



CAPITULO 6

ANÁLISIS DE VIGAS DE ALMA LLENA

6.1.- CONCEPTOS INICIALES.-

Por la función que cumplen podemos definir las vigas en los siguientes términos: *Una viga es una estructura diseñada para sostener cargas transversales a través de un vano estando apoyada en puntos aislados a lo largo de su eje, frecuentemente en sus extremos.-*

Podemos clasificarlas en base a diversos parámetros, entre ellos los siguientes:

- Su configuración, vigas de alma calada y vigas de alma llena.-
- El material constitutivo, vigas de madera, acero u hormigón.-
- Por el número y tipo de los vínculos que la unen a tierra o entre ellas, isostáticas o hiperestáticas.-
- Por el tipo y la forma de recibir las cargas: concentradas o distribuidas, directa o indirectamente.-

En el desarrollo de este capítulo veremos diversos tipos de vigas basados en estos criterios de clasificación.-

En el campo de la estática se estudian las vigas isostáticas; se verán en este capítulo las de alma llena ya que las vigas de alma calada son los reticulados que hemos analizado en el capítulo 5.- *Las vigas de alma llena son piezas prismáticas de eje generalmente recto cuya longitud es varias veces mayor que sus dimensiones transversales, con capacidad para resistir, no sólo fuerzas de la dirección de su eje, sino especialmente transversales al mismo.-* Deben, por lo tanto, ser diseñadas para cumplir este condicionamiento por cuanto las acciones dominantes que inciden sobre ellas son fuerzas transversales.- Si el eje de la estructura no es recto sino que presenta quiebres como en los pórtico, o es curvo como en los arcos, las fuerzas axiales pueden tener tanta o más incidencia que las transversales.-

El análisis de una viga de alma llena se inicia representándola por su eje y trazando su diagrama de cuerpo libre para determinar las reacciones de vínculo externo y establecer los esfuerzos internos que se desarrollan a lo largo del mismo; se determinan además los puntos para los cuales dichos esfuerzos alcanzan sus valores máximo y mínimo, como así también la posición donde se anulan.- Esto es de importancia ya que, en función de ellos y mediante la “Resistencia de Materiales”, se calcularán o verificarán las dimensiones de la sección transversal de la viga.-

6.2.- ESFUERZOS INTERNOS EN ESTRUCTURAS PLANAS DE ALMA LLENA.-

Consideremos una viga simplemente apoyada AB sometida a cargas distribuidas y concentradas coplanares con su eje, figura 6.1.- A efectos de generalizar las conclusiones para cualquier otro tipo de estructura plana de alma llena sometida a cargas axiales y transversales, se considera que las fuerzas concentradas actúan con dirección oblicua al eje.-

Pongamos en evidencia las reacciones externas y tracemos el diagrama de cuerpo libre de la viga, que se encontrará en reposo bajo la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio.- Practiquemos un corte s-s normal al eje ; para restablecer el equilibrio en los dos tramos en que ha quedado dividida la viga se deben aplicar las interacciones que existían entre las partículas adyacentes al corte antes que se practicase el mismo.- Para ello en la cara izquierda del corte se deben aplicar las



acciones que la parte derecha de la viga le transmitía a través de todos los puntos de la sección de corte.- Viceversa, en el tramo derecho se deben aplicar , sobre la cara de corte, las acciones que recibía de la parte izquierda.-

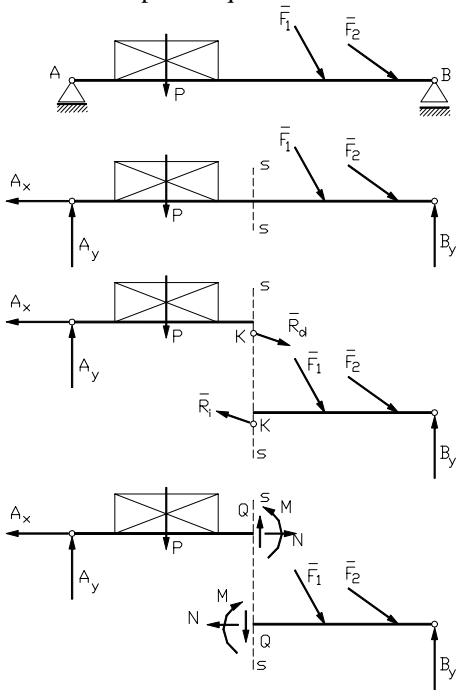


Fig. 6.1

*Estas interacciones constituyen dos sistemas de fuerzas iguales y opuestas, distribuidas en ambas caras del corte, y pueden ser reducidas a sus resultantes \bar{R}_i y \bar{R}_d situadas en el plano vertical de simetría que contiene a las fuerzas exteriores y al eje de la viga.- Son iguales y opuestas y se designan **reacción interna en la sección S-S de la viga**.- Obsérvese, figura 6.1, que \bar{R}_d es la equilibrante de la sollicitación izquierda, es decir, del conjunto de fuerzas que actúan en el tramo de viga situado a la izquierda del corte; de igual modo \bar{R}_i es la equilibrante de las fuerzas externas que solicitan al tramo derecho de la viga (solicitación derecha).- **Dado que son iguales y opuestas, resulta \bar{R}_i equivalente a la sollicitación izquierda y \bar{R}_d es equivalente a la sollicitación derecha.***

En la figura 6.2. se ha ampliado en proyección axonométrica el tramo derecho de la viga mostrando el diagrama de cuerpo libre luego de **trasladar la reacción interna \bar{R}_i desde el punto K, de intersección con el plano de la sección, al baricentro C de ésta.** En este punto se la expresa mediante un sistema

fuerza-par equivalente formado por su momento M respecto a él y sus componentes rectangulares N y Q según la normal al plano de la sección (el eje de la viga rectilínea en este caso) y la recta de intersección del plano de las fuerzas con el plano de la sección. Frecuentemente esta recta coincide con uno de los ejes principales de inercia por la condición de simetría que se le ha asignado al plano vertical continente de las fuerzas.- **Las tres componentes de la reacción interna M, Q, N , expresadas cada una de ellas por dos elementos iguales y opuestos según se considere la cara izquierda o derecha del corte, se denominan esfuerzos internos o característicos en la sección transversal considerada.**- A cada uno de ellos se lo denomina y define del siguiente modo:

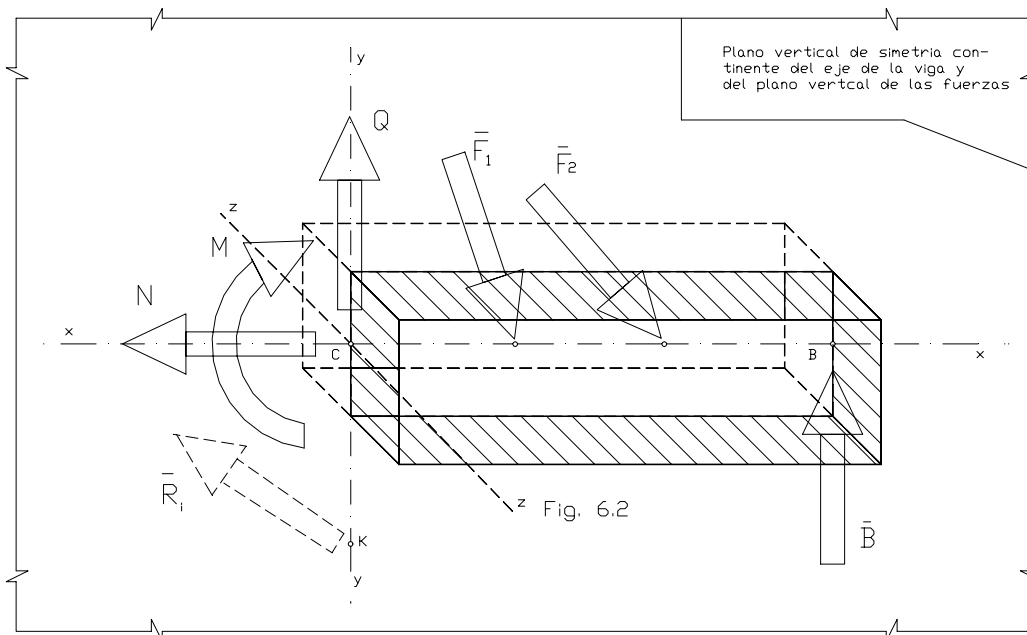


Fig. 6.2

- **El momento flector o flexor M** en una sección transversal de las estructuras planas de alma llena *es* el momento respecto a su baricentro de la resultante de las fuerzas internas que se des-

arrollan en ella.- *Numéricamente es igual a la suma algebraica de los momentos respecto a C de las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección considerada.-*

- *El esfuerzo de corte, tangencial o de cizallamiento Q en una sección transversal de las estructuras planas de alma llena es la proyección sobre el plano de la sección de la resultante de las fuerzas internas que se desarrollan en ella.- Numéricamente es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre dicho plano de todas las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección considerada.-*
- *El esfuerzo axial, axil o normal N en una sección transversal de las estructuras de alma llena, es la proyección sobre el eje normal al plano de la sección de la resultante de las fuerzas internas que en ella se desarrollan.- Numéricamente es igual a la suma algebraica de las proyecciones sobre la normal a dicho plano de las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección considerada.-*

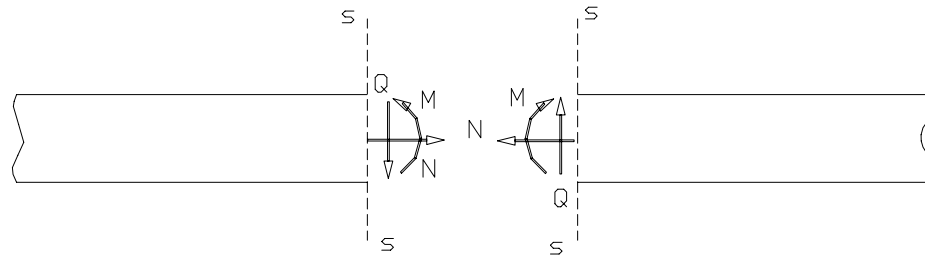


Fig. 6.3

En la figura 6.3 se han graficado los esfuerzos internos positivos y en la 6.4 las componentes de las sollicitaciones izquierda y derecha que los originan.- Veamos los signos de los esfuerzos internos:

- *El momento flector en la sección s-s de la viga se considera positivo si el momento resultante de las fuerzas exteriores a la izquierda de la sección es horario (y el de las fuerzas de la derecha antihorario).- En caso contrario el momento flector es negativo.- El efecto físico de las fuerzas exteriores que originan momentos flectores positivos consiste en curvar la viga con la parte convexa hacia abajo, lo que significa que tracciona sus fibras inferiores y comprime las superiores.- De aquí se deduce otra regla para el signo de los momentos flectores: **el momento flector se considera positivo si en la sección considerada sus fibras inferiores son traccionadas, y negativo cuando son traccionadas las superiores.-***

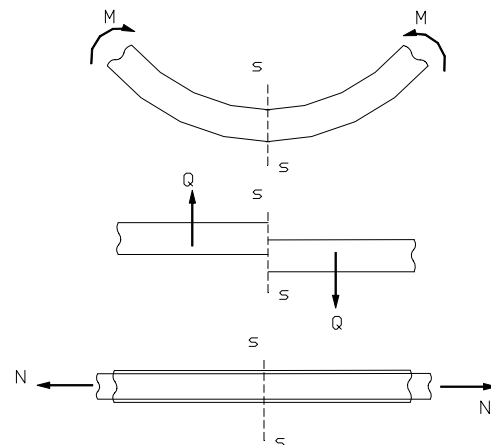


Fig. 6.4

- *El esfuerzo cortante en una sección s-s de la viga se considera positivo si la proyección sobre su plano de la resultante de las fuerzas exteriores actuantes a la izquierda de la sección, está dirigida hacia arriba (y la de las fuerzas de la derecha hacia abajo).- En caso contrario el esfuerzo de corte se considera negativo.- El efecto físico de las fuerzas externas que originan esfuerzos de corte positivos consiste en tender a cortar la viga según la sección s-s desplazando la parte izquierda hacia arriba y la derecha hacia abajo; será negativo en caso contrario.-*
- *El esfuerzo axial en una sección s-s de la viga se considera positivo si las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección tienden a alargar la viga traccionándola, en cambio es negativo si las fibras son comprimidas.-*

6.3.- VIGAS CON CARGAS CONCENTRADAS.-

6.3.1.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA.-



Sea la viga de la figura 6.5 sobre la que actúa un única carga concentrada.- Se trata de establecer cómo varían los esfuerzos internos en las sucesivas secciones transversales existentes a lo largo de su eje.- Esto se puede resolver gráfica o analíticamente; se verá en primer término el proceso analítico.-

Se traza el D.C.L. y se determinan las reacciones de vínculos externos:

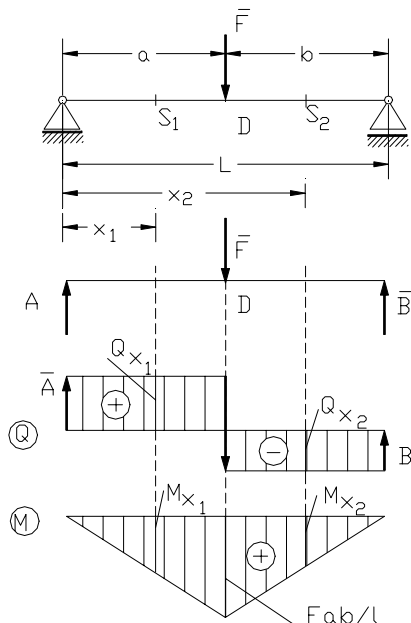


Fig. 6.5

$$A = \frac{Fb}{L} \quad B = \frac{Fa}{L}$$

Si se consideran ahora dos secciones genéricas, una de abscisa x_1 situada en cualquier punto entre A y D, y la otra de abscisa x_2 ubicada en cualquier posición entre D y B.-

Aplicando la definición de esfuerzo de corte en la sección de abscisa x_1 , se observa que a su izquierda actúa la reacción A que, por ser normal al eje, se proyecta en toda su magnitud sobre el plano de la sección, por lo cual

$$Q_{x1} = A$$

Esta expresión es válida para cualquier sección comprendida entre los puntos de aplicación de A y de F ; si se representa gráficamente esta función se obtiene un recta paralela al eje de referencia situada a la distancia A del mismo en sentido positivo.- Para la sección de abscisa x_2 se tiene:

$$Q_{x2} = A - F = -B$$

Su gráfica es otra recta paralela al eje de referencia trazada a la distancia B en la zona negativa.- Se adoptará llevar los esfuerzos cortantes positivos hacia arriba de la recta de referencia y los negativos hacia abajo.-

El diagrama trazado se designa **diagrama de esfuerzos cortantes** y sus ordenadas nos dan el valor del mismo en correspondencia a la sección que se desee.- Obsérvese que en los tramos de viga donde no hay carga el esfuerzo de corte se mantiene constante en un valor perfectamente determinado; en cambio, en correspondencia con los puntos de aplicación de las fuerzas concentradas no tiene un único valor sino que experimenta una brusca variación.- En los puntos A , D , B de aplicación de fuerzas, teóricamente puntuales, se define el valor del esfuerzo cortante en puntos infinitamente próximos a ellos, tanto a su izquierda como a su derecha, utilizando las funciones que se han obtenido más arriba.- Se tendrá entonces que inmediatamente a la derecha del punto A será:

$$Q_{Ader} = \lim Q_{x1} \text{ (para } x_1 \rightarrow 0 \text{)} = A$$

que se designa simplemente Q_A .- Aproximándonos al punto D por su izquierda será

$$Q_{Dizq} = \lim Q_{x1} \text{ (para } x_1 \rightarrow a \text{)} = A$$

Aproximándonos a D por la derecha, tendremos:

$$Q_{Dder} = \lim Q_{x2} \text{ (para } x_2 \rightarrow a \text{)} = A - F = -B$$

