaz de reaccionar. Como el enlace está en A debe originarse en él un sistema par-fuerza equivalente a $-F$.

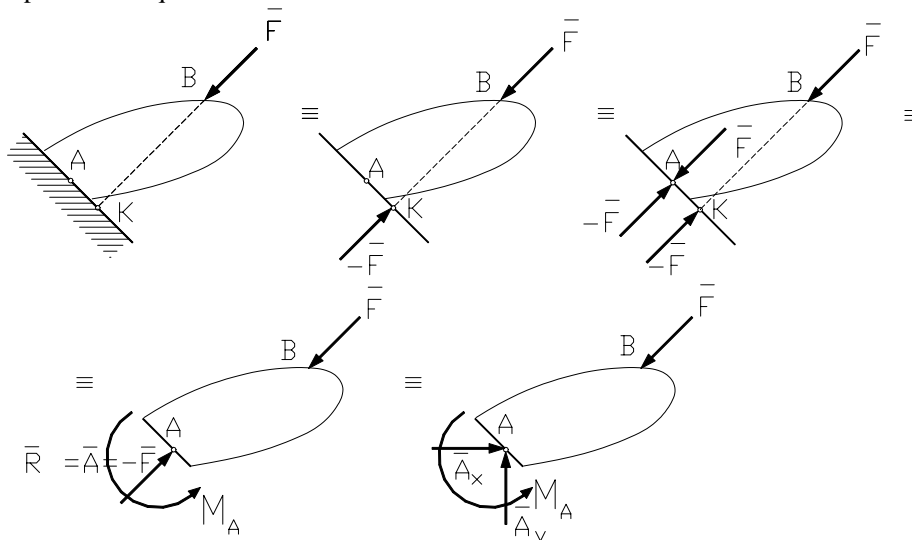


Fig. 3.14

En la secuencia gráfica de la figura 3.14 se indica como se pone en evidencia este sistema fuerza-par: Se observa que **un empotramiento reacciona mediante una fuerza $\bar{A} = \bar{R}_A$ (reacción de empotramiento) y un par M (par de empotramiento), su determinación implica el cálculo de tres incógnitas:** intensidad y dirección de la reacción e intensidad del par, o bien las componentes x e y de la reacción y la intensidad del par.

3.1.4.- CONSTRICCIÓN TOTAL, PARCIAL E IMPROPIA.-

Se ha visto que una chapa posee tres grados de libertad y que si la empotramos queda inmovilizada sin posibilidad alguna de movimiento: se dice que hay **constricción total**. También se logra constricción total de la chapa con tres apoyos simples o uno doble y uno simple, o sea **colocando tantos vínculos simples como grados de libertad posee**; esto lo hemos observado en el gráfico 3.11.

Si colocamos más vínculos de los estrictamente necesarios para inmovilizarla también se logra la **constricción total**. Los vínculos excedentes se llaman **vínculos superabundantes o superfluos**, fig.3.15.

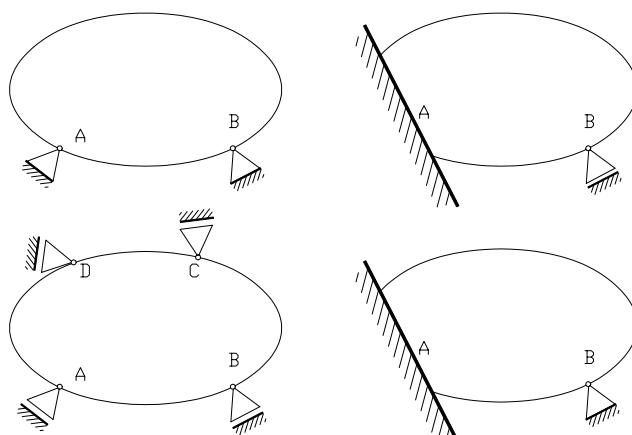


Fig. 3.15

Hay constricción parcial de la chapa si el número de vínculos es inferior al requerido para inmovilizarla, fig. 3.16.

Subsisten tanto grados de libertad como vínculos simples faltan para completar los tres requeridos para inmovilizar la chapa.

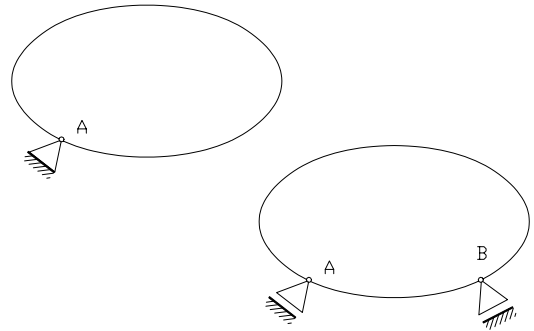


Fig. 3.16

Pero aun cuando el número de vínculos simples sea igual al de grados de libertad, existe posibilidad de que alguno de ellos restrinja un movimiento ya impedido por los otros vínculos, fig. 3.17.

En (a) el vínculo C impide las traslaciones “y”, restricción que también imponen los vínculos en A y en B. No existe en cambio vínculo que impida la traslación en “x” de la chapa, por lo cual subsiste un grado de libertad: se dice que hay constricción impropia.

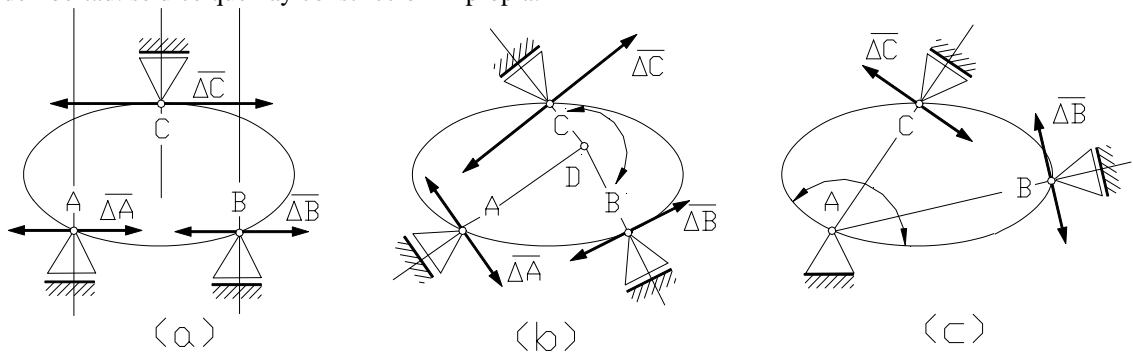


Fig. 3.17

En (b) los apoyos A y B fijan el punto D; el apoyo C impide la traslación en la dirección CD, que está impedida por A y B, pero no restringe la rotación alrededor de D.

En ambos casos el apoyo C no es eficiente cinemáticamente y se lo llama *vínculo aparente*.

En (c) hay dos vínculos aparentes, los apoyos B y C, que no adicionan ninguna condición cinemática a las impuestas por el apoyo fijo en A, permitiendo la rotación de la chapa alrededor del punto A.

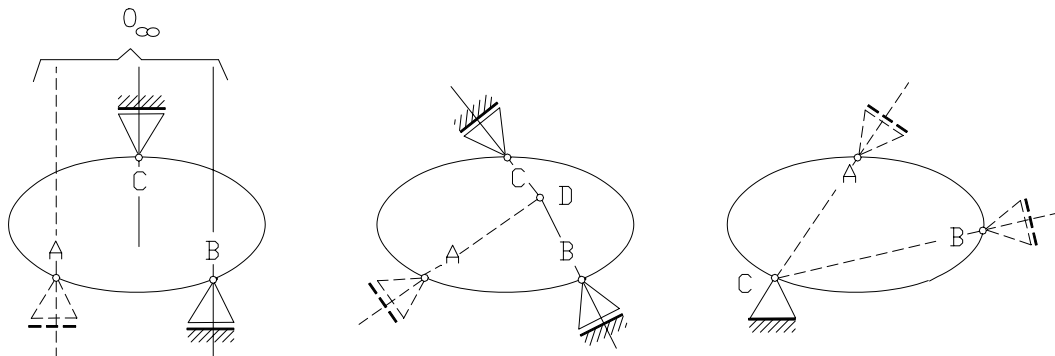


Fig. 3.18

Para establecer si un vínculo es o no aparente, figura 3.18, el método general consiste en suponerlo eliminado con lo cual la chapa queda con un grado de libertad, que será una rotación alrededor de un punto propio o impropio, llamado polo: se determina trazando las normales a los desplazamientos de dos de sus puntos. Este polo será entonces, la intersección de las normales a dos apoyos móviles o, si hubiese, la articulación del apoyo fijo.



Si la normal a la dirección del apoyo suprimido pasa también por el polo, el vínculo será aparente por cuanto no impide la rotación alrededor del polo. Si la normal al apoyo suprimido no pasa por el polo, evidentemente que al colocarlo, la chapa no podrá rotar y el apoyo resulta cinemáticamente eficiente por cuanto impide un movimiento que los otros vínculos no impedirían.

3.1.5.- SISTEMAS VINCULADOS PLANOS. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.-

En 2.7.2, se establecieron las condiciones que debía satisfacer un sistema plano de fuerzas para estar en equilibrio, o sea para mantener en reposo la chapa sobre la que actúan. Ellas eran:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right. \quad \text{o sus alternativas} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X_i = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{array} \right.$$

con las restricciones oportunamente puntualizadas para las posiciones de los puntos y del eje. Los centros de momento A, B y C representan puntos cualesquiera del plano: frecuentemente resulta conveniente adoptar como centros de momentos las intersecciones de las rectas de acción de las incógnitas.

Para el cumplimiento de las ecuaciones anteriores, la chapa sobre la que actúan las fuerzas se supone libre en su plano. Esto constituye una hipótesis a la que se llega luego de las consideraciones siguientes.

La chapa como representación de una estructura plana, no se encuentra libre, sino que está generalmente inmovilizada por vínculos que las ligan a tierra o a otras chapas. Al sistema constituido por un conjunto de puntos materiales (representados por la chapa) más los vínculos colocados para inmovilizarlo se lo denomina *sistema vinculado plano*.- Reservaremos la designación de *estructura plana* para la chapa sin sus vínculos.

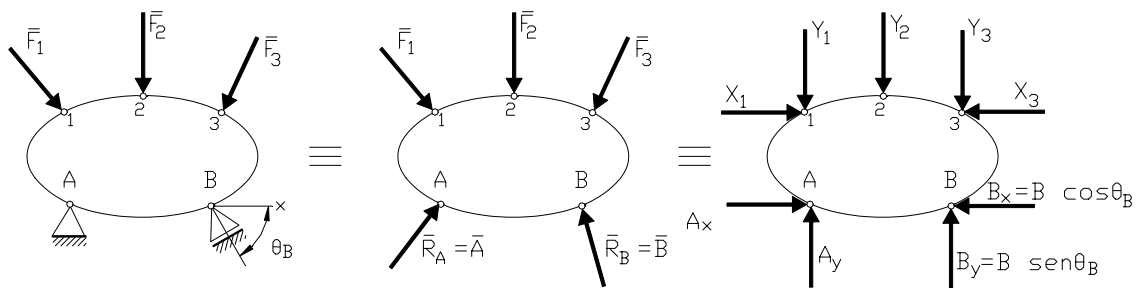


Fig. 3.19

Consideremos un sistema vinculado sometido a la acción de las fuerzas F_1, F_2 y F_3 (fig. 3.19): el sistema presenta constricción total y no hay vínculos aparentes ni superfluos.

En el apoyo fijo A se originará una reacción pasante por dicho punto, y en el apoyo B la reacción pasará por B y será normal a la dirección del plano de rodamiento. **Si se eliminan los dispositivos de enlace en A y en B, colocando en su lugar las reacciones \bar{A} y \bar{B} que han originado las fuerzas activas, la chapa permanecerá en reposo. Las fuerzas activas y reactivas que sobre ella actúan se encontrarán en equilibrio debiendo satisfacer las ecuaciones generales reproducidas al comienzo de este apartado.**

El diagrama que resulta de eliminar todos los enlaces y poner en evidencia las reacciones se llama *diagrama de cuerpo libre*.

En el diagrama de cuerpo libre es necesario considerar la totalidad de las fuerzas externas a él. Éstas serán las fuerzas activas correspondientes a la acción ejercida sobre el cuerpo libre por otros cuerpos, y las fuerzas reactivas correspondientes a los vínculos que se han separado. Se debe tener mucho cuidado

en indicar el sentido de las fuerzas ejercidas *sobre el* cuerpo libre y no el de las ejercidas *por él*.- **Las fuerzas conocidas son** generalmente las **fuerzas activas**, siendo en cambio **desconocidas las reactivas** .- **En el diagrama de cuerpo libre debe conocerse además la geometría de la estructura, o sea todas sus dimensiones lineales y angulares**, debido a que se necesitan en el cálculo de las componentes y momentos de las fuerzas. Estas dimensiones pueden estar expresadas directamente o en función de las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas y de los puntos tomados como centros de momento.-En las figuras que acompañan este texto se da por conocida dicha geometría aunque no se consigne la misma, salvo que se exprese lo contrario.-

3.1.6.- SISTEMAS ISOSTÁTICOS.-

Si en el diagrama anterior, fig. 3.19, expresamos las fuerzas internas en función de sus componentes rectangulares, observamos que tenemos tres incógnitas A_x , A_y y B ; como disponemos de tres ecuaciones de equilibrio, el valor de las incógnitas puede calcularse por medio de ellas.

Estas reacciones cuyos valores quedan determinados por las condiciones o ecuaciones de equilibrio estático se designan **reacciones estáticamente determinadas**.

Y el sistema vinculado que además de presentar constricción total tiene reacciones determinables estáticamente se llama **sistema isostáticamente sustentado** o simplemente **sistema isostático**.

De las características que debe reunir un sistema para ser isostático se deducirán los requisitos que debe satisfacer.-

Para que las reacciones sean estáticamente determinadas es necesario disponer de tantas ecuaciones de equilibrio estático como incógnitas presente el sistema. Pero el número de éstas es igual al número de vínculos simples que lo sustentan, y las ecuaciones de equilibrio que se pueden plantear son tantas como grados de libertad posee la chapa.

Por lo tanto para que **las reacciones sean estáticamente determinadas es necesario que el sistema posea tantos vínculos simples como grados de libertad posee la chapa que lo forma**. Ésto es también válido si el sistema está formado por dos o más chapas o, si se trata de una partícula o de un cuerpo bajo la acción de sistemas espaciales de fuerzas.-

Pero como debe existir inmovilidad total de la chapa la **condición anterior será suficiente siempre que la totalidad de vínculos sean cinemáticamente eficientes o sea debe verificarse que no existan vínculos aparentes**.

3.1.7.- SISTEMAS HIPERESTÁTICOS.-

Si el sistema presenta constricción total pero con más vínculos que los estrictamente requeridos para la inmovilidad de la chapa, fig. 3.20, se van a tener más incógnitas que ecuaciones de equilibrio y no se pueden determinar todas ellas.

