



CAPÍTULO 4

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES

4.1.- CENTRO DE MASA.-

4.1.1.- SISTEMA DE MASAS EN EL ESPACIO. MOMENTO ESTÁTICO RESPECTO A UN PUNTO Y A UN PLANO.

Consideremos un conjunto espacial de n puntos $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$, asociados cada uno de ellos con un número determinado (fig. 4.1.). Cada punto puede, por ejemplo, representar la posición de una partícula de materia y el número una determinada magnitud de esa materia, como ser: su masa, peso, volumen, área, longitud. Puede también representar una carga eléctrica o magnética. Las llamaremos por el momento masas, denominándolas $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ sin que, repetimos, necesariamente represente la masa física de esa partícula material; puede ser cualquiera de las magnitudes mencionadas u otras. Un conjunto de puntos como el descrito se designa *sistema de puntos pesados o ponderados* o simplemente *sistema de masas*.

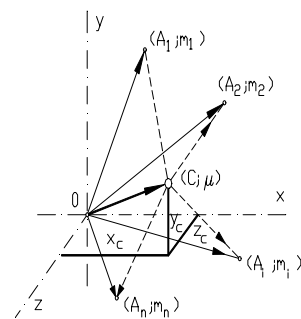


Fig. 4.1

Se entiende por *masa total del sistema* a:

$$\mu = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_i$$

Si O es otro punto del espacio, el producto $m_i \overline{OA_i}$ de la masa por su vector posición respecto a él se denomina *momento estático de primer orden* de la masa m_i respecto al punto O .

Lo llamamos simplemente momento estático, y está expresado por el producto de un escalar por un vector: será un vector de dirección y sentido coincidente con \overline{OA} .

Se denomina *CENTRO DE MASA del sistema de puntos "ponderados" o "pesados" ($A_i - m_i$), al punto C tal que supuesta concentrada en él la masa total μ , su momento estático respecto al punto O sea igual a la suma de los momentos estáticos de cada una de las masas m_i constitutivas del sistema respecto al mismo punto O .* Lo designamos $\overline{S_o}$ y se tiene:

$$\mu \overline{OC} = m_1 \overline{OA_1} + m_2 \overline{OA_2} + \dots + m_n \overline{OA_n} = \sum m_i \overline{OA_i} = \overline{S_o} \quad (1)$$

A esta expresión se la conoce como el *teorema de Varignon para las masas*. La posición del centro de masa queda determinada por su vector posición respecto al origen O adoptado:

$$\overline{OC} = \frac{m_1 \overline{OA_1} + m_2 \overline{OA_2} + \dots + m_n \overline{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \overline{OA_i}}{\sum m_i} = \frac{\overline{S_o}}{\mu} \quad (2)$$

En la cual, repetimos, S_o es el momento estático de todo el sistema de masas respecto al punto O y μ su masa total.



Si en lugar de un sistema discreto o discontinuo de masas se tratase de un sistema continuo de masa μ , las masas finitas elementales m_i las tomaríamos infinitamente pequeñas dm y las sumatorias se nos transformarían en integrales extendidas a toda la masa μ del sistema:

$$\overline{OC} = \frac{\int_{\mu} \overline{OAdm}}{\int_{\mu} dm} = \frac{S_0}{\mu} \quad (2)$$

Por otra parte, si al origen de referencia lo tomamos coincidiendo con el centro de masa C , el momento estático del sistema respecto a él vale:

$$S_C = m_1 \overline{CA_1} + m_2 \overline{CA_2} + \dots + m_n \overline{CA_n} = \sum m_i \overline{CA_i} = \mu \overline{CC}$$

Pero como el vector \overline{CC} es evidentemente nulo y la masa total del sistema, μ , es distinta de cero por ser las masas constitutivas del mismo reales y positivas, resulta:

$$S_C = \sum m_i \overline{CA_i} = \mu \overline{CC} = 0 \quad (3)$$

Para cualquier otro punto que se tome como origen de referencia, tanto el vector posición como el momento estático son distintos de cero.- Por lo tanto **el centro de masa siempre existe y es un punto único.-**

Por lo cual, también es correcto **definir al centro de masa como el punto para el cual el momento estático del sistema es nulo.**

La posición del centro de masa C podemos establecerla en coordenadas cartesianas expresando en (1) \overline{OC} y $\overline{OA_i}$ en función de sus componentes rectangulares.

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k} \\ \overline{OA_i} &= x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k} \end{aligned}$$

En donde O es el origen de coordenada; x_C, y_C, z_C son las coordenadas del centro de masa C ; x_i, y_i, z_i las del punto genérico A_i .- Introduciendo estas expresiones en (1) tenemos:

$$\mu x_C \bar{i} + \mu y_C \bar{j} + \mu z_C \bar{k} = \bar{i} \sum m_i x_i + \bar{j} \sum m_i y_i + \bar{k} \sum m_i z_i$$

Para que se cumpla esta igualdad, necesariamente tendrá que cumplirse la igualdad de sus tres términos uno a uno, lo que exige:

$$\left. \begin{aligned} \mu x_C &= \sum m_i x_i = S_{YZ} \\ \mu y_C &= \sum m_i y_i = S_{ZX} \\ \mu z_C &= \sum m_i z_i = S_{XY} \end{aligned} \right| \quad (4)$$

Las (4) son ecuaciones escalares que expresan el teorema de Varignon para las masas en función de las coordenadas cartesianas de los puntos del sistema.- **Los productos que en ellas aparecen de las masas por sus distancias a los planos de referencia yz, zx, xy , se denominan momento estático de una masa respecto a un plano.** En ellas:

- $\mu x_C, \mu y_C, \mu z_C$ son los momentos estáticos de la masa total μ respecto a los planos yz, zx, xy respectivamente.
- $m_i x_i, m_i y_i, m_i z_i$ los momentos estáticos de la masa elemental m_i respecto a los planos yz, zx, xy .
- $\sum m_i x_i, \sum m_i y_i, \sum m_i z_i$ son los momentos estáticos del sistema de masas respecto a los planos yz, zx, xy , respectivamente.-



De las ecuaciones (4) se despejan las coordenadas de centro de masa:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{S_{YZ}}{\mu} \\ Y_C &= \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{S_{ZX}}{\mu} \\ Z_C &= \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} = \frac{S_{XY}}{\mu} \end{aligned} \quad (5)$$

4.1.2.- SISTEMA DE MASAS EN EL PLANO. MOMENTO ESTÁTICO RESPECTO A UN EJE.-

Si el sistema de puntos ponderados (fig. 4.2.) es tal que se ubica en el plano xy la expresión del teorema de Varignon dada por la (1) mantiene su forma:

$$\mu \overline{OC} = m_1 \overline{OA}_1 + m_2 \overline{OA}_2 + \dots + m_n \overline{OA}_n = \sum m_i \overline{OA}_i$$

pero **la totalidad de los vectores posición están en el plano xy y en consecuencia el centro de masa será coplanar con los puntos del sistema.**

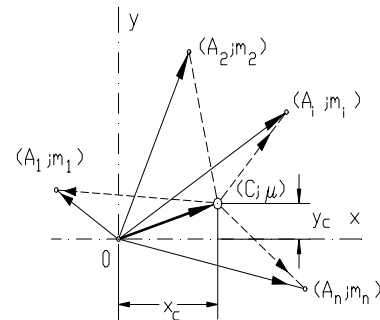


Fig. 4.2

Para expresarlo en coordenadas cartesianas introducimos en la anterior las expresiones de:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= x_C \bar{i} + y_C \bar{j} \\ \overline{OA}_i &= x_i \bar{i} + y_i \bar{j} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\mu x_C \bar{i} + \mu y_C \bar{j} = \bar{i} \sum m_i x_i + \bar{j} \sum m_i y_i = S_0$$

resulta:

$$\begin{aligned} \mu x_C = \sum m_i x_i = S_Y \quad \therefore \quad x_C &= \frac{S_Y}{\mu} \\ \mu y_C = \sum m_i y_i = S_X \quad \therefore \quad y_C &= \frac{S_X}{\mu} \end{aligned} \quad (6)$$

En donde la sumatoria de los productos de las masas elementales por sus distancias a cada uno de los ejes coordenados constituye **el momento estático del sistema respecto a ese eje**, S_X o S_Y .

De las expresiones (6) surge **que si el momento estático respecto a un eje es nulo, el centro se ubica sobre el eje**; y viceversa si se **toma momento respecto a un eje pasante por el centro de masa el momento estático del sistema será nulo.**

Estas expresiones corresponden a sistemas discretos de masas. Si el sistema es continuo la determinación de la masa total, momento estático y coordenadas del centro de masa se efectúa mediante las siguientes expresiones:

Masa total :

$$\mu = \int_{\mu} dm$$

Momentos estáticos :

$$S_X = \int_{\mu} y dm \quad S_Y = \int_{\mu} x dm$$



Coordenadas del centro de masa:

$$\begin{aligned} \mu x_C = S_y & \quad \therefore \quad x_C = \frac{S_y}{\mu} \\ \mu y_C = S_x & \quad \therefore \quad y_C = \frac{S_x}{\mu} \end{aligned} \quad (7)$$

4.1.3.- CENTRO DE FUERZAS. CENTRO DE GRAVEDAD. BARICENTRO. CENTROIDE.-

El centro de masa de un sistema espacial o plano de puntos “pesados” (A_i, m_i) puede encontrarse también determinando centros parciales de distintos grupos de puntos del conjunto en los cuales se imagina concentrada la suma de las masas del grupo; encontrando el centro de las masas parciales de todos los grupos se obtendrá el centro de masa del conjunto. Ejemplificando si el sistema está constituido por siete puntos “pesados”, se puede determinar el centro C' de los tres primeros y el C'' de los cuatro últimos; luego se haya el centro C de C' y C'' que será el del conjunto. Esto se deduce de las ecuaciones anteriores agrupando las masas en la forma expresada.

Si se trata de un sistema de dos puntos ponderados (A_1, m_1) y (A_2, m_2) , fig. 4.3, y C su centro de masa, por la (3) se tiene que el momento estático respecto a él es nulo :

$$\overbrace{(\underbrace{A_1, m_1}_{\text{---}} \quad \underbrace{C, \mu}_{\text{---}} \quad \underbrace{A_2, m_2}_{\text{---}})} \quad \bar{S}_C = m_1 \overline{CA_1} + m_2 \overline{CA_2} = 0$$

Fig. 4.3

Siendo A_1 y A_2 puntos no coincidentes y m_1 y m_2 distintas de cero, la anterior sólo se satisface si:

$$m_1 \overline{CA_1} = - m_2 \overline{CA_2}$$

Esto se puede cumplir sólo si son dos vectores de igual dirección lo que **determina que C se encuentre sobre la recta que une los dos puntos del sistema, A_1 y A_2 .**

La misma relación existe entre dos fuerzas paralelas de igual sentido aplicadas en dos puntos A_1, A_2 y su resultante $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ que se encontrará aplicada en el punto C ubicado sobre la recta A_1A_2 a distancias inversamente proporcionales a la intensidad de las fuerzas como se estableció en 2.9.1.

Si giran las fuerzas F_1 y F_2 alrededor de sus puntos de aplicación manteniendo su paralelismo, la resultante \bar{R} gira alrededor de C . Por eso se designa a C centro de fuerzas paralelas. Lo mismo sucede si las fuerzas paralelas son varias.

De esto nace una de las más frecuentes denominaciones del centro de masa: centro de gravedad.

Las fuerzas de gravedad se pueden considerar paralelas si la distancia entre ellas es despreciable frente al radio terrestre; según la ley fundamental de la mecánica (apartado 1.2.) su intensidad $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ es proporcional a la masa del cuerpo. La resultante de la atracción que la tierra ejerce sobre cada partícula constitutiva de un cuerpo, o sea el peso del cuerpo, pasará siempre por su centro de masa aunque el cuerpo gire en forma cualquiera. Esta coincidencia entre el centro de masa y el de gravedad hace que con frecuencia se los denomine indistintamente.

En las aplicaciones de la estática los sistemas o conjuntos de puntos ponderados que se presentan son magnitudes geométricas a saber volúmenes de cuerpos, áreas de secciones y longitudes de líneas. La denominación que utilizaremos para el punto C que hasta ahora hemos llamado genéricamente centro de masa, será de baricentro o centroide de volúmenes, áreas o longitudes. La designación de centro de masa se estima más adecuada para los problemas dinámicos y la de centro de gravedad para el punto de aplicación del peso de los cuerpos.



4.2.- MOMENTO ESTÁTICO Y BARICENTRO DE ÁREAS Y LÍNEAS PLANAS.-

Si las áreas o líneas planas se consideran como sistemas continuos y adecuando la nomenclatura a la naturaleza de la magnitud, las expresiones (7) de 4.1. toman las siguientes formas:

Área:

$$A = \int_A dA$$

$$S_x = \int_A y dA = y_c A \quad \therefore \quad y_c = S_x / A$$

$$S_y = \int_A x dA = x_c A \quad \therefore \quad x_c = S_y / A$$

Líneas:

$$L = \int_L dL$$

$$S_x = \int_L y dL = y_c L \quad \therefore \quad y_c = S_x / L$$

$$S_y = \int_L x dL = x_c L \quad \therefore \quad x_c = S_y / L$$

Si las áreas o líneas planas se consideran como sistemas discretos las expresiones (6) de 4.1. toman la siguiente forma:

Áreas:

$$A = \sum \Delta A$$

$$S_x = \sum y \Delta A = y_c A \quad \therefore \quad y_c = S_x / A$$

$$S_y = \sum x \Delta A = x_c A \quad \therefore \quad x_c = S_y / A$$

Líneas:

$$L = \sum \Delta L$$

$$S_x = \sum y \Delta L = y_c L \quad \therefore \quad y_c = S_x / L$$

$$S_y = \sum x \Delta L = x_c L \quad \therefore \quad x_c = S_y / L$$

La obtención de las fórmulas precedentes se ha efectuado en forma vectorial a partir del producto de un elemento de masa por el vector posición del punto ponderado respecto a un origen O, apartado 4.1.2. Evidentemente si cambia la distribución de las masas elementales de un cierto sistema variarán los vectores posición y consecuentemente el momento estático aunque no varíe la masa total: cada valor del momento estático caracterizará una determinada distribución de las masas elementales del sistema.