Alcanzando el punto B por su izquierda será

$$Q_{Bizq} = Q_B = \lim Q_{x2} \text{ (para } x_2 \rightarrow L \text{)} = A - F = -B$$

El momento flector respecto al baricentro de las secciones de abscisas x_1 y x_2 será:



$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \quad M_{x_1} &= A \cdot x_1 \\
 M_{x_2} &= A \cdot x_2 - F(x_2 - a) = B(L - x_2)
 \end{aligned}$$

Representando gráficamente estas dos funciones lineales se obtiene el **diagrama de momentos flectores** que se dibujará por debajo del eje de referencia siguiendo la convención de representar los momentos positivos del lado de las fibras traccionadas y los negativos del lado de las fibras comprimidas.- Para la construcción del diagrama se adopta una escala de momentos adecuada.-

En particular *se observa que en los apoyos el esfuerzo de corte tiene los valores de las respectivas reacciones.- El momento flector en ellos es nulo* ya que, al no haber fuerzas del sistema a la izquierda de A o a la derecha de B, la expresión algebraica del momento flector respecto al punto A (o al B) coincidirá con la ecuación general de equilibrio $\sum M_A = 0$ (o $\sum M_B = 0$).-

En correspondencia con la carga F el esfuerzo de corte varía bruscamente pasando por el valor cero y cambiando de signo positivo a signo negativo.- En el punto que esto sucede el momento flector pasa por su valor máximo, cuya expresión es:

$$+\curvearrowright \quad M_D = M_{\max} = A \cdot a = \frac{F \cdot a \cdot b}{L}$$

Si la carga actuase en la mitad de la viga ($a = b = \frac{1}{2} L$), se tiene:

$$M_{\max} = \frac{F \cdot L}{4}$$

Gráficamente se procede del siguiente modo, figura 6.6 : se representa vectorialmente la fuerza \bar{F} ; se adopta un polo O y se demarcan los rayos polares 1 y 2.- Se trazan los lados I y II del funicular de \bar{F} cerrándolo con la línea de cierre L.C.- La paralela a ésta por O determina las reacciones A y B.-

El diagrama formado por los lados I y II (funicular de la carga o fuerza activa) referido a la línea de cierre L.C., constituye el diagrama de momentos flectores expresado en la escala:

Escala de $M = h$ (cm) . Escala de fuerzas . Escala de longitudes

Efectivamente, el momento M_{x_1} de la reacción \bar{A} respecto al punto de abscisa x_1 constituye el momento flector en la sección; gráficamente,

de acuerdo al apartado 2.8.4., dicho momento M_{x_1} está expresado a escala por el segmento determinado sobre la paralela a la reacción \bar{A} , pasante por el punto de abscisa x_1 , por las intersecciones de los lados L.C. y I que constituyen el funicular de esa reacción.- De igual modo el momento flector en la sección de abscisa x_2 está dado por el momento, respecto al baricentro, de las fuerzas \bar{A} y \bar{F} ; gráficamente el momento de estas dos fuerzas (o lo que es lo mismo de su resultante) queda determinado sobre la vertical pasante por el punto de abscisa x_2 por el segmento M_{x_2} definido por las intersecciones de los lados extremos del funicular correspondiente a esas dos fuerzas (L.C. y II).- En conclusión **el lado I del funicular referido a la línea de cierre (entre A y D) y el lado II referido también a la L.C. (entre D y B) constituyen el diagrama de momentos flectores.**- Obsérvese que la línea de referencia está dada por el lado del funicular paralelo al rayo polar pasante por el origen de la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección considerada.-

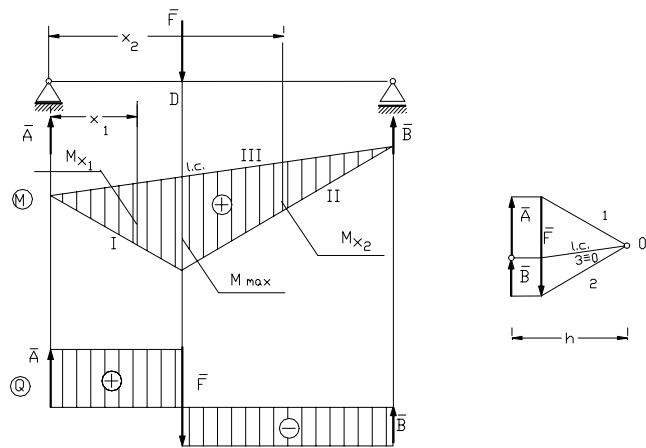


Fig. 6.6

El signo del momento flector, para las convenciones y ubicación del polo adoptadas (a la derecha del polígono de fuerzas), es positivo cuando el funicular de las cargas está abajo de la línea de cierre y negativo en caso contrario.- Ello se comprueba fácilmente si nos fijamos en la sección de



abcisa x_1 y observamos que la reacción A tiende a producir un giro horario alrededor de su bari-centro o tracción en las fibras inferiores.-

El diagrama de esfuerzos de corte se obtiene sumando algebraicamente las fuerzas de izquierda a derecha y graficando esa suma.- Recuérdese que por ser las fuerzas externas perpendiculares al eje se proyectan en toda su magnitud sobre el plano de la sección.-

Obsérvese nuevamente que **entre fuerza y fuerza concentrada el esfuerzo de corte se mantiene constante y el momento flector varía linealmente.- En correspondencia con los apoyos el momento flector es nulo y máximo en la sección donde actúa la carga ; el esfuerzo cortante alcanza valores extremos en los apoyos y pasa por cero en correspondencia con la sección donde actúa la carga.-**

Si tuviésemos la **viga cargada con varias fuerzas concentradas :**

Se construye, figura 6.7., el funicular de las cargas que permite determinar las reacciones de vín-culo y, referido a la línea de cierre, constituye el diagrama de momentos flectores.- Si se quisiera referir el diagrama a una recta horizontal se toma un nuevo polo O' sobre la horizontal trazada por el origen de la primer fuerza exterior aplicada a la izquierda de la viga, en este caso el origen de la reacción A, y se traza el funicular correspondiente al nuevo polo O' cuya línea de cierre es hori-zontal.-

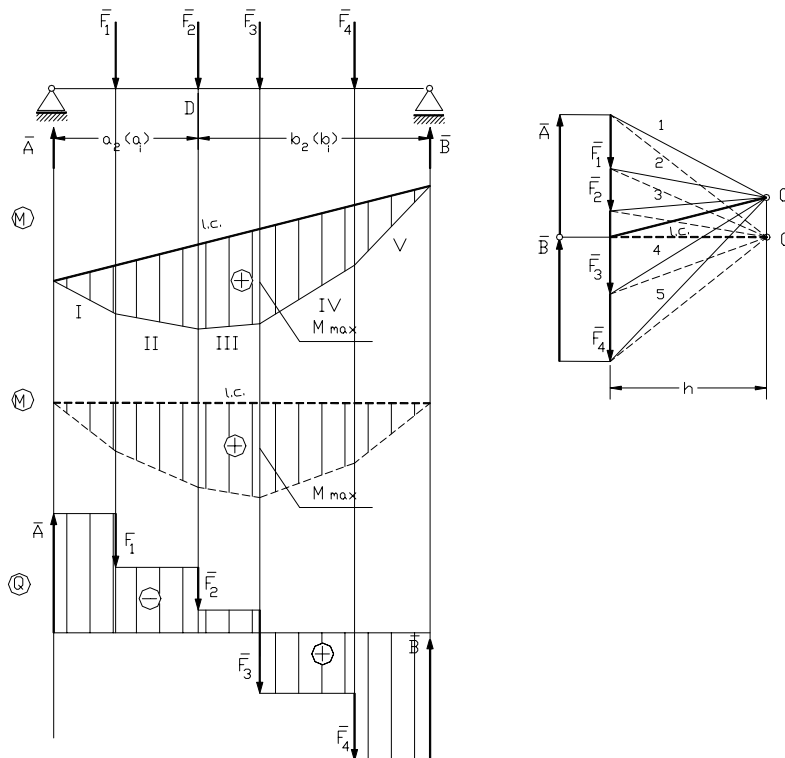


Fig. 6.7

representa el esfuerzo de corte entre las fuerzas A y F_1 .- A partir de esta intersección se resta F_1 y se traza una nueva recta paralela al eje x de referencia hasta interceptar F_2 .- Se prosigue restando F_2 , F_3 y F_4 en correspondencia con sus respectivas rectas de acción desde la recta representativa del esfuerzo de corte en el tramo inmediato anterior.- La reacción B , positiva , cierra este diagrama.-

Obsérvese que la poligonal representativa de los momentos flectores tiene sus vértices en corres-pondencia con los puntos de aplicación de las fuerzas concentradas.- **El momento es nulo en los apoyos, y el valor máximo corresponde al punto de aplicación de la fuerza que cambia el signo del esfuerzo de corte o sea, que en ese punto el esfuerzo de corte pasa por el valor cero.- Los valores extremos del esfuerzo de corte se presentan en correspondencia con los tramos adyacen-tes a los apoyos.-**

El diagrama de esfuer-zos cortantes se obtiene en la forma ya explica-da: sobre la recta de acción de la reacción A y a partir de una recta horizontal de referencia se lleva, en escala de fuerzas, un segmento representativo de su intensidad y se traza una paralela al eje de referencia hasta inter-ceptar la recta de ac-ción de F_1 : esta recta



Estos trazados gráficos tienen valor didáctico pero, generalmente se opera en forma analítica.- Si genéricamente designamos F_i las fuerzas activas, y a_i, b_i sus distancias a los apoyos A y B respectivamente, las reacciones valen :

$$A = \frac{\sum M_B^i}{L} = \frac{\sum F_i \cdot b_i}{L} \qquad B = \frac{\sum M_A^i}{L} = \frac{\sum F_i \cdot a_i}{L}$$

Se calcula luego el esfuerzo de corte en los tramos comprendidos entre las fuerzas actuantes sumando algebraicamente las fuerzas externas situadas a la izquierda y se hace la representación gráfica:

$$Q_{X1} = A \qquad Q_{X2} = A - F_1 \qquad Q_{X3} = A - F_1 - F_2$$

$$Q_{X4} = A - F_1 - F_2 - F_3 \qquad Q_{X5} = A - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = -B$$

En donde x_1 es la abscisa de una sección cualquiera que está ubicada entre A y el punto de aplicación de F_1 ; x_2 , abscisa de un sección ubicada entre F_1 y F_2 ; x_3 entre F_2 y F_3 ; x_4 entre F_3 y F_4 ; x_5 entre F_4 y B.-

Entre dos fuerzas sucesivas los momentos flectores varían linealmente, se calculan respecto a los puntos de aplicación de aquéllas y se representan a partir de una recta paralela al eje de la viga.- Para los apoyos y puntos de aplicación de las fuerzas se tiene las siguientes expresiones:

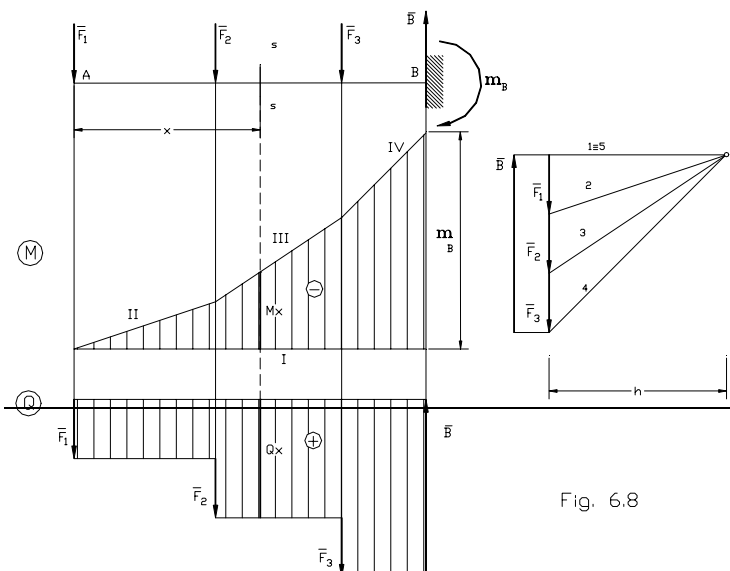
$$\begin{aligned} +\curvearrowright \quad M_A &= 0 \\ M_1 &= A \cdot a_1 \\ M_2 &= A \cdot a_2 - F_1 (a_2 - a_1) \\ M_3 &= M_{\text{máx}} = A \cdot a_3 - F_1 (a_3 - a_1) - F_2 (a_3 - a_2) \\ M_4 &= A \cdot a_4 - F_1 (a_4 - a_1) - F_2 (a_4 - a_2) - F_3 (a_4 - a_3) = B \cdot b_4 \\ M_B &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que cuando se establece el signo de Q_{X5} y de M_4 en base al sentido geométrico de las fuerzas situadas a la derecha de la sección considerada, las reglas dadas en el apartado 6.2. implican cambiar el signo que resulta de aplicar la convención adoptada para las fuerzas de la izquierda.- Este cambio de signo corresponde cuando se lo establece con criterio geométrico, es decir si el giro es horario o antihorario; no corresponde en cambio cuando se lo hace por el efecto físico es decir si las fibras traccionadas son las inferiores o las superiores.-

6.3.2.- VIGA EMPOTRADA.-

Consideremos una viga libre en el extremo izquierdo A y empotrada en el derecho B, sometida a cargas concentradas normales al eje de la viga, figura 6.8.-

Construyamos el polígono de fuerzas activas y con polo O ubicado sobre la horizontal pasante por el origen de la primer fuerza de la izquierda F_1 , se traza el funicular I-II-III-IV.- La adopción de la posición indicada para el polo tiene por único objeto que la línea de referencia del diagrama de momentos sea horizontal ; la construcción es válida con otros polos con la diferencia que la línea de referencia no será horizontal.-



El funicular II-III-IV referido al lado I nos representa el diagrama de momentos flectores.- Efectivamente, consideremos una sección cualquiera de abscisa x ; el momento flector respecto a ella está determinado por el momento de las fuer-

Fig. 6.8



zas F_1 y F_2 situadas a la izquierda de la sección; este valor gráficamente está dado por el segmento M_x determinado sobre la vertical pasante por la sección, por los lados III y I correspondientes a los rayos polares pasantes por el extremo y el origen de la resultante de las fuerzas F_1 F_2 .- Para una sección situada entre las fuerzas F_1 y F_2 los lados correspondientes serán II y I , y los lados IV y I para las secciones comprendidas entre F_3 y el extremo B.- Resulta entonces que **en la viga empotrada en el extremo derecho el diagrama de momentos queda referido al primer lado del funicular de las fuerzas activas que corresponde al rayo polar pasante por el origen de la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección considerada.**- El signo será negativo ya que hay tracción en las fibras superiores, y la ordenada sobre la vertical de B representa el momento de empotramiento m_B .-Todos estos valores se miden en la escala que resulta de acuerdo a la distancia polar, escala de fuerzas y escala de longitudes.-

Analíticamente este diagrama se obtiene calculando los momentos flectores respecto a los puntos de aplicación de las cargas concentradas y representando gráficamente los resultados.- En particular se tiene:

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \quad M_A &= 0 \\
 M_x &= - F_1 \cdot x - F_2 (x - a_2) \\
 M_B &= - F_1 \cdot L - F_2 \cdot b_2 - F_3 \cdot b_3 = - m_B
 \end{aligned}$$