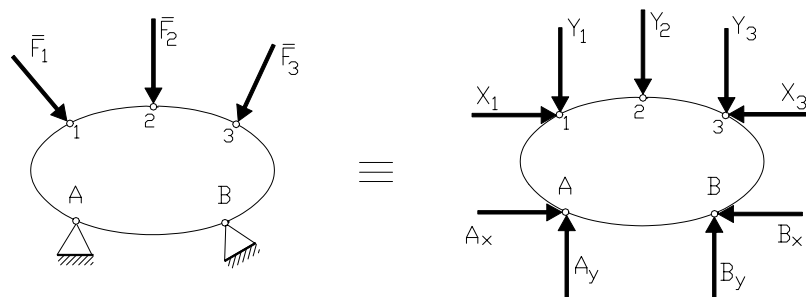


Fig. 3.20

Aunque las ecuaciones $\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$ dan las componentes verticales B_y y A_y , respectivamente, la ecuación $\sum X = 0$ da solamente la sumatoria $(A_x - B_x)$ de las componentes horizontales de las reacciones



en A y en B, faltando una ecuación para dejar determinadas las incógnitas Ax y Bx.- Una de ellas es **estáticamente indeterminada**: Ax y Bx pueden calcularse abandonando la hipótesis de rigidez de la chapa y considerando las deformaciones producidas por las cargas. Este método está fuera del alcance de la estática, y el sistema que presenta esta sustentación se llama *sistema hiperestático*. El grado de hiperestaticidad de un sistema queda expresado por la diferencia entre el número de incógnitas a calcular (expresado por el número de vínculos simples que posee) y el número de ecuaciones estáticas que se pueden plantear para el sistema. Expresa el número de incógnitas que no pueden resolverse mediante ecuaciones estáticas y debe recurrirse a ecuaciones elásticas. El de la figura constituye un sistema hiperestático de primer grado pues posee cuatro vínculos simples y para la chapa disponemos sólo de tres ecuaciones de equilibrio. Determinada una de las componentes estáticamente indeterminadas, Ax o Bx, mediante una ecuación elástica, se calcula la otra con la expresión $\sum X = 0$.

Las estructuras correspondientes a sistemas que presentan inmovilidad total, isostáticas o hiperestáticas se llaman **Estructuras Estacionarias** y son las requeridas en las construcciones.

En las máquinas en cambio hay estructuras que deben ser móviles y presentar consecuentemente restricción parcial. Tal el caso de un chasis de camión o vagón de ferrocarril que para cumplir su función como máquina de transporte debe tener libertad de movimiento de dirección x. Fig. 3.21

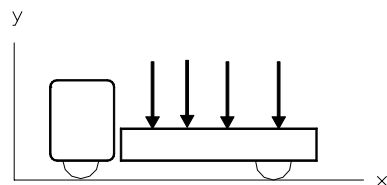


Fig. 3.21

El reposo existirá para condiciones particulares de carga, como el indicado, donde no hay componente x de las fuerzas activas y la ecuación $\sum X_i = 0$ se nos transforma en una identidad $0 = 0$.-Con la ecuación $\sum M_A = 0$ se determina By ; con $\sum Y_i = 0$ se calcula Ay.-

Si se presenta componente x de las fuerzas activas cesa el reposo , el sistema entra en movimiento y el problema cae en el campo de la dinámica.

3.1.8.- DETERMINACIÓN DE REACCIONES EN SISTEMAS ISOSTÁTICOS DE UNA CHAPA.-.

3.1.8.1.- Determinación Analítica.-

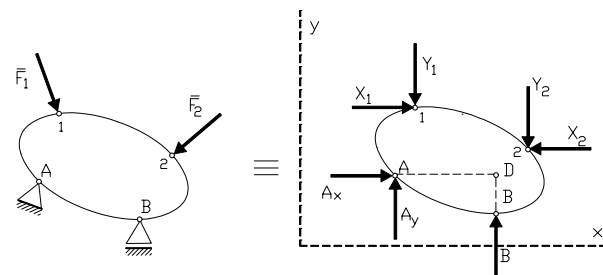


Fig. 3.22

Consideremos un sistema isostático formado por una sola chapa, fig. 3.22 ; construyamos su diagrama de cuerpo libre.-

A las incógnitas se les supone un sentido y se plantean las tres ecuaciones de equilibrio; como las incógnitas son también tres, su valor se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones expresado.-

Para simplificar esta resolución conviene plantear ecuaciones de momento de modo que aparezca una sola incógnita. Para ello se toma momento con respecto al punto A, intersección de las rectas de acción de Ax y Ay, y se despeja el valor de B. Luego se toma momento respecto a D , intersección de Ax y B, despejándose Ay.- Para poner en evidencia el sentido de los momentos, su signo se ha tomado igual al de la rotación que la fuerza tiende a producir alrededor del centro de momentos por lo cual, las fuerzas y sus brazos deben introducirse en valor absoluto.- Si se quiere se puede operar matemáticamente, respetando signos de fuerzas y coordenadas, con las expresiones [$\sum M_0^i = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$].-

$$\begin{aligned}
 +_{\uparrow} \sum M_A &= - (y_1 - y_A) X_1 - (x_1 - x_A) Y_1 + (y_2 - y_A) X_2 - (x_2 - x_A) Y_2 + (x_B - x_A) B = 0 \\
 \Rightarrow B &= \frac{1}{x_B - x_A} [(y_1 - y_A) X_1 + (x_1 - x_A) Y_1 - (y_2 - y_A) X_2 + (x_2 - x_A) Y_2]
 \end{aligned}$$

$$+_{\uparrow} \sum M_D = - (x_D - x_A) Ay + (x_D - x_1) Y_1 - (y_1 - y_D) X_1 + (y_2 - y_D) X_2 - (x_2 - x_D) Y_2 = 0$$



$$\Rightarrow A_y = \frac{1}{x_D - x_A} ((x_D - x_1) Y_1 - (y_1 - y_D) X_1 + (y_2 - y_D) X_2 - (x_2 - x_D) Y_2)$$

Finalmente se suman las componentes x obteniéndose Ax:

$$\sum X_i = A_x + X_1 - X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = X_2 - X_1$$

Si los resultados son positivos los sentidos supuestos son correctos en cambio deben ser invertidos cuando los valores finales de las incógnitas sean negativos.

Cuando la chapa pueda representarse por un segmento de recta, como en el caso de vigas, Fig. 3.23, el procedimiento se simplifica si se toman como puntos de aplicación de las fuerzas las intersecciones de sus rectas de acción con el eje de la viga, pues desaparecen los momentos de las componentes X.

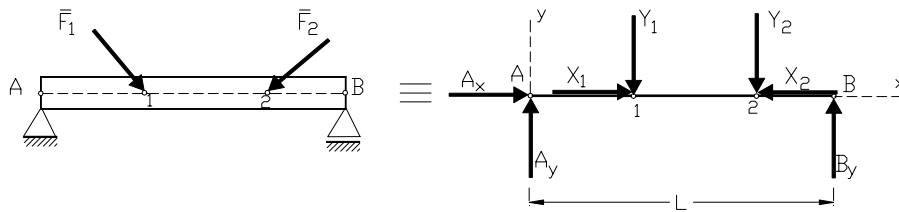


Fig. 3.23

$$+_ \uparrow \quad \sum M_A = -x_1 Y_1 - x_2 Y_2 + L B = 0 \quad \therefore \quad B = \frac{1}{L} [x_1 Y_1 + x_2 Y_2]$$

$$+_ \uparrow \quad \sum M_B = -L A_y + (L - x_1) Y_1 + (L - x_2) Y_2 = 0 \quad \therefore \quad A_y = \frac{1}{L} [(L - x_1) Y_1 + (L - x_2) Y_2]$$

$$+ \rightarrow \quad \sum X_i = A_x + X_1 - X_2 = 0 \quad \therefore \quad A_x = X_2 - X_1$$

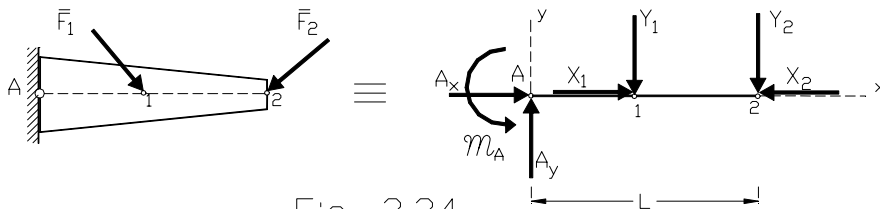


Fig. 3.24

En el caso de una viga empotrada, fig. 3.24 se tendrá :

$$+_ \uparrow \quad \sum M_A = m_A - x_1 Y_1 - x_2 Y_2 = 0 \quad \therefore \quad m_A = x_1 Y_1 + x_2 Y_2$$

$$+ \uparrow \quad \sum Y_i = A_y - Y_1 - Y_2 = 0 \quad \therefore \quad A_y = Y_1 + Y_2$$

$$+ \rightarrow \quad \sum X_i = A_x + X_1 - X_2 = 0 \quad \therefore \quad A_x = -X_1 + X_2$$

En estos dos ejemplos las expresiones $\sum M_2 = 0$ en el primero, y $\sum Y_i$ en el segundo, se pueden utilizar para verificar las operaciones aritméticas. Se debe llegar a una identidad, $0 = 0$.-

3.1.8.2.- Determinación Gráfica.-

Si la determinación de las reacciones se hace en forma gráfica se observa que el problema consiste en equilibrar el sistema de fuerzas activas o su equivalente, con dos fuerzas reactivas cuyos puntos de aplicación se conocen siendo también conocida la dirección de la

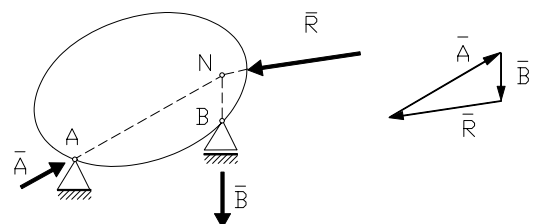


Fig. 3.25



reacción del apoyo móvil. Este problema fue tratado como “descomposición de una fuerza en dos”, la diferencia que ahora se trata de determinar equilibrantes en lugar de componentes. Veamos algunos ejemplos:

1) Consideremos el caso que la resultante de las fuerzas activas y la normal a la dirección del apoyo móvil se corten en un punto del plano del dibujo, fig. 3.25. Como tres fuerzas para estar en equilibrio en el plano deben ser concurrentes a un punto, la reacción \bar{A} pasará forzosamente por el punto de concurrencia N. Hay que equilibrar una fuerza \bar{R} con fuerzas de dirección concurrentes a uno de sus puntos; esto constituye un procedimiento conocido que se indica en el gráfico.

2) Sea el sistema isostático de la fig. 3.26. Construimos el polígono de fuerzas activas $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$; adoptamos un polo O y trazamos los rayos polares 1, 2, 3, 4. El sistema de fuerzas externas de la chapa está integrado por las fuerzas activas nombradas y las fuerzas reactivas \bar{A} y \bar{B} de las cuales sabemos que pasan por los puntos A y B y que esta última es normal a la dirección del apoyo móvil.

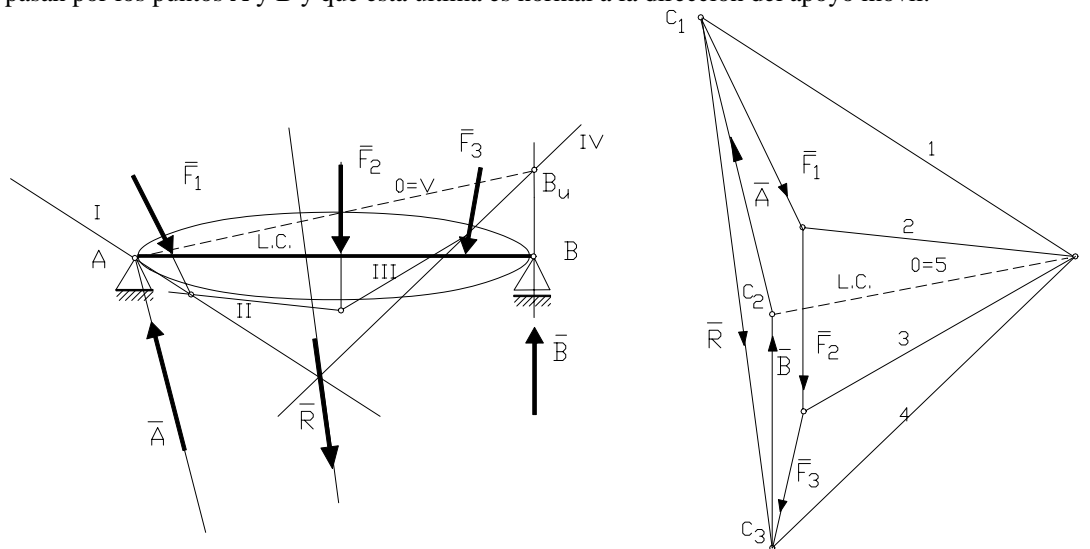


Fig. 3.26

El orden en que consideramos las fuerzas externas será: $\bar{A}, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{B}$ es decir que vamos tomando las fuerzas de izquierda a derecha en el orden que se ubican en la estructura.-

Por A, único punto conocido de la reacción en el apoyo izquierdo, trazo una paralela al rayo polar 1 hasta cortar a \bar{F}_1 y se obtiene el lado I del funicular; continuando la construcción del polígono funicular de las fuerzas activas se obtiene el polígono I-II-III-IV. Los lados I y IV constituyen un funicular de \bar{R} , resultante de las fuerzas activas, y cortan a las rectas de acción de las reacciones en A y B_u.- Estoy ante el problema estudiado en el apartado 2.9.1 con la diferencia que en lugar de componentes debo hallar sus opuestas o sea equilibrantes.

Uniendo A con B_u obtengo el lado del polígono funicular comprendido entre las reacciones \bar{A} y \bar{B} que se designa “línea de cierre”. Por O trazo un rayo polar paralelo a la línea de cierre y se lo intercepta en C₂, con una recta paralela a la dirección de la reacción en el apoyo móvil B, que se traza por C₃ extremo de \bar{R} . Determinado C₂, lo uno con C₁ y demostraremos que $\overline{C_3C_2}$ y $\overline{C_2C_1}$ son vectores representativos de las reacciones en B y en A respectivamente.

El polígono de fuerzas $\overline{C_2C_1} - \bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3 - \overline{C_3C_2}$ es cerrado cumpliendo la primer condición gráfica de equilibrio de los sistemas planos.

Los rayos polares 0 (cero) y 5 que resultan de unir el polo con el origen de la primer fuerza y el extremo de la última son coincidentes y, **por construcción, paralelos a la línea de cierre**. Esta resulta ser coincidente con los lados extremos O y V, del funicular de las fuerzas externas que es por ello cerrado y cumple con la segunda condición gráfica de equilibrio.

Además $\overline{C_3C_2}$ es – por construcción - de dirección normal al apoyo B y la recta de acción de la fuerza que representa pasa por B porque al triángulo polar 4 - 5 - $\overline{C_3C_2}$ corresponde el haz de centro B_u en el cual la paralela a $\overline{C_3C_2}$ pasa por B. La recta de acción de la fuerza representada por el vector $\overline{C_2C_1}$ pasa por A ya que al triángulo polar 0 - 1 - $\overline{C_2C_1}$ corresponde el haz de centro justamente en A. Quedan entonces totalmente determinadas las reacciones.