En el caso de las áreas (fig. 4.4.) podemos introducir expresamente este concepto geométrico definiendo al *momento estático o de primer orden del área de una sección, superficie o figura plana respecto a cierto eje x como una característica geométrica de la misma determinada por la expresión matemática:*

$$S_x = \int_A y dA$$

el momento estático de un área se mide en unidades de longitud elevada a la tercera potencia, generalmente en cm³. Este momento puede ser positivo, negativo, o nulo según lo sea el valor de la coordenada ya que el área es positiva.-

Análogamente (fig. 4.5) definimos como *momento estático de una línea o curva plana respecto de un eje "x", a una característica geométrica de la misma determinada por la expresión matemática:*

$$S_x = \int_L y dL$$

Se mide en unidades de longitud a la segunda potencia, generalmente cm², pudiendo ser positivo, negativo o nulo, ya que la coordenada del punto puede ser positiva o negativa y la longitud es positiva.

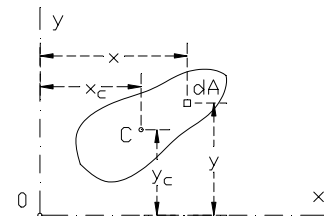


Fig. 4.4

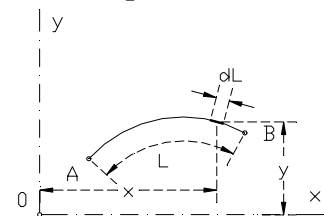


Fig. 4.5



4.2.1.- DETERMINACION DEL BARICENTRO DE ÁREAS Y LÍNEAS PLANAS.-

4.2.1.1.- Áreas y Líneas Simétricas.-

a) Si una superficie o curva plana posee un eje de simetría ortogonal, su baricentro se ubica sobre dicho eje. (fig. 4.6).

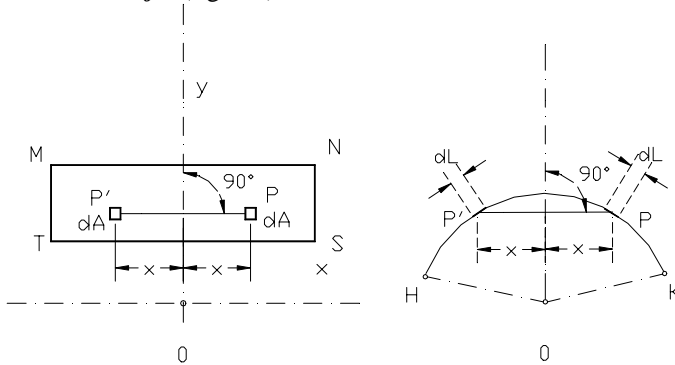


Fig. 4.6

Un área, rectángulo MNST, o una línea, arco de circunferencia HK, poseen un eje ortogonal de simetría si a cualquiera de sus puntos, P por ejemplo, le corresponde otro punto P', perteneciente a dicha área o línea, de posición tal que dicho eje sea perpendicular y divida en dos partes iguales al segmento PP' que los une.

El momento estático del elemento de área dA situado en el entorno de P será:

$$dS_y = x dA$$

entorno de P será:

y el momento estático del elemento dA ubicado en el entorno de P', vale:

$$dS'_y = -x dA$$

Al sumarlos se anulan, y como lo mismo sucede para todos los puntos situados a uno u otro de los lados de un eje de simetría, se concluye que **el momento estático con respecto al mismo es nulo y, consecuentemente todo eje de simetría será baricéntrico.**

Si el área o línea posee dos ejes de simetría, en su intersección se encuentra el baricentro.

Esta propiedad nos permite encontrar inmediatamente el centroide de áreas y perímetros de figuras geométricas planas que presentan dos ejes de simetría.

b) Si una superficie (fig. 4.7) no una línea, tiene un eje de simetría oblicua (la mediana de un triángulo cualquiera o de un trapecio), esto es, si existe una recta que biseca todas las cuerdas paralelas a una misma dirección (los lados del triángulo o las bases del trapecio), **el baricentro está ubicado sobre ese eje** ya que el momento estático respecto a él es nulo.

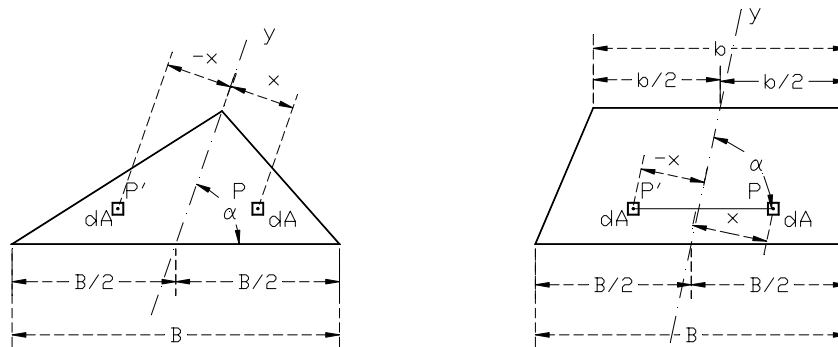


Fig. 4.7

$$\left. \begin{aligned} dS_y &= x dA \\ dS'_y &= -x dA \end{aligned} \right\} S_y = \int_A dS_y = 0$$



c) Si un área o línea posee un centro de simetría el baricentro coincide con él. Un punto C es centro de simetría si para cualquier punto P de la superficie o línea existe otro punto P' tal que divide en dos partes iguales al segmento PP' (Fig. 4.8.)

Sea un área o una línea cuyo centro de simetría sea C, será:

$$CP' = CP$$

siendo P y P' dos puntos simétricos respecto a C.- Si P está en el primero o cuarto cuadrante P' estará en el tercero o segundo, respectivamente, por lo tanto sus distancias a los ejes x e y tienen signos opuestos.- En consecuencia la integración de sus momentos estáticos infinitesimales será nula.- Planteando dicha integración sólo para las posiciones de P y P' indicadas en el gráfico, se tiene:

$$\begin{array}{l|l} dS_x = -y dA & \\ dS'_x = y dA & \\ \hline dS_y = x dA & \\ dS'_y = -x dA & \end{array} \quad \begin{array}{l} S_x = \int_A dS_x = 0 \\ \\ S_y = \int_A dS_y = 0 \end{array}$$

Obsérvese que los ejes x e y no son de simetría pero como para ellos los momentos son nulos el baricentro está en la intersección. El mismo razonamiento es aplicable a una línea que posea centro de simetría. **En particular el baricentro de un segmento rectilíneo está en su punto medio.-**

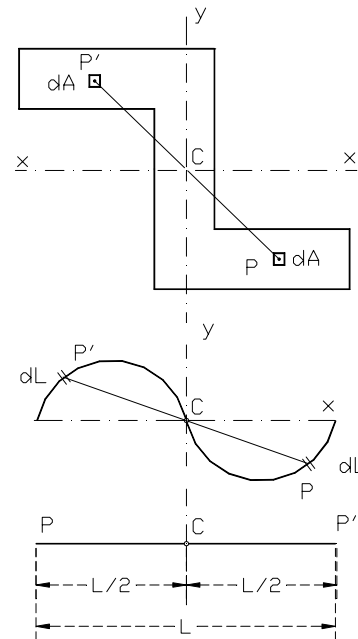


Fig. 4.8

4.2.1.2.- Áreas y Líneas Compuestas.-

Frecuentemente puede determinarse el baricentro descomponiendo la superficie o la línea en partes de baricentros conocidos, para las que se calcula su respectivo momento estático.

Consideremos la superficie de la figura compuesta por tres rectángulos de baricentros C₁(x₁, y₁), C₂(x₂, y₂), y C₃(x₃, y₃). (fig. 4.9).- Las áreas de cada uno de ellos la designamos A₁ - A₂ - A₃ y los momentos estáticos de cada rectángulo componente respecto a los ejes x e y los llamaremos: S_x⁽¹⁾ - S_y⁽¹⁾ - S_x⁽²⁾ - S_y⁽²⁾ - S_x⁽³⁾ - S_y⁽³⁾

Las coordenadas del baricentro del área dada serán:

$$X_C = \frac{S_y}{A} = \frac{S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$Y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

En el caso de un círculo (fig. 4.10) de centro C₁ y diámetro D₁ con una perforación de centro C₂ y diámetro D₂, el baricentro C del área restante se ubica sobre el eje de simetría "y" y su ordenada vale:

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x^{(1)} - S_x^{(2)}}{A_1 - A_2} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

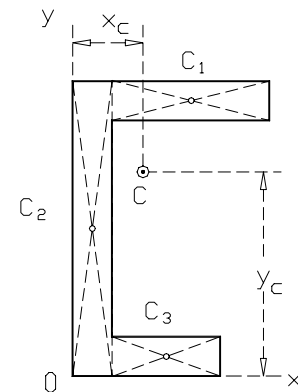


Fig. 4.9

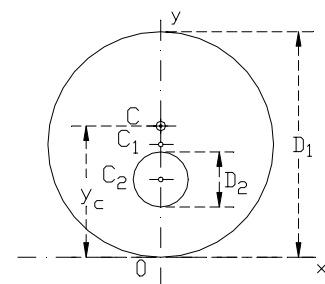
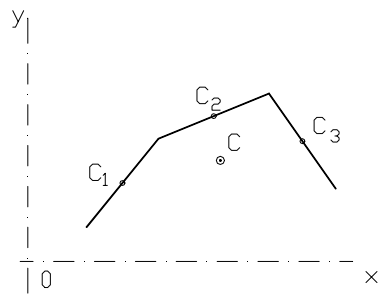


Fig. 4.10



Si tenemos una poligonal (fig. 4.11) formada por tres lados $L_1 - L_2 - L_3$

$$X_C = \frac{S_y}{L} = \frac{x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$Y_C = \frac{S_x}{L} = \frac{y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3}{L_1 + L_2 + L_3}$$

Fig. 4.11

Esta determinación puede realizarse gráficamente utilizando el polígono funicular. Veamos el procedimiento. (fig. 4.12)

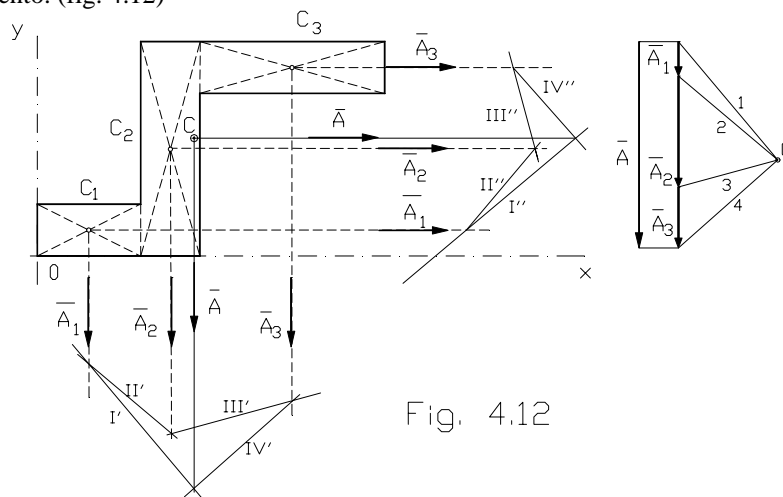


Fig. 4.12

Imaginemos dos sistemas de fuerzas paralelas, ficticias, de intensidades iguales (o proporcionales) a las áreas de cada uno de los rectángulos componentes, y aplicadas en los baricentros respectivos con dirección según el eje "x" para uno de los sistemas, y del eje "y" para el otro.

Se construye el polígono de fuerzas paralelas al eje "y", se adopta el polo Q y se traza el funicular I' - II' - III' - IV'.

Prolongando I' - IV' se determina la posición de la resultante A del sistema de fuerzas paralelas "y".

Para trazar el funicular de las fuerzas "x" es suficiente tomar sus lados I'' - II'' - III'' - IV'' perpendiculares a los rayos polares 1-2-3-4 ya que las intensidades de las fuerzas de ambos sistemas son las mismas. Se prolonga I'' - IV'' y queda determinada la resultante de las fuerzas ficticias "x".

La intersección de ambas resultantes nos determina el baricentro C buscado.

Que ello es así surge del análisis de las fórmulas obtenidas para determinar las coordenadas de C.

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\sum M_0}{A}$$

En la hipótesis formulada de fuerzas ficticias de intensidades igual a las áreas componentes, el numerador representa la suma de los momentos de las fuerzas paralelas a "y" respecto al punto O, y el denominador la resultante de las mismas.

El cociente anterior expresa analíticamente la posición de la recta de acción de la resultante respecto al origen O, que es lo que se ha efectuado gráficamente mediante un funicular.-

El mismo razonamiento vale para las fuerzas "x":



$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\sum M_0}{A}$$

Expresa analíticamente lo resuelto con el funicular I'' - II'' - III'' - IV''. Si en lugar de adicionar áreas tuviéramos que restar, consideraríamos la fuerza ficticia correspondiente con sentido contrario.