El diagrama de esfuerzos cortantes se deduce con facilidad de la figura 6.8.-

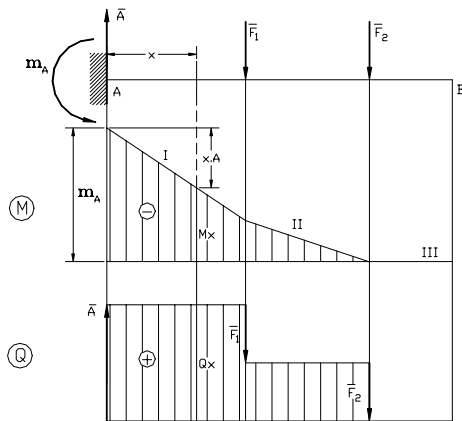
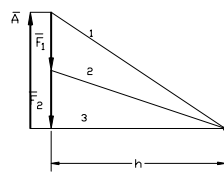


Fig. 6.9



Consideremos ahora la viga con el empotramiento en el extremo izquierdo y libre el extremo derecho, figura 6.9.- Construimos el funicular de las fuerzas activas: se toma el polo en correspondencia con la horizontal pasante por el extremo de la última fuerza de la derecha si queremos que la línea de referencia sea horizontal.-

El polígono de todas las fuerzas, activas y reactivas, es cerrado por cuanto el origen de la primer fuerza A, y el extremo de la última F_2 son coincidentes.- En cambio el polígono funicular es abierto lo que significa que el sistema de fuerzas se reduce a un par medido por la ordenada en A que, infinitamente próximo y a su derecha, nos representa el momento flexor .- Concentrado en A está aplicado el par de empotramiento, m_A , que cierra el funicular y equilibra el sistema de fuerzas.-

En el tramo de viga comprendido entre A y F_1 los momentos flectores están representados por las ordenadas comprendidas entre los lados I y III ya que ellos constituyen los lados extremos de la única fuerza situada a la izquierda de la sección, \bar{A} .- Entre los puntos de aplicación de F_1 y F_2 , los momentos flectores quedan dados por el lado II referido al III por constituir ellos el funicular de las fuerzas situadas a la izquierda, A y F_1 .- **Es decir que cuando el empotramiento está en el extremo izquierdo de la viga, el diagrama de momentos flectores queda dado por el funicular de las fuerzas activas referido al último de los lados**, que es el correspondiente al rayo polar pasante por el origen de la primer fuerza izquierda \bar{A} , coincidente con el extremo de \bar{F}_2 última de la derecha.-

6.3.3.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON EXTREMOS VOLADOS.-



Sea una viga rectilínea en que los apoyos no están situados en los extremos sino en puntos intermedios, de modo que sus extremos quedan en voladizo cargada con un conjunto de fuerzas concentradas, figura 6.10.-

Con polo O cualquiera se construye el funicular de las fuerzas activas exteriores denominadas cargas; las intersecciones de su primer y último lados con las rectas de acción de las reacciones de vínculo determina la línea de cierre del funicular que permite establecer el valor de A y B.- El funicular II-III-IV-V referido al primer lado en el voladizo izquierdo, a la línea de cierre en el tramo de viga comprendido entre los apoyos A y B, y al último lado VI en el voladizo derecho constituye el diagrama de momentos flectores: esto se deduce del análisis de la determinación gráfica del momento flector en las secciones de abscisas x_1 , x_2 , x_3 en forma similar a la realizada en las vigas vistas anteriormente.-

En el gráfico se han indicado dos procedimientos para horizontalizar el diagrama de momentos flectores:

- a) Trazado el funicular de polo O y determinadas A y B se construye un nuevo funicular utilizando tres polos: O_1 para el voladizo izquierdo en correspondencia con la normal a las fuerzas pasante por el origen de la primera de la izquierda, F_1 ; O_2 para el tramo de viga entre apoyos en correspondencia con la normal en el origen de la primer fuerza actuante a la izquierda de este tramo, A; O_3 para el voladizo derecho tomado sobre la normal a las fuerzas en el extremo de la última fuerza actuante en el voladizo derecho.-
- b) Determinadas las reacciones utilizando el polígono de polo O, que llamaremos polígono auxiliar, se construye un nuevo polígono de fuerzas llevando a éstas en el orden que se presentan en la viga de izquierda a derecha y se toma el polo O^* en correspondencia con la normal en el origen de la primer fuerza de la izquierda.- Obsérvese que al estar las fuerzas externas ordenadas de izquierda a derecha la línea de referencia única para todo el diagrama está dada por el lado del funicular correspondiente al rayo polar pasante por el origen de la resultante de las fuerzas que están a la izquierda de la sección, coincidente con el origen de F_1 primer fuerza izquierda.-

Sobre el diagrama de esfuerzos cortantes ilustra claramente la figura 6.10. el procedimiento de trazado que es repetición de los efectuado anteriormente.-

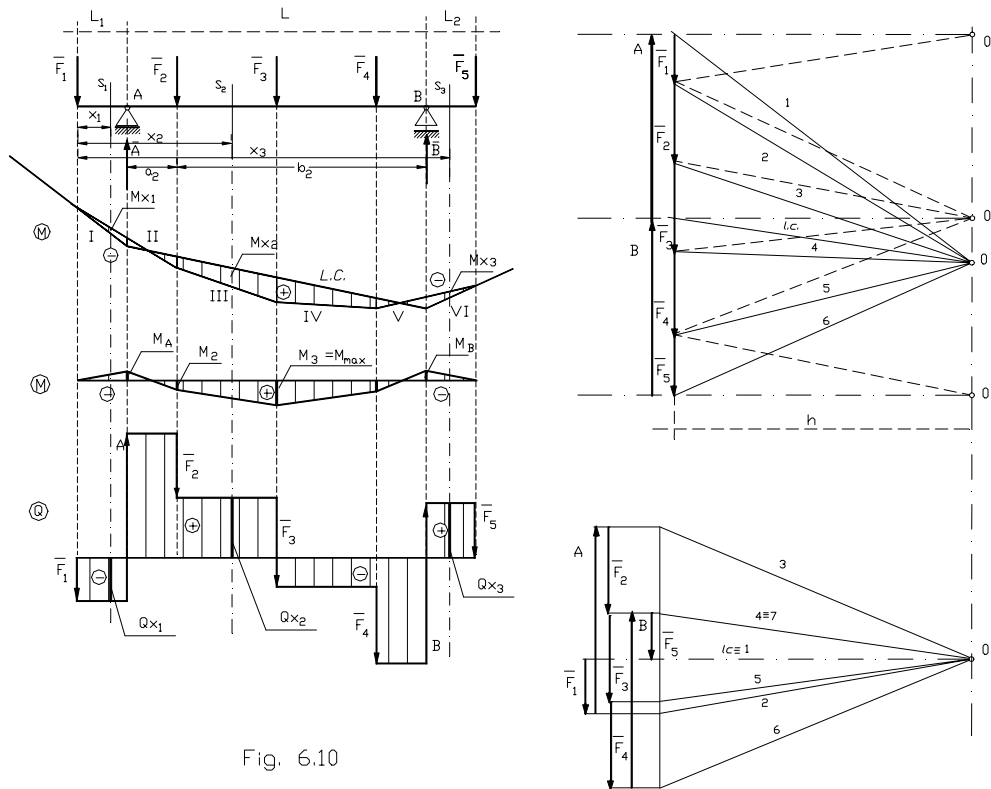


Fig. 6.10



Para *efectuar el cálculo analítico* designemos como 1-2-3-4-5 los puntos de aplicación de las fuerzas $F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5$ respectivamente.- Además la adición del subíndice izq o der es para indicar un punto inmediatamente a la izquierda o a la derecha del punto de aplicación de la fuerza ya que, en correspondencia con éste el esfuerzo cortante no posee un valor único.-

Reacciones: (Se toman como positivos los momentos horarios)

$$\sum M_A = -F_1 \cdot L_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 + F_4 \cdot a_4 - B \cdot L + F_5 (L+L_2) = 0$$

$$B = \frac{-F_1 L_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + F_4 a_4 + F_5 (L + L_2)}{L}$$

$$\sum M_B = -F_1 (L+L_1) - F_2 b_2 - F_3 b_3 - F_4 b_4 + F_5 L_2 + A \cdot L = 0$$

$$A = \frac{F_1 (L + L_1) + F_2 b_2 + F_3 b_3 + F_4 b_4 - F_5 L_2}{L}$$

Esfuerzos de corte:

$$Q_{1\text{der}} = -F_1 = Q_{A\text{izq}}$$

$$Q_{A\text{der}} = -F_1 + A = Q_{A\text{izq}} + A = Q_{2\text{izq}}$$

$$Q_{2\text{der}} = -F_1 + A - F_2 = Q_{2\text{izq}} - F_2 = Q_{3\text{izq}}$$

$$Q_{3\text{der}} = -F_1 + A - F_2 - F_3 = Q_{3\text{izq}} - F_3 = Q_{4\text{izq}}$$

$$Q_{4\text{der}} = -F_1 + A - F_2 - F_3 - F_4 = Q_{4\text{izq}} - F_4 = Q_{B\text{izq}}$$

$$Q_{B\text{der}} = -F_1 + A - F_2 - F_3 - F_4 + B = Q_{B\text{izq}} + B = Q_{5\text{izq}} = -F_5$$

La última expresión nos muestra que los esfuerzos internos, en este caso $Q_{B\text{der}} = Q_{5\text{izq}} = -F_5$, se pueden obtener tanto con las fuerzas situadas a la izquierda de la sección como con las de la derecha cambiándoles el signo propio, tal como expresan las definiciones y signos de esfuerzos internos, apartado 6.2.- Además, recalquemos que *si al esfuerzo de corte inmediatamente a la izquierda de una fuerza le sumamos algebraicamente el valor de ésta, se obtiene el esfuerzo de corte inmediatamente a su derecha.*-

Momentos flectores:

$$\begin{aligned} +\lrcorner \quad M_1 &= 0 \\ M_A &= -F_1 \cdot L_1 \\ M_2 &= -F_1 (L_1 + a_2) + A \cdot a_2 \\ M_3 &= -F_1 (L_1 + a_3) + A \cdot a_3 - F_2 (a_3 - a_2) \\ M_4 &= B \cdot b_4 - F_5 (L_2 + b_4) \\ M_B &= -F_5 \cdot L_2 \\ M_5 &= 0 \end{aligned}$$

6.3.4.- VIGA GERBER RECTILÍNEA.-

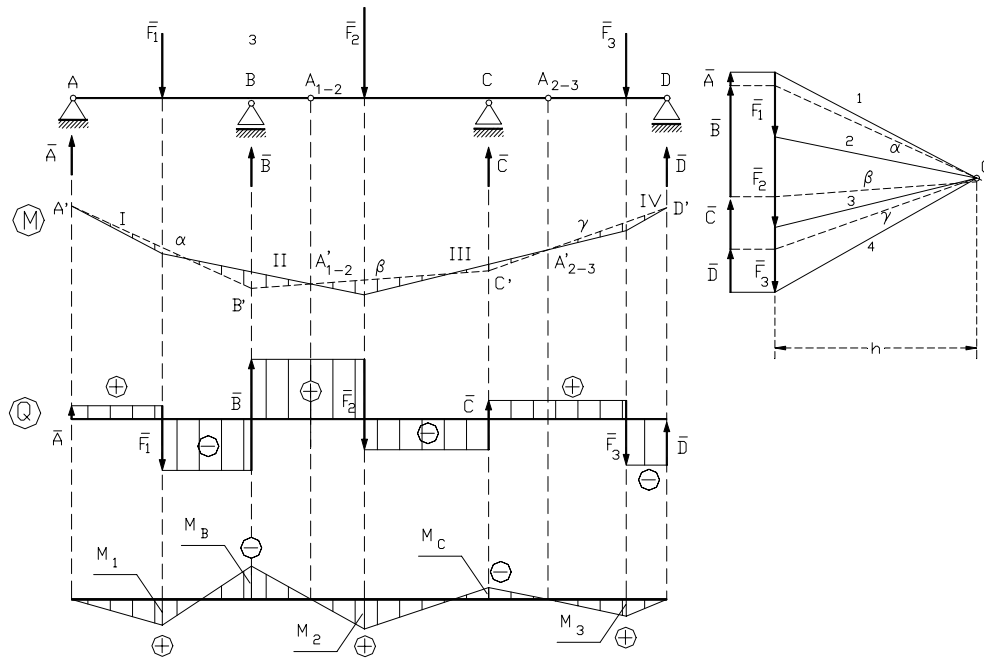


Fig. 6.11

Sea la figura 6.11. que representa una viga articulada o Gerber con tres cargas concentradas.- Construimos el polígono de fuerzas y con polo O cualquiera construimos el funicular de las fuerzas activas I-II-III-IV demarcado con trazo lleno.- Si se recuerda lo visto en el apartado 3.2.1.4 , el funicular de las fuerzas reactivas intercepta al lado IV en D' y al III en A'_{2-3} determinando el lado γ que intercepta la vertical de C en C'; quiebra en C' y corta al lado II en A'_{1-2} los que definen el lado β que, a su vez, intercepta la vertical de B en B' ; quebrando en B' determina con A' el lado α .-

La poligonal α - β - γ forma el funicular de las reacciones y sus lados constituyen las líneas de cierre correspondientes a cada uno de los tramos entre apoyos.- El funicular I-II-III-IV de las fuerzas activas referido al de las fuerzas reactivas α - β - γ determina el diagrama de momentos flectores en la escala

$$h(\text{cm}) \times \delta m / 1 \text{ cm} \times \epsilon \text{ kg} / 1 \text{ cm}$$

Para horizontalizar este diagrama se puede recurrir a un nuevo funicular de la totalidad de las fuerzas exteriores, activas y reactivas, tomadas en el orden que se presentan en la viga recorriéndola de izquierda a derecha con polo en la normal a las fuerzas pasante por el origen de la primera fuerza de la izquierda.- **Más práctico resulta calcular analíticamente las reacciones en los apoyos y el momento flector en éstos y en los puntos de aplicación de las cargas efectuando luego su representación gráfica sobre una recta horizontal de referencia.-**

6.4.- VIGAS CON CARGAS DISTRIBUIDAS.-

6.4.1.- RELACIONES ENTRE CARGA, ESFUERZO DE CORTE Y MOMENTO FLECTOR.-

Consideremos y aislemos un tramo dx de la viga de la figura 6.12.; sobre ella actúa una carga repartida cuya intensidad p varía en forma continua en función de la abscisa x de la sección considerada, es decir que:

$$p_x = f(x)$$



En tanto no cambie la función $p_x = f(x)$ o no actúe una fuerza o par concentrados, el esfuerzo cortante Q y el momento flector M varían también en forma continua con la posición x de la sección:

$$Q_x = f_1(x) \quad M_x = f_2(x)$$

La presencia de un par concentrado interrumpe sólo la continuidad de la función M , no la de Q .