3) Consideramos la viga indicada en la fig. 3.27 sometida a cargas verticales:

Los tramos de la viga que sobresalen a izquierda y derecha de los apoyos se los designa como voladizos.-

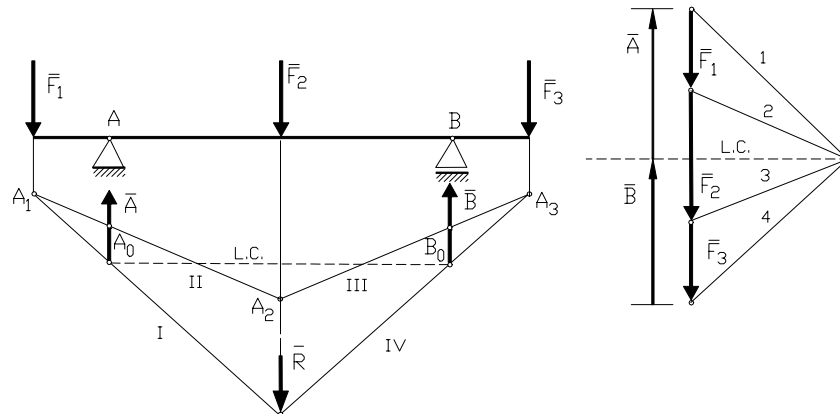


Fig. 3.27

Al ser las cargas verticales y el apoyo móvil horizontal, las dos reacciones serán de dirección vertical.

Siendo conocidas las rectas de acción de ambas reacciones no hay necesidad de hacer pasar el primer lado del funicular de las fuerzas activas por el punto A, pudiéndose optar por un punto cualquiera de ella.- Este punto, A_0 y la intersección del último lado del mismo funicular con la recta de acción de B, punto B_0 , determinan la *línea de cierre*. La paralela a ésta por el polo determina los vectores representativos de las reacciones \bar{A} y \bar{B} que, interpretados en escala de fuerzas, nos permite establecer sus intensidades y sentidos.

Si hubiese fuerzas oblicuas y el apoyo fijo estuviese en B, haríamos pasar el último lado del funicular de las fuerzas por B y la construcción la haríamos de derecha a izquierda.

4) La chapa de eje poligonal indicada en la fig. 3.28 representa una estructura llamada *pórtico*. Está sustentada por tres vínculos simples cinemáticamente eficientes ya que sus normales no son concurrentes a un mismo punto. El sistema es isostático.

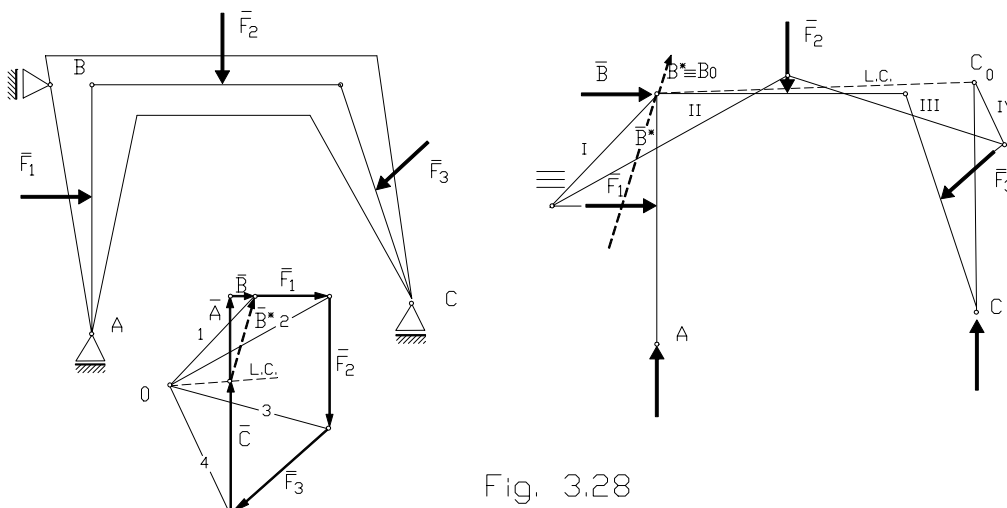


Fig. 3.28



Si se imagina suprimido el vínculo C se estará en presencia de una chapa con un grado de libertad, cuyo polo es B, intersección de las normales a ambos apoyos móviles. Es decir que los apoyos móviles en A y B equivalen cinemáticamente a un apoyo fijo que llamamos B*.-

Puedo ahora determinar las reacciones \bar{B}^* y \bar{C} mediante un polígono funicular cuyo lado I pasa por B* coincidente con B₀, intercepta \bar{F}_1 y prosigue hasta que el lado IV corta en C₀ la reacción en C.- Obtenido \bar{B}^* la descompongo según las normales a los apoyos A y B y se obtienen las reacciones \bar{A} y \bar{B} .

5) Consideremos finalmente una viga empotrada en su extremo derecho, fig. 3.29.

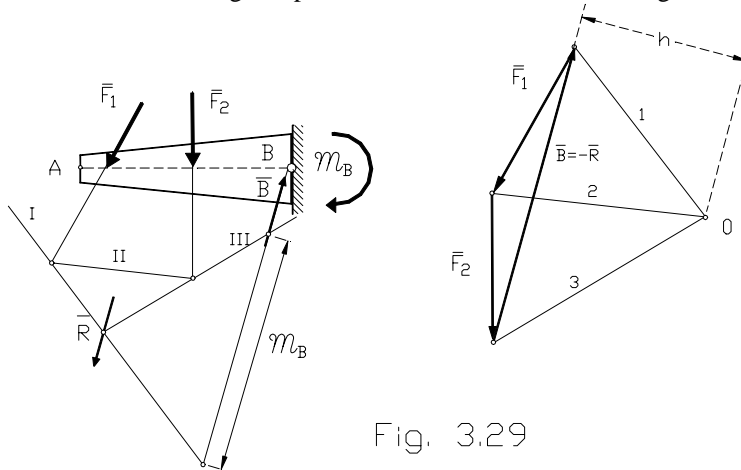


Fig. 3.29

El sistema de acciones externas estará ahora constituido por \bar{F}_1 , \bar{F}_2 (activas) y \bar{B} , \bar{m}_B (reactivas).

Se construye el funicular de las fuerzas activas y se determina la posición de la resultante \bar{R} de las mismas.

La reacción en B es igual y de sentido contrario a \bar{R} , pero al no ser colineales, para equilibrar el sistema se tendrá que aplicar en B un momento igual y de sentido contrario al de \bar{R} respecto al punto B. Este momento se determina gráficamente (ver 2.8.4) trazando por B una paralela a \bar{R} que al interceptar los lados I y III determina un segmento que, interpretado en la escala de momentos (Esc.mom. = h x Esc. Long. X Esc. Fzas.) nos da el valor del par de empotramiento \bar{m}_B .-

3.2.- CADENAS CINEMÁTICAS ABIERTAS Y CERRADAS.-

Consideremos dos chapas S₁ y S₂, fig. 3.30. Cada una de ellas posee tres grados de libertad y las dos, en conjunto, seis.

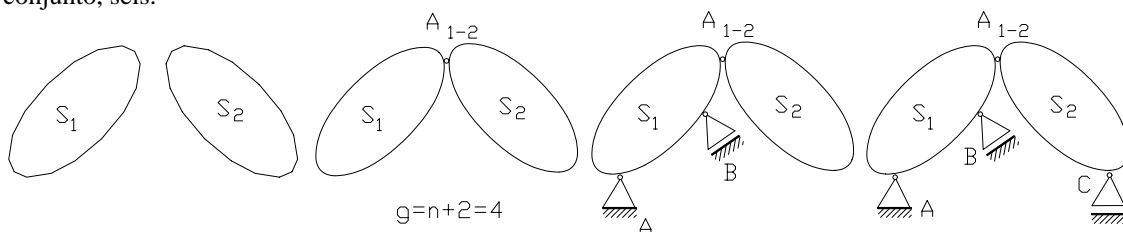


Fig. 3.30

Vinculemos entre sí ambas chapas, mediante una articulación A₁₋₂, denominada *articulación relativa o intermedia*.-

Si a la chapa S₁ le imponemos tres condiciones de vínculo, por ejemplo un apoyo fijo en A y otro móvil en B, quedará inmóvil, y el punto A₁₋₂ en que se articulan ambas chapas, por pertenecer una chapa rígida

inmovilizada, S_1 , estará también fijo. En consecuencia, la única posibilidad de movimiento de la chapa S_2 será una rotación en torno a A_{1-2} .

Si queremos fijarla a tierra bastará con imponerle una condición de vínculo, por ejemplo un apoyo móvil en C. Es decir que, para fijar a tierra las dos chapas articuladas entre sí, sólo ha sido necesario imponerle cuatro condiciones de vínculo, o sea dos menos que consideradas separadamente.

El sistema constituido por dos chapas articuladas recibe el nombre de *cadena cinemática de dos chapas*.

El conjunto de las dos chapas consideradas independientemente poseía seis grados de libertad, y el hecho de articularlas entre sí le restringe dos de ellos. Esta articulación constituye un *vínculo interno*, a diferencia de las articulaciones a tierra que son *vínculos externos*. Si recordamos que las articulaciones externas también restringen dos grados de libertad, podemos expresar, generalizando, que cualquier articulación aplicada a una chapa, sea de vínculo externo o interno, restringe dos grados de libertad.

Para una *cadena cinemática abierta de n chapas* existen $n-1$ articulaciones intermedias. Cada chapa posee tres grados de libertad y cada articulación restringe dos; el número de grados de libertad de una cadena cinemática abierta de n chapas resulta ser:

$$g = 3n - 2(n-1) = 3n - 2n + 2 = n + 2$$

y para fijarla a tierra será necesario imponerle $n + 2$ vínculos simples.

Si consideramos ahora que la cadena cinemática fuese cerrada, fig 3.31 es decir que la primera y la última chapa estén articuladas entre sí, y llamando n el número de chapas y de articulaciones relativas, el número de grados de libertad que poseerá la cadena cinemática cerrada será:

$$g = 3n - 2n = n$$

En general los grados de libertad de un sistema plano vinculado constituido por chapas o barras articuladas entre sí, formando o no recintos cerrados, se establece con la fórmula:

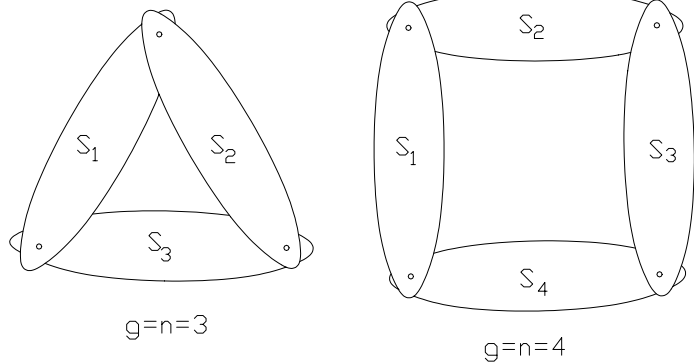


Fig. 3.31

$$g = n - 2(k - 1)$$

en donde: g el número de grados de libertad; n es el número de chapas o barras y k es el número de recintos cerrados.

Para $k = 0$ (fig.3.30): $g = n + 2$, que es la expresión obtenida para cadenas abiertas.-

Para $k = 1$ (fig.3.31): $g = n$, que es la expresión obtenida para cadenas cerradas.-

Para $k = 2$ (fig.3.32): $g = n - 2$.-

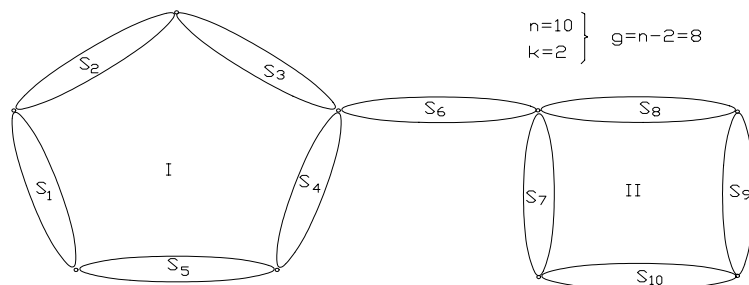


Fig. 3.32



Repetimos que **para fijar una cadena cinemática necesitamos tantos vínculos simples externos como grados de libertad posee**, fig. 3.33.

La anterior es una condición necesaria, pero no suficiente para obtener la inmovilidad de las chapas ya que puede existir un vínculo aparente. Se debe por lo tanto verificar si los vínculos son cinemáticamente eficientes o aparentes, lo que se hace con el método general dado en 3.1.4.

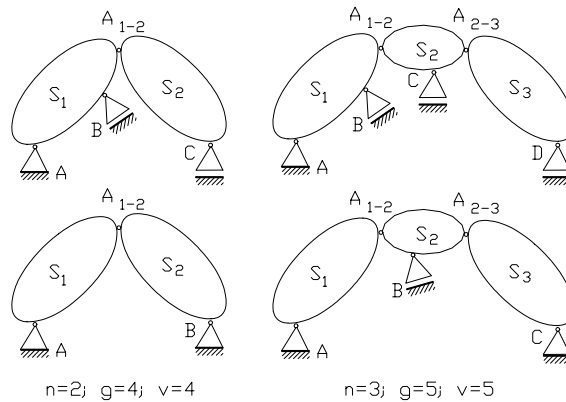


Fig. 3.33

Tomando el sistema vinculado de dos chapas de la fig. 3.34, supongamos suprimido el apoyo móvil C; nos queda una cadena cinemática con un grado de libertad: una rotación de la chapa S_2 alrededor de su polo O_2 coincidente con A_{1-2} .

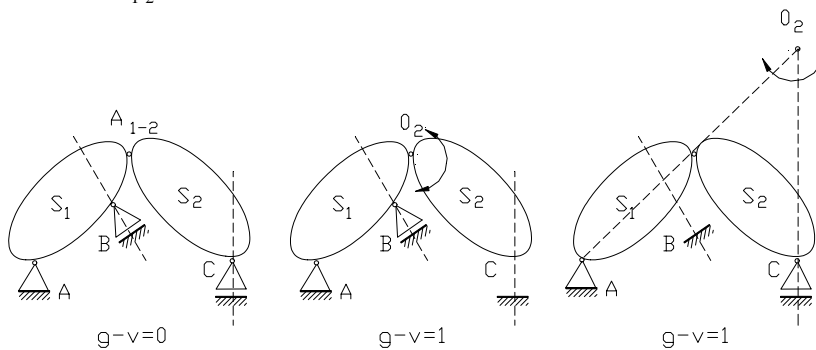


Fig. 3.34

Como la normal al apoyo C no pasa por O_2 se deduce que el vínculo es cinemáticamente eficiente. Si quisiéramos verificar la eficiencia del apoyo B, lo imaginamos suprimido; la chapa S_1 puede rotar alrededor de $O_1 \equiv A$: el vínculo en C no es aparente por cuanto su normal no pasa por A.-

Para las cadenas de tres chapas la verificación es efectuada en igual forma y se indica a continuación, fig. 3.35.