4.2.1.3.- Áreas y Líneas irregulares o definidas por ecuaciones algebraicas.-

Si el área está delimitada por curvas irregulares resulta conveniente determinar su baricentro como área compuesta conformada por un número finito de fajas paralelas, asimilables (sin error significativo) a rectángulos o trapecios de baricentro conocido.- El modo de efectuar esto se detalla en el último ejemplo del apartado 4.2.1.4.-

Cuando el contorno que delimita la superficie o configura la línea es una curva cerrada continua de ecuación conocida y se toma como elemento de área un cuadrado infinitésimo en sus dos dimensiones "dx" y "dy", la resolución de las integrales que aparecen en las fórmulas dadas en 4.2 requiere una integración doble en "x" y en "y". Si se emplean coordenadas polares escogiendo el elemento infinitésimo de lados "dp" y "pdθ", también es necesaria una integración doble.

Frecuentemente las superficies están delimitadas por más de una función conocida, representativas de rectas y curvas que nos permiten considerar el área total formada por un número infinito de elementos de área rectangulares paralelos (o triangulares adyacentes de vértice común), de ancho o base infinitamente pequeños.- Ello posibilita resolver las expresiones dadas en 4.2 por integración simple como se muestra en el próximo apartado.- En ellas se designa con C* el centroide de cada uno de los elementos infinitésimos de área cuyas coordenadas designamos "x*" e "y*".

4.2.1.4.- Aplicaciones.-

- Triángulo

Si bien sabemos por lo dicho más arriba que el baricentro del triángulo ubica en la intersección de las medianas, generalmente se necesita determinarlo en función de la altura del triángulo respecto a uno de los lados.- Suponemos al triángulo dividido en fajas infinitésimas de área dA paralelas a la base. Tendremos:

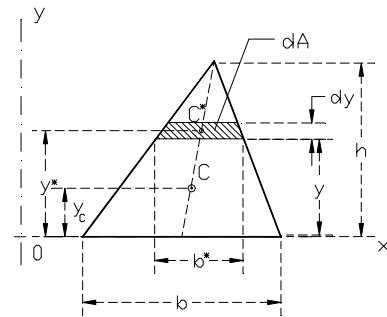


Fig. 4.13

$$y_C = \frac{S_x}{A}$$

$$A = \int_A dA = \int_A b^* dy$$

La base del elemento dA, b*, la vamos a expresar en función de "y":

$$\frac{b^*}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \therefore \quad b^* = \frac{b}{h}(h-y) = b - \frac{b}{h}y$$

Sustituyendo en la anterior:

$$A = \int_A dA = \int_A b^* dy = b \int_0^h dy - \frac{b}{h} \int_0^h y dy = bh - \frac{b}{h} \frac{h^2}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$S_x = \int_A y^* dA = \int_0^h y \left(b - \frac{b}{h}y \right) dy = b \int_0^h y dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^2}{2} - \frac{b}{h} \frac{h^3}{3} = \frac{bh^2}{6}$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$



- Trapecio.

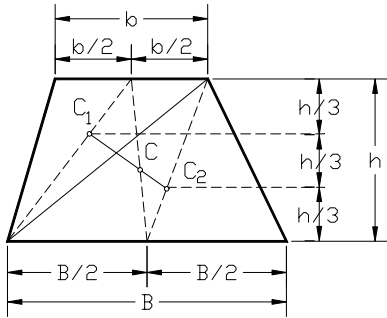


Fig. 4.14
longitudes de las bases.

En base a lo expuesto podemos establecer el baricentro del trapecio en la intersección de la mediana (eje de simetría oblicua), con la recta que une los centroides de los triángulos en que se lo puede dividir (fig. 4.14).

Recordar, apartado 4.1.3, que siendo C_1 y C_2 los centroides de cada uno de los triángulos componentes, el baricentro del trapecio que forman se ubica sobre la recta que ellos determinan.-

Pero frecuentemente se necesita expresar la posición del baricentro del trapecio en función de su altura y de las lon-

Resolvamos primero el planteo en forma analítica, fig. 4.15:

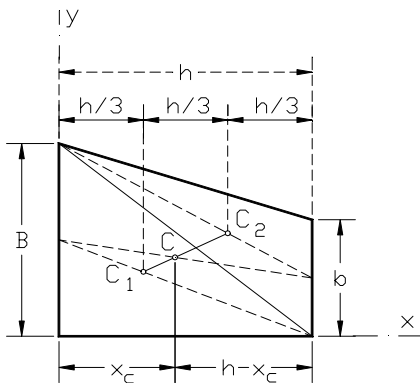


Fig. 4.15

$$x_c = \frac{S_y}{A}$$

$$S_y = x_1 A_1 + x_2 A_2 = \frac{h}{3} \frac{1}{2} B h + \frac{2}{3} h \frac{b h}{2} = \frac{1}{6} B h^2 + \frac{2}{6} b h^2$$

$$S_y = \frac{h^2}{6} (2b + B)$$

$$A = \frac{1}{2} b h + \frac{1}{2} B h = \frac{h}{2} (b + B)$$

$$x_c = \frac{\frac{h^2}{6} (2b + B)}{\frac{h}{2} (b + B)} = \frac{h}{3} \frac{2b + B}{b + B}$$

Tomando momento respecto a la base menor u operando directamente se obtiene:

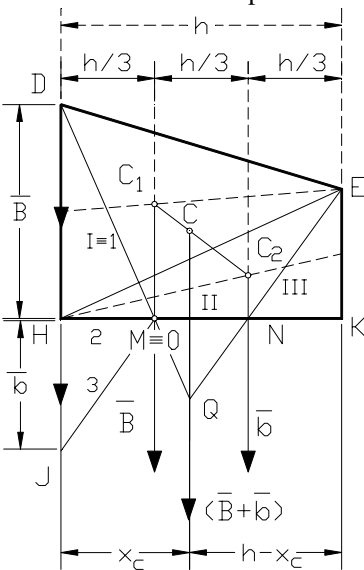


Fig. 4.16

$$h - x_c = h - \frac{h}{3} \frac{2b + B}{b + B} = \frac{h}{3} \left(3 - \frac{2b + B}{b + B} \right) = \frac{h}{3} \frac{b + 2B}{b + B}$$

Gráficamente, fig. 4.16, divido el trapecio en dos triángulos de centroides $C_1 - C_2$.

Aplico en cada uno de ellos fuerzas ficticias de intensidades proporcionales a las áreas A_1 y A_2 de cada uno de los triángulos:

$$B = 2A_1/h \quad ; \quad b = 2A_2/h$$

Construyo el polígono de fuerzas DHJ y con polo $O \equiv M$ trazo los rayos polares 1-2-3.- Por D trazo el funicular I - II - III cuyo tercer lado debe coincidir con EN por cuanto los triángulos OHJ y NKE son iguales por tener dos lados iguales y paralelos ($HM = NK$ y $HJ = KE$)

Se prolongan los lados I y III y por su intersección se traza una recta paralela a las bases que corresponde a la recta de

acción de la resultante ficticia de intensidad proporcional al área del trapecio y que nos determina la distancia x_C del baricentro a la base mayor ó $(h - x_C)$ a la menor.- La construcción consiste en *dividir uno de los lados no paralelos en tres partes iguales* obteniéndose los puntos M y N.-

Se unen con los vértices opuestos del trapecio, M con D y N con E, prolongándolos hasta interceptarse en Q por donde se traza una paralela a las bases quedando determinadas las distancias del baricentro a las dos bases.

- Arco de Circunferencia.

Sea, fig. 4.17 un arco de circunferencia AB de centro O y radio R. Con origen en O tomamos como eje "y" la bisectriz del ángulo central AOB que subtende el arco AB; el eje "x" será la perpendicular a "y"

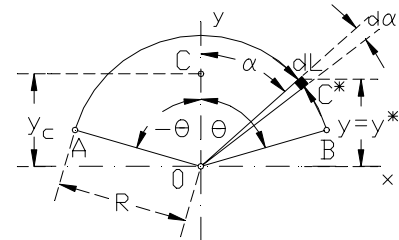


Fig. 4.17

$$L = \int_L dL = \int_{-\theta}^{\theta} R d\alpha = 2 \int_0^{\theta} R d\alpha = 2R\theta$$

$$S_x = \int_L y^* dL = \int_L y dL = 2 \int_0^{\theta} R \cos \alpha R d\alpha = 2 R^2 \text{sen} \theta$$

$$y_C = \frac{S_x}{L} = \frac{2R^2 \text{sen} \theta}{2R\theta} = \frac{R \text{sen} \theta}{\theta}$$

- Sector Circular.

Sea el sector circular (fig. 4.18) delimitado por el arco de circunferencia AB y los radios OA y OB. Se toma como elemento dA el área del sector circular de ángulo central $d\alpha$. Se tiene:

$$A = \int_A dA = \int_A \frac{1}{2} R dL = 2 \int_0^{\theta} \frac{1}{2} R R d\alpha = \int_0^{\theta} R^2 d\alpha = R^2 \theta$$

$$S_x = \int_A y^* dA = \int_0^{\theta} \frac{2}{3} R \cos \alpha \frac{1}{2} R R d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\theta} \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \text{sen} \theta$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \text{sen} \theta}{R^2 \theta} = \frac{2}{3} \frac{R \text{sen} \theta}{\theta}$$

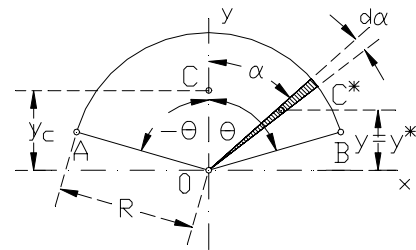


Fig. 4.18

- Áreas Parabólicas.

Consideremos la rama positiva de una parábola cuadrática, fig. 4.19 de eje vertical y vértice en el origen de coordenadas. Su ecuación general es:

$$y = kx^2$$

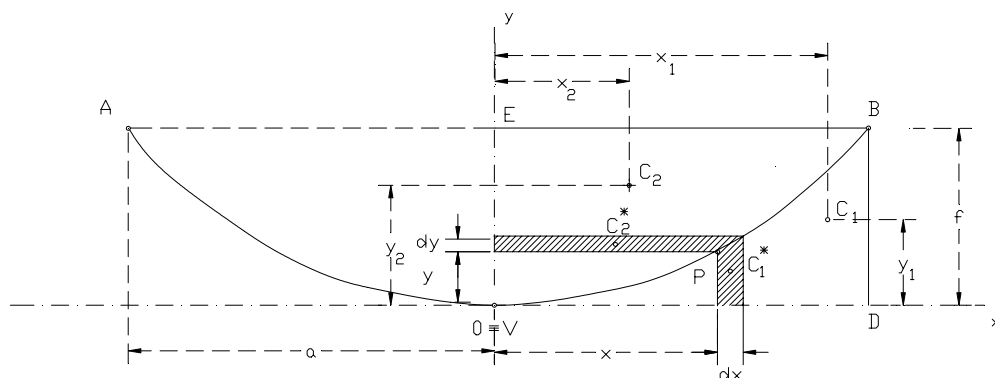


Fig. 4.19



en la cual k es el parámetro de la parábola, que lo vamos a determinar si conocemos las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos además del vértice $V \equiv O$. - Sea su extremo B cuyas coordenadas son la semicuerda “ a ” y la flecha “ f ” que introducimos en la ecuación general y se tiene:

$$f = k a^2 \quad \therefore \quad k = f / a^2$$

La ecuación queda:

$$y = \frac{f}{a^2} x^2$$

tomando x como variable independiente; en cambio si se toma y en tal carácter, resulta:

$$x = \frac{a}{f^{1/2}} y^{1/2}$$

En primer término vamos a establecer el área A_1 y el baricentro C_1 de la superficie delimitada por la rama OB de la parábola, el eje de las “ x ” y la ordenada del punto B , BD . Para ello operamos con un área “ dA ” constituida por una faja vertical de ancho “ dx ”, alto “ y ” y centroide C_1^* :

$$A_1 = \int_{A_1} dA = \int_{A_1} y dx = \int_0^a \frac{f}{a^2} x^2 dx = \frac{f}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} af$$

$$S_x^{(1)} = \int_{A_1} y_1^* dA = \int_{A_1} \frac{y}{2} \frac{f}{a^2} x^2 dx = \int_0^a \frac{f}{2a^2} x^2 \frac{f}{a^2} x^2 dx = \frac{f^2}{2a^4} \frac{x^5}{5} = \frac{1}{10} af^2$$

$$S_y^{(1)} = \int_{A_1} x_1^* dA = \int_0^a x \frac{f}{a^2} x^2 dx = \frac{f}{a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4} a^2 f$$

$$y_{C1} = \frac{S_x^{(1)}}{A_1} = \frac{1/10 af^2}{1/3 af} = \frac{3}{10} f \quad x_{C1} = \frac{S_y^{(1)}}{A_1} = \frac{1/4 a^2 f}{1/3 af} = \frac{3}{4} a$$

Determinamos ahora A_2 y C_2 correspondientes al área limitada por la rama OB de la parábola; el eje “ y ” y la abscisa EB del punto B . Se va a operar con una faja horizontal de centroide C_2^* , ancho “ x ” y alto “ dy ”.

$$A_2 = \int_{A_2} dA = \int_{A_2} x dy = \int_0^f \frac{a}{f^{1/2}} y^{1/2} dy = \frac{a}{f^{1/2}} \frac{f^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} af$$

$$S_x^{(2)} = \int_{A_2} y_2^* dA = \int_0^f y \frac{a}{f^{1/2}} y^{1/2} dy = \frac{a}{f^{1/2}} \frac{f^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5} af^2$$

$$S_y^{(2)} = \int_{A_2} x_2^* dA = \int_0^f \frac{x}{2} x dy = \int_0^f \frac{a^2}{2f} y dy = \frac{a^2}{2f} \frac{f^2}{2} = \frac{1}{4} a^2 f$$

$$y_{C2} = \frac{S_x^{(2)}}{A_2} = \frac{2/5 af^2}{2/3 af} = \frac{3}{5} f \quad x_{C2} = \frac{S_y^{(2)}}{A_2} = \frac{1/4 a^2 f}{2/3 af} = \frac{3}{8} a$$

Para verificar estos resultados sumando áreas y momentos correspondientes a las dos superficies parabólicas debemos obtener los del rectángulo $OEBD$ de base a y altura f :

$$A = A_1 + A_2 = 1/3 a f + 2/3 a f = af$$

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} = 1/10 a f^2 + 2/5 a f^2 = 1/2 a f^2 = a f f / 2$$

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = 1/4 f a^2 + 1/4 f a^2 = 1/2 f a^2 = a f a / 2$$

- Áreas de Contorno Irregular.