Las tres variables p , Q y M , están ligadas por las relaciones que deduciremos a continuación.- Supongamos conocidos los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores ; sean Q y M los esfuerzos internos en una sección transversal $s-s$ de abscisa x ; $Q+dQ$ y $M+dM$ los esfuerzos internos en una sección $s'-s'$ ubicada a una distancia dx de $s-s$; $dP = p \cdot dx$ la carga que actúa sobre el tramo infinitésimo dx .- Este elemento se encuentra en equilibrio bajo la acción de la carga $dP = p \cdot dx$ y los esfuerzos internos: Q y M en las cara $s-s$; $Q+dQ$ y $M+dM$ en la cara $s'-s'$.- Por lo tanto:

$$\sum Y = Q - p \cdot dx - Q - dQ = 0$$

Simplificando queda:

$$dQ = - p \cdot dx$$

Ecuación que integrada por una parte y ordenada por otra, establece que:

$$Q = - \int p \cdot dx + C_1 \quad (1)$$

$$p = - \frac{dQ}{dx} \quad (2)$$

Obsérvese que en la (2) la intensidad de carga y la derivada del esfuerzo de corte tienen distintos signos: esto es debido a que la primera se ha tomado con el sentido correspondiente al peso de los cuerpos (hacia abajo), y el segundo con el sentido positivo que se ha convenido (hacia arriba).-

Si se toma momentos respecto al baricentro de $s'-s'$ considerando positivos los momentos horarios:

$$+\circlearrowleft \sum M_s = M + Q \cdot dx - p \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M - dM = 0$$

Simplificando y despreciando infinitésimos de segundo orden, se obtiene:

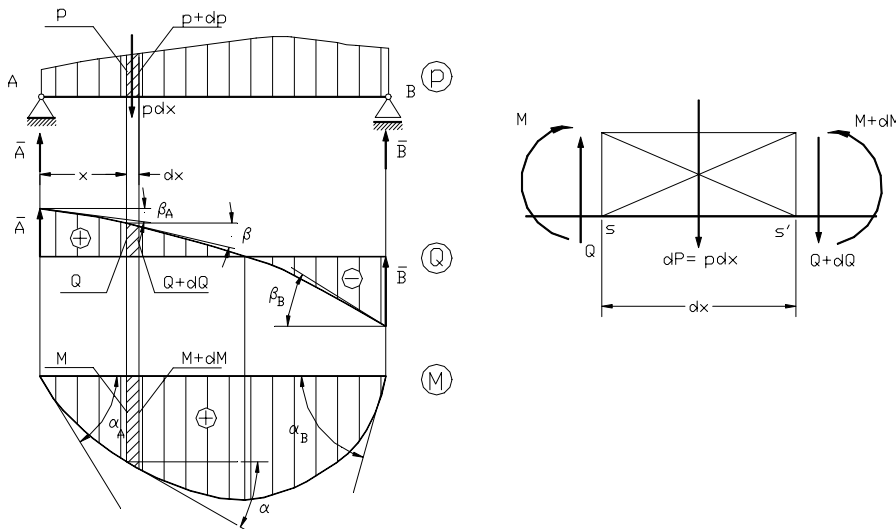


Fig. 6.12



$$dM = Q dx \quad \therefore$$

$$M = \int Q dx + C_2 \quad (3)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (4)$$

Derivando la (4) y sustituyendo por la (2) :

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -p \quad (5)$$

Estas expresiones nos dicen que, en puntos del eje de la viga donde p , Q , y M varían según funciones continuas, **la derivada del esfuerzo cortante es igual a la intensidad de carga con signo cambiado, y la derivada del momento flector es igual al esfuerzo cortante.- Inversamente, el esfuerzo de corte es la integral de la intensidad de carga y el momento flector la integral del esfuerzo cortante.-** Por lo tanto las expresiones anteriores permiten, conocida la función que define uno de los diagramas, establecer por integración o derivación, las otras.-

De las expresiones anteriores se obtienen las siguientes conclusiones:

- De las ecuaciones (1) y (3) **se deduce que en los tramos descargados ($p = 0$) Q es constante y M varía linealmente ; en los tramos sometidos a cargas distribuidas de intensidad constante, ($p = \text{cte.}$), Q y M varían según leyes de primero y segundo grado, respectivamente ; de segundo y tercer grado si $p = f(x)$ varía linealmente, y así sucesivamente.-**
- En casos muy particulares de carga (se verá uno en el apartado 6.6) el esfuerzo de corte puede ser nulo en una longitud finita de un tramo de viga; en este supuesto, $Q = 0$, por la (3) resulta $M = C_2$, y recíprocamente, si M es constante en un tramo resulta $Q = 0$ por la (4).- **Sin embargo lo general es que el esfuerzo cortante sea distinto de 0 ($Q \neq 0$), pudiendo anularse en una sección particular de la viga pero no en un tramo de longitud finita ; entonces, por la (3), M existe y es variable de donde se deduce que generalmente el esfuerzo de corte y el momento flector se presentan acompañados.-** En este caso, la **solicitud de corte puro (es decir una sollicitación que origine esfuerzo cortante distinto de cero con momento flector nulo) sólo es posible en secciones aisladas de la viga** (los apoyos por ejemplo en el caso de la viga simplemente apoyada).-
- Sin considerar los casos particulares de carga mencionados en b), de la ecuación (4) se concluye que **en aquellas secciones para las cuales, al crecer la abscisa x , se anula el esfuerzo cortante ($Q = 0$) pasando de un valor positivo a uno negativo (caso de la figura 6.12.), el momento flector será máximo** ya que se anula la derivada primera de la función momento y su derivada segunda es negativa ($dQ < 0 ; dx > 0$; luego su cociente (5) resultará negativo $p < 0$).- **Si al crecer x el esfuerzo de corte pasa de un valor negativo a uno positivo, el momento flector pasa por un mínimo** ($dQ > 0 ; dx > 0$ luego $p > 0$) ya que su derivada segunda es positiva.-
- Si no actúan cargas concentradas (como así también en los tramos comprendidos entre dos de ellas si las hubiese) y es conocida $p_x = f(x)$, Q y M se pueden calcular mediante la (1) y la (3) donde las constantes C_1 y C_2 se determinan por las condiciones extremas.- **Usualmente se calculan Q y M para secciones determinadas, o las funciones $M_x = f_2(x)$ y $Q_x = f_1(x)$ para una sección genérica de abscisa x , utilizando las definiciones dadas en el apartado 6.2.-**
- Si en un punto de abscisa x se traza una tangente al diagrama de momentos flectores formará un ángulo α con la paralela al eje de referencia, figura 6.12.; por la (4) se tendrá que su tangente trigonométrica valdrá: **$\text{tang } \alpha = \frac{dM}{dx} = Q$** .- Esto, expresado en palabras dice que **la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica en un punto al diagrama de momentos con la paralela al eje de referencia, es igual al esfuerzo de corte en ese punto.-**

En particular para el caso de una viga simplemente apoyada cargada en toda su longitud, como la de la figura 6.12., los ángulos que forman las tangentes extremas al diagrama de momentos quedan dados por las siguientes expresiones:

$$\text{tang } \alpha_A = Q_A = A$$

$$\text{tang } \alpha_B = Q_B = -B$$



f) Cabe un razonamiento análogo para el diagrama de esfuerzos cortantes.- Por la (2) se tiene:

$$\text{tang } \beta = \frac{dQ}{dx} = -p$$

Que dice que la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica en un punto al diagrama de esfuerzos tangenciales con la paralela al eje de referencia, es igual a la intensidad de carga.-

Y en particular para los apoyos:

$$\text{tang } \beta_A = \left(\frac{dQ}{dx} \right)_{x=x_A} = -p_A$$

$$\text{tang } \beta_B = \left(\frac{dQ}{dx} \right)_{x=x_B} = -p_B$$

g) *La fórmula (4) es válida en cualquier punto donde Q tenga un único valor bien definido, es decir en puntos donde no estén aplicadas fuerza concentradas.-*

6.4.2.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORME.-

Para tener una visión objetiva de los diagramas resolvamos en primer término en forma gráfica (figura 6.13).- Construimos el funicular de la resultante $P = p \cdot l$, lados I y II.- Sabemos (apartado 2.10.4.) que la funicular de la carga distribuida p es un curva cuyas tangentes extremas, en A_0 y B_0 , son los lados del funicular de su resultante I y II.- Para trazar tangentes intermedias aplicamos métodos vistos en el apartado mencionado: consideremos a P como divisoria de cargas quedando el diagrama de cargas dividido en dos diagramas parciales iguales; Bajamos la vertical del baricentro de cada uno de ellos y donde interceptan a los lados I y II, puntos H y K , tendremos dos puntos de la tangente a la curva funicular en correspondencia con la divisoria de carga, C_0 .- Dado que el diagrama de carga es un rectángulo los baricentros de los diagramas parciales se obtienen dividiendo en dos las respectivas longitudes cargadas.-

Alternativamente podemos determinar directamente los puntos H y K dividiendo los segmentos $A_0 C_1$ y $B_0 C_1$ en dos partes iguales.- Este proceso de dividir en dos partes iguales los segmentos de tangentes extremas a un arco de la curva se puede proseguir hasta obtener el número de tangentes deseado, siempre que la carga sea rectangular.- En el gráfico se ha trazado una tangente intermedia en cada uno de los arcos $A_0 C_0$ y $C_0 B_0$ de la curva funicular.- Recordemos que siendo $p = \text{cte.}$ el diagrama de momentos será una parábola cuadrática y, por una propiedad geométrica de esta curva sus tangentes extremas se interceptan en un punto C_1 ubicado en la ordenada correspondiente a la mitad de la cuerda.-

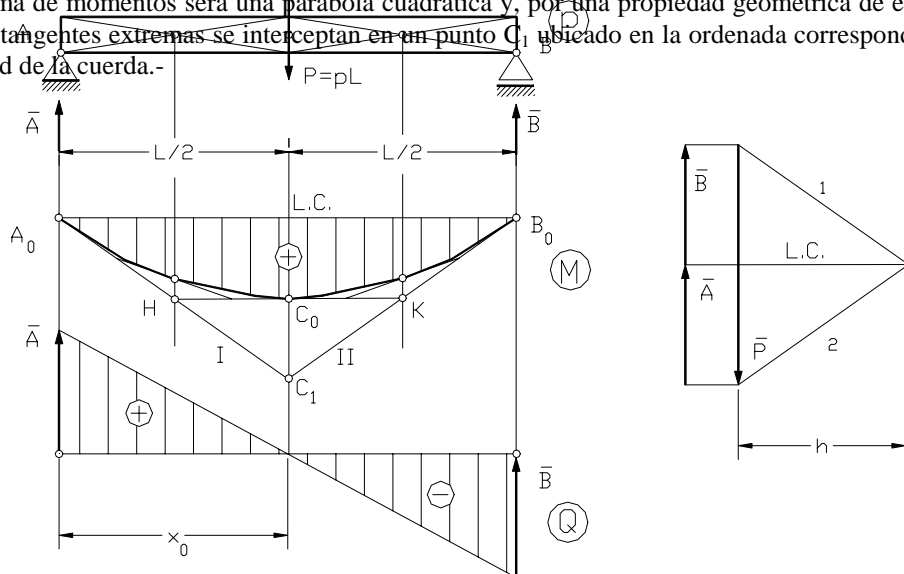


Fig. 6.13



Observemos que la tangente HK en C_0 es paralela al eje de referencia y por ello el ángulo α_{C_0} es igual a cero por lo cual : $\text{tang } \alpha_{C_0} = Q_{C_0} = 0$; y por lo tanto $M_{C_0} = M_{\text{máx}}$.-

Por ser $p = \text{cte.}$ la (1) del apartado 6.4.1. impone que el diagrama de corte sea lineal y sólo se necesita determinar dos de sus puntos.- En correspondencia con el apoyo izquierdo será $Q_A = A$ y en el derecho $Q_B = -B$; unimos con una recta y se tendrá el diagrama de esfuerzos de corte.- Se observa que por la simetría de la construcción el esfuerzo de corte se anula en el punto medio de la luz de la viga en correspondencia con $M_{\text{máx}}$.-

Otro procedimiento para el trazado de la parábola de segundo grado es el indicado en la figura 6.14. cuyos fundamentos se sintetizan a continuación.- Consideremos determinadas las tangentes extremas $A_0 C_1$ y $B_0 C_1$ y deseamos trazar una tangente intermedia en correspondencia con la sección de abscisa "a".- Por esta sección trazamos la divisoria del diagrama de cargas; determinamos los baricentros de los diagramas parciales e interceptamos las tangentes extremas en H y K, quedando determinada la tangente intermedia en correspondencia con la sección de abscisa "a", punto D.- Observemos que H tiene por abscisa $a/2$ mitad de la de D.- Es simple demostrar geoméricamente la relación:

$$\frac{a}{b} = \frac{A_0 H}{H C_1} = \frac{C_1 K}{K B_0}$$

Esta relación permite determinar el extremo K de una tangente intermedia cuando se ha fijado su otro extremo.- El procedimiento constructivo se deduce de la figura.-

Efectuemos la determinación analítica de los esfuerzos internos y de las tangentes extremas a los diagramas M y Q, figura 6.15.-

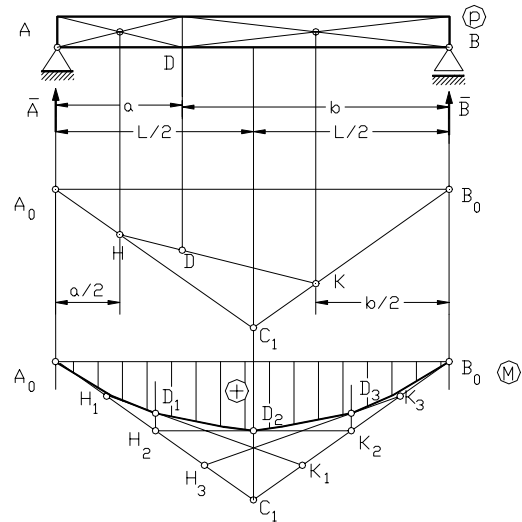
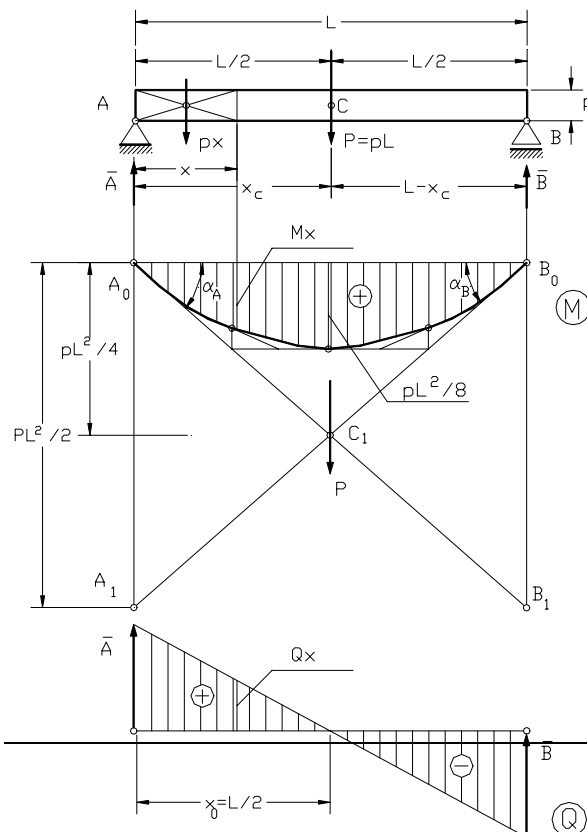


Fig. 6.14



Las reacciones valdrán:

$$A = B = \frac{1}{2} pL = \frac{1}{2} P$$

Aplicando las definiciones de esfuerzo de corte y de momento flector en correspondencia con la sección de abscisa x , se tiene:

$$Q_x = A - p \cdot x = \frac{1}{2} pL - p \cdot x$$

$$M_x = A \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x - \frac{1}{2} p x^2$$

Por integración se llega a igual resultado:

$$p_x = p = \text{cte.}$$

$$Q_x = \int p \cdot dx + C_1 = -p \cdot x + C_1$$

Para establecer el valor de la constante de integración apliquemos la expresión obtenida al punto A de abscisa $x=0$:

$$(Q_x)_{x=0} = Q_A = C_1 \quad \therefore \quad C_1 = Q_A = A$$

$$Q_x = -p \cdot x + \frac{1}{2} p \cdot L$$

Fig. 6.15



Que nos da la ley de variación de los esfuerzos de corte.- Para los momento flectores se tiene:

$$M_X = \int Q_X dx + C_2 = -\frac{1}{2} p \cdot x^2 + \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x + C_2$$

$$(M_X)_{x=0} = M_A = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 0$$

$$M_X = -\frac{1}{2} p \cdot x^2 + \frac{1}{2} p \cdot L \cdot x = \frac{1}{2} p x (L-x)$$

que constituye la ley de variación de los momentos flectores.-

Se ha visto que en la sección para la cual el esfuerzo de corte se anula, el momento flector se hace máximo, apartado 6.4.1.c).- Llamando x_0 la abscisa de esta sección se tiene:

$$Q_{x_0} = \frac{1}{2} p \cdot L - p \cdot x_0 = 0 \quad \therefore \quad x_0 = \frac{1}{2} L$$