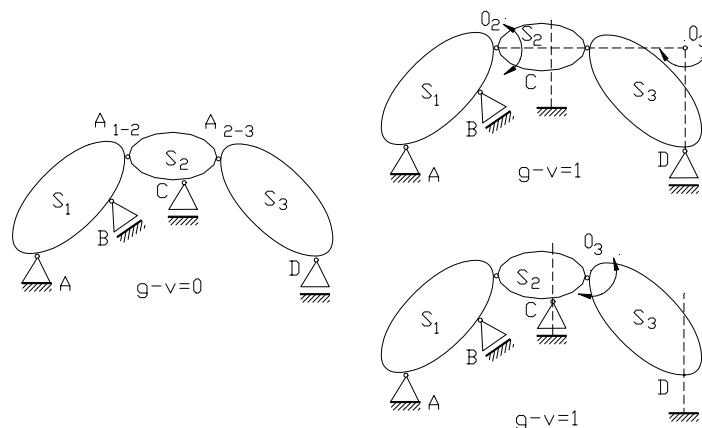


Fig. 3.35

La normal al apoyo móvil C del sistema vinculado de tres chapas de la fig. 3.35 no pasa por el polo O_2 de la chapa S_2 de la cadena cinemática que resulta al suprimir dicho apoyo. Por lo tanto el vínculo en C no es aparente. Igual condición se cumple cuando el vínculo suprimido es el apoyo D: determinados los polos de la cadena resultante observamos que la normal a dicho apoyo no pasa por O_3 .

En cambio en el sistema de la fig. 3.36 la normal al apoyo móvil en B pasa por O_2 polo de la chapa S_2 : El

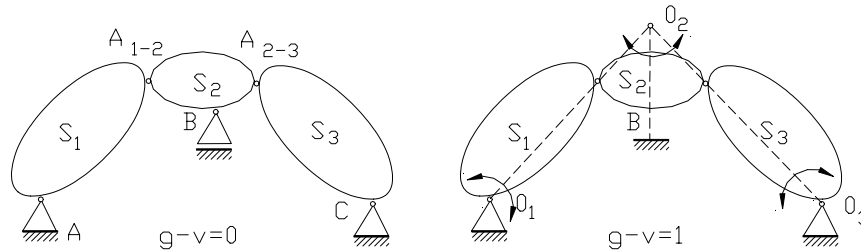


Fig. 3.36

vínculo B es aparente.

Verificando que el número de vínculos simples es igual al número de grados de libertad de la cadena cinemática, y que ninguno de ellos es aparente, la cadena está inmovilizada y presenta constricción total.-

El conjunto de las n chapas y sus $n + 2$ vínculos simples cinemáticamente eficientes constituyen un sistema isostático de n chapas con tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio disponibles. Si la cadena fuese cerrada sólo necesitaría n vínculos simples no aparentes, en lugar de los $n + 2$ que requieren las cadenas abiertas.-

Si la chapas presentan constricción total pero con un número de vínculos simples mayor del estrictamente necesario se tendría **un sistema hiperestático de n chapas.-**

La articulación relativa entre dos chapas de una cadena cinemática puede también concebirse en la forma que muestra la fig. 3.37, es decir mediante dos bielas.

En este caso la articulación relativa será ficticia y se encontrará en el punto de intersección de las bielas. En efecto supongamos por un momento que S_1 se encuentra fijada a tierra. La existencia de la biela MN obliga al punto N a desplazarse según $n-n$, normal a MN, y el punto R, por la presencia de QR, deberá forzosamente hacerlo en la dirección $r-r$ normal a QR. Conocidos los desplazamientos de dos de los puntos de la chapa S_2 se trazan sus normales (que son las prolongaciones de los ejes de las bielas) y en su intersección A_{1-2} estará el polo de la chapa S_2 , **es decir el punto alrededor del cual rota una de ellas cuando se supone fija la otra chapa.**

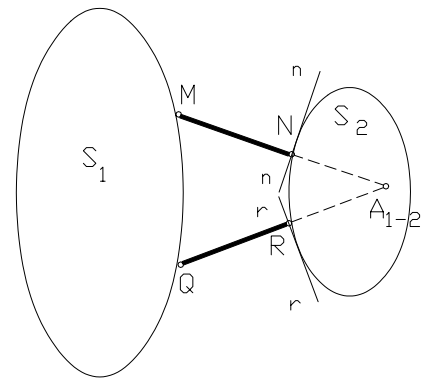


Fig. 3.37

Si las dos bielas son paralelas, la articulación relativa ficticia se encontrará en el punto impropio de la dirección común a aquéllas. En tal caso el desplazamiento relativo entre las chapas será una rotación alrededor del polo impropio, es decir una traslación.

3.2.1.- DETERMINACIÓN DE RACCIONES EN SISTEMAS DE VARIAS CHAPAS.-

Estudiaremos el tema en el siguiente orden:

1.- Determinación de reacciones en base a la aplicación de ecuaciones de equilibrio de todo el sistema de fuerzas planteado en un diagrama de cuerpo libre para toda la estructura.



2.- Determinación de reacciones en base a la aplicación de las condiciones de equilibrio de las fuerzas actuantes en cada una de las chapas del sistema, planteando un sistema de equilibrio para cada una de ellas separadamente. En el diagrama de cuerpo libre de cada chapa deben ponerse en evidencia, a más de las reacciones externas, las internas o interacciones que nacen entre ellas al actuar las cargas.

3.- Determinación gráfica.

4.- Determinación de reacciones en vigas articuladas o vigas Gerber.

3.2.1.1.- Determinación Analítica General.-

Consiste en plantear el diagrama de cuerpo libre a toda la estructura, es decir considerar el conjunto de chapas sometidas a la totalidad de las fuerzas externas, activas y reactivas, y establecer las ecuaciones de equilibrio que en cada caso correspondan.

Sea el sistema de la fig. 3.38 del cual se conocen todas las dimensiones y se pueden determinar las coordenadas de todos los puntos particulares respecto a un sistema x-y.

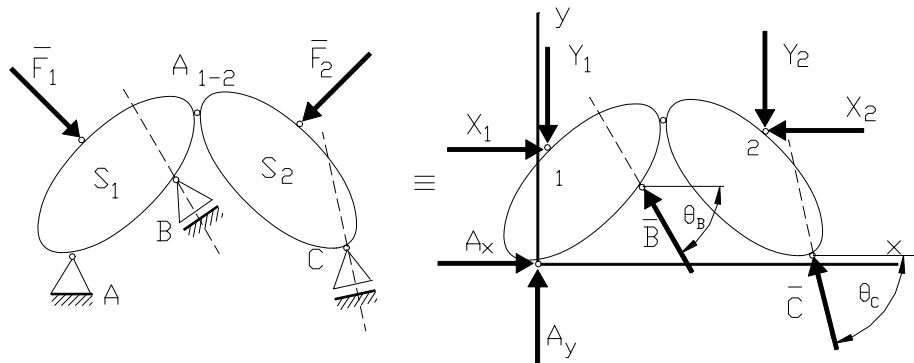


Fig. 3.38

Analicemos en primer término la isostaticidad del sistema:

vínculos simples:	v.s.= 4
grados de libertad:	g.l. = n +2 = 4
vínculos aparentes:	v.a.= no hay
resultado del análisis:	afirmativo

A la derecha se ha trazado el diagrama de la estructura libre donde observamos cuatro incógnitas:

$$Ax ; Ay ; B ; C$$

Para determinarlas disponemos por una parte de las tres ecuaciones generales de equilibrio para un sistema plano de fuerzas. Además la existencia de la articulación A₁₋₂ exige, para que las chapas estén en reposo, que el momento de las fuerzas situadas a izquierda de la articulación (o derecha) sea nulo. Evidentemente si imaginamos fija la chapa S₂ y si el momento de las fuerzas situadas a la izquierda de la A₁₋₂ fuese distinto de cero la chapa S₁ rotaría; y viceversa, la chapa S₂ rotaría en torno de A₁₋₂ si el momento de las fuerzas situadas a la derecha de este punto no fuese nulo e imaginamos a S₁ fija.

Esta condición física, independientemente de las tres anteriores se expresa matemáticamente por cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$\sum M_{A_{1-2}}^{izquierda} = 0 \qquad \sum M_{A_{1-2}}^{derecha} = 0$$

Dispondremos por lo tanto de un sistema de cuatro ecuaciones independientes:

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum M_A = 0 \qquad \sum M_{A_{1-2}}^{izquierda} = 0$$

con el que queda definido el valor de las cuatro incógnitas.

Conviene plantear las ecuaciones de equilibrio en forma tal que aparezca, en lo posible, una sola incógnita por ecuación. Para ello se pueden utilizar ecuaciones alternativas de momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a puntos (articulaciones externas en general) distintos del A y/o tomando momentos respecto a articulaciones relativas de las fuerzas ubicadas a su derecha en vez de las ubicadas a su izquierda.- En las ecuaciones de momentos que se plantean a continuación se toma el signo en función del sentido de rotación que la fuerza tiende a producir alrededor del centro de momentos y, en valor absoluto, la intensidad de la fuerza y la longitud del brazo de palanca.-

$$+_{-}\uparrow \quad \sum M_{A_{1-2}}^{\text{derecha}} = (x_C - x_{A_{1-2}}) C \text{ sen } \theta_C - (y_{A_{1-2}} - y_C) C \text{ cos } \theta_C - (x_2 - x_{A_{1-2}}) Y_2 - (y_2 - y_{A_{1-2}}) X_2 = 0$$

De esta ecuación se despeja **la reacción C**.

$$+_{-}\uparrow \quad \sum M_A = (x_C - x_A) C_Y + (y_C - y_A) C_X - (x_2 - x_A) Y_2 + (y_2 - y_A) X_2 + (x_B - x_A) B \text{ sen } \theta_B + (y_B - y_A) B \text{ cos } \theta_B - (x_1 - x_A) Y_1 - (y_1 - y_A) X_1 = 0$$

De esta ecuación se despeja **la reacción B**.

$$\sum X_i = A_X + X_1 - B_X - X_2 - C_X = 0 \quad \therefore \quad A_X = -X_1 + B_X + X_2 + C_X$$

$$\sum Y_i = A_Y - Y_1 + B_Y - Y_2 + C_Y = 0 \quad \therefore \quad A_Y = Y_1 - B_Y + Y_2 - C_Y$$

Los sentidos de las incógnitas han sido supuestos, quedando confirmados si los valores resultantes son positivos debiendo ser cambiados en caso contrario. **Se reitera: en la primer ecuación intervienen sólo fuerzas situadas a la derecha del centro de momentos tomado, la articulación A₁₋₂ entre ambas chapas. En las tres ecuaciones restantes deben considerarse la totalidad de las fuerzas externas.**

Analicemos el sistema de la fig. 3.39

$$\text{g.l.} = 4$$

$$\text{v.s.} = 4$$

v.a. = no hay. (En este sistema se presenta constricción impropia si las tres articulaciones están alineadas).

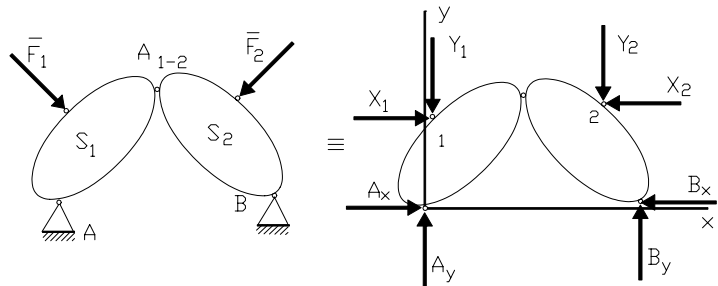


Fig. 3.39

El sistema es isostático.

Trazado el diagrama de la estructura libre, se plantean las ecuaciones que nos permiten determinar las incógnitas A_X , A_Y , B_X , B_Y .

Del sistema de dos ecuaciones:

$$\sum M_{A_{1-2}}^{\text{derecha}} = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

se calculan B_X , B_Y

De la ecuación $\sum X_i = 0$ se despeja A_X

De la ecuación $\sum Y_i = 0$ se despeja A_Y

Veamos sistemas de tres chapas, fig. 3.40:

Disponemos ahora de cinco ecuaciones: las tres de equilibrio general y una de equilibrio parcial para cada una de las articulaciones intermedias.

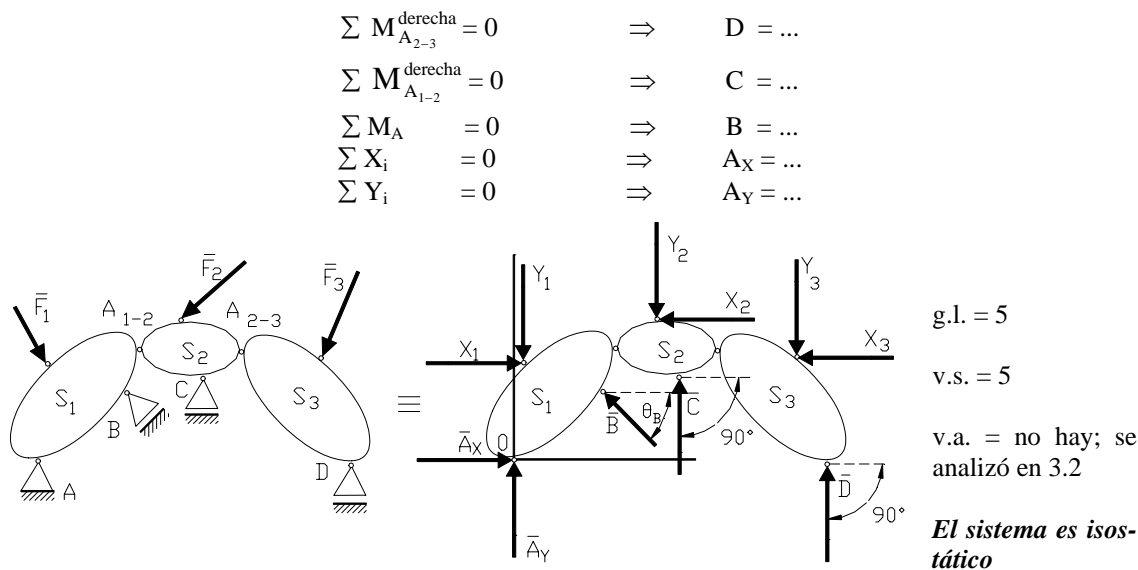


Fig. 3.40

Si se tuviese un número n de chapas, la cadena cinemática tendría $n + 2$ grados de libertad. Para inmovilizarla hay que colocar $n + 2$ vínculos simples cinemáticamente eficientes, que sería también el número de incógnitas a determinar. Dispondremos de las tres ecuaciones de equilibrio general del sistema de fuerzas, más una ecuación de equilibrio parcial por cada articulación relativa; el número de ecuaciones sería:

$$E = 3 + (n-1) = n + 2$$

es decir estamos ante un sistema estáticamente determinado. Se resuelve en la forma vista en los ejemplos anteriores.

3.2.1.2.- Resolución Por Chapas Separadas.-

Corresponde en este caso dos tipos de análisis según exista o no alguna chapa que tenga tres vínculos simples a tierra que la inmovilizan. Si hay una chapa en tales condiciones las cargas que sobre ella actúan son equilibrada por las reacciones de los tres vínculos simples externos, no transmitiendo acción alguna a las chapas articuladas a ella. Por el contrario la chapa inmovilizada recibe la acción de las otras y reacciona ante ellas. Debe comenzar a resolverse por aquella chapa que apoya en la otra.

Consideremos el caso del sistema vinculado de la fig. 3.41, en donde la articulación relativa A_{1-2} entre las chapas S_1 y S_2 la designamos con la letra H con el solo objeto de simplificar la nomenclatura: en adelante utilizaremos indistintamente las letras A_{1-2} y A_{2-3} o H y K para designar las articulaciones relativas entre las chapas, S_1 - S_2 y S_2 - S_3 respectivamente.