Cuando se trata de hallar el baricentro de una figura de contorno irregular (fig. 4.20) se procede a dividir la figura en superficies parciales mediante rectas paralelas a una dirección cualquiera (uno de los ejes por ejemplo), de manera tal que las figuras parciales resultantes sean asimilables a superficies cuyos baricentros sean de fácil determinación, así como también sus correspondientes áreas: parábolas, rectángulos, trapecios.- Mientras más próximas se tracen las paralelas menor será la diferencia entre las figuras geométricas que se adoptan y la forma real de la faja respectiva.-

Determinados los baricentros y áreas de cada superficie parcial se procede analítica o gráficamente de modo igual al efectuado en 4.2.1.2.

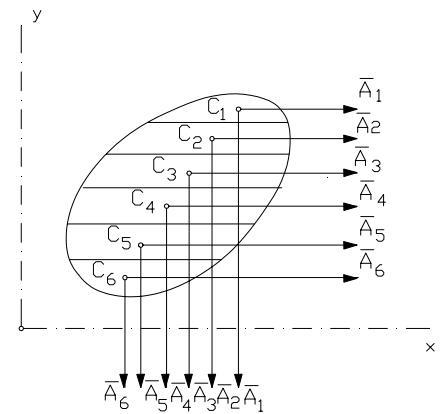


Fig. 4.20

4.2.2.- VOLÚMENES Y SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN.-

Los teoremas llamados de Guldin o de Pappus permiten determinar el área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución.

Una superficie que se engendra por la rotación de una curva plana alrededor de un eje coplanar fijo se designa superficie de revolución. Son ejemplo de ellas la superficie de una esfera que se genera por una rotación de 2π radianes de una semicircunferencia (curva generatriz) alrededor de su diámetro; un segmento de recta que gira una vuelta completa alrededor de un eje fijo paralelo origina la superficie lateral de un cilindro circular; un cono circular es generado por un segmento de recta que rota un ángulo de 360° alrededor de un eje fijo al que intercepta sin cortarlo; si la curva generatriz es una circunferencia rotando alrededor de un eje coplanar y exterior a ella, se genera una superficie tórica o anillo.

Un cuerpo de revolución se genera por la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo coplanar. Una esfera sólida se obtiene por la rotación de un semicírculo, un cono por rotación de un área triangular, un toroide sólido por rotación de un círculo alrededor de un eje fijo que no lo corte.

Teorema I. (fig. 4.21)

El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia o camino recorrido por su baricentro (el de la curva generatriz) en el giro generador.

Demostración: Consideremos un elemento dL de la línea AB de longitud L . El área dA generada por el elemento dL al efectuar un giro de 2π radianes alrededor del eje x , vale.

$$dA = 2\pi y \, dL$$

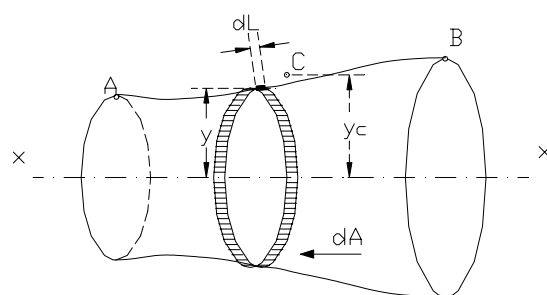


Fig. 4.21

El área generada por toda la curva AB de longitud L , será:

$$A = \int_L dA = \int_L 2\pi y \, dL = 2\pi \int_L y \, dL = 2\pi S_x = 2\pi y_c L$$

Donde $2\pi y_c$ es el camino recorrido por el centroide C de la curva generatriz al efectuar un giro de 2π radianes; si el giro efectuado no alcanzase una vuelta queda definido por el ángulo θ rotado, se lo expresa en radianes y valdría:

$$A_\theta = \theta y_c L$$



Debe notarse que la curva generatriz no debe interceptar al eje alrededor del cual rota; si lo hiciera, las dos secciones una a cada lado del eje, generarían áreas de signos opuestos y el teorema no podría aplicarse.

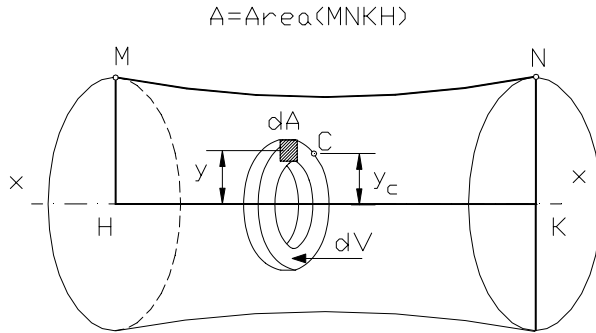


Fig. 4.22

Teorema II (fig. 4.22)

El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia o camino recorrido por su baricentro (el del área generatriz) en el giro generador.-

Demostración: Consideremos un elemento dA del área generatriz A que rota alrededor del eje x. El volumen dV generado por el elemento dA en un giro

de 2π radianes o sea de una vuelta completa vale:

$$dV = 2\pi y dA$$

y el volumen total generado por el área A [MNHK]:

$$V = \int_A dV = \int_A 2\pi y dA = 2\pi \int_A y dA = 2\pi S_x = 2\pi y_c A$$

Donde $2\pi y_c$ es el camino recorrido por el baricentro del área generatriz al efectuar el giro 2π radianes; si el giro fuese de θ radianes el camino recorrido sería θy_c . Nuevamente se recuerda que el teorema no se aplica si el eje de rotación corta al área generatriz.

4.3.- MOMENTO ESTÁTICO Y BARICENTRO DE VOLÚMENES DE CUERPOS.-

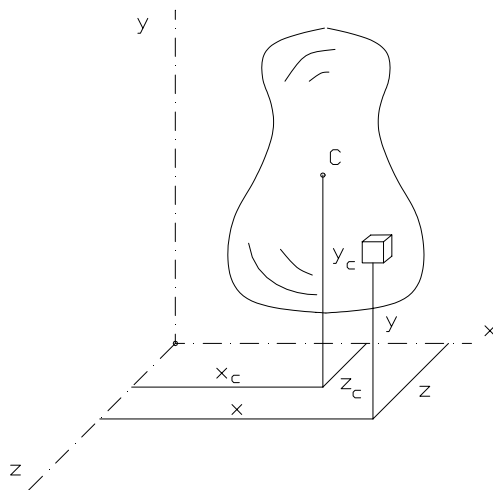


Fig. 4.23

Las características geométricas del volumen de cuerpos y las expresiones que utilizaremos para la determinación de su baricentro fueron obtenidas en el apartado 4.1.1 para un sistema discreto de masas. Si se trata de un sistema o cuerpo continuo, figura 4.23, las expresiones (5) de dicho apartado toman la siguiente forma:

Volumen: $V = \int_V dV$

Momento estático respecto al

Plano yz: $S_{yz} = \int_V x dV = x_c V$

Plano xz: $S_{xz} = \int_V y dV = y_c V$

Plano xy: $S_{xy} = \int_V z dV = z_c V$

Coordenadas del baricentro :

$$x_c = S_{yz} / V ; \quad y_c = S_{xz} / V ; \quad z_c = S_{xy} / V$$

Estas expresiones permiten calcular las coordenadas del baricentro del volumen de un cuerpo mediante procedimientos similares a los vistos para áreas y líneas planas.- Estos procedimientos se simplifican si el cuerpo posee uno o más planos de simetría ortogonal.-

Un cuerpo presenta un plano de simetría ortogonal si cada uno de sus puntos tiene otro punto tal que el segmento que los une, PP', es perpendicular a ese plano y queda dividido por él en dos

partes de igual longitud.- Existiendo esta simetría, el momento estático respecto al plano que cumple dicha condición será nulo y el centroide del volumen del cuerpo se ubicará en él.- Por lo tanto, si un cuerpo posee:

- Un plano de simetría ortogonal, el baricentro de su volumen se encuentra en él.- En general no coincide con el centroide del área de intersección del cuerpo con el plano de simetría, pero si se trata de un prisma cuyas bases son paralelas a dicho plano, sí hay coincidencia: el centroide del prisma se ubica en el baricentro del área de intersección, igual a las bases.-
- Dos planos de simetría ortogonal, el baricentro de su volumen se ubica en la recta de intersección de ambos planos y coincidirá con el centroide de ésta tomada como línea pesada.- Para ello se divide el cuerpo con planos paralelos perpendiculares a esta intersección; la distancia entre estos planos será lo suficientemente pequeña (infinitésima cuando se pueda integrar) para que las partes seccionadas se tomen sin error significativo como prismas cuyo baricentro se ubica de acuerdo a lo dicho en el párrafo anterior.- Luego se determina el baricentro del conjunto como cuerpo compuesto, asociando a cada baricentro parcial el volumen del prisma correspondiente.-
- Tres planos de simetría ortogonal que se intersecan en un punto, no en una recta, éste es el baricentro del volumen del cuerpo.- Pero cuando lo hacen según un eje formando un haz de dos o más planos es válido lo expresado en el párrafo anterior.-

Finalmente cabe aclarar, que frecuentemente coincide el centroide del volumen de un cuerpo con sus centros de masa y de gravedad; esto sucede cuando el mismo es homogéneo pero, si se encuentra constituido por materiales de distintas densidades o pesos específicos, la determinación de los centros de masa y gravedad requiere que cada volumen parcial sea multiplicado por su respectiva densidad o peso específicos según se trate de uno u otro centro.-

4.3.1.- BARICENTRO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO COMPUESTO.-

Si un cuerpo puede dividirse en partes de volumen y baricentro conocidos se procede aplicando el teorema de Varignon para los momentos estáticos.

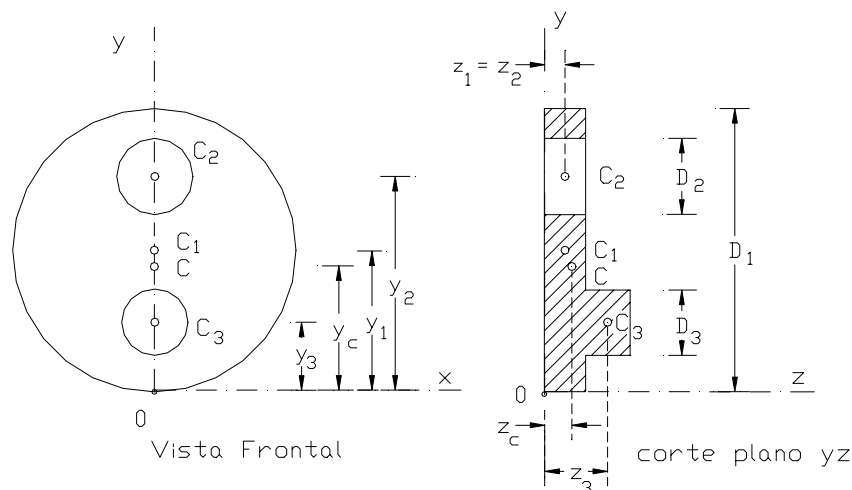


Fig. 4.24

Consideremos un plato circular, fig. 4.24, con una perforación y un muñón. Se ha considerado el cuerpo formado por tres partes: el plato de diámetro D_1 , de volumen V_1 y baricentro C_1 ; la perforación de diámetro D_2 , de volumen V_2 y baricentro C_2 y el muñón de diámetro D_3 , de volumen V_3 y baricentro C_3 . Fijados el espesor del plato y el largo del muñón quedan determinadas las coordenadas de los baricentros parciales C_1 - C_2 - C_3 .

Tendremos :

$$V = V_1 - V_2 + V_3$$

El plano yz es plano de simetría, luego:

$$x_c = S_{yz}/V = 0/V = 0$$



$$y_C = \frac{S_{zx}}{V} = \frac{y_1 V_1 - y_2 V_2 + y_3 V_3}{V_1 - V_2 + V_3}$$

$$z_C = \frac{S_{xy}}{V} = \frac{z_1 V_1 - z_2 V_2 + z_3 V_3}{V_1 - V_2 + V_3}$$

En el caso de tratarse de un cuerpo sólido irregular, el problema se resuelve dividiéndolo mediante planos aproximadamente paralelos, lo suficientemente próximos como para poder, sin error apreciable, suponer prismáticas las porciones de dicho sólido comprendidas entre dos planos sucesivos.- Se hallará el baricentro de las partes y por último el del conjunto.-

4.3.2.- BARICENTROS DE VOLUMENES POR INTEGRACIÓN.-

Consideraremos sólo el caso de cuerpos para los cuales su volumen puede ser concebido como integración de discos elementales infinitésimos perpendiculares al eje.-

4.3.2.1.- Volumen y baricentro de un cono circular recto (fig. 4.25).-

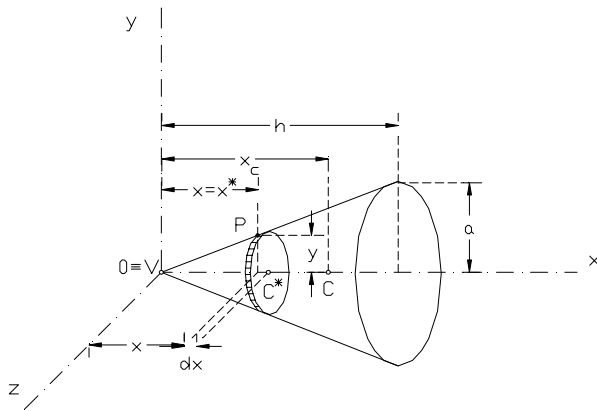


Fig. 4.25

Los planos xy y xz son planos de simetría por lo cual C estará sobre el eje x.