Lo que nos confirma lo que ya habíamos obtenido por otras vías, y vale:

$$M_{x_0} = M_{\text{máx}} = -\frac{pL^2}{8} + \frac{pL^2}{4} = \frac{pL^2}{8}$$

Para el trazado de los diagramas determinemos en primer término los segmentos $B_0 B_1$ y $A_0 A_1$ que permiten el trazado de las tangentes extremas, llamadas cruzadas de Ritter, figura 6.15.-

Es evidente, por condición de equilibrio ($\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$) y por tratarse de una viga simplemente apoyada, que si se toma momento respecto al punto de aplicación de una de las reacciones, el momento de la otra reacción será igual y opuesto al momento de la resultante de las fuerzas activas.- En el caso de fuerzas paralelas (cargas verticales y apoyo móvil horizontal, figura 6.15) el segmento $B_0 B_1$ representa, en valor absoluto, tanto el momento de la resultante de las fuerzas activas como el de la reacción \bar{A} respecto al punto B.- Gráficamente, el funicular de \bar{P} de lados $A_0 B_1$ y $A_1 B_0$ y el funicular de \bar{A} de lados $A_0 B_0$ y $A_0 B_1$ interceptan en B_0 y B_1 la vertical pasante por el apoyo derecho B determinando el segmento $B_0 B_1$; este segmento representa el valor absoluto del momento de P y de A respecto al apoyo B, apartado 2.8.4.- Igual análisis cabe para el segmento $A_0 A_1$ sobre la vertical de la reacción en el apoyo izquierdo A.- De lo expuesto:

$$B_0 B_1 = L \cdot \tan \alpha_A = L \cdot Q_A = A \cdot L = P (L-x_C)$$

$$A_0 A_1 = L \cdot \tan \alpha_B = L \cdot Q_B = B \cdot L = P x_C$$

Estas expresiones, en valor absoluto, son generales para cualquier diagrama de carga en vigas simples con cargas verticales y apoyo móvil horizontal, en donde A_0 y B_0 son los puntos de tangencia en los extremos de la curva representativa del diagrama de momentos flectores; A_1 y B_1 son las intersecciones de las tangentes extremas con la vertical del otro apoyo; L la luz de la viga; A y B las reacciones de apoyo; P la resultante de la carga distribuida; x_C la abscisa del baricentro del diagrama de carga y $P(L-x_C)$ y Px_C los momentos de P respecto a los apoyos B y A.-

Resulta cómodo tomar estos últimos (los momentos de P respecto a los apoyos A y B) y llevarlos a partir de los puntos de tangencia B_0 y A_0 en el sentido de P.- Los puntos B_1 y A_1 así determinados permiten el trazado de las tangentes extremas, $A_0 B_1$ y $B_0 A_1$, al diagrama de momentos flectores; obtenidas éstas es posible trazar el número de tangentes intermedias que se desee por los procedimientos ya descritos.-

En el caso de carga rectangular, estas expresiones se simplifican:

$$p = \text{cte} \quad ; \quad x_C = \frac{1}{2} L \quad ; \quad P = pL \quad ; \quad A = B = \frac{1}{2} pL$$

$$B_0 B_1 = A_0 A_1 = A \cdot L = B \cdot L = \frac{1}{2} P L = \frac{1}{2} p L^2$$



La distancia de C_1 , intersección de tangentes extremas, a la recta de referencia A_0B_0 en su punto medio, será :

$$\frac{1}{2} B_0 B_1 = \frac{1}{2} A_0 A_1 = \frac{1}{4} p.L^2$$

Valor doble del máximo momento flector.- Aplicando estos resultados el procedimiento para el trazado grafo-analítico consiste en calcular el $M_{m\acute{a}x} = p.L^2 / 8$ y se tiene la flecha de la parábola que se lleva en la mitad de la luz de la viga.- Se duplica este valor, $p.L^2 / 4$ y se obtiene la intersección C_1 de las tangentes extremas ; si unimos C_1 con A_0 y B_0 quedan trazadas dichas tangentes.- Luego se puede completar la parábola por alguno de los métodos explicados.- Esto es válido sólo para el caso de carga rectangular.-

6.4.3.- VIGAS EMPOTRADAS.- CARGA RECTANGULAR.- (Figura 6.16).-

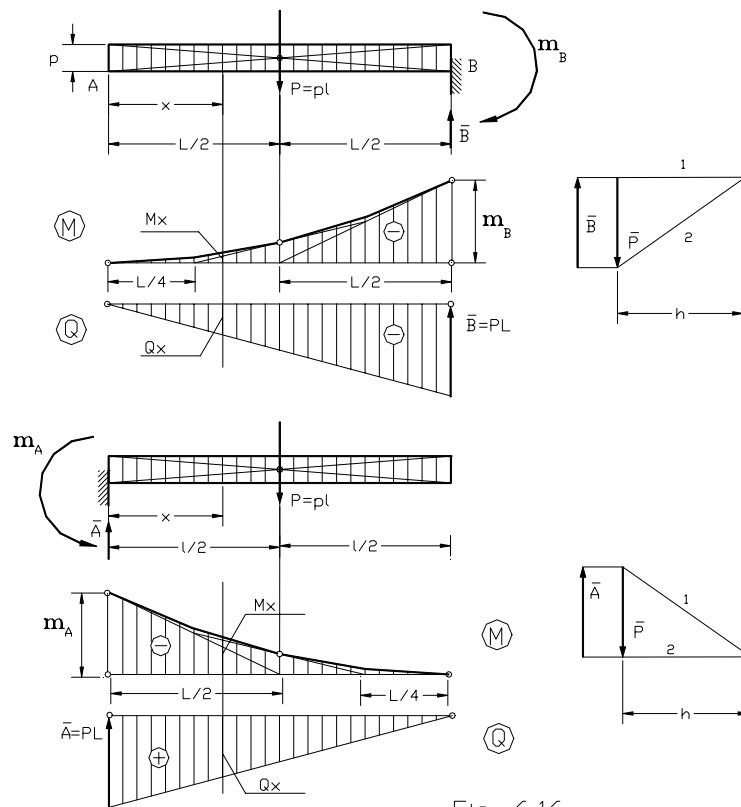


Fig. 6.16

Viga libre en A y empotrada en B

$$\sum Y = - p.L + B = 0 \quad \therefore \quad B = p.L$$

$$\sum M_B = - \frac{1}{2} pL^2 + m_B = 0 \quad \therefore \quad m_B = \frac{1}{2} pL^2$$

$$Q_x = - p.x$$

Viga empotrada en A y libre en B

$$\sum Y = A - p.L = 0 \quad \therefore \quad A = p.L$$

$$\sum M_A = -m_A + \frac{1}{2} pL^2 = 0 \quad \therefore \quad m_A = \frac{1}{2} pL^2$$

$$Q_x = A - px = p(L - x)$$



$$M_X = - \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

$$M_X = - p (L-x) \frac{1}{2} (L-x) = - \frac{1}{2} p (L-x)^2$$

$$Q_A = 0 \quad ; \quad Q_B = - p \cdot L = - B$$

$$Q_A = A = p \cdot L \quad ; \quad Q_B = 0$$

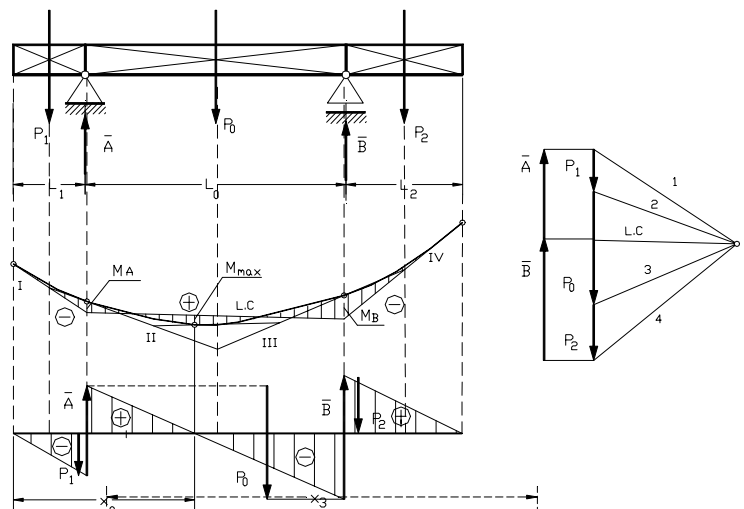
$$M_A = 0 \quad ; \quad M_B = - \frac{1}{2} p \cdot L^2 = - m_B$$

$$M_A = m_A = - \frac{1}{2} p \cdot L^2 \quad ; \quad M_B = 0$$

Los sentidos supuestos en ambos gráficos resultaron correctos.- Obsérvese que para obtener los valores de los esfuerzos internos en puntos particulares, A y B, es indistinto usar las fórmulas genéricas, Q_X y M_X , introduciendo la abscisa correspondiente, o recurrir a la definición del esfuerzo empleando las fuerzas izquierdas o derechas del punto considerado teniendo la precaución de cambiar el signo cuando se utilizan estas últimas.-

6.4.4.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON VOLADIZOS.-

En la figura 6.17., el diagrama de momentos flectores queda definido por la curva funicular referida al primero y último lados del funicular de las resultantes parciales (P_1, P_0, P_2) en los voladizos izquierdo y derecho respectivamente, y a la línea de cierre en el tramo entre apoyos.- Obsérvese que el diagrama de carga se ha dividido en tres diagramas parciales que tienen, como divisorias de cargas, las rectas de acción de fuerzas concentradas, las reacciones A y B en este caso.-



El trazado grafo-analítico se describe a continuación, figura 6.18.-

Las reacciones valen :

$$L = L_1 + L_0 + L_2 = \sum L_i$$

$$\sum M_B = 0 \quad \therefore$$

$$C = \frac{P(\frac{L}{2} - L_1)}{L_0}$$

$$\sum M_C = 0 \quad \therefore$$

$$B = \frac{P(\frac{L}{2} - L_2)}{L_0}$$

a) Voladizo izquierdo:

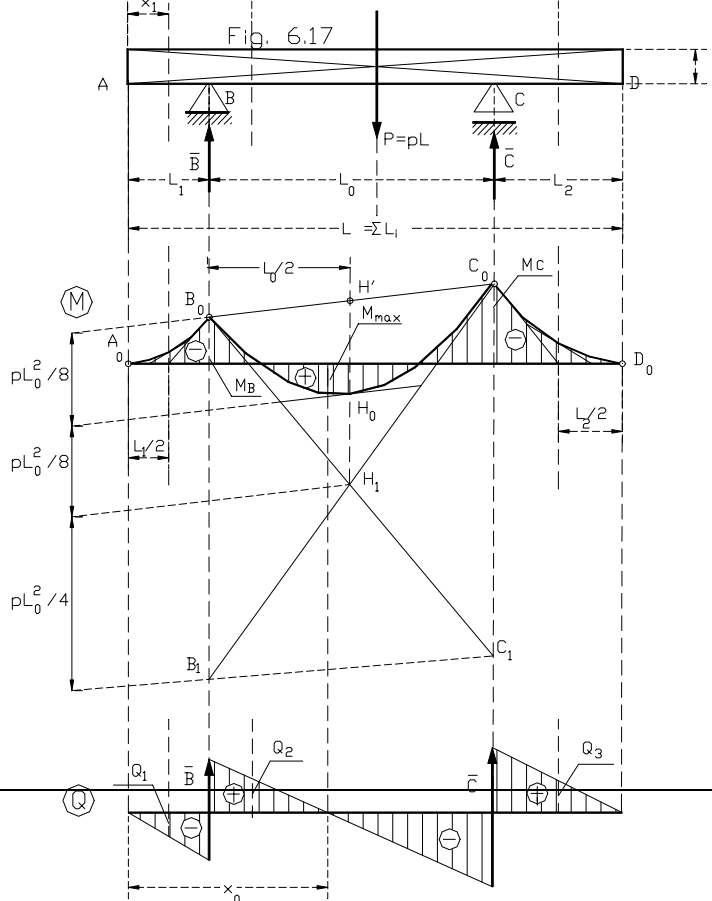


Fig. 6.18



$$Q_A = 0$$

$$M_A = 0$$

$$Q_{X1} = - p \cdot x_1$$

$$M_{X1} = - \frac{1}{2} p \cdot x_1^2$$

$$Q_{Bizq} = - p \cdot L_1$$

$$M_B = - \frac{1}{2} p \cdot L_1^2$$

$$\text{tang } \alpha_A = Q_A = 0$$

b) Tramo entre apoyos:

$$Q_{Bder} = Q_{Bizq} + B \quad ; \quad Q_{X2} = - p \cdot x_2 + B$$

$$Q_{Cizq} = Q_{Bder} - p \cdot L_0 \quad ;$$

$$(Q_{X2})_{X2=X0} = - p x_0 + B = 0 \quad \therefore \quad x_0 = \frac{B}{p}$$

$$M_{X2} = - \frac{1}{2} p x_2^2 + B(x_2 - L_1)$$

$$M_{\max} = M_{X0} = - \frac{1}{2} p x_0^2 + B(x_0 - L_1)$$

c) Voladizo derecho:

$$Q_{Cder} = Q_{Cizq} + C = p \cdot L_2$$

$$Q_{X3} = p(L - x_3)$$

$$Q_D = \text{tang } \alpha_D = 0$$

$$M_C = - \frac{1}{2} p \cdot L_2^2$$

$$M_{X3} = - \frac{1}{2} p(L - x_3)^2$$

$$M_D = 0$$

Parámetros para trazar las tangentes extremas del tramo entre apoyos:

$B_0 B_1 = \frac{1}{2} p \cdot L_0^2$ (momento de la carga actuante en el tramo BC respecto al apoyo B).-

$C_0 C_1 = \frac{1}{2} p \cdot L_2^2$ (momento de la carga actuante en el tramo BC respecto al apoyo C).-

$H'H_0 = \frac{pL_0^2}{8}$ (ordenada máxima de la parábola de segundo grado con extremos en B_0 y C_0).-

Sobre una recta de referencia se llevan a escala los valores calculados de $M_A - M_B - M_C - M_D$ obteniéndose los puntos A_0, B_0, C_0, D_0 .- En los voladizos conocemos las tangentes en los extremos libres ya que $\text{tang } \alpha_A = \text{tang } \alpha_D = 0$; con ellas quedan determinadas también las tangentes en los apoyos ya que se interceptan en la mitad de la longitud del voladizo.- A_0 y B_0, C_0 y D_0 con sus correspondientes tangentes permiten el trazado de las dos parábolas cuadráticas representativas de los momentos flectores en ambos voladizos.-

Luego desde B_0C_0 se “cuelga” la parábola correspondiente a la carga uniforme actuante en el tramo comprendido entre los apoyos; para ello se llevan en la escala de momentos los valores calculados para B_0B_1 y C_0C_1 que permiten el trazado de las tangentes extremas y consecuentemente de la curva de momentos.- Esta construcción está basada en el principio de la independencia de las