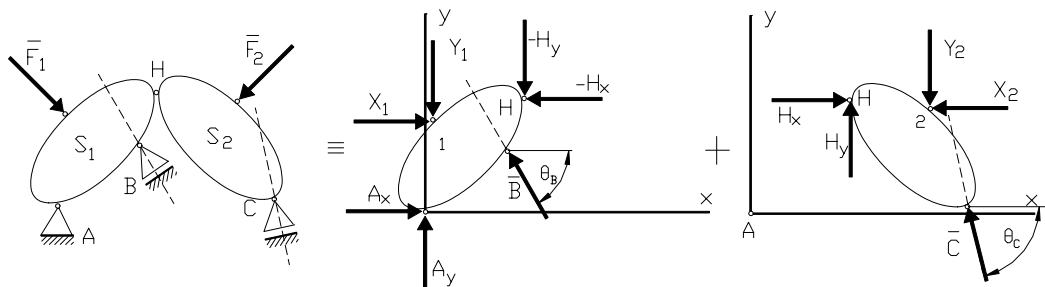


Fig. 3.41

Separamos las chapas S_1 y S_2 efectuando un corte por la articulación H . Para mantener la estabilidad de cada una de ellas es necesario aplicar las interacciones que en H originan las acciones externas: esta reacción interna está constituida por dos fuerzas iguales y opuestas pasantes por el punto a las que designaremos con \bar{H} y $-\bar{H}$. Sus componentes rectangulares serán H_x y H_y a las que supondremos un sentido que se confirmará o no según que el resultado de los cálculos dé valores positivos o negativos.-



Se trazan los diagramas de cuerpo libre de las chapas S_1 y S_2 separadamente. En la S_2 , no inmovilizada por sus propios vínculos externos, aparecen tres incógnitas: C , H_X , H_Y ; en cambio en la S_1 , inmovilizada por sus propios vínculos externos, surgen cinco incógnitas: A_X , A_Y , B , H_X , H_Y .

Como para cada una de las chapas disponemos de sólo de tres ecuaciones de equilibrio independientes se comienza el cálculo con la S_2 . De su diagrama de cuerpo libre planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum M_H = 0, & \text{ que permite despejar y calcular el valor de } C. \\ \sum X_i = 0, & \text{ de esta ecuación se obtiene el valor de } H_X. \\ \sum Y_i = 0, & \text{ de la cual se despeja } H_Y. \end{aligned}$$

Previo a continuar con la chapa S_1 , donde se utilizarán los valores obtenidos de C , H_X , H_Y , conviene verificar los cálculos realizados. Para esto se comprueba el cumplimiento de alguna otra ecuación de equilibrio, distinta de las ya utilizadas y en la que preferentemente aparezca el mayor número de incógnitas calculadas, por ejemplo la ecuación de momento respecto al punto de aplicación de \vec{F}_2 , $\sum M_2 = 0$, en la que aparecen \vec{C} , \vec{H}_X , \vec{H}_Y . Al volcar en ella los valores obtenidos debe llegarse a una identidad $0 = 0$ [cero = cero]. De no ser así debe repetirse el cálculo para localizar el error y proceder a su corrección.

Pero esta identidad es una expresión teórica cuya exactitud numérica puede ser absoluta sólo si trabajamos con números enteros o fraccionarios pero en cuanto aparecen números irracionales o racionales en cuya escritura decimal finita o periódica despreciamos cifras a partir de cierto rango, llegaremos a valores cercanos a cero pero no a éste.

En la solución de un determinado problema la precisión de los valores requeridos como solución dependen de: 1) la trascendencia del problema a resolver; 2) el grado de exactitud de los datos utilizados y 3) la precisión de los cálculos.

Dentro del marco de las aplicaciones comunes de la Ingeniería Civil, una diferencia aceptable en la exactitud es del orden del dos por mil (2‰).- Dado que a la precisión del cálculo podemos aumentarla a medida que aumentamos las cifras significativas de los números con que operamos, la cuestión radica en establecer el número de cifras necesario para asegurar una precisión igual o superior al grado de exactitud de los datos que se emplean. Prácticamente, utilizando una calculadora electrónica de bolsillo, ello se obtiene tomando cuatro cifras en los números que comienzan con 1 y tres cifras en los otros.

Cuando en la verificación de los cálculos llegamos a que en uno de los miembros es cero y el otro es un valor cercano a éste podemos dar por verificados los valores en consideración ya que, cuando hay alguna equivocación operativa ello se evidencia por la magnitud de la desigualdad que suele ser grosera

Del diagrama de cuerpo libre de la chapa S_1 planteamos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{array}{lll} \sum M_A = 0 & \text{de donde se obtiene} & B = \dots \\ \sum X = 0 & \text{de donde se obtiene} & A_X = \dots \\ \sum Y = 0 & \text{de donde se obtiene} & A_Y = \dots \end{array}$$

Obtenidos estos valores se verifican con otra ecuación, por ejemplo $\sum M_1 = 0$. Si resulta satisfactorio tenemos el problema resuelto.

Veamos otro ejemplo en un sistema de tres chapas, fig.3.42.

Se ha efectuado el diagrama de cuerpo libre para cada una de las chapas constitutivas del sistema isostático de la figura. Cada articulación intermedia, como las externas, implican dos incógnitas por cuanto sólo conocemos un punto de la recta de acción de la reacción interna.

Se pone ahora en evidencia la conveniencia matemática de comenzar a resolver chapa a chapa a partir de aquélla que no recibe ninguna acción de las otras, dejando para el final la chapa inmovilizada por sus propios vínculos.- Efectivamente:

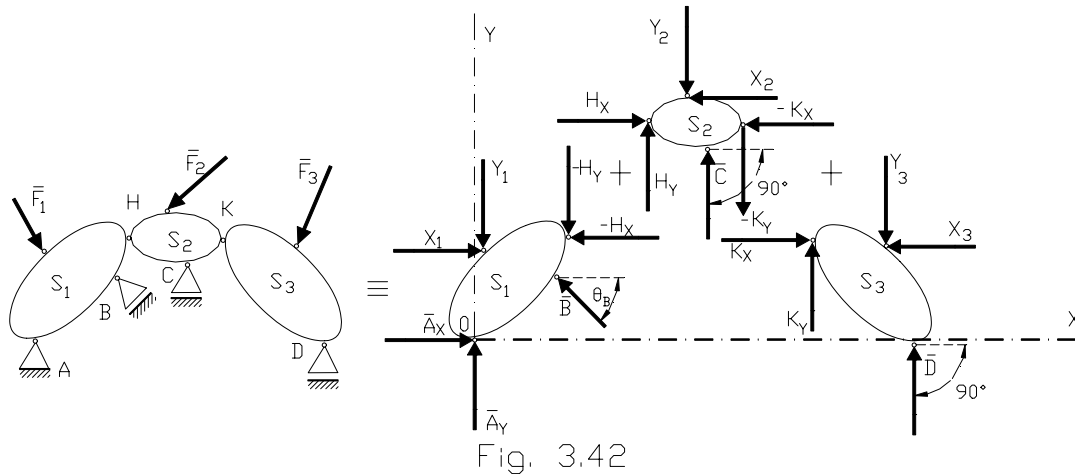


En la chapa S_1 se nos presentan cinco incógnitas: A_X, A_Y, B, H_X, H_Y

En la S_2 también son cinco: H_X, H_Y, C, K_X, K_Y

en cambio en la chapa S_3 tenemos tres incógnitas: K_X, K_Y, D

Como para cada chapa tenemos tres ecuaciones de equilibrio, las planteamos para la chapa S_3 y determinaremos las tres incógnitas. Los valores de las reacciones internas, K_X, K_Y , calculados y verificados los introducimos con sentido cambiado como acción sobre la chapa S_2 y determinamos los valores de las tres incógnitas que nos quedan en ésta: C, H_X, H_Y .



Estos dos últimos tomados como acción sobre la chapa S_1 , permiten calcular: A_X, A_Y, B .

Analicemos sistemas en que ninguna de las chapas posea tres vínculos simples a tierra. En este caso ninguna de las chapas está inmovilizada por sus propios vínculos, requiriendo todas la presencia de las otras para su inmovilidad.

Análiticamente esto se traduce en que se presentan cuatro o más incógnitas en todas las chapas, no pudiendo determinarse independientemente las reacciones de ellas.

No obstante ello, subsiste la validez del método anterior por cuanto si se establece el número de incógnitas y el número total de ecuaciones a razón de tres por chapa, de la igualdad de ambos surge que las reacciones externas e internas son estáticamente determinables.

Consideremos el sistema de dos chapas de la fig. 3.43, que ya fuera resuelto por el método general, y analicemos la posibilidad de resolver chapa a chapa separadamente, calculando no sólo las reacciones de vínculo externo sino también las que se originan internamente en las articulaciones intermedias.

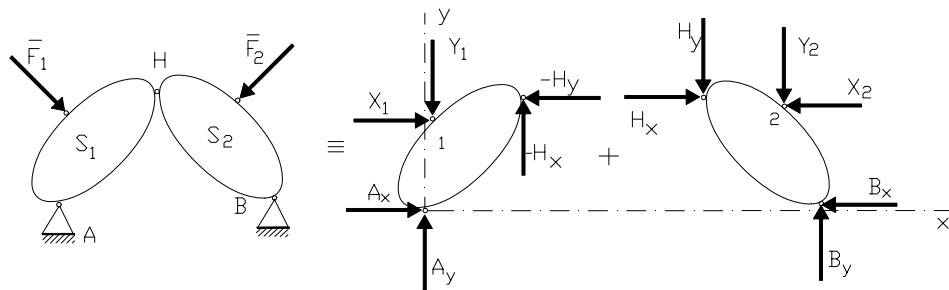


Fig. 3.43

Incógnitas:	$A_X, A_Y, B_X, B_Y, H_X, H_Y$	\therefore	$I = 6$
Ecuaciones:	$3n = 3 \times 2 = 6$	\therefore	$E = 6$

Para reducir el sistema de ecuaciones a resolver, conviene plantear en primer término ecuaciones en que sólo aparezcan las reacciones internas, para lo cual en cada chapa se toma momento con respecto al punto de concurrencia de las incógnitas externas.

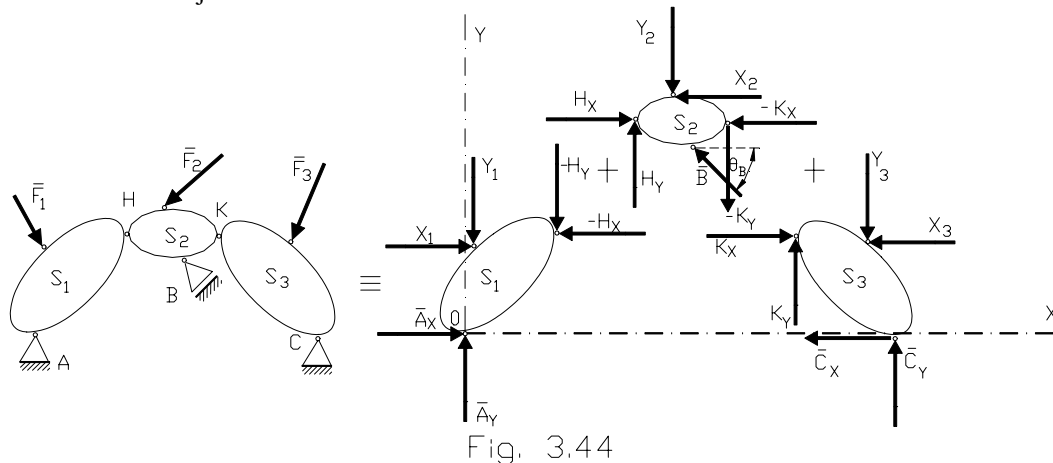
$$\left. \begin{array}{l} \text{Chapa } S_1: \quad \sum M_A = 0 \\ \text{Chapa } S_2: \quad \sum M_B = 0 \end{array} \right\} \text{ de ambas se despejan: } H_X, H_Y$$

$$\begin{array}{l} \text{Chapa } S_1: \quad \sum X_i = 0 \quad \text{se despeja } A_X \\ \quad \quad \quad \sum Y_i = 0 \quad \text{se despeja } A_Y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Chapa } S_2: \quad \sum X_i = 0 \quad \text{se despeja } B_X \\ \quad \quad \quad \sum Y_i = 0 \quad \text{se despeja } B_Y \end{array}$$

Los sentidos supuestos para las incógnitas quedan ratificados si el resultado es positivo, debiendo cambiarse en caso contrario.

Si se tratase de un sistema de tres chapas como el indicado en la fig. 3.44 y luego de verificar que la normal a la dirección del apoyo B no pasa por el polo de la chapa S_2 en la cadena que resulta al suponerlo eliminado, se procede al trazado de los diagramas de chapa libre para cada una de las que constituyen el sistema isostático. Para ello se suprimen los vínculos eternos e internos y en su lugar se aplican las reacciones de los mismos juntamente con todas las fuerzas activas.-



Se observa que se presentan nueve incógnitas, cinco reacciones externas (A_X, A_Y, B, C_X, C_Y) y cuatro internas (H_X, H_Y, K_X, K_Y).

Se dispone de $3n = 3 \times 3 = 9$ ecuaciones estáticas. Las reacciones son estáticamente determinadas pero ninguna chapa presenta sólo tres incógnitas lo que nos simplificaría el cálculo. Se pueden plantear para cada chapa ecuaciones de momento respecto a puntos para los cuales se anule el momento de las reacciones externas lo que permite el cálculo de las internas, mediante un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\text{Chapa } S_1: \sum M_A = 0, \quad \text{Chapa } S_2: \sum M_B = 0, \quad \text{Chapa } S_2: \sum M_D = 0, \quad \text{Chapa } S_3: \sum M_C = 0.$$

El punto D es uno cualquiera de la recta de acción de \bar{B} .- De ellas se determinan: H_X, H_Y, K_X, K_Y .

Se prosigue con :

$$\begin{array}{l} \text{Chapa } S_1: \quad \sum X_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum Y_i = 0, \text{ determinándose } A_X, A_Y ; \\ \text{Chapa } S_2: \quad \sum M_H = 0, \text{ determinándose } B; \\ \text{Chapa } S_3: \quad \sum X_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum Y_i = 0, \text{ determinándose } C_X, C_Y .- \end{array}$$



3.2.1.3.- Determinación Gráfica.

Consideremos en primer término el caso de un sistema isostático en que una de las chapas posee vínculos a tierra que garanticen su inmovilidad con independencia de las otras chapas, fig. 3.45.

Tomemos en primer término la chapa S_1 que necesita apoyar en S_2 para ser estable. En ella conocemos \vec{F}_1 y la dirección de la reacción \vec{A} : por su intersección N_1 debe pasar la reacción \vec{H} . En la forma conocida comenzamos con la construcción del polígono de fuerzas con el triángulo de equilibrio entre \vec{F}_1 , \vec{H} , y \vec{A} . Consideremos ahora la chapa S_2 ; sobre ella actúa $-\vec{H}$, ya determinada y la acción externa \vec{F}_2 que se interceptan en N_2 . Compuestas definen \vec{R}_2 , resultante de las acciones externas sobre S_2 ; interceptada por \vec{B} en N_3 determina la dirección de \vec{C} . Se construye el triángulo de equilibrio entre \vec{R}_2 , \vec{B} y \vec{C} con lo que queda resuelto el problema.