El radio de la base y la altura del cono son parámetros que nos caracterizan el cono en particular.

Como elemento dV de volumen elegimos un disco paralelo a la base de espesor dx y radio y = z. Esta coordenada la vamos a expresar en función de x en base a la relación existente entre las coordenadas del punto P de la recta generatriz; en correspondencia con dicho punto se ha ubicado el elemento dV.- Operando se tiene:

$$y / x = a / h \quad \therefore \quad y = (a / h) x \quad \therefore \quad y^2 = \frac{a^2}{h^2} x^2$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$

$$V = \int_V dV = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi a^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \pi a^2 \frac{h}{3}$$

$$S_{yz} = \int_V x dV = \frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{\pi a^2}{h^2} \frac{h^4}{4} = \frac{\pi a^2 h^2}{4}$$

$$x_C = \frac{S_{yz}}{V} = \frac{\pi a^2 h^2}{4} \frac{3}{\pi a^2 h} = \frac{3}{4} h$$

4.3.2.2.- Volumen y baricentro de un semicono circular recto, (fig. 4.26).-

Del ejercicio anterior:

$$y = (a / h) x \quad y^2 = \frac{a^2}{h^2} x^2$$



$$dV = \frac{1}{2} \pi y^2 dx = \frac{1}{2} \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$

$$V = \int_V dV = \pi a^2 \frac{h}{6}$$

$$S_{yz} = \int_V x^* dV = \int_0^h \frac{\pi a^2}{2h^2} x^3 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

$$x_C = \frac{S_{yz}}{V} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \frac{6}{\pi a^2 h} = \frac{3}{4} h \quad (\text{igual a } x_C \text{ del cono completo})$$

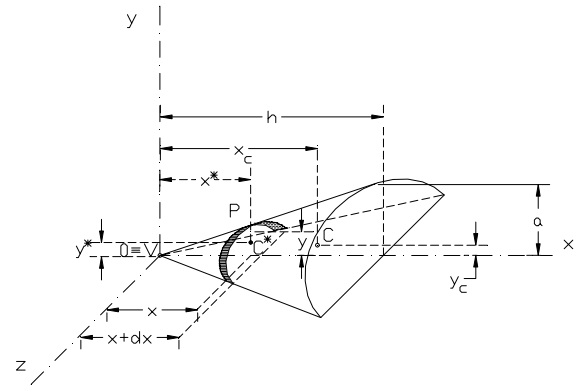


Fig. 4.26

$$S_{zx} = \int_V y^* dV$$

$$y^* = \frac{2 R \operatorname{sen} \theta}{3 \theta} = \frac{2 y \operatorname{sen} 90^\circ}{3 \pi/2} = \frac{4 y}{3 \pi}$$

$$S_{zx} = \int_0^h \frac{4}{3} \frac{y \pi a^2}{\pi 2h^2} x^2 dx = \int_0^h \frac{4}{3} \frac{ax \pi a^2}{h \pi 2h^2} x^2 dx = \frac{2 a^3}{3 h^3} \int_0^h x^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

$$y_C = \frac{S_{zx}}{V} = \frac{a^3 h}{6} \frac{6}{\pi a^2 h} = \frac{a}{\pi}$$

$$z_C = \frac{S_{xy}}{V} = \frac{0}{V} = 0$$

(por ser xy plano de simetría)

4.4.2.3.- Volumen y baricentro de una semiesfera sólida. (fig. 4.27).-

Ecuación circunferencia generatriz:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \therefore \quad y^2 = R^2 - x^2$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi R^2 dx - \pi x^2 dx$$

$$V = \int_V dV = \pi R^2 \int_0^R dx - \pi \int_0^R x^2 dx$$

$$V = \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$S_{yz} = \int_V x^* dV = \pi R^2 \int_0^R x dx - \pi \int_0^R x^3 dx$$

$$S_{yz} = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{4} \pi R^4$$

$$x_C = \frac{\pi R^4}{4} \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

$$y_C = z_C = 0$$

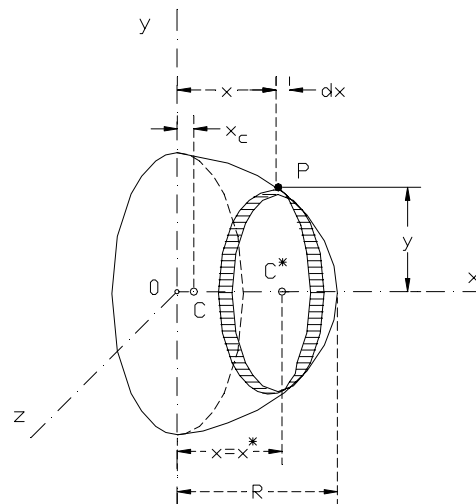


Fig. 4.27



4.4.- MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS.-

4.4.1.- MOMENTOS AXIALES DE INERCIA.-

Consideremos una pieza prismática, de eje recto y sección transversal cualquiera, fig. 4.28(a), sometida a la acción de dos pares M_x iguales y opuestos actuantes en el plano yz , que también contiene al eje de la pieza. Designamos como eje AB de la pieza al lugar geométrico de los baricentros de las secciones transversales. Se dice que la pieza está sometida a **flexión pura**.

Cortemos la pieza en dos partes mediante un plano normal en C al eje z , y representemos gráficamente la parte situada a la derecha del corte, desde C hasta B, fig. 4.28(b).

Para mantener este tramo en equilibrio aplicamos en la cara del corte las acciones \overline{dF} que en cada elemento de área dA ejercía la parte izquierda de la pieza comprendida de A hasta C. Estas acciones, designadas fuerzas internas, constituyen un sistema de fuerzas paralelas normales a la sección, distribuidas en toda su área, con sentido de penetración en la zona superior al eje "x" y de alejamiento en la inferior. Su intensidad es proporcional al área dA sobre la que actúa y a la distancia del elemento considerado a un cierto eje llamado eje neutro (ya que si $y=0$ resulta $dF=0$), que en el caso en consideración pasa por el baricentro de la sección, y vale:

$$dF = k y dA$$

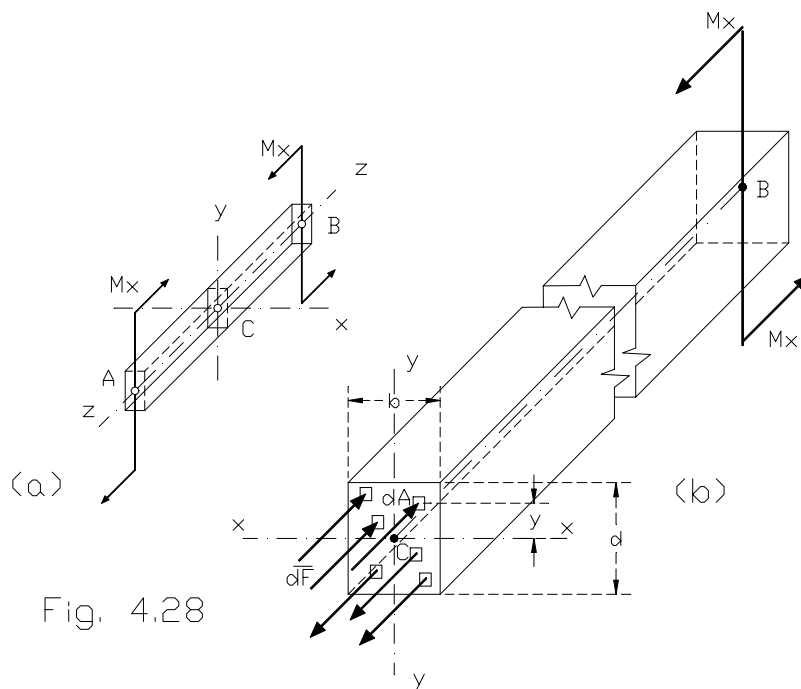


Fig. 4.28

Reduzcamos este sistema de fuerzas paralelas:

$$R = \int_A dF = \int_A k y dA = k \int_A y dA = k S_x$$

donde observamos que la resultante es proporcional al momento estático de la sección transversal de la pieza respecto al eje neutro que, por ser baricéntrico, será nulo: la resultante de las fuerzas internas que actúan en la sección transversal de una pieza prismática sometida a flexión pura es nula.

Tomemos momentos de las fuerzas internas respecto al eje neutro:



$$M_x^{(i)} = \int_A y dF = \int_A ky^2 dA = k \int_A y^2 dA = kI_x$$

que nos dice que el momento de las fuerzas internas respecto al eje neutro es proporcional a una magnitud que caracteriza geoméricamente la sección y se designa momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje x:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Análogamente podemos definir como momento de inercia respecto al eje y a la expresión:

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

De la observación de las expresiones anteriores se deduce que el momento de inercia respecto a un eje es función del área de la sección y de la forma geométrica como se distribuye dicha área respecto a ese eje.

Para poner en evidencia el sentido físico de esta magnitud, supongamos que la pieza prismática anterior sea una regla de escritorio de sección transversal rectangular en la cual la altura “d” de ésta es mucho mayor que su ancho “b”.-

Consideremos primero que el plano que contiene los pares externo sea el “yz” (tal cual indica la fig. 4.28), paralelo al lado mayor de la sección transversal y perpendicular al eje neutro correspondiente, “x”: se observa que si aplicamos manualmente estos pares en los extremos de la regla, flexiona levemente en su plano.-

Si en cambio aplicamos los pares externos en el plano “xz” paralelo al lado menor “b” y perpendicular al ahora eje neutro “y” la regla se deformará apreciablemente más que en el caso anterior.

Asociando esto con los momentos de inercia respecto al correspondiente eje neutro, observamos que I_x resulta mayor que I_y por ser (para la mayoría de los puntos de la sección transversal) mayor su ordenada (distancia al eje x) que su abscisa (distancia al eje y). Es decir que *la deformación será mayor cuanto menor sea el momento de inercia que se opone a que flexione la pieza. En cambio la rigidez (inversa de la deformación) será mayor cuanto mayor sea el momento de inercia que tiene la sección transversal respecto al correspondiente eje neutro.*

De lo expuesto definimos como momento de inercia de una sección respecto a un eje x, una característica geométrica de la sección determinada numéricamente por la expresión matemática: $I_x = \int_A y^2 dA$.-

Físicamente, en el fenómeno de flexión, representa una magnitud proporcional a la rigidez que una determinada configuración del área de la sección transversal de una pieza prismática, confiere a ésta cuando es solicitada a flexión con “x” como eje neutro.

4.4.2.- MOMENTO POLAR DE INERCIA.-

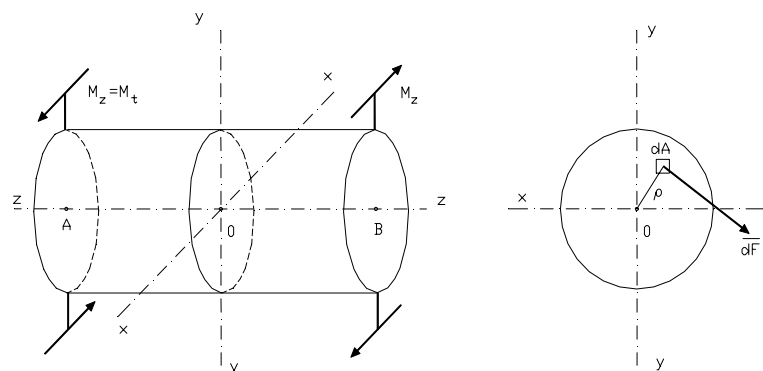


Fig. 4.29



Si a una pieza cilíndrica de eje AB y sección transversal circular llena, fig. 4.29, la sometemos a dos pares iguales y opuestos contenidos en planos normales al eje de la pieza, se dice que **la misma está solicitada por torsión pura**.

Cortemos la pieza con un plano normal a su eje y consideremos su sección transversal. Las fuerzas internas que se desarrollan en ella están contenidas en su plano formando un sistema plano de fuerzas distribuidas en toda el área de la sección normales a la recta que une el elemento con el punto O. La fuerza que actúa en un elemento dA de área es proporcional a la distancia del elemento considerado al baricentro O de la sección y al área del elemento:

$$dF = k \rho \, dA$$

El momento del sistema de fuerzas respecto a O vale:

$$M_O^{(i)} = \int_A \rho dF = \int_A \rho k dF = k \int_A \rho^2 dA = k I_O$$

que nos dice que el momento de las fuerzas internas respecto al centro de la sección es proporcional a una magnitud llamada momento polar de inercia respecto a O, que la designamos I_O .

Con razonamientos análogos a los expuestos para los momentos axiales de inercia, **podemos definir al momento polar de inercia del área A respecto a un punto o polo O, como una característica geométrica de la sección de área A determinada por la expresión matemática:**

$$I_O = \int_A \rho^2 dA$$

Físicamente representa una magnitud proporcional a la rigidez que una determinada configuración de área de la sección transversal de una pieza prismática, confiere a la misma cuando es solicitada a torsión respecto a su eje.