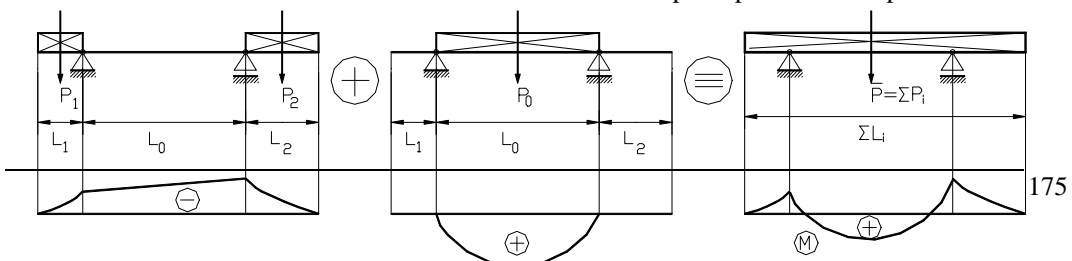


Fig. 6.19



acciones y la superposición de los efectos que se ilustra en la figura 6.19.-

6.4.5.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA PARCIAL.-

En la figura 6.20. se resuelve gráficamente este caso.- La solución analítica no ofrece dificultad.-

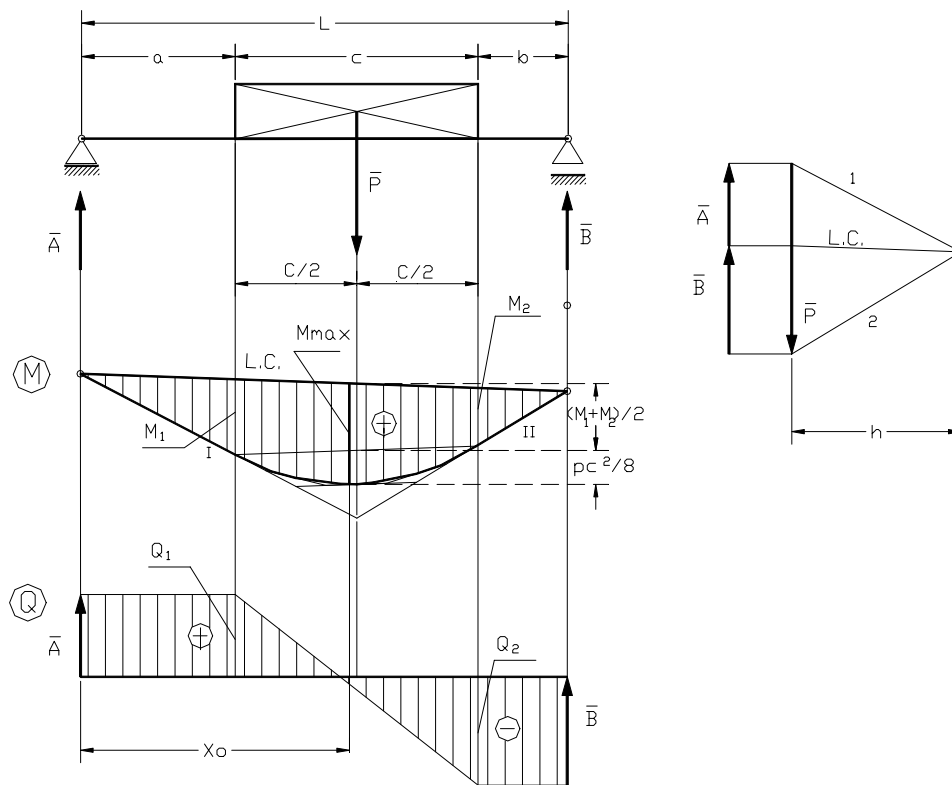


Fig. 6.20

6.4.6.- VIGA GERBER CON CARGA UNIFORME.-

En la figura 6.21. se ha construido el diagrama de momentos flectores en base, en primer término, a la construcción de una única curva funicular para toda la longitud de viga.- El funicular de las reacciones se obtiene determinando las intersecciones de las verticales de los apoyos extremos y articulaciones, con la curva funicular de la carga, apartado 3.2.1.4.- La medición de las ordenadas en correspondencia con los voladizos es imprecisa salvo que se tomen distancias polares pequeñas.-

Es más conveniente trazar una curva funicular para cada uno de los diagramas parciales que resultan al tomar como divisorias de carga las rectas de acción de las reacciones de apoyo ; en el gráfico está indicado el procedimiento seguido para trazar las tres parábolas cuadráticas referidas a un

eje auxiliar horizontal $A_0 D_0$.- Las líneas de cierre se obtienen de igual modo que en el caso anterior.- Recordemos que las curvas funiculares referidas al funicular de las reacciones determina el diagrama de momentos flectores.- El trazado del diagrama de esfuerzos tangenciales como asimismo la resolución analítica no ofrecen novedad.-

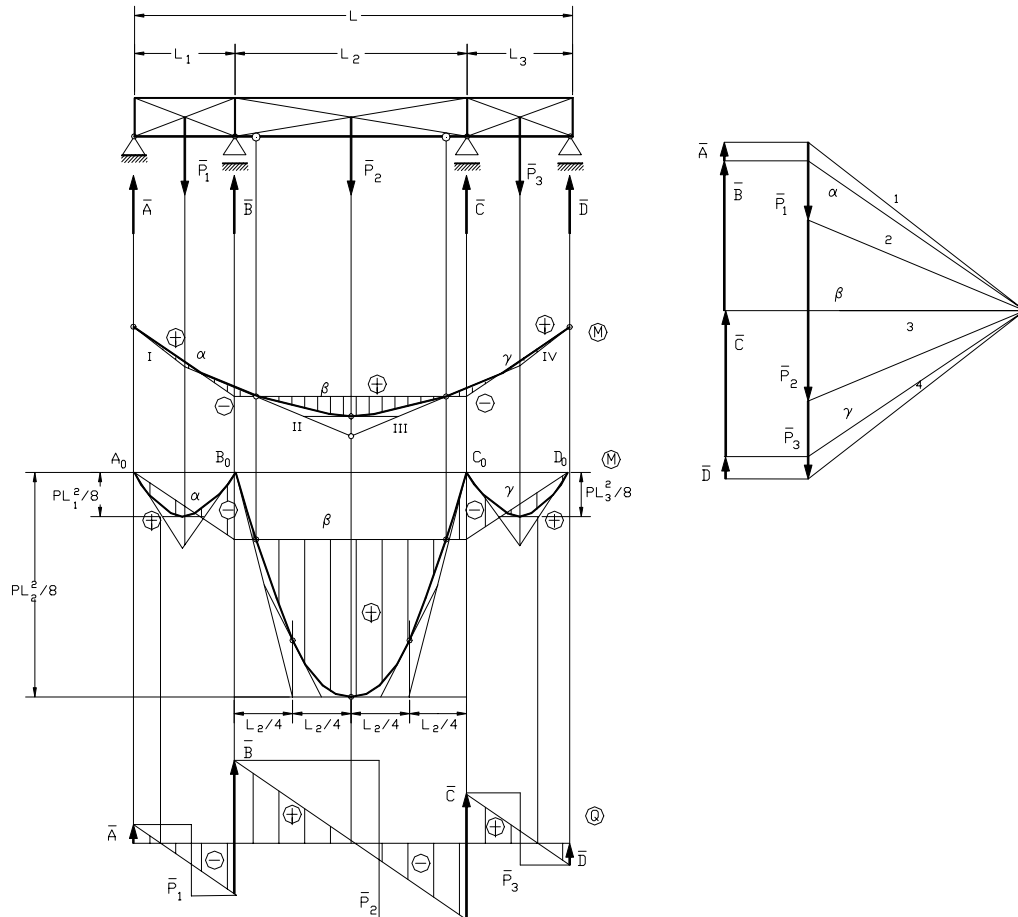


Fig. 6.21

Lo práctico es trazar un esquema gráfico con parábolas separadas para cada tramo; se calculan las reacciones, momentos y esfuerzos cortantes en los apoyos y puntos de aplicación de las cargas estableciendo los máximos y mínimos.- Si se quiere un gráfico a escala se lo hace por el método de puntos y tangentes utilizando los valores analíticos.-

6.4.7.- VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS CON CARGAS DISTRIBUIDAS VARIABLES LINEALMENTE.-

A continuación se trazan los diagramas de momentos flectores y esfuerzos cortantes para cargas con diagrama triangular y trapecial.- Se lo efectúa utilizando la curva funicular de la carga y por el proceso grafo-analítico: sobre el primero nada se agrega a lo expuesto anteriormente; y en cuanto al segundo, se desarrolla la secuencia operativa que a continuación se detalla:

1. Determinación de la resultante de la carga y su posición.-
2. Determinación de las reacciones de vínculo.-
3. Determinación de la ley de variación de la carga: $p_x = f_1(x)$



4. Determinación de la ley de variación del esfuerzo de corte: $Q_x = f_2(x)$.-
5. Determinación de la ley de variación de los momentos flectores: $M_x = f_3(x)$.-
6. Cálculo de x_0 , punto para el cual $(Q_x)_{x=x_0} = 0$.-
7. Cálculo del momento máximo: $M_{m\acute{a}x} = (M_x)_{x=x_0}$.-
8. Determinación de las tangentes extremas.-
9. Trazado de los diagramas.-

6.4.7.1.- Viga con carga triangular, figura 6.22.-

Carga total: $P = \frac{p \cdot L}{2}$

$x_c = \frac{2 \cdot L}{3} = a; b = L - x_c = \frac{L}{3}$

Reacciones:

$A = \frac{P \cdot b}{L} = \frac{P}{3} = \frac{p \cdot L}{6}$

$B = \frac{P \cdot a}{L} = \frac{2}{3}P = \frac{p \cdot L}{3}$

Intensidad de carga:

$p_x = \frac{p \cdot x}{L}$

Carga a la izquierda de x:

$P_x = \frac{1}{2} p_x x = \frac{1}{2} \frac{p x^2}{L}$

$Q_x = A - P_x = \frac{1}{6} p \cdot L - \frac{1}{2} \frac{p x^2}{L}$

$M_x = A \cdot x - P_x \frac{x}{3} =$

$= \frac{1}{6} p \cdot L \cdot x - \frac{1}{6} \frac{p \cdot x^3}{L}$

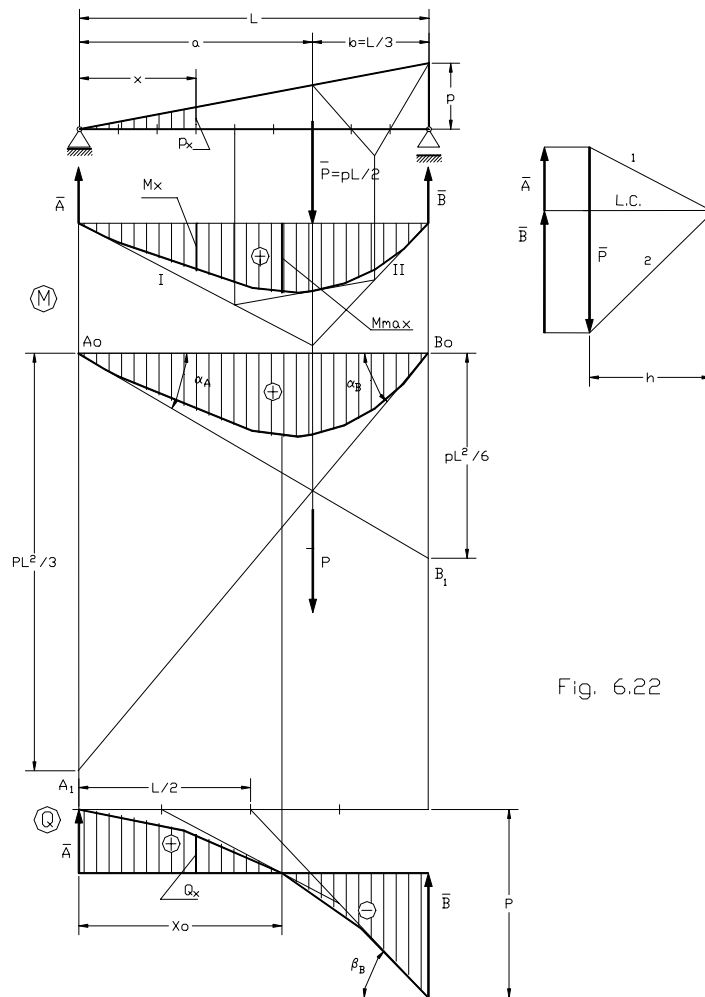


Fig. 6.22

Operando por integración sería:

$$Q_x = - \int p_x dx + C_1 = - \frac{1}{2} \frac{p \cdot x^2}{L} + C_1$$

$$(Q_x)_{x=0} = C_1 = Q_A = A = \frac{1}{6} p \cdot L \quad \therefore \quad Q_x = - \frac{1}{2} \frac{p \cdot x^2}{L} + \frac{1}{6} p \cdot L$$



$$M_x = \int Q_x dx + C_2 = -\frac{1}{6} \frac{p \cdot x^3}{L} + \frac{1}{6} p \cdot L \cdot x + C_2$$

$$(M_x)_{x=0} = C_2 = 0$$

Tangentes extremas:

$$\text{tang } \beta_A = p_A = 0$$

$$B_0 B_1 = P(L-x_C) = \frac{1}{6} p \cdot L^2 = A \cdot L = L \cdot \text{tang } \alpha_A = L \cdot Q_A$$

$$A_0 A_1 = P \cdot x_C = \frac{1}{3} p \cdot L^2 = B \cdot L = L \cdot \text{tang } \alpha_B = L \cdot Q_B$$

Momento máximo:

$$(Q_x)_{x=x_0} = -\frac{1}{2} \frac{p \cdot x_0^2}{L} + \frac{1}{6} p \cdot L = 0 \quad \therefore \quad x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}} \cong 0.58L$$

$$(M_x)_{x=x_0} = M_{\text{máx}} \cong \frac{p \cdot L^2}{16}$$

Es decir que para determinar $M_{\text{máx}}$ se puede sustituir la carga triangular por una rectangular de intensidad igual a la mitad de la intensidad p de la triangular correspondiendo a la abscisa 0,58 de la luz.- Esto no es válido para el momento en el resto de las secciones ni para los esfuerzos de corte.-

6.4.7.2.- Viga con carga trapezoidal , figura 6.23.-

Dividiendo al diagrama trapezoidal en dos triángulos rectángulos, se tiene:

$$P_1 = \frac{1}{2} p_A \cdot L \quad ; \quad P_2 = \frac{1}{2} p_B \cdot L$$

$$A = \frac{P_1 b_1}{L} + \frac{P_2 b_2}{L} = \frac{1}{2} \frac{p_A \cdot L}{L} \cdot \frac{2}{3} L + \frac{1}{2} \frac{p_B \cdot L}{L} \cdot \frac{L}{3}$$

$$A = \frac{L}{6} [2p_A + p_B]$$

$$B = \frac{L}{6} [p_A + 2p_B]$$

$$p_x = p_A + \frac{p_B - p_A}{L} x$$

$$Q_x = A - \frac{p_A x}{2} - \frac{p_x x}{2} = \frac{L}{6} [2p_A + p_B] - p_A x - \frac{p_B - p_A}{2L} x^2$$

$$M_x = A \cdot x - \frac{1}{2} p_A x \cdot \frac{2}{3} x - \frac{1}{2} p_x x \cdot \frac{x}{3}$$

$$M_x = \frac{L}{6} [2p_A + p_B] x - \frac{1}{2} p_A x^2 - \frac{p_B - p_A}{6L} x^3$$



Sustituyendo en la ecuación de Q_x , la variable x por x_0 e igualando a cero se obtiene una ecuación de segundo grado que resuelta da dos raíces : se analiza cual es la real, es decir cual es la que constituye una longitud que cae dentro de la luz de la viga, y se tendrá el valor de x_0 para el cual el esfuerzo de corte es nulo y el momento flector máximo.- Introduciendo x_0 en la expresión de M_x se obtiene el momento máximo que solicita a la viga.-