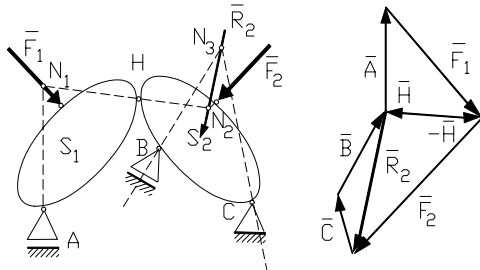


Fig. 3.45

Si ninguna de las chapas posee tres vínculos a tierra **la determinación gráfica de las reacciones de vínculo** en un sistema isostático de varias chapas se realiza cargando sucesiva e individualmente cada una de ellas.

La dirección de las reacciones internas correspondientes a las articulaciones intermedias, queda definida por la recta de acción que pasa por la articulación relativa considerada y el polo de la chapa adyacente en la cadena cinemática de un grado de libertad que se forma al separar del sistema isostático la chapa cargada, fig. 3.46.

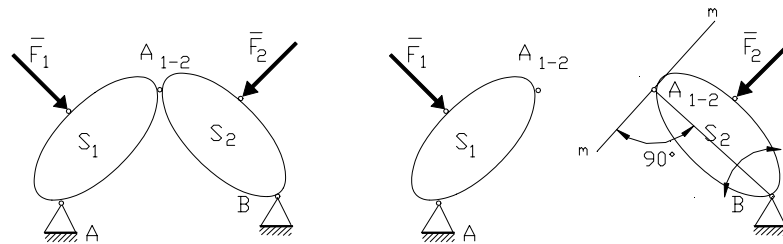


Fig. 3.46

En el sistema de la fig. 3.46 carguemos la chapa S_1 , e imaginemos separado el sistema en la articulación A_{1-2} . Se trata de establecer qué tipo de vínculo representa la chapa S_2 para la S_1 .

La dirección del desplazamiento posible del punto A_{1-2} de la chapa S_2 articulada a tierra en B queda determinada por la recta m-m, ya que cinemáticamente se comporta como una biela articulada a tierra en B. **La dirección de la reacción en la articulación intermedia coincide con la de la recta que pasa por ésta, A_{1-2} , y el polo $O_2 \equiv B$ de la chapa S_2 si la imaginamos separada en A_{1-2} .**

Surge entonces la siguiente determinación gráfica, fig. 3.47.

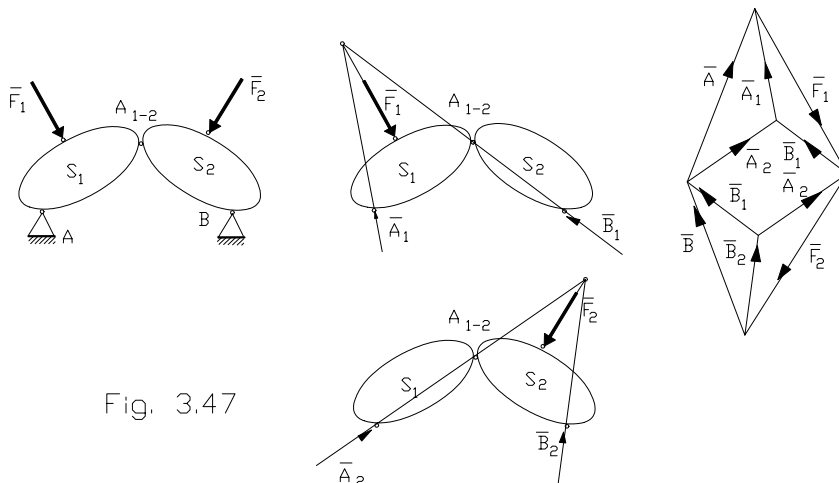


Fig. 3.47



En primer término se equilibra \bar{F}_1 con \bar{B}_1 (dirección conocida, $A_{1-2} - B$) y con \bar{A}_1 (pasa por A y por la intersección de \bar{F}_1 con \bar{B}_1). Luego se equilibran \bar{F}_2 con \bar{A}_2 (dirección conocida, $A_{1-2} - A$) y con \bar{B}_2 (pasa por B y por la intersección de \bar{F}_2 con \bar{A}_2).- Finalmente se compone:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$$

$$\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$$

Si el sistema es de varias chapas se sigue igual procedimiento: se imagina separada la chapa cargada y se determinan los polos de las chapas adyacentes en las chapas o cadenas de un grado de libertad que se forman en esa hipótesis.

Conocidos los polos se tiene la dirección de la reacción intermedia y se puede practicar su determinación según el proceso gráfico en el que no insistimos.

Arco Triarticulado.

El sistema de dos chapas vinculadas entre sí y a tierra cuyas reacciones hemos calculado en forma analítica y gráficamente, se materializa para su aplicación en obras de ingeniería, en dos sistemas llamados **arcos** y **pórticos triarticulados.**, fig. 3.48

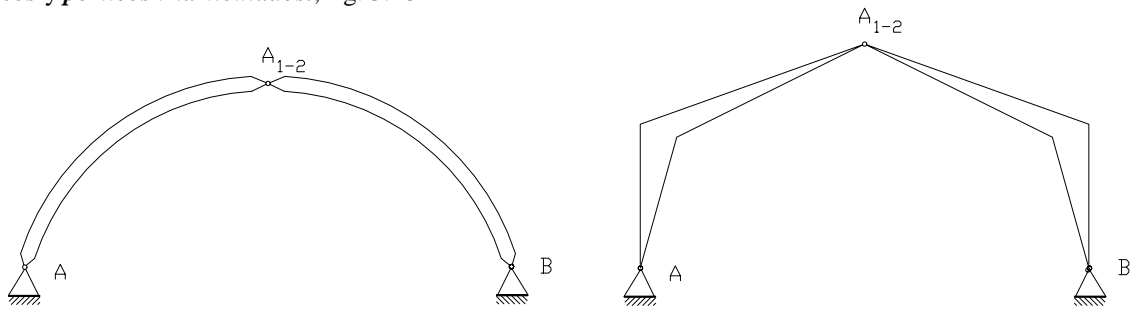


Fig. 3.48

Veremos un modo gráfico que es de especial interés en los arcos por cuanto permite no sólo la determinación de las reacciones de vínculo sino también el cálculo de los esfuerzos internos que se verá mas adelante. Este método se basa en el funicular pasante por tres puntos, cuyo polo se determina en la forma vista en 2.2.8.5.

Sea el arco triarticulado de la fig. 3.49 y sea O el polo del funicular pasante por A (lado I), A_{1-2} (lado III), y por B (lado V). **Los vectores OC_1 y C_5O definidos por el primero y último rayos polares del polígono de fuerzas, nos dan las reacciones \bar{A} y \bar{B} en las articulaciones a tierra del arco.**

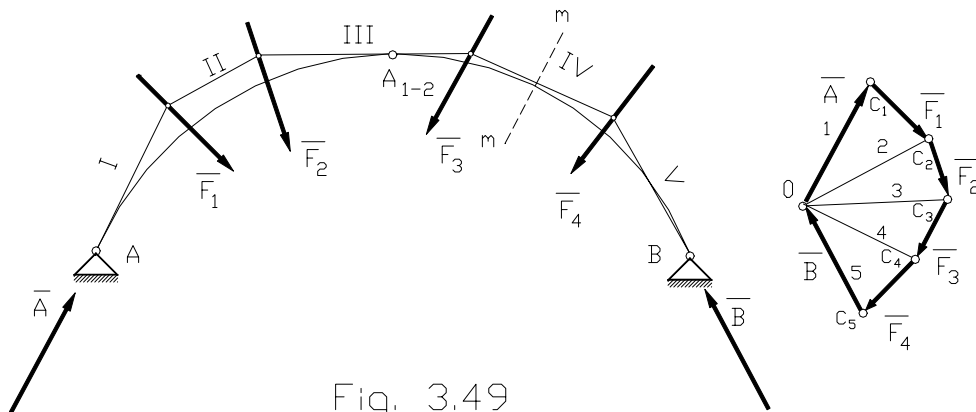


Fig. 3.49

Si ahora consideramos una sección m-m cualquiera del arco, observamos que a la izquierda de ella están aplicadas las fuerzas $\bar{A} - \bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3$, cuya resultante queda dada en posición por el lado IV del funicu-



lar y su vector representativo es $\overline{OC_4}$ (rayo polar 4). El lado 4 y el vector $\overline{OC_4}$ representan también la resultante de las fuerzas ubicadas a la derecha de la sección con signo cambiado.

Como esto sucede para cualquier sección del arco, este polígono funicular con polo en el origen de la primera fuerza de la izquierda da las resultantes sucesivas en las diversas secciones del arco; se lo llama **polígono de presiones o curva de presiones** si la carga fuese distribuida.

Que OC_1 y C_3O son las reacciones \bar{A} y \bar{B} es ahora evidente ya que:

- 1.- Pasan por A y B respectivamente.
- 2.- Las fuerzas activas forman con ellas un polígono de fuerzas cerrado lo que significa que la resultante es nula.-
- 3.- Al adoptar el polo O hemos impuesto la condición de que tres de sus lados pasen por las tres articulaciones del arco, y como esos lados coinciden con la recta de acción de la resultante de las fuerzas izquierdas y derechas, el momento de todas las fuerzas respecto a A, B y A_{1-2} será nulo.

3.2.1.4.- Determinación De Reacciones En Vigas Gerber.-

Una sucesión de vigas rectilíneas horizontales, articuladas entre sí y vinculadas a tierra mediante una articulación fija o un empotramiento, y el número de apoyos móviles horizontales indispensables para hacerla isostática constituyen un sistema llamado **Vigas articuladas**, o **Vigas GERBER**.

El empleo de la viga Gerber es muy útil cuando por naturaleza del terreno y/o el tipo de obra hay que aumentar la seguridad ante el riesgo de asentamientos de los apoyos.-

Las reacciones se pueden determinar por cualquiera de los métodos analíticos vistos para los sistemas de varias chapas y en forma gráfica por el polígono funicular.- Los métodos analíticos se aplican a la viga Gerber de igual modo a lo hecho en páginas anteriores; el análisis de la estructura surge de la secuencia de ecuaciones de equilibrio planteadas en fig. 3.50 y 3.51 como dos aplicaciones de resolución por el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura, y en fig. 3.52 y 3.53 resolviendo por diagramas separados para cada chapa de esas dos mismas vigas (la segunda con un extremo empotrado).-

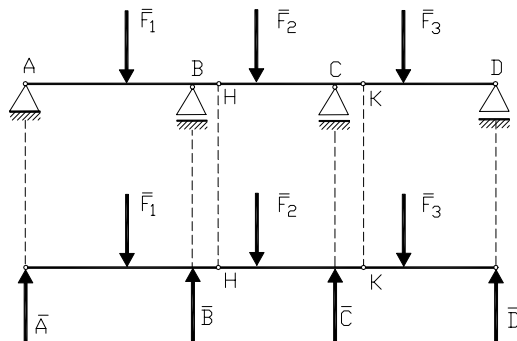


Fig. 3.50

Diagrama estructura total libre, figura 3.50:

$$\begin{aligned} \sum M_K^{derecha} = 0 & \quad \therefore \quad D = \dots \\ \sum M_H^{derecha} = 0 & \quad \therefore \quad C = \dots \\ \sum M_A = 0 & \quad \therefore \quad B = \dots \\ \sum F_y = 0 & \quad \therefore \quad A = \dots \end{aligned}$$

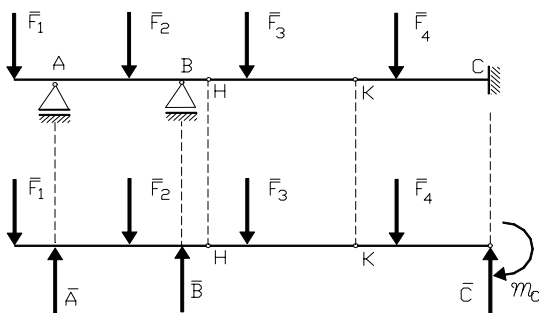


Fig. 3.51

Diagrama estructura libre total, figura 3.51:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sum M_K^{derecha} = 0 \\ \sum M_H^{derecha} = 0 \end{aligned} \right\} & \quad \therefore \quad \left\{ \begin{aligned} C = \dots \\ m_c = \dots \end{aligned} \right. \\ \sum M_A = 0 & \quad \therefore \quad B = \dots \\ \sum F_y = 0 & \quad \therefore \quad A = \dots \end{aligned}$$



D.C.L. para cada viga separada, figura 3.52.-

Viga 3:

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0 & \quad \therefore \quad K = \dots \\ \sum M_K = 0 & \quad \therefore \quad D = \dots \end{aligned}$$

Viga 2:

$$\begin{aligned} \sum M_H = 0 & \quad \therefore \quad C = \dots \\ \sum M_C = 0 & \quad \therefore \quad H = \dots \end{aligned}$$

Viga 1:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \quad \therefore \quad B = \dots \\ \sum F_y = 0 & \quad \therefore \quad A = \dots \end{aligned}$$

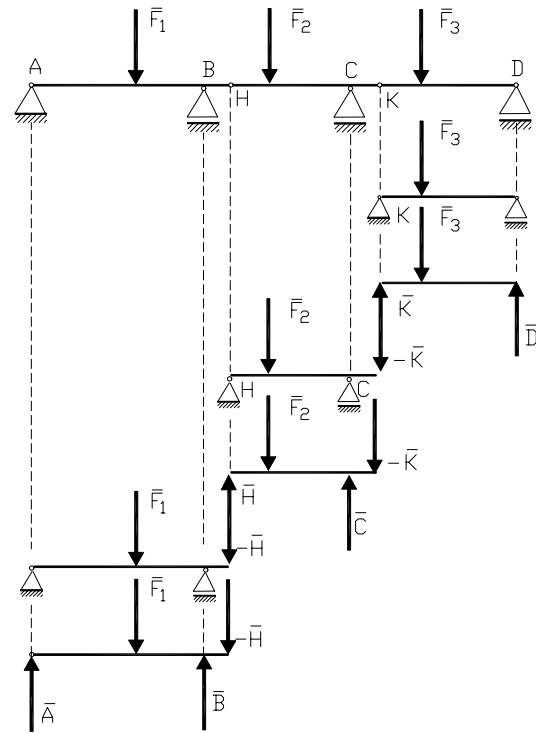


Fig. 3.52

D.C.L. para cada viga separada, figura 3.53.-

Viga 2:

$$\begin{aligned} \sum M_H = 0 & \quad \therefore \quad K = \dots \\ \sum M_K = 0 & \quad \therefore \quad H = \dots \end{aligned}$$

Viga 1:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 & \quad \therefore \quad B = \dots \\ \sum M_B = 0 & \quad \therefore \quad A = \dots \end{aligned}$$

Viga 3:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 & \quad \therefore \quad m_C = \dots \\ \sum F_y = 0 & \quad \therefore \quad C = \dots \end{aligned}$$

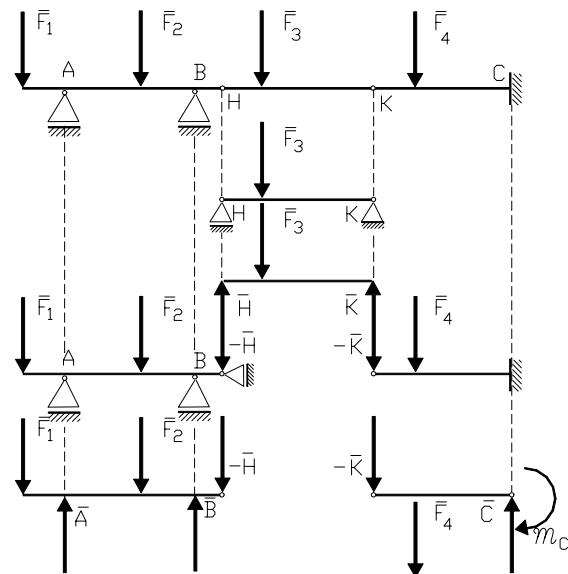


Fig. 3.53

Estudiaremos la determinación de reacciones utilizando el polígono funicular.