De la fig. 4.29 tenemos:

$$I_O = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

o sea

$$I_O = I_x + I_y$$

lo que es válido solo si x e y son ortogonales.

Se concluye que **el momento de inercia polar de una sección respecto a O, es igual a la suma de los momentos de inercia axiales respecto a cualquier par de ejes ortogonales con origen O.**

La dimensión de los momentos de inercia, axiales o polares es una longitud elevada a la cuarta potencia, frecuentemente se opera en cm^4 . Siendo las áreas positivas y estar multiplicadas por longitudes elevadas al cuadrado **los momentos de inercia son siempre positivos.**

Es importante que el alumno grabe los conceptos físicos dados para los momentos axiales y polares de inercia por cuanto fundamentan un criterio para seleccionar la configuración geométrica de una determinada área (y por lo tanto de la cantidad de material que ella representa) que mejor comportamiento brinde a una estructura frente a las fuerzas que sobre ella actúan.-

Los momentos de inercia, juntamente con los centrífugos que veremos a continuación, se los designa momentos de segundo orden por resultar la suma de productos de un área por una distancia al cuadrado o dos distancias.

4.4.3.- MOMENTO CENTRÍFUGO.-

Se denomina momento centrífugo, momento de desviación o producto de inercia de una sección la característica geométrica determinada numéricamente por la integral:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

donde x e y son las distancias del área dA a los ejes x e y , fig. 4.30.- Su dimensión es una longitud elevada a la cuarta potencia y se expresa generalmente en cm^4 . El momento centrífugo puede ser positivo, negativo o, como caso particular, igual a cero.

Si uno de los ejes, x o y , es eje de simetría de la sección, el producto de inercia respecto a dichos ejes es nulo.- En efecto, en dicho caso siempre se puede escoger dos elementos del área de la figura que tengan igual abscisa y ordenadas iguales pero de signos contrarios. Calculando la integral $\int_A xy dA$ su resultado será nulo.-

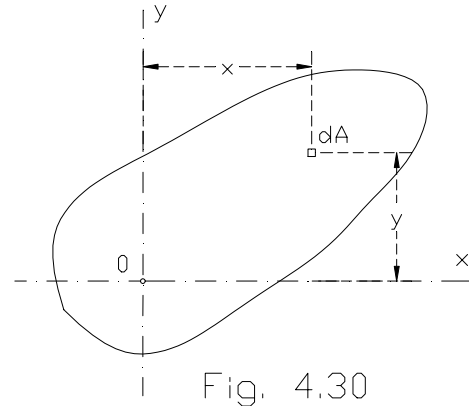


Fig. 4.30

4.4.4.- RADIO DE GIRO DE UN ÁREA.-

Si establecemos el cociente entre el momento de inercia del área de una sección plana respecto a un eje y y el valor de dicha área, obtenemos una magnitud cuya dimensión es una longitud al cuadrado:

$$\frac{I_x [\text{cm}^4]}{A [\text{cm}^2]} = i_x^2 [\text{cm}^2]$$

A su raíz

$$i_x [\text{cm}] = \sqrt{\frac{I_x [\text{cm}^4]}{A [\text{cm}^2]}}$$

se designa como radio de giro o de inercia de una sección.- Podemos imaginarlo como la distancia del eje x a puntos en los cuales podemos suponer concentrada la totalidad de su área para obtener su momento de inercia respecto a dicho eje. Efectivamente, de la primera de las expresiones anteriores obtenemos que:

$$I_x = i_x^2 A$$

que nos dice que cuando se **conoce el radio de giro de una sección podemos calcular el momento de inercia sin necesidad de resolver la integral que define el valor de éste.**-

De igual modo podemos definir el radio de giro axial respecto al eje “ y ” y el polar con respecto a un punto O u otro cualquiera:

$$I_y = i_y^2 A; \quad i_y^2 = I_y / A$$

$$I_0 = i_0^2 A; \quad i_0^2 = I_0 / A$$

Recordando la expresión:

$$I_0 = I_x + I_y$$

y colocando los momentos de inercia en función de los radios de giro y del área de la sección:

$$i_0^2 A = i_x^2 A + i_y^2 A$$

se tiene que

$$i_0^2 = i_x^2 + i_y^2$$



4.4.5.- TEOREMA DE STEINER.-

Consideremos una sección de área A cualquiera y sea C su baricentro, fig. 4.31. Con origen en C tomemos dos ejes x_0 e y_0 ortogonales entre sí y, con origen en otro punto O de referencia, se tienen los ejes x e y paralelos a los ejes x_0 e y_0 situados a distancias d_1 y d_2 de los mismos, tal como se indica en la figura.-

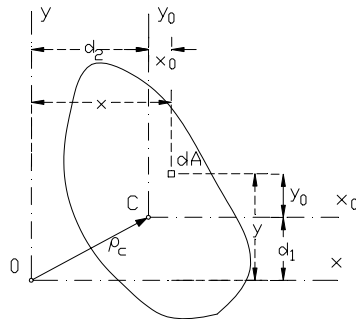


Fig. 4.31

Nos proponemos establecer expresiones que nos permitan calcular los momentos de segundo orden respecto al par de ejes x e y en función de los momentos de segundo orden respecto a x_0 e y_0 , y viceversa.-

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Pero:

$$y = y_0 + d_1$$

Sustituyendo y operando resulta:

$$I_x = \int_A (y_0 + d_1)^2 dA$$

Desarrollando el binomio cuadrado:

$$I_x = \int_A y_0^2 dA + \int_A d_1^2 dA + \int_A 2y_0 d_1 dA = \int_A y_0^2 dA + d_1^2 \int_A dA + 2d_1 \int_A y_0 dA$$

Donde:

$$\int_A y_0^2 dA = I_{x_0} \quad \int_A dA = A \quad \int_A y_0 dA = S_{x_0} = 0$$

Por ser S_{x_0} el momento estático respecto a un eje centroidal.- Por lo cual:

$$I_x = I_{x_0} + d_1^2 A \quad (1)$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia respecto de un eje x cualquiera es igual a la suma de del momento de inercia respecto a un eje x_0 baricéntrico y paralelo al dado, más la suma del producto del área por el cuadrado de la distancia entre los ejes.

Con un desarrollo similar se obtiene:

$$I_y = I_{y_0} + d_2^2 A \quad (2)$$

El momento centrífugo será:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (x_0 + d_2)(y_0 + d_1) dA$$

$$I_{xy} = \int_A x_0 y_0 dA + \int_A x_0 d_1 dA + \int_A d_2 y_0 dA + \int_A d_2 d_1 dA$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + d_1 d_2 A \quad (3)$$

Si ρ_c es la distancia de C a O tenemos para los momentos polares:

$$I_0 = I_x + I_y = I_{x_0} + d_1^2 A + I_{y_0} + d_2^2 A = I_{x_0} + I_{y_0} + (d_1^2 + d_2^2) A$$

$$I_0 = I_C + \rho_c^2 A \quad (4)$$

De las expresiones anteriores se pueden despejar los momentos de segundo orden respecto a ejes baricéntricos en función de los momentos respecto a ejes paralelos, y viceversa.

Si dividimos las (1), (2) y (4) por A tendremos las siguientes relaciones entre los radios de giro:

$$\begin{aligned} i_x^2 &= i_{x_0}^2 + d_1^2 \\ i_y^2 &= i_{y_0}^2 + d_2^2 \\ i_0^2 &= i_c^2 + \rho_c^2 \end{aligned}$$



4.4.6.- DETERMINACIÓN DE MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN DE ÁREAS.-

4.4.6.1.- Rectángulo, (fig. 4.32).-

Para reducir el problema a una integración simple se adoptan ejes paralelos a los lados.- Como elemento de área una faja dA (de espesor infinitesimal) paralela al respectivo eje en consideración:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{x_0} = I_x - d_1^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{3} \quad I_{y_0} = \frac{b^3 h}{12} \quad i_{y_0} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh}{3} (h^2 + b^2)$$

$$I_{x_0 y_0} = 0$$

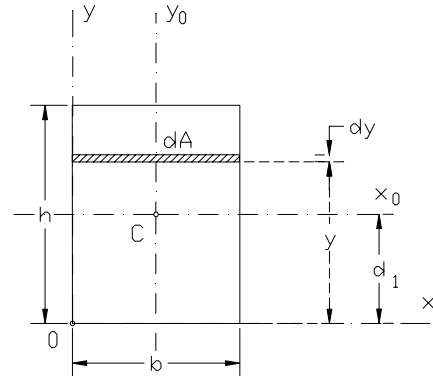


Fig. 4.32

$$I_C = I_{x_0} + I_{y_0} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + d_1 d_2 A = \frac{b^2 h^2}{4}$$

4.4.6.2.- Triángulo. (Fig. 4.33)

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy =$$

$$b \int_0^h y^2 dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy =$$

$$= bh^3/3 - bh^3/4 = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x_0} = I_x - d_1^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/36}{bh/2}} = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

$$I_y = hb_1^3/12 + hb_2^3/12 = \frac{h}{12} (b_1^3 + b_2^3)$$

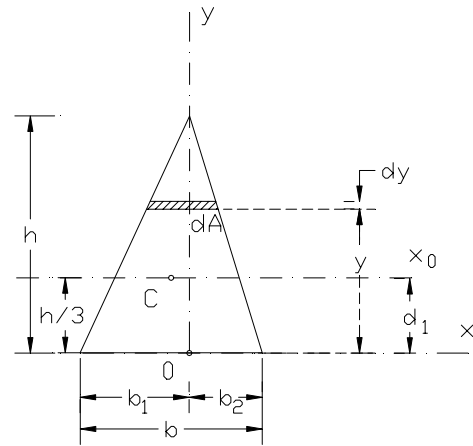


Fig. 4.33

4.4.6.3.- Círculo. (Fig. 4.34)

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$I_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_0 = I_{x_0} + I_{y_0} = 2I_{x_0} = 2I_{y_0}$$

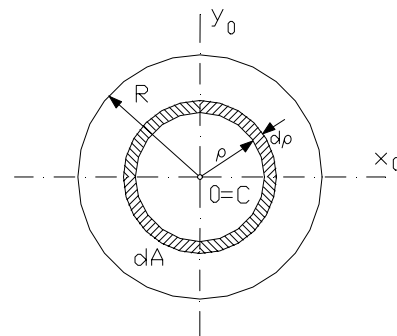


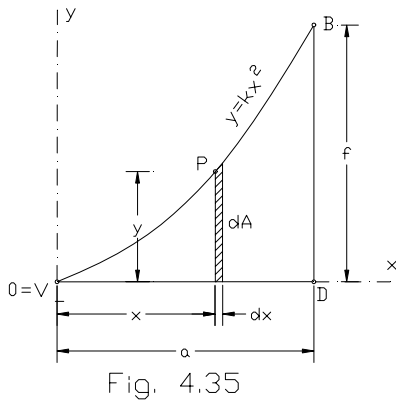
Fig. 4.34



$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{I_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4 / 4}{\pi R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}$$

4.4.6.4.- Área Limitada por una Curva de Ecuación Conocida.(fig. 4.35)



Sea que tenemos un área delimitada por el eje de las x, la ordenada BD y la curva OB que es la rama positiva de una parábola de segundo grado de eje vertical y origen en el vértice; de ella conocemos la flecha f y la semicuerda “a”. La ecuación ya la conocemos y el parámetro k lo determinamos con las coordenadas del punto B:

$$y = kx^2 \quad ; \quad \text{para B será: } f = ka^2 \quad \therefore \quad k = f/a^2$$

luego la ecuación nos queda:

$$y = \frac{f}{a^2} x^2$$

Para determinar los momentos de segundo orden podemos tomar como elemento infinitésimo dA una franja paralela o perpendicular al eje “x” o al eje “y” en consideración.-

Adoptando la faja sombreada observamos que constituye un rectángulo de base dx y altura “y” :

$$dI_x = \frac{y^3 dx}{3} = (\text{momento de inercia de un rectángulo respecto a su base})$$

Sustituyendo la función y por su valor de acuerdo a la ecuación de la curva e integrando:

$$dI_x = \frac{f^3 x^6 dx}{3a^6}$$

$$I_x = \int_A dI_x = \frac{f^3}{3a^6} \int_0^a x^6 dx = \frac{f^3 a^7}{21 a^6} = \frac{f^3 a}{21}$$

Para I_y :

$$dI_y = x^2 dA$$

$$I_y = \int_A dI_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 y dx = \int_0^a x^2 \frac{f}{a^2} x^2 dx = \frac{f}{a^2} \int_0^a x^4 dx = \frac{fa^5}{5a^2} = \frac{fa^3}{5}$$

Para el momento centrífugo, aplicando Steiner al elemento infinitésimo de área dA, se tiene:

$$dI_{xy} = dI_{x_0 y_0} + d_1 d_2 dA$$

Pero $dI_{x_0 y_0} = 0$ ya que los ejes baricéntricos del elemento son ejes de simetría; $d_1 = y/2$; $d_2 = x$:

$$dI_{xy} = xy/2 dA = \frac{1}{2} x \frac{f}{a^2} x^2 y dx = \frac{1}{2} \frac{f^2}{a^4} x^5 dx$$

$$I_{xy} = \int_A dI_{xy} = \frac{1}{2} \frac{f^2}{a^4} \left| \frac{x^6}{6} \right|_0^a = \frac{1}{12} f^2 a^2$$



4.4.6.5.- Áreas Compuestas, (Fig. 4.36).-

El momento de inercia de una figura compuesta es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes integrantes.

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + \dots$$

Donde cada uno de los términos del segundo miembro denominan los momentos de inercia respecto al eje x de las áreas A_1, A_2, A_3, \dots integrantes del área total.