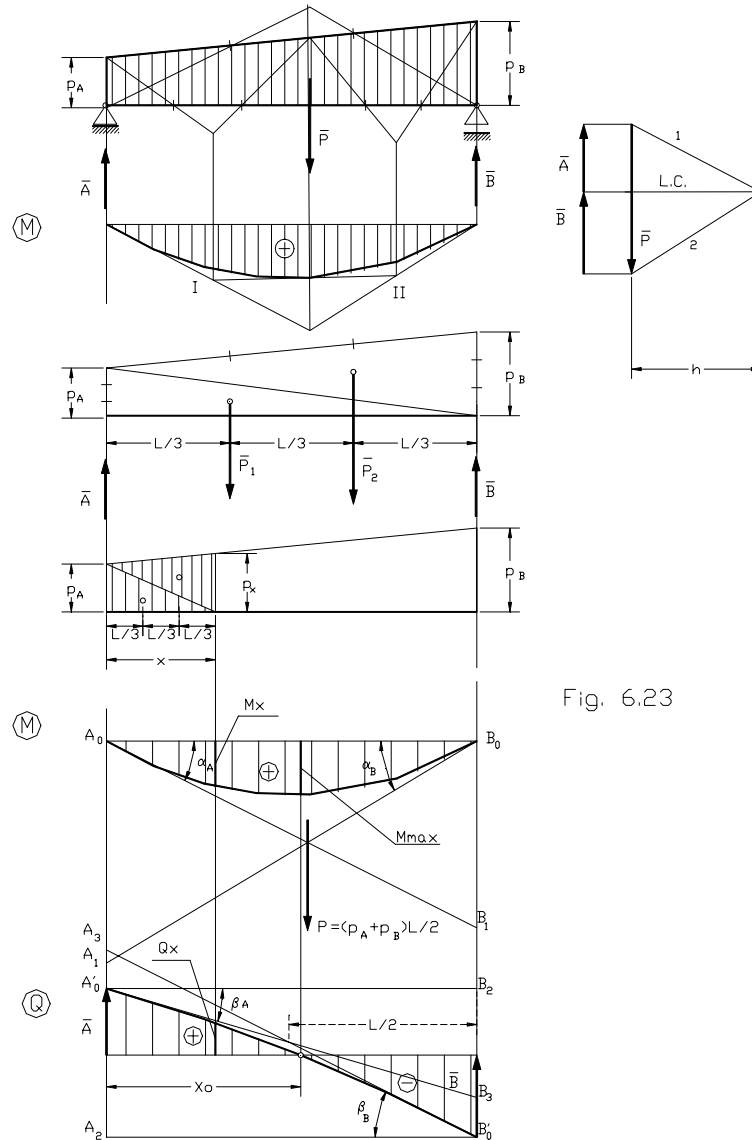


Fig. 6.23

Tangentes extremas: Determinándolas en base a los momentos de P respecto a los apoyos, será:

$$B_0 B_1 = P (L - x_C) = \frac{p_A + p_B}{2} L \frac{2p_A + p_B}{p_A + p_B} \frac{L}{3} = \frac{L^2}{6} [2p_A + p_B]$$

$$A_0 A_1 = P \cdot x_C = \frac{p_A + p_B}{2} L \frac{p_A + 2p_B}{p_A + p_B} \frac{L}{3} = \frac{L^2}{6} [p_A + 2p_B]$$

Debe recordarse además que las tangentes extremas al diagrama M se cortan sobre la recta de acción de la carga resultante P .-

$$B_2 B_3 = L \cdot \tan \beta_A = L \cdot p_A \quad \text{y} \quad A_2 A_3 = L \cdot \tan \beta_B = L \cdot p_B$$



$L.p_A$ expresa una fuerza dirigida en el sentido de p_A ; su módulo se toma en la escala de esfuerzos de corte y se lleva en su dirección y sentido a partir del punto B_2 : su extremo B_3 determina la tangente $A_0'B_3$ en el extremo izquierdo del diagrama Q.- Para la tangente en el extremo derecho se lleva la fuerza $L.p_B$ en sentido opuesto al suyo a partir de A_2 : su extremo A_3 determina la tangente $B_0'A_3$ en el extremo derecho del diagrama.-

Recordemos también que las tangentes extremas al diagrama Q, por ser éste una parábola cuadrática, se interceptan en la mitad de la luz.-

6.5.- VIGA CON CARGAS DISTRIBUIDAS Y CONCENTRADAS.-

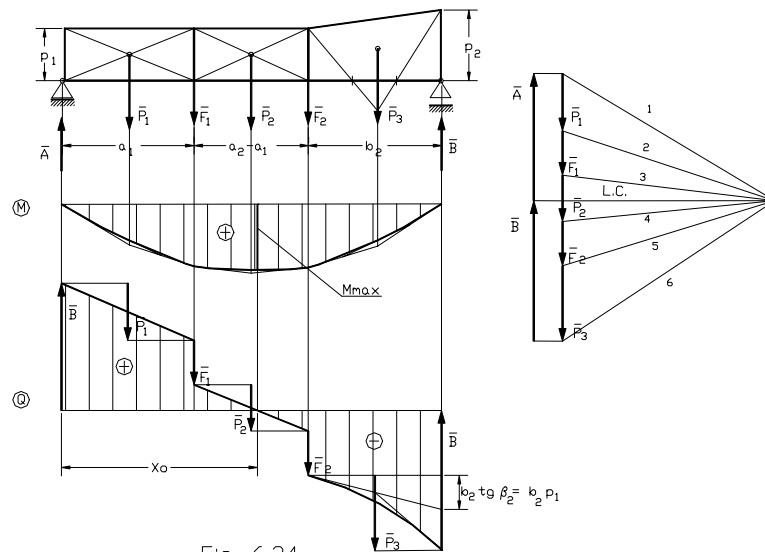


Fig. 6.24

Aplicando lo expuesto anteriormente se ha resuelto gráficamente la viga representada en la figura 6.24.- Observemos que tanto para el diagrama de momentos como para el de esfuerzo de corte, cada uno de los tres tramos determinados por las rectas de acción de las fuerzas concentradas A, F_1 , F_2 , B, presentan leyes de variación distintas; además en correspondencia con F_1 y con F_2 el diagrama M presenta una discontinuidad (tangente doble) y en el diagrama Q el primero y segundo tramos están definidos por dos rectas paralelas y el tercero por una parábola cuadrática.- Analíticamente se calculan los momentos flectores en los puntos en que se presenta alguna particularidad como ser: los puntos de aplicación de una fuerza o par concentrados en él, la variación de intensidad o tipo de carga distribuida, etc. - Se establecen las leyes de variación de Q y de M, y se determinan valor y posición de los momentos y esfuerzo cortantes máximos y mínimos.-

6.6.- VIGA CON CARGA INDIRECTA.-

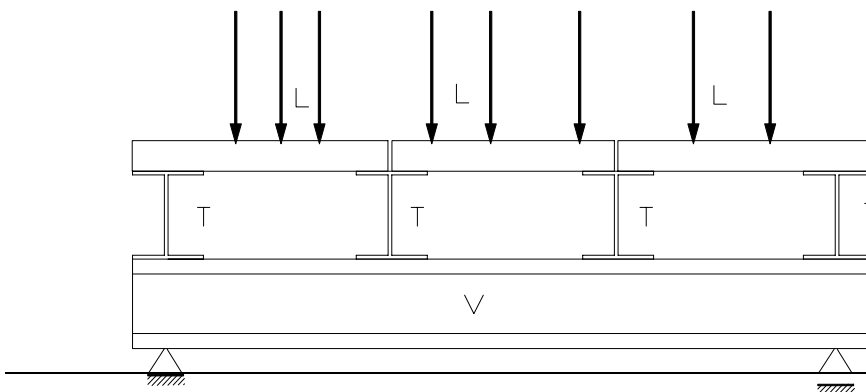


Fig. 6.25



Las vigas están cargadas frecuentemente de modo indirecto: las cargas actúan sobre vigas secundarias que se apoyan sobre la viga principal en puntos determinados, concentrando la transmisión de aquéllas en estos puntos.- En un entrepiso, figura 6.25., es frecuente que las cargas actúen sobre losas (L) apoyadas sobre viguetas transversales o traviesas (T), las que a su vez están sustentadas por las vigas principales (V).- Las cargas que inciden sobre las losas se transmiten por las traviesas a las vigas principales como cargas concentradas.- Otro tanto sucede en puentes donde las cargas recibidas se transmiten por largueros a vigas transversales apoyadas en las vigas principales.- En techos de edificios los pares de las armaduras o cerchas reciben las cargas de la cubierta por intermedio de las correas.-

En la figura 6.26.a) se esquematiza la estructura anterior mediante dos sistemas isostáticos: la parte superior se asimila a una viga Gerber EFGH con las articulaciones F y G en correspondencia con los apoyos intermedios.- Con frecuencia los largueros son continuos constituyendo una viga hiperestática llamada continua.- La carga se transmite por las traviesas (asimiladas a bielas) a una viga simplemente apoyada, AD, designada **viga principal**.- Para establecer los esfuerzos internos que se originan en la viga principal es necesario determinar las acciones que recibe de las viguetas.- Para ello se puede utilizar alguno de los métodos analíticos o gráficos explicados anteriormente; se explica sintéticamente la siguiente secuencia:

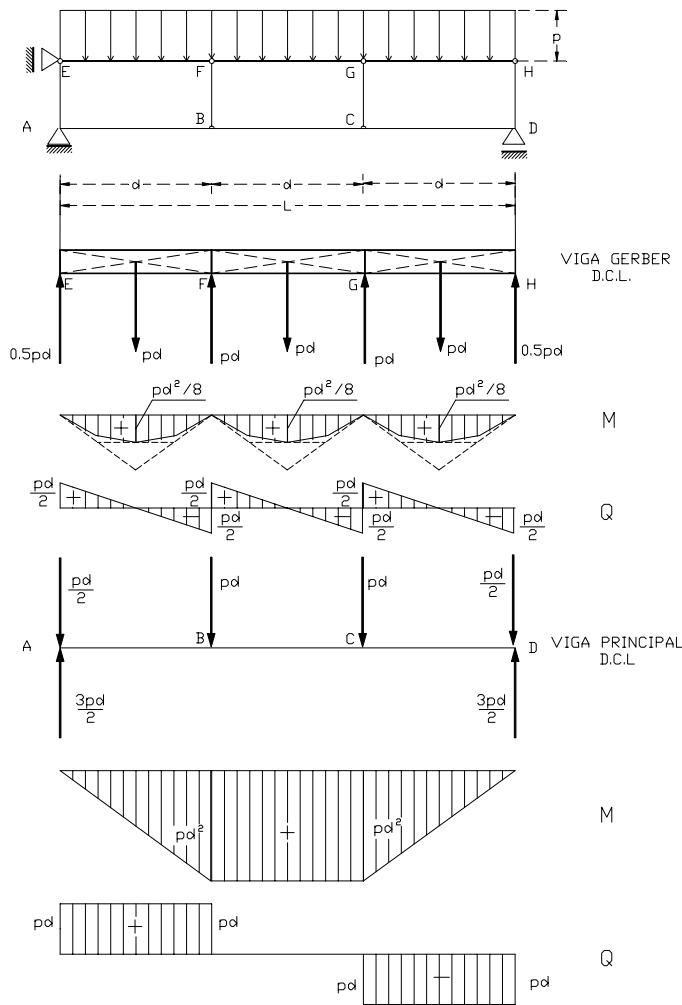


Fig. 6.26a

El diagrama de carga se ha tomado rectangular y se ha dividido en diagramas parciales con rectas divisorias pasantes por las viguetas; se ha designado con la letra "d" la distancia entre éstas y con "L" la luz de la viga principal AD, figura 6.26.a).- Las reacciones en los apoyos de la viga Gerber EFGH se pueden determinar por cualquiera de los procedimientos vistos: resulta práctico tomar cada uno de sus tramos como chapas separadas ya que, por simetría de estructuras y cargas, se obtienen fácilmente de sus D.C.L. :

$$R_E = R_H = \frac{1}{2} p.d \quad ; \quad R_F = R_G = p.d$$

El diagrama de momentos flectores en cada uno de los tramos EF, FG, GH, consiste en una parábola cuadrática de momento máximo igual a $\frac{1}{8} p.d^2$ siendo la ordenada de la intersección de las tangentes extremas igual a $\frac{1}{4} p.d^2$.- Conocidas las reacciones y cargas el trazado del diagrama de corte no ofrece dificultad.-



Las reacciones obtenidas para la viga Gerber, cambiadas de sentido, constituyen las acciones que recibe la viga principal en los puntos A , B , C , D.- Se tiene para ésta:

$$\text{Carga total} \quad p.L = 3 p.d$$

$$\text{Reacciones} \quad R_A = R_D = \frac{3}{2} p.d$$

$$\text{Momentos} \quad M_A = M_D = 0 \quad M_B = M_C = M_{\max} = p.d^2 = \frac{1}{9} p.L^2$$

$$\text{Esfuerzos de corte} \quad Q_A = Q_{B \text{ izq}} = p.d \quad ; \quad Q_B = Q_C = 0 \quad ; \quad Q_C = Q_{D \text{ izq}} = - p.d = -\frac{1}{3} p.L$$

Observemos la siguiente particularidad: las condiciones de simetría que presenta el sistema han hecho que el tramo central de la viga principal comprendido entre B y C presente esfuerzo tangencial nulo y momento flector constante: está solicitado a flexión pura.-

Un análisis similar al efectuado para cuando la carga distribuida es transmitida indirectamente se puede efectuar si las cargas fuesen concentradas.-

De lo expuesto extraemos las siguientes conclusiones que son válidas para otros tipos de cargas aplicadas indirectamente:

- Si no se considera el peso propio de la viga principal, cada uno de los tramos comprendidos entre dos viguetas consecutivas está descargado.- Por lo tanto, siendo $p = 0$, en ellos Q es constante y M varía linealmente, cualquiera sea el tipo y la distribución de la carga sobre las losas o tablero.-
- Los esfuerzos internos en las diversas secciones son distintos de los que existirían si la carga estuviese directamente aplicada, con excepción de los momentos flectores en las secciones ubicadas bajo las viguetas.- En ellas coinciden los momentos flectores causados por cargas que se transmitan directa o indirectamente, con independencia del tipo de carga actuante.-
- En el resto de las secciones los momentos flectores que originan cargas directas son mayores que los producidos por cargas indirectas.- Esto se puede evidenciar construyendo el polígono o curva funicular de las fuerzas activas, cuyas líneas de cierre están dadas por el funicular de las reacciones según se vió en el apartado 3.2.1.4: estos dos funiculares representan los momentos flectores originados por cargas aplicadas directa o indirectamente, figura 6.26.b).- La diferencia (áreas con rayado intenso) corresponden a los diagramas de momentos de los tramos EF, FG, GH de la viga Gerber.-

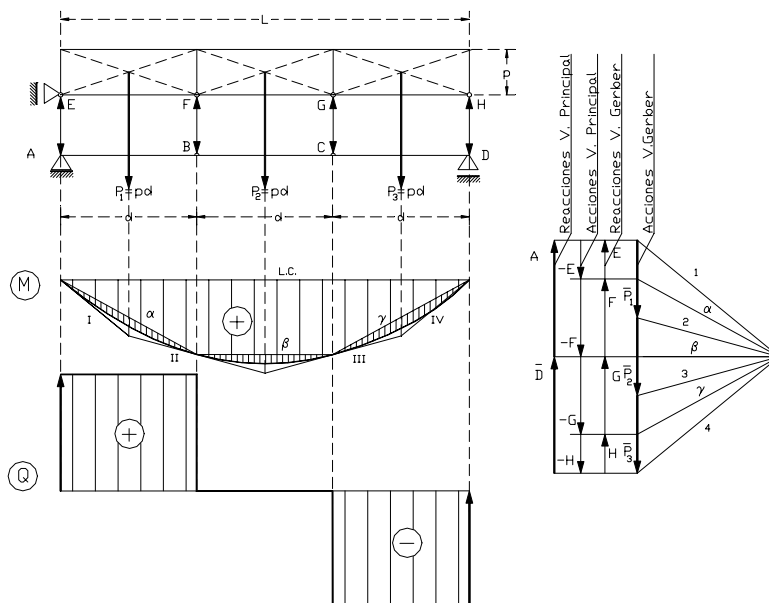


Fig. 6.26b

intenso) corresponden a los diagramas de momentos de los tramos EF, FG, GH de la viga Gerber.-