Sea la viga de la fig. 3.54 y su respectivo diagrama de cuerpo libre: para simplificar se han superpuesto ambos gráficos, pero debe recordarse que el evidenciar la reacción implica la supresión del vínculo.

Se construye el polígono de las fuerzas activas $\bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3$; se adopta el polo O y se trazan los rayos polares 1 - 2 - 3 - 4. Se traza el polígono funicular de las fuerzas activas I - II - III - IV.-



La línea de cierre la vamos a trazar considerando separadamente cada una de las vigas, comenzando por aquella que no recibe acción alguna de las otras, en nuestro caso la viga tres, fig. 3.52.- La carga que sobre ella actúa es \bar{F}_3 y le corresponde el funicular III - IV: el punto de intersección del primer lado de este funicular con la recta de acción de su reacción izquierda (punto K'), unido con el punto de intersección del último lado del funicular con la recta de acción de la reacción derecha (punto D'), determinan la **línea de cierre** γ que llevada al polar nos da las intensidades de las reacciones \bar{D} y \bar{K} .

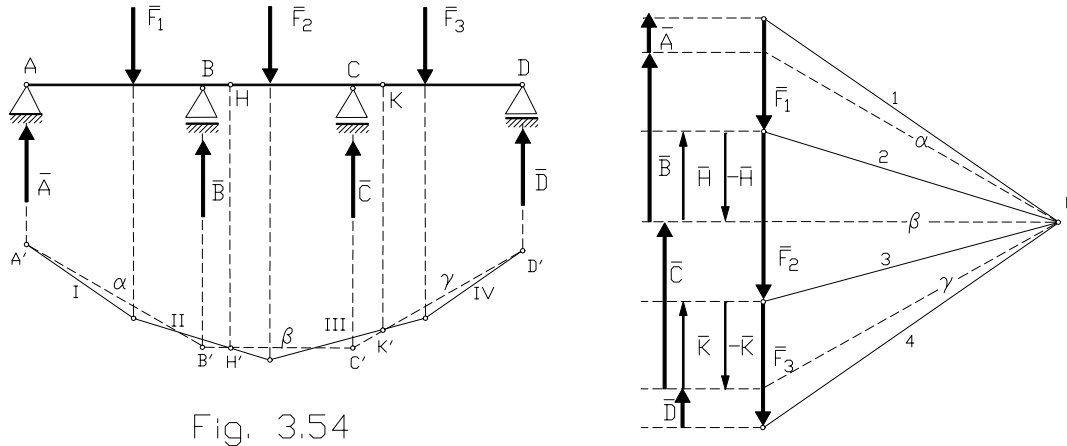


Fig. 3.54

La viga dos está cargada con \bar{F}_2 y ($-\bar{K}$) correspondiéndole el 2 como primer rayo polar y el rayo γ como último. El funicular de las cargas de esta viga dos será II - III - γ y la intersección de II con la vertical de \bar{H} (primer lado del funicular y reacción izquierda) unida a la intersección del lado γ con la vertical del apoyo C (último lado del funicular y reacción derecha) **determinan la línea de cierre** β , que llevada al polar nos da las intensidades de las reacciones \bar{C} y \bar{H} .

Para la viga uno las cargas son \bar{F}_1 y ($-\bar{H}$) siendo su funicular I - II - β . La intersección de I con la recta de acción de \bar{A} , y de β con la recta de acción de \bar{B} , **determinan la línea de cierre** α que permite establecer las intensidades de \bar{A} y \bar{B} .

Observemos que $\alpha - \beta - \gamma$ constituyen el polígono funicular de las fuerzas reactivas, que se corta con el funicular I - II - III - IV de las fuerzas activas en correspondencia con las verticales de los apoyos extremos y de las articulaciones intermedias, y tiene sus vértices sobre las verticales de los apoyos internos.

Esto permite el trazado rápido del funicular de las reacciones o sea las líneas de cierre para cada una de las vigas del siguiente modo:

Obtenido el funicular de las fuerzas activas, I - II - III - IV en la forma conocida, se bajan verticales de los apoyos extremos y de las articulaciones intermedias, que lo interceptan en los puntos A' - H' - K' - D'. Observando la viga tres, que no recibe carga de las otras, vemos que uniendo K' con D' se determina su línea de cierre γ que se prolonga hasta C' es decir hasta cortar la vertical del apoyo C; se une C' con H' y se obtiene la línea de cierre de la viga dos, β , la que se prolonga hasta interceptar la vertical del apoyo intermedio B en B'; uniendo este punto con A' se determina la línea de cierre α de la viga uno.

Llevadas α, β, γ al polígono polar las reacciones quedan dadas por los rayos paralelos de igual designación y los rayos extremos 1 y 4 como se deduce por aplicación de la reciprocidad entre polígono funicular y polígono de fuerzas, 2.8.3.2.

Finalmente, en la fig. 3.55 se desarrolla un ejemplo con las siguientes variantes:

El primer apoyo de la izquierda no se ubica en el extremo de la viga presentándose un **voladizo**, y el **extremo derecho está empotrado**. Se observa que la línea de cierre α termina en A' no llegando a la vertical del extremo izquierdo del voladizo y β se prolonga hasta C' para determinar el momento del par de empujamiento:

$$\mathcal{M}_e = \overline{C'C''} \times h \times \text{esc. Long} \times \text{Esc. Fzas}$$

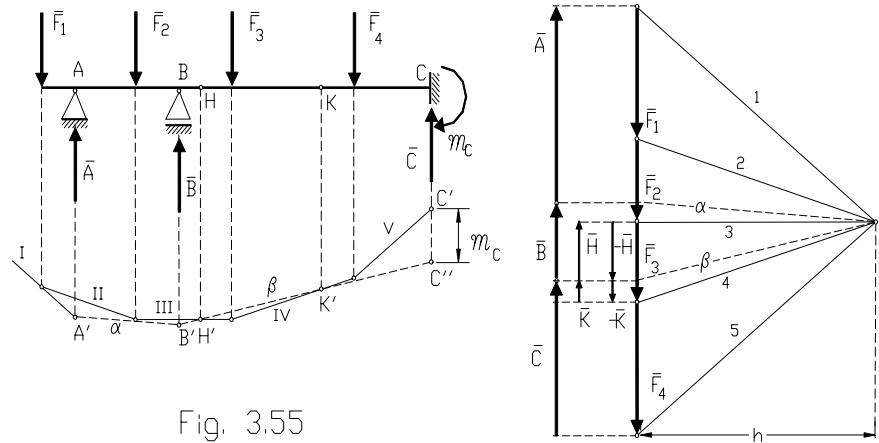


Fig. 3.55

3.3.- EL CUERPO RÍGIDO VINCULADO.-

3.3.1.- VÍNCULOS EN EL ESPACIO.-

Los enlaces en el espacio se clasifican, como en el plano, por el número de desplazamientos que pueden impedir

a) *Vínculo de primera especie o apoyo deslizante sobre un plano*, fig. 3.56: impide la traslación según el eje y ; permite las traslaciones según los otros dos ejes y las rotaciones alrededor de los tres ejes.-

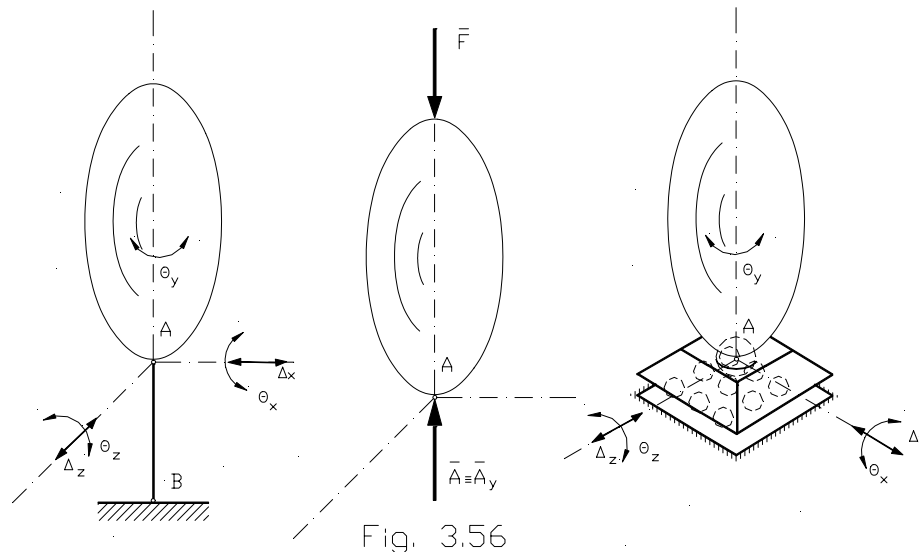


Fig. 3.56

La reacción actúa según la dirección del eje y (normal al plano de deslizamiento); el único parámetro desconocido es su intensidad.-

En un punto de un cuerpo se crea un enlace simple cuando se obliga a este punto a permanecer sobre una superficie dada (se lo llama también apoyo superficial), de modo que pueda moverse en cualquier dirección contenida en el plano pero no en la dirección normal.- Restringe un grado de libertad y puede estar constituido por una biela o bien por un dispositivo de apoyo que tiene forma de tronco de pirámide, y se lo apoya sobre un plano horizontal con interposición de un sistema de esferas; en su parte superior se vincula al cuerpo que sustenta mediante una rótula.-

En el caso de la biela, el punto A está obligado a moverse en una esfera de radio BA si los desplazamientos son finitos, pero si los desplazamientos son infinitésimos, el movimiento tendrá lugar en el plano tangente a la esfera.-

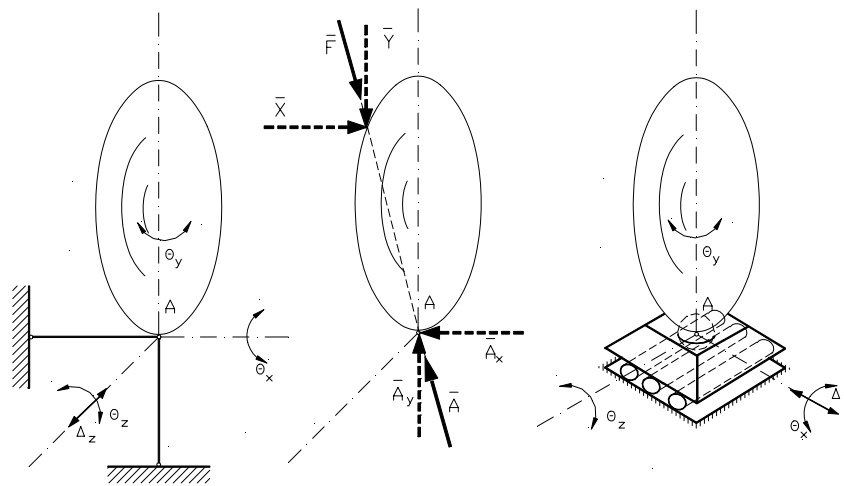


Fig. 3.57

b) Vínculo de segunda especie o apoyo deslizante sobre una línea. Restringe dos grados de libertad, y puede materializarse mediante dos bielas concurrentes a un punto del cuerpo rígido al que se encuentran aplicadas, o bien por un dispositivo similar al del apoyo superficial, salvo que en vez de apoyar sobre un sistema de esferas lo hace por interposición de una sucesión de rodillos paralelos, fig. 3.57. Impide las dos traslaciones en el plano de las bielas; permite la traslación en la dirección normal a dicho plano y las tres rotaciones alrededor de los ejes pasantes por la rótula. La reacción está contenida en el plano de las bielas y queda determinada por dos componentes.-

En máquinas los rodillos sobre superficies rugosas o las ruedas sobre carril constituyen vínculos de segunda especie; también se toma como enlace de segunda especie los cojinetes simples para apoyos de árboles o ejes con capacidad de carga radial solamente.-

c) Vínculo de tercera especie, apoyo fijo o rótula, o articulación esférica, que impide las tres traslaciones y permite los tres giros. La reacción pasa por la articulación y queda determinada por tres componentes, fig. 3.58.

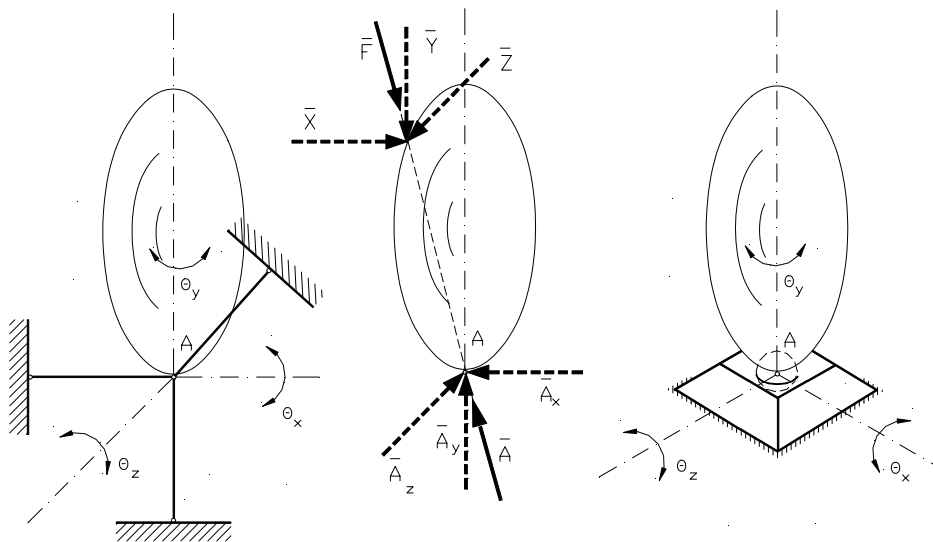


Fig. 3.58

En máquinas los cojinetes para apoyos de árboles y ejes con capacidad de carga radial y axial se toman como apoyos de tercera especie, dentro de los límites de carga nominal de fábrica.-

d) Vínculos de cuarta especie, restringen cuatro grados de libertad. Se utilizan en máquinas, integrando mecanismos en los cuales deben permitirse dos grados de libertad; la determinación de las reacciones implica cuatro componentes, fig. 3.59.

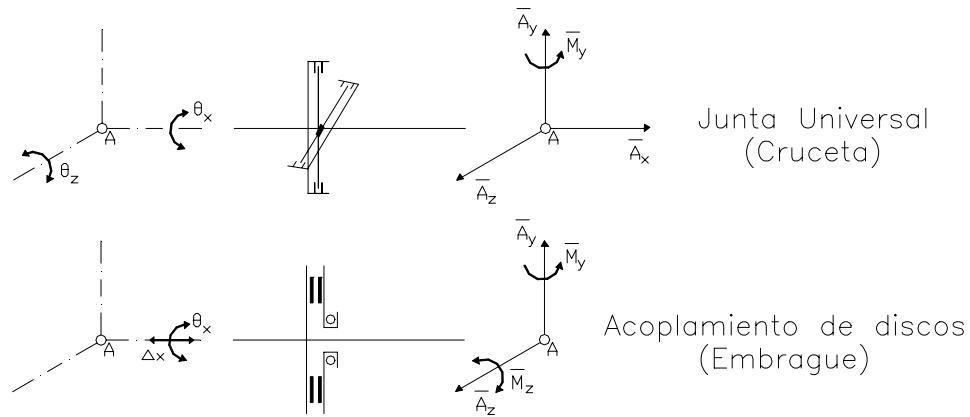


Fig. 3.59

e) **Vínculos de quinta especie**, restringen cinco grados de libertad. Se utiliza en máquinas, integrando mecanismos en los cuales debe permitirse un grado de libertad; la determinación de las reacciones implica cinco componentes, fig. 3.60.