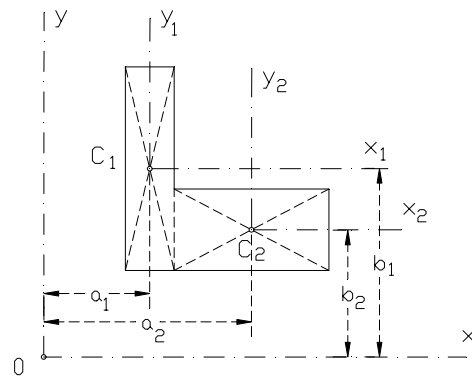


Fig. 4.36

Este resultado se deduce directamente de las propiedades de la integral definida:

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \int_{A_3} y^2 dA + \dots$$

siempre que:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

Así, pues para obtener el momento de inercia de una figura compuesta, es necesario descomponerla en una serie de figuras simples, calcular sus momentos de inercia y sumarlos después..- Este teorema es también válido para los productos de inercia.

Sea la sección en forma de L de la figura 4.36 , que descomponemos en dos rectángulos de centroides C_1 y C_2 ; sean A_1 y A_2 sus respectivas áreas. Tendremos:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)}$$

Aplicando Steiner

$$I_x^{(1)} = I_{x1}^{(1)} + b_1^2 A_1$$

$$I_x^{(2)} = I_{x2}^{(2)} + b_2^2 A_2$$

Reemplazando

$$I_x = I_{x1}^{(1)} + b_1^2 A_1 + I_{x2}^{(2)} + b_2^2 A_2$$

Del mismo modo se obtienen I_y e I_{xy} .

Debe observarse que el radio de giro de un área compuesta no es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes. Para determinar el radio de giro de una figura compuesta es necesario calcular su momento de inercia. Finalmente digamos que los momentos de segundo orden y los radios de giro de los perfiles laminados (doble T, perfil U ó canal, hierro angular, etc.) figuran en tablas de perfiles de los fabricantes o de los manuales especializados.

4.4.6.6.- Área de Contorno Irregular.-

El problema puede resolverse por métodos gráficos o numéricos. Veremos sólo los analíticos.

Dividimos la figura dada en fajas de reducido espesor, paralelas a la dirección del eje, de modo que las superficies resultantes sean tales que la determinación de su baricentro sea posible en forma simple, y cuyas áreas sean fáciles de calcular.-

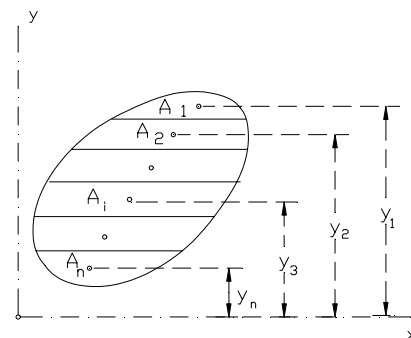


Fig. 4.37



Es así que las dos superficies extremas del caso del gráfico, pueden sin mayor error asimilarse a segmentos parabólicos y las restantes a trapecios.

Éstos a su vez pueden sustituirse por rectángulos de igual área por cuanto dada su altura pequeña, la diferencia de ubicación de los baricentros es despreciable.

Calculadas las áreas parciales y determinadas las distancias y_i de cada centroide al eje x se tiene aplicando Steiner a cada área parcial:

$$I_x = \sum (I_{xi}^{(i)} + y_i^2 A_i) = I_{x1}^{(1)} + y_1^2 A_1 + I_{x2}^{(2)} + y_2^2 A_2 + \dots$$

Donde $I_{xi}^{(i)}$ es el momento de inercia de cada área parcial respecto a su propio eje baricéntrico paralelo a x, e $y_i^2 A_i$ es el producto del área de cada figura parcial por el cuadrado de la distancia entre el eje x y su eje centroidal paralelo.

Si se toman las fajas de reducido espesor la $\sum I_{xi}^{(i)}$ es despreciable frente a la $\sum y_i^2 A_i$ pudiéndose tomar para este caso:

$$I_x \cong \sum y_i^2 A_i$$

Para el momento centrífugo sería:

$$I_{xy} = \sum (I_{xi}^{(i)} + x_i y_i A_i)$$

Pero $I_{xi}^{(i)}$, momento centrífugo de cada elemento respecto a ejes baricéntricos paralelos a los dados, es aproximadamente igual a cero ya que se trata de figuras aproximadamente rectangulares en las cuales los ejes baricéntricos son ejes de simetría. Luego:

$$I_{xy} \cong \sum x_i y_i A_i$$

Para calcular I_y deben tomarse franjas paralelas al eje y y procediendo luego como se ha indicado para x.

4.4.7.- MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN RESPECTO A EJES DEL MISMO ORIGEN.-

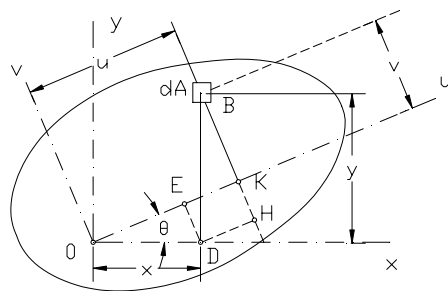


Fig. 4.38

En la fig. 4.38 se observa una sección plana en la cual se han tomado, con origen en un mismo punto O, dos pares de ejes perpendiculares x y u, $u \perp v$.

Hallemos la relación entre los momentos de segundo orden respecto a los ejes x e y, por una parte y los momentos de segundo orden respecto a los ejes u y v por la otra. El par de ejes u y v puede rotar alrededor de O y su posición se determina por el ángulo θ que forma u con x;

tomamos el sentido antihorario como positivo para medir los ángulos.

En el entorno del punto B consideramos un elemento de área dA y establezcamos la relación entre sus coordenadas respecto a uno u otro par de ejes:

$$u = OK = OE + EK = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = BK = BH - HK = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Hallamos ahora los momentos de segundo orden respecto a u y v:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$



$$I_u = \cos^2 \theta \int_A y^2 dA + \sin^2 \theta \int_A x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A xy dA$$

$$I_u = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

Análogamente se obtiene:

$$I_v = \int_A u^2 dA = \cos^2 \theta \int_A x^2 dA + \sin^2 \theta \int_A y^2 dA + 2 \sin \theta \cos \theta \int_A xy dA$$

$$I_v = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

Para el producto de inercia:

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \cos^2 \theta \int_A xy dA - \sin \theta \cos \theta \int_A x^2 dA + \sin \theta \cos \theta \int_A y^2 dA - \sin^2 \theta \int_A xy dA$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

Sumando las expresiones (1) y (2) hallamos:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_o = \text{cte.}$$

Que demuestra que la suma de los momentos de inercia, respecto a ejes perpendiculares entre si no se altera al girar estos ejes un ángulo cualquiera θ .

Si en la (1) hacemos $\theta=45^\circ$ será:

$$I_{45^\circ} = I_x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - I_{xy} = \frac{I_x + I_y}{2} - I_{xy}$$

De donde:

$$I_{xy} = \frac{I_x + I_y}{2} - I_{45^\circ}$$

Expresión que permite calcular el momento centrífugo respecto a dos ejes ortogonales conocidos los momentos axiales respecto a cada uno de ellos y a un eje intermedio a 45° .

4.4.8.- EJES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA.-

Analicemos los valores que toman los momentos de segundo orden respecto a dos ejes normales u y v en función del ángulo θ que respectivamente forman con los ejes coordenados x e y:

Al variar el ángulo θ rotarán los ejes u y v alrededor de O y las magnitudes $I_u - I_v - I_{uv}$ también variarán: I_u e I_v entre un máximo y un mínimo ambos positivos, en cambio, I_{uv} puede ser negativo y pasará por cero. Veamos como determinar el valor angular correspondiente a los valores extremos de I_u . Para ello hallemos su derivada primera dada por la expresión (1) del apartado 4.4.7:

$$\frac{dI_u}{d\theta} = 2 I_x \cos \theta (-\sin \theta) + 2 I_y \sin \theta \cos \theta - 2 I_{xy} \cos 2\theta$$

Operemos con sus términos, igualémosla a cero y llamando θ_0 al valor del ángulo del primer cuadrante que cumple esa condición:



$$\left[\frac{dI_u}{d\theta} \right]_{\theta=\theta_0} = - (I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta_0 - 2 I_{xy} \cos 2\theta_0 = 0$$

de donde:

$$\operatorname{tg} 2\theta_0 = - \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = - \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2}(I_x - I_y)} \quad (4)$$

Esta expresión se satisface para dos valores angulares: $2\theta_0$ y $2\theta_0 + \pi$ que, según su signo, podrán ser positivos o negativos. **Cada uno de estos argumentos define un eje que forma con el eje x los ángulos:** (fig. 4.39)

(θ_0) correspondiente al primer o cuarto cuadrante y variable entre 0° y 45° o entre 0° y -45° según el signo de $\operatorname{tg} 2\theta$, y

($\theta_0 + \frac{\pi}{2}$) correspondiente al segundo o tercer cuadrante de acuerdo al signo de la (4).-

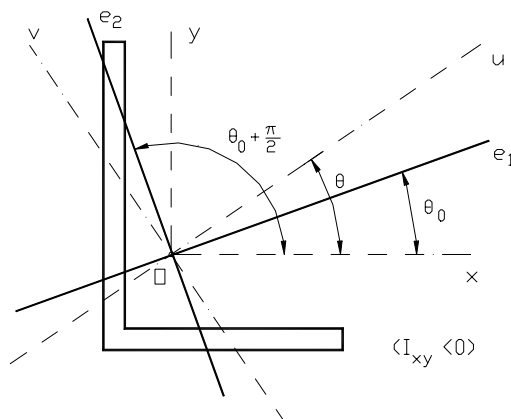


Fig. 4.39

Estos ejes son perpendiculares entre sí y se denominan ejes principales de inercia: con respecto a uno de ellos el momento de inercia es máximo y mínimo con respecto al otro. Los momentos de inercia correspondientes se denominan **momentos principales de inercia.**

Llamaremos I_1 el momento de inercia máximo correspondiente a uno de los ejes principales que designaremos e_1 ; el eje perpendicular e_2 definirá el momento mínimo I_2 . **Se trata de establecer los valores de I_1 y de I_2 y de determinar cual de los ángulos (θ_0) ó ($\theta_0 + \pi/2$), corresponde al eje e_1 y cual al eje e_2 .**

Los valores de I_1 y de I_2 se obtienen introduciendo, en las fórmulas (1) y (2) del apartado 4.4.7, el valor de θ_0 dado por la (4) del siguiente modo: Sustituyendo en la (1) la expresión de $\cos^2 \theta$ y $\operatorname{sen}^2 \theta$ en función del coseno del ángulo doble

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

se llega a:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (5)$$

Reemplazando:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{\operatorname{tg} 2\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}$$

por sus valores en función de $\operatorname{tg} 2\theta$ y dando a éste el valor particular expresado por la (4) se llega luego de algunas transformaciones a que:

$$I_1 = I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \quad (6a)$$

Efectuando iguales operaciones en la (2) se obtiene:



$$I_2 = I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (6b)$$

Para determinar si es (θ_0) o $(\theta_0 + \pi/2)$ el ángulo que el eje principal e_1 de momento máximo forma con el eje x , establecemos la derivada segunda de I_u con respecto a θ a partir de su derivada primera obtenida mas arriba. Luego de algunas transformaciones se llega a:

$$\frac{d^2 I_u}{d\theta^2} = -2(I_x - I_y) \cos 2\theta \left[1 - \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \operatorname{tg} 2\theta \right]$$

Introduciendo el valor de θ_0 que anula la derivada primera se tiene:

$$\left[\frac{d^2 I_u}{d\theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = - (I_x - I_y) \left\{ 2 \cos 2\theta_0 \left[1 + \left(\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right)^2 \right] \right\}$$

Dado que la condición de máximo de la función I_u es que el segundo miembro obtenido tenga un valor menor que cero y observando que la expresión entre llaves es siempre positiva, esta condición queda satisfecha si: $-(I_x - I_y) < 0$

desigualdad que multiplicada por -1 queda $(I_x - I_y) > 0$ o sea que:

$$I_x > I_y$$

Por lo tanto si I_x es mayor que I_y , el ángulo θ_0 define el eje principal para el cual es máximo el momento de inercia. En otros términos, para la posición de los ejes y sentido de los ángulos establecidos resulta:

Si $I_x > I_y$, θ_0 determina e_1 para el cual $I_1 = I_{\max}$ y $\theta_0 + \pi/2$ determina e_2 para el cual $I_2 = I_{\min}$.

En cambio si $I_x < I_y$, θ_0 determina e_2 para el cual $I_2 = I_{\min}$ y $\theta_0 + \pi/2$ determina e_1 para el cual $I_1 = I_{\max}$.

Demostraremos ahora que el momento centrífugo respecto a los ejes principales de inercia es nulo. En efecto si observamos que su posición, dada por (θ_0) y $(\theta_0 + \pi/2)$ la hemos hallado en base a la expresión:

$$\left[\frac{dI_u}{d\theta} \right]_{\theta=\theta_0} = - (I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta_0 - 2 I_{xy} \cos 2\theta_0 = 0$$

que multiplicada por $-1/2$ nos da:

$$1/2 (I_x - I_y) \operatorname{sen} 2\theta_0 + I_{xy} \cos 2\theta_0 = 0$$

Comparada con la expresión (3) que establece el valor del momento centrífugo I_{uv} en función de I_x , I_y y θ hace evidente que el momento centrífugo respecto al los ejes principales de inercia es nulo.-



Resumiendo, de las infinitas rectas pasantes por un punto de una sección, se denominan ejes principales de inercia los dos únicos ejes que poseen las siguientes características:

1.- Los momentos de inercia respecto a ellos tienen valores extremos positivos: máximo respecto a uno y mínimo respecto al otro).