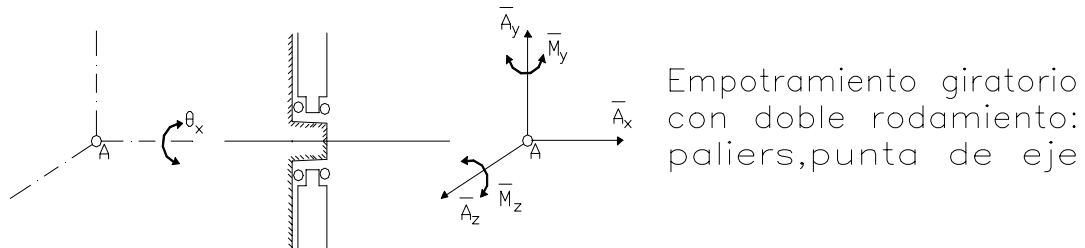


Fig. 3.60

f) **Vínculos de sexta especie**. Restringe los seis grados de libertad, determinar su reacción implica calcular seis incógnitas. Es el **empotramiento total**; se obtiene inmovilizando tres puntos no alineados del cuerpo, dos de sus rectas o uno de sus planos.

3.3.2.- SISTEMAS ISOSTÁTICOS EN EL ESPACIO.-

Para imponer **inmovilidad total en el espacio** a un cuerpo o estructura indeformable es necesario suprimir sus seis grados de libertad, lo que exige el empleo de seis enlaces simples como mínimo (esto es, capaces cada uno de impedir un solo movimiento) o bien algunos vínculos múltiples equivalentes.

Si se utilizan seis vínculos simples, representados con seis bielas cinemáticamente eficientes, tendremos seis incógnitas a calcular para determinar todas las reacciones de vínculo. Y como sabemos que disponemos de seis ecuaciones de equilibrio, tenemos tantas ecuaciones como grados de libertad: **las reacciones son estáticamente determinadas y el sistema** (estructura más vínculos externos) **será isostático**.

Si se emplean más de seis vínculos simples, **los que exceden de seis son superabundantes**; las reacciones implican más de seis incógnitas y tenemos más incógnitas que número de ecuaciones por lo cual alguna de las **reacciones son estáticamente indeterminadas**.

Si el número de vínculos simples es menor de seis le quedan al cuerpo algunos movimientos posibles presentando **constricción parcial**. Las reacciones comprenden menos de seis incógnitas, hay más ecuaciones que incógnitas y algunas ecuaciones de equilibrio no pueden ser satisfechas bajo las condiciones generales de carga.- Sin embargo, bajo condiciones de carga particulares correspondientes a un problema dado, las ecuaciones adicionales obtenidas frecuentemente se reducen a identidades triviales como $0 = 0$ y pueden descontarse; aunque se presente **constricción parcial** el cuerpo permanece en equilibrio bajo dicho estado de carga (ejemplo 3 del apartado siguiente).-



Aún con seis o más incógnitas, es posible que algunas de las ecuaciones de equilibrio no sean satisfechas ya que, si bien el número de vínculos es suficiente (o aún excesivo), su disposición es tal que no impiden todo movimiento, por ser aparente uno o más de ellos ***Esto ocurre cuando los enlaces simples son tales que las rectas de acción de las reacciones que en ellos se originan cortan a una recta***, pues en este caso no impiden una rotación (infinitésima o finita) del cuerpo alrededor de dicha recta, la que puede ser propia o impropia en caso que los planos que la determinan sean paralelos.

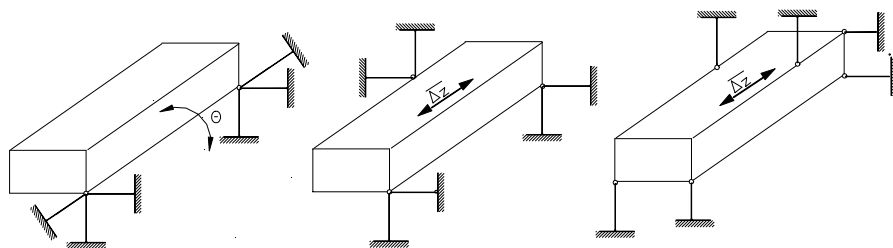


Fig. 3.61

El cuerpo rígido presenta constricción impropia, y sucede cuando las rectas de acción de las reacciones determinadas por los ejes de las bielas tienen alguna de las siguientes disposiciones:

- cuatro o más de los seis ejes de las bielas concurren a un mismo punto propio o impropio; si el punto es impropio cuatro o más ejes son paralelos.
- los ejes concurren tres a tres en dos puntos.
- los ejes concurren dos a dos en tres puntos alineados.
- cuatro o más ejes están situados en un mismo plano.
- los ejes están situados dos a dos en tres planos que se cortan a lo largo de una misma recta, o son paralelos entre sí.
- los ejes están situados en seis planos de un haz o seis planos paralelos.

En la fig. 3.61 se muestran algunos ejemplos concretos de estas disposiciones.

3.3.3.- DETERMINACIÓN DE REACCIONES EN EL ESPACIO.-

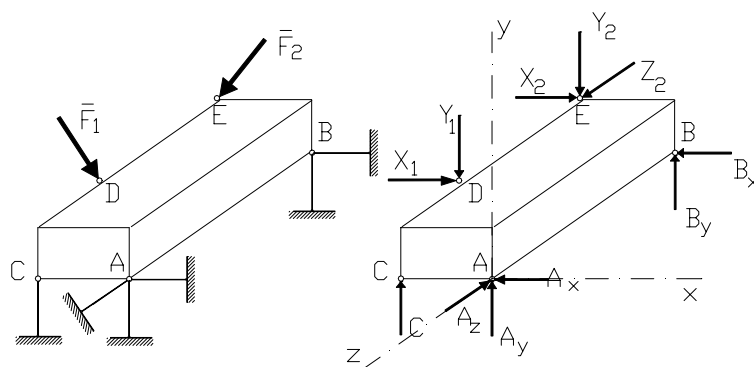


Fig. 3.62



1) Consideremos el sistema de la fig. 3.62, sobre el que actúan las cargas indicadas, y debemos determinar las reacciones en los vínculos, para lo cual se ha trazado el diagrama de cuerpo libre.

En primer término debemos establecer si el sistema es o no isostático. El número de vínculos simples es seis y su disposición no encuadra en ninguna de las indicadas en 3.3.2. Por lo tanto el sistema es isostático.

También podemos llegar a las mismas conclusiones en base al siguiente análisis más evidente.

Enlacemos un punto A del cuerpo mediante un vínculo triple, rótula, que impide a A todo desplazamiento.

De este modo el cuerpo puede girar alrededor de cualquier eje que pase por A, y todo punto D del cuerpo puede desplazarse sobre una superficie esférica de centro A y radio AD.- Para fijar un segundo punto B basta un vínculo doble que impide a B los desplazamientos normales a AB, pues el desplazamiento en la dirección AB, está ya impedido por el enlace en A. De este modo el cuerpo puede girar aún alrededor del eje AB, o sea todo punto D puede moverse sobre una circunferencia ubicada en un plano normal al eje AB con centro sobre AB.- Por último, se impide el movimiento restante de un tercer punto C inmovilizándolo mediante una biela o apoyo superficial. Los vínculos empleados equivalen pues a $3+2+1=6$ simples. Estos fijan completamente al cuerpo, excepto en el caso que la biela de C tuviese la dirección CA ya que entonces no se impediría una rotación infinitesimal alrededor de AB.

Las ecuaciones de equilibrio se plantean buscando tener el menor número de incógnitas en cada una.- De:

$\sum M_x = 0$	se despeja	B_y
$\sum M_y = 0$	“ “	B_x
$\sum M_z = 0$	“ “	C
$\sum X_i = 0$	“ “	A_x
$\sum Y_i = 0$	“ “	A_y
$\sum Z_i = 0$	“ “	A_z

2) Consideremos una viga en el espacio, fig. 3.63, cuyo eje geométrico no está contenido en un plano sometida a fuerzas cualesquiera (o una viga plana sometida a fuerzas que no actúan en su plano).

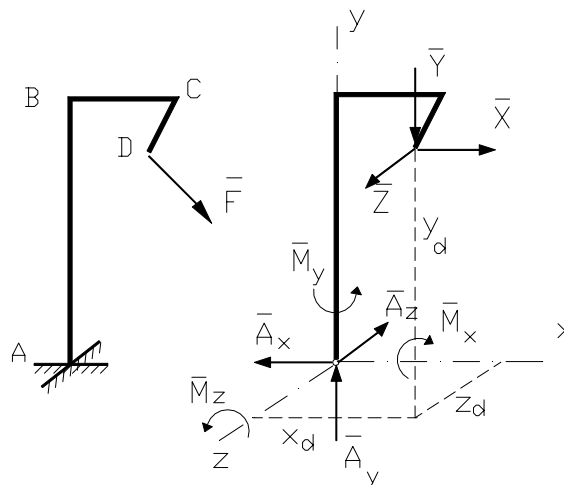


Fig. 3.63

Determinamos sus reacciones de vínculo en el caso que se encuentre empotrada en el extremo izquierdo. Hay 6 vínculos simples, cinemáticamente eficientes, luego el sistema es isostático.



Se ha trazado el diagrama de cuerpo libre poniendo en evidencia las seis incógnitas: $A_x, A_y, A_z, M_x, M_y, M_z$.

$$\begin{aligned}
 \sum X_i &= -A_x + X = 0 & \text{luego: } A_x &= X \\
 \sum Y_i &= A_y - Y = 0 & \text{luego: } A_y &= Y \\
 \sum Z_i &= -A_z + Z = 0 & \text{luego: } A_z &= Z \\
 +_-\uparrow \sum M_x^i &= -M_x + Y z_d + Z y_d = 0 & \text{luego: } M_x &= Y z_d + Z y_d \\
 +_-\uparrow \sum M_y^i &= M_y + X z_d - Z x_d = 0 & \text{luego: } M_y &= Z x_d - X z_d \\
 +_-\uparrow \sum M_z^i &= M_z - X y_d - Y x_d = 0 & \text{luego: } M_z &= X y_d + Y x_d
 \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

3) Analizar qué tipo de sistema constituye la grúa DERRICK de la fig. 3.64, y determinar las reacciones de vínculo para la posición indicada.

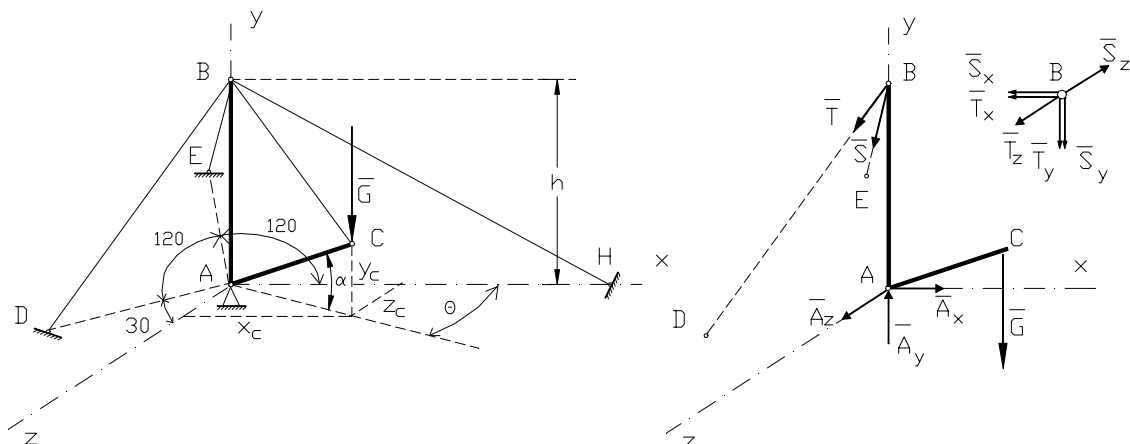


Fig. 3.64

La grúa consta de un mástil o pluma AB de altura h, fijo en su base por una rótula y en su extremo superior por un collarino unido a tres riendas o cables BD - BE - BH ubicados en planta a 120° entre ellas. Articulado al mástil inmediatamente por sobre la rótula se encuentra el aguilón o brazo AC de la grúa que lleva en su extremo una polea por donde pasa el cable que lleva el gancho para izar las cargas. Los extremos del mástil B y del aguilón C se enlazan con un juego de poleas y cables permitiendo el movimiento del aguilón en un plano vertical variando su inclinación α . El aguilón conjuntamente con el mástil puede girar alrededor del eje “y” sobre la rótula A variando el ángulo θ hasta 360°.

En la posición indicada de la carga (definida por los parámetros α y θ), el sistema posee tres vínculos simples en A y dos en B; la rienda BH no constituye vínculo alguno porque el cable posee capacidad sólo para impedir el alejamiento de los puntos B y H, pero no su acercamiento. El sistema presenta constricción parcial y posee un grado de libertad: rotación alrededor del eje y. Pero siendo nulo el momento de \bar{G} respecto del eje y podrá existir equilibrio entre las cargas y las reacciones de vínculo para cada posición que se le dé al aguilón.

Trazando el diagrama de cuerpo libre para la estructura móvil constituida por el mástil, aguilón y cable que los vincula, observamos que hay 5 incógnitas estáticamente determinadas y que se resuelven según la siguiente secuencia de cálculo:

Datos: $\bar{G} - h - L=AC - \alpha - \theta$, con estos valores se establecen las coordenadas de A-B-C-D-E-H y los cosenos directores de las riendas BD - BE : $\cos \theta_{xT}$; $\cos \theta_{yT}$; $\cos \theta_{zT}$; $\cos \theta_{xS}$; $\cos \theta_{yS}$; $\cos \theta_{zS}$

Incógnitas: $A_x; A_y; A_z; T; S$



Desarrollo:

$$T_x = T \cos \theta_{xT} \qquad S_x = S \cos \theta_{xS}$$

$$T_y = T \cos \theta_{yT} \qquad S_y = S \cos \theta_{yS}$$

$$T_z = T \cos \theta_{zT} \qquad S_z = S \cos \theta_{zS}$$

$$+_ \uparrow \quad \sum M_x^i = G z_c + T_z h - S_z h = 0$$

$$+_ \uparrow \quad \sum M_z^i = -G x_c + T_x h + S_x h = 0$$

De este sistema se despejan T y S.- Las incógnitas restantes resultan de:

$$\sum X_i = A_x - T_x - S_x = 0 \qquad \therefore \qquad A_x = T_x + S_x$$

$$\sum Y_i = A_y - G - T_y - S_y = 0 \qquad \therefore \qquad A_y = T_y + S_y + G$$

$$\sum Z_i = A_z + T_z - S_z = 0 \qquad \therefore \qquad A_z = S_z - T_z$$