2.- Son perpendiculares entre sí.

3.- El momento centrífugo respecto a los ejes principales de inercia es nulo.-

Los ejes principales, que pasan por el baricentro de la sección se denominan ejes principales centrales de inercia.

En muchos casos resulta fácil determinar la posición de los ejes principales de inercia. *Si la sección tiene un eje de simetría, entonces este eje es uno de los ejes principales; el otro es perpendicular al primero para cualquier punto de dicho eje.* Esto se deduce de que respecto al eje de simetría y otro cualquiera, perpendicular a él, el producto de inercia es igual a cero.

Por las fórmulas (1) y (3) se puede demostrar que *si los dos momentos principales centrales de inercia son iguales, entonces toda recta pasante por el baricentro será eje principal y todos los momentos principales centrales serán iguales (círculo, cuadrado, hexágono, triángulo equilátero, etc...).*- En efecto supongamos que para cierta sección los ejes x e y son principales y baricéntricos, y que al mismo tiempo $I_x = I_y$.- De las fórmulas (1) y (2) se obtiene que $I_x = I_y = I_u = I_v$, y de la fórmula (3) que $I_{uv} = 0$; es decir que los ejes u y v cualesquiera, son ejes baricéntricos principales de inercia de la figura.

Aquellos pares de ejes para los cuales el momento centrífugo se anula, se denominan ejes conjugados de inercia. Existen infinitos pares de ejes conjugados de un mismo origen, y entre ellos uno ortogonal: los principales de inercia.

Si derivásemos la expresión de I_{uv} dada por la (3) en busca de *hallar los valores extremos del producto de inercia, llegaríamos a que los ejes para los cuales se producen esos valores quedan definido por el ángulo θ_1 dado por:*

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}} = -\operatorname{cotg} 2\theta_0$$

θ_0 y θ_1 difieren en 45° ; es decir que el par de ejes para los cuales el momento centrífugo es máximo o mínimo, bisecará el ángulo que forman entre sí los ejes principales.- Para obtener los momentos centrífugos extremos respecto a los ejes principales e_1 e_2 , se sigue un procedimiento análogo al empleado para obtener los momentos axiales principales y se llega a:

$$|I_{e_1 e_2}|_{\min}^{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (6c)$$

En síntesis final, la determinación analítica de los ejes y momentos principales de inercia de una sección con respecto a uno cualquiera de los puntos de su plano, O por ejemplo, se concreta por el siguiente camino:

1. Se calculan I_x , I_y , I_{xy} para un par de ejes ortogonales convenientemente elegidos con origen en el punto O.-
2. Se calcula el ángulo θ_0 con la expresión (4) y, según sea $I_x > I_y$ o $I_x < I_y$, se establece cual ángulo corresponde al eje e_1 y cual al e_2 .-
3. Se determinan los valores de I_{\max} e I_{\min} con las ecuaciones (6a) y (6b) y los momentos centrífugos máximo y mínimo con la (6c).-

4.4.9.- CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN.-

La determinación de los momentos principales de inercia puede obtenerse utilizando métodos gráficos en lugar del proceso analítico descrito en 4.4.8. Sea una sección cualquiera, fig. 4.40, de la cual conocemos los momentos de segundo orden $I_x - I_y - I_{xy}$ respecto a un par de ejes ortogonales xy con origen en O . Sea además, con igual origen, otro par de ejes uv , ortogonales entre sí y que imaginamos pueden rotar alrededor de O quedando su posición definida por el ángulo θ que forma u con x . Nos proponemos determinar los ejes y los momentos principales mediante la construcción gráfica de MOHR.-

Si reproducimos las ecuaciones (5) y (3) de los apartados 4.4.8 y 4.4.7 respectivamente:

$$I_u = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$
(7)

Se observa que cada valor de θ define una posición del par de ejes u, v , pudiéndose obtener mediante las ecuaciones (7) los momentos de segundo orden I_u e I_{uv} correspondientes a cualquier valor de θ .

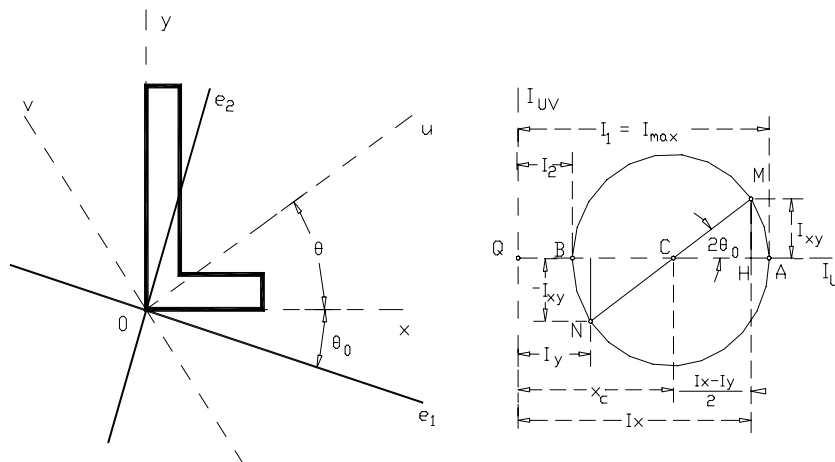


Fig. 4.40

Gráficamente, fig. 4.40, sobre un par de ejes rectangulares con origen en Q , se llevan los valores de I_u en abscisas e I_{uv} en ordenadas correspondientes a cada par de ejes ortogonales, comenzando con los valores conocidos de I_x e I_{xy} que definen un punto tal como el M . Si imaginamos que el par de ejes u, v rota alrededor de O , a cada valor de θ corresponderá una posición de los ejes, un valor de I_u y de I_{uv} dados por las ecuaciones paramétricas (7) y un punto representativo en el gráfico. Las infinitas posiciones de los ejes alrededor de O definen gráficamente una curva continua y cerrada que evidenciaremos se trata de una circunferencia. Efectivamente ordenando las (7):

$$I_u - \frac{1}{2} (I_x + I_y) = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro:

$$[I_u - \frac{1}{2} (I_x + I_y)]^2 + I_{uv}^2 = [\frac{1}{2} (I_x - I_y)]^2 + I_{xy}^2$$

si llamamos:

$$x_C = \frac{1}{2} (I_x + I_y) \quad \text{y} \quad R^2 = [\frac{1}{2} (I_x - I_y)]^2 + I_{xy}^2$$

y sustituimos en la anterior:

$$(I_u - x_C)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$



Esta última constituye la ecuación de una circunferencia de radio R y centro en un punto C de coordenadas $x_C = 1/2 (I_x + I_y)$ e $y_C = 0$.- Esta circunferencia se denomina *Circunferencia de Mohr*.

Con centro en C y radio R trazamos la circunferencia referida al sistema de ejes I_u e I_{uv} con origen en Q .

Sabemos que las coordenadas de cada punto de esta circunferencia representan los momentos I_u e I_{uv} para cada uno de los infinitos ejes que pasan por O .

Ubiquemos en primer término, sobre la circunferencia de Mohr el punto correspondiente al eje x origen de los ángulos. Para ello en las (7) hacemos $\theta = 0^\circ$:

Eje x: $\theta = 0^\circ$	punto representativo: M	$I_u = I_x$ $I_{uv} = I_{xy}$ (supuesto >0)
Eje y: $\theta = 90^\circ$	punto representativo: N	$I_u = I_y$ $I_{uv} = -I_{xy}$

Observemos que M y N se localizan en extremos opuestos de un diámetro con una diferencia angular al centro de 180° o sea dos veces el ángulo formado por x e y .

De fácil correlación con sus respectivos ejes son los punto A y B ya que para ellos $I_u = I_{m\acute{a}x}$ para A e $I_u = I_{m\acute{i}n}$ para B , y para ambos puntos $I_{uv} = 0$. Evidentemente A y B representan los momentos de segundo orden correspondientes a los ejes principales de inercia pasantes por O , I_1 e I_2 .

Ubicados M y A , establezcamos el valor del arco y del ángulo al centro entre ellos:

$$\text{tg } \hat{A}CM = \frac{HM}{CH} = \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$$

por la (4) del apartado 4.4.8 resulta:

$$\text{tg } \hat{A}CM = - \text{tg } 2\theta_0$$

luego:

$$\hat{M}CA = 2 \theta_0$$

Llevando en el gráfico de la sección el ángulo θ_0 a partir de x en el sentido que va de M hacia A tenemos ubicado el eje “ e_1 ” para el cual $I_u = I_{m\acute{a}x} = I_1$. Perpendicularmente se tiene “ e_2 ” para el cual $I_u = I_{m\acute{i}n} = I_2$.

Lo expuesto nos da los fundamentos de la construcción gráfica que se utiliza para trazar la circunferencia de Mohr que no recurre al cálculo de las coordenadas del centro y del radio, sino que es la siguiente:

Dada una sección de baricentro G , fig. 4.41, se fijan dos ejes centrales ortogonales x e y ; se calcula respecto a ellos I_x , I_y e I_{xy} . - Se ha tomado la sección y los ejes tal que $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, fig. 4.41(a).

En la fig. 4.41(b) se trazan los ejes I_u e I_{uv} con origen en Q y adoptando una escala de momentos de inercia del tipo $\frac{\alpha \text{ cm}^4}{\text{cm}}$ se representan los puntos $M(I_x ; I_{xy})$ y $N(I_y ; -I_{xy})$, y los unimos con una recta; donde corta al el eje de abscisas tenemos el centro C . Con radio CM se traza la circunferencia de Mohr.

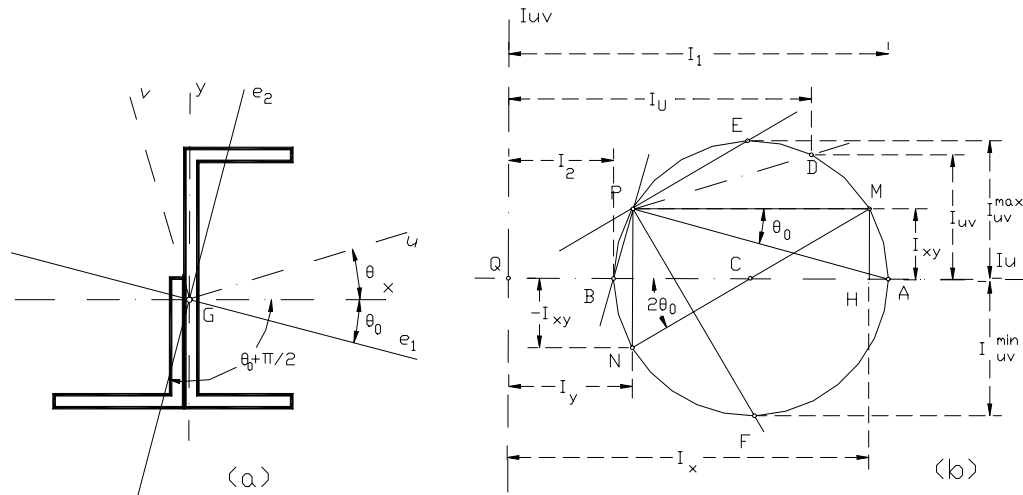


Fig. 4.41

Las abscisas de los puntos A y B donde la circunferencia intercepta al eje de abscisas determinan los momentos principales de inercia. Para ubicar los ejes principales en la figura 4.41.(a) podemos recurrir al procedimiento indicado en el caso anterior o mediante la siguiente construcción gráfica:

Por el punto M se traza una paralela al eje x, es decir una paralela al eje cuyos momentos expresan las coordenadas de M; esta recta intercepta la circunferencia en el punto P llamado *polo del círculo de Mohr*. El mismo punto P se obtiene si se traza por N una paralela al eje y.

El polo goza de la propiedad de que cualquier recta que pasa por él, (PM, PN por ejemplo) intercepta a la circunferencia en un punto (M, N) cuyas coordenadas expresan los momentos de segundo orden de un eje que pasa por O y es paralelo a dichas rectas (PM, PN).

Determinado P, se lo une con A y con B siendo sus paralelas trazadas por G los ejes principales e_1 y e_2 .

En la figura se observa que $\widehat{MPA} = \theta_0$ ya que se trata de un ángulo inscrito en una circunferencia que subtende un arco cuyo ángulo al centro vale $\widehat{MCA} = 2\theta_0$.

Inversamente, si dado el eje u, queremos conocer los momentos de segundo orden respecto a él utilizando el círculo de Mohr, sólo tenemos que trazar por P una paralela a u que corte a la circunferencia en D: la abscisa y ordenada de D nos dan I_u e I_{uv} .

Finalmente si quisiéramos conocer los valores extremos de los momentos centrífugos y sus respectivos ejes, el diámetro paralelo al eje I_{uv} intercepta a la circunferencia en E y F cuyas ordenadas nos dan los valores buscados. Si uno E y F con P y trazo paralelas a PE y PF obtengo la dirección de los ejes para los cuales los centrífugos son máximos o mínimos. El ángulo que forman con los ejes principales de inercia es de 45° ya que el ángulo inscrito EPA formado entre ellos, subtende el arco EA cuyo ángulo central vale 90° . Destacamos que al representarse en el sistema de ejes I_u, I_{uv} las coordenadas de los puntos M y N para trazar la circunferencia se debe:

Para el punto M, tomar el momento de inercia respecto a "x" y el centrífugo respecto a "x" e "y" con sus respectivos signos.-

Para el punto N, tomar el momento de inercia respecto a "y" con su signo y el centrífugo respecto a "x" e "y" con signo cambiado.-