6.7.- VIGA CARGADA CON PARES.-

Se considera en primer término una viga simple sobre la que actúan pares concentrados en un punto cualquiera situado entre sus apoyos, o en uno de éstos, o simultáneamente en uno y otro de ellos.- A más de los pares no se considera ningún otro tipo de carga: si la hubiese, sus efectos pueden adicionarse por el principio de superposición de los mismos.- En segundo término se desarrolla el caso de una viga Gerber.-

Para trazar los D.C.L. colocando las reacciones con sus sentidos correctos, téngase presente que tratándose de una viga simple cargada en la forma indicada, las ecuaciones de equilibrio de momentos respecto a los apoyos determinan que las reacciones en éstos sean iguales y de sentidos opuestos, formando una cupla que equilibre al par actuante o a su suma algebraica si fuesen más de uno.-

Sea, figura 6.27., un par aplicado en una sección intermedia de una viga simplemente apoyada siendo “a” y “b” sus distancias a los apoyos.- Se tiene:

$$+\curvearrowleft \sum M_A = m - B.L = 0 \quad \therefore B = m / L$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = - A.L + m = 0 \quad \therefore A = m / L$$

$$+\uparrow \sum Y = - A + B = - m / L + m / L = 0$$

$$M_{S_{izq}} = - A.a \quad ; \quad M_{S_{der}} = - A.a + m = B.b$$

$$M_{x_1} = - A.x_1 \quad ; \quad Q_x = Q_{x_1} = Q_{x_2} = - A = cte.$$

$$M_{x_2} = B(L - x_2) \quad ; \quad M_A = M_B = 0$$

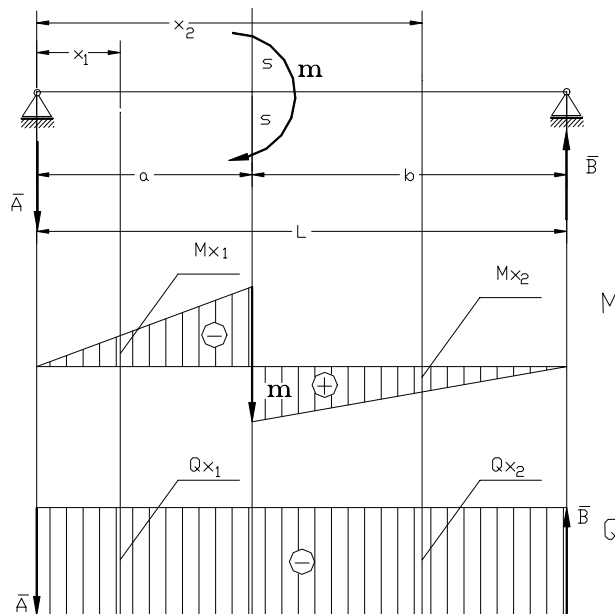


Fig. 6.27



Sea, figura 6.28., el par aplicado en uno de los apoyos:

$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 = m_B - B.L \quad \therefore B = m_B / L$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = 0 = -A.L + m_B \quad \therefore A = m_B / L$$

$$+\uparrow \sum Y = -A + B = -m_B / L + m_B / L = 0$$

$$Q_x = -A = Q_{Biq} = -B = \text{cte.}$$

$$M_x = -A.x = -m_B \frac{x}{L}$$

$$M_A = 0 \quad ; \quad M_{Biq} = AL = -m_B$$

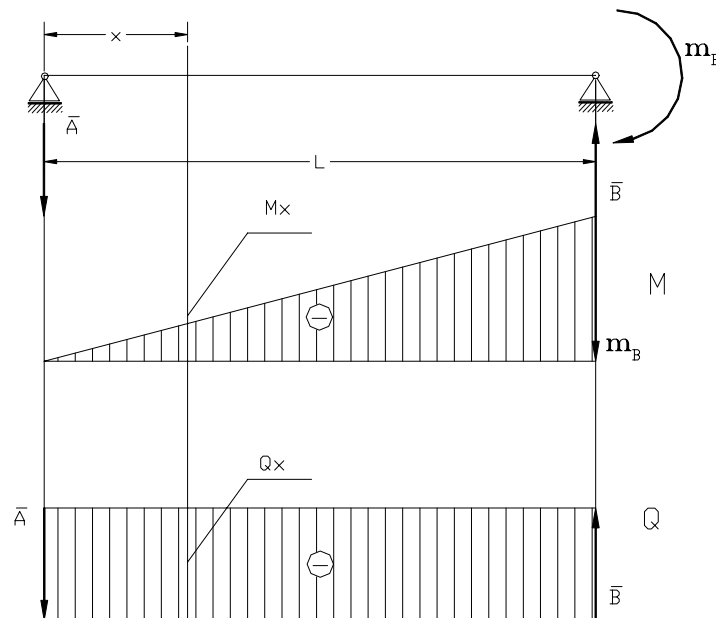


Fig. 6.28



Sean, figura 6.29., dos pares aplicados en los apoyos, y suponiendo que $|m_A| > |m_B|$ será:

$$+\curvearrowleft \sum M_A = -m_A + m_B + B.L = 0 \quad \therefore \quad B = (m_A - m_B) \frac{1}{L}$$

$$+\curvearrowleft \sum M_B = -m_A + A.L + m_B = 0 \quad \therefore \quad A = (m_A - m_B) \frac{1}{L}$$

$$+\uparrow \sum Y = A - B = 0 \quad ; \quad Q_x = A = Q_{Biq} = \text{cte.}$$

$$M_x = -m_A + A.x = -m_A + (m_A - m_B) \cdot \frac{x}{L} \quad \therefore$$

$$M_A = -m_A \quad ; \quad M_{Biq} = -m_A + A.L = -m_B$$

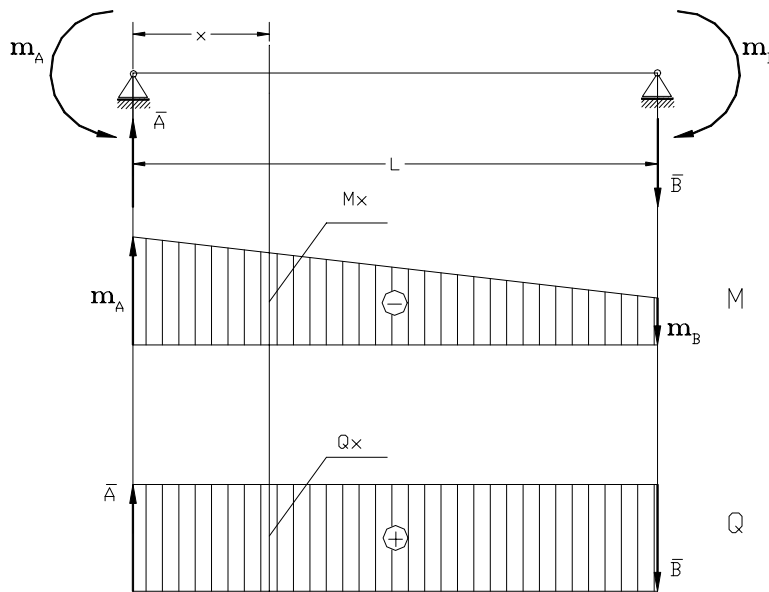


Fig. 6.29

Sea una viga continua articulada o Gerger sometida a pares, figura 6.30. :

$$+\curvearrowleft \sum M_C^{\text{der}} = D L_3 = 0 \quad \therefore \quad D = 0$$

$$+\curvearrowleft \sum M_B^{\text{der}} = m - C L_2 = 0 \quad \therefore \quad C = m / L_2$$



$$+\downarrow \sum M_B^{izq} = A.L_1 - m = 0 \quad \therefore \quad A = m / L_1$$

$$+\uparrow \sum Y = 0 = A - B + C \quad \therefore \quad B = A + C = (m / L_1) + (m / L_2)$$

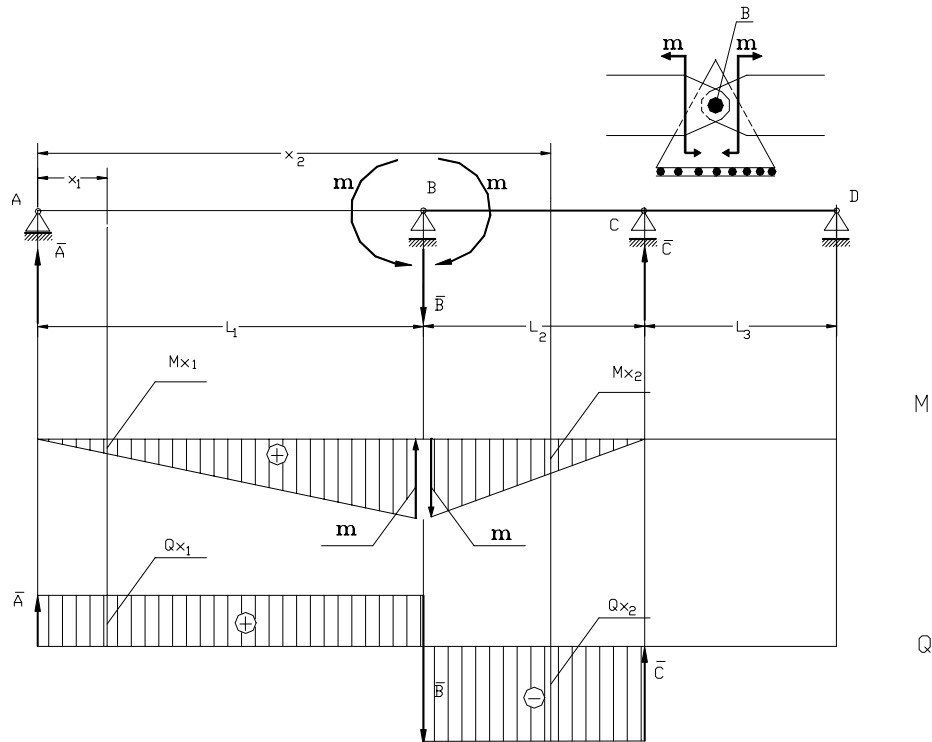


Fig. 6.30

Verificación: $\sum M_A = -m + B.L_1 + m - C(L_1 + L_2) = 0$

Sustituyendo los valores de B y C se obtiene una identidad: $0 = 0$.-

Esfuerzos de corte: $Q_{x1} = A = \text{cte.}$; $Q_{x2} = -C = \text{cte.}$

Momentos flectores:

El detalle gráfico del vínculo en B representa el corte del mecanismo de apoyo con el plano vertical que contiene las fuerzas y el eje de la viga.- El pasador de la articulación (perpendicular al plano del dibujo) apoya sus extremos en los cojinetes del dispositivo de enlace y se articulan a su vástago, independientemente, cada una de las chapas.- El par de cuplas m están aplicadas concentradas en los extremos de cada una de ellas, en correspondencia con el punto central B del pasador.- Por lo tanto, será:

Tramo 1 : $M_A = 0$; $M_{x1} = A.x_1 = (m / L_1).x_1$; $M_{B_{izq}} = A L_1 = m$

$$M_B = A L_1 - m = 0$$

Tramo 2 : $M_{B_{der}} = m$; $M_{x2} = C(L_1 + L_2 - x_2) = (m / L_2).(L_1 + L_2 - x_2)$; $M_C = 0$

Tramo 3 : $M_{x3} = M_D = 0$



6.8.- VIGAS DE EJE INCLINADO Y CURVO.-

6.8.1.- VIGAS DE EJE CURVO.-

Sea, figura 6.31, una pieza prismática plana de eje curvo vinculada a tierra por un apoyo fijo y uno móvil horizontal, sobre la que actúan cargas concentradas verticales cuyas distancias a las verticales de los apoyos son a_i y b_i . - Las reacciones de los apoyos y los momentos flectores son los mismos que los de una viga recta de eje horizontal AB y de la misma luz L.- Efectivamente:

$$A = \frac{\sum F_i b_i}{L} \quad ; \quad B = \frac{\sum F_i a_i}{L}$$

$$M_S = A \cdot x \quad ; \quad M_A = M_B = 0$$

$$M_1 = A \cdot a_1 \quad ; \quad M_2 = A \cdot a_2 - F_1 (a_2 - a_1) \quad ; \quad M_3 = B \cdot b_3$$

La proyección vertical V_S de la resultante izquierda coincide con el esfuerzo de corte de la viga horizontal de eje recto; siendo el eje curvo, V_S se descompone en un esfuerzo normal al plano de la sección s-s y otro tangencial al mismo que varían de sección a sección en función de la inclinación α de la normal:

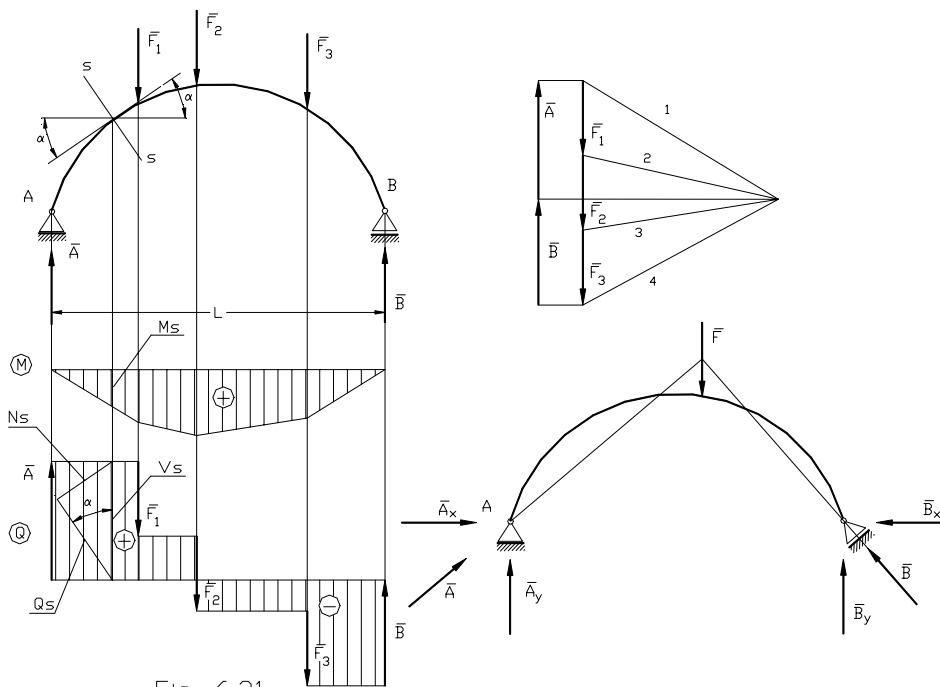


Fig. 6.31

$$Q_S = V_S \cos \alpha \quad ; \quad N_S = V_S \sin \alpha$$

Desde el punto de vista del equilibrio estático cabe observar que la forma curva de esta estructura no es el distintivo primordial ya que, no obstante ella, en parte se comporta como una viga de eje recto.- En cambio, *si modificamos la dirección del apoyo móvil, aparecen reacciones oblicuas en los apoyos aunque las cargas sean verticales.*- Esto se muestra en el gráfico inferior y constituye la característica de los "arcos": la componente horizontal de las reacciones se designa *empuje del arco*.-

6.8.2.- VIGAS DE EJE INCLINADO CON CARGA VERTICAL DISTRIBUIDA.-

Consideremos una viga rectilínea de eje inclinado un ángulo α respecto a la horizontal; sobre ella actúa, distribuida en toda su longitud una carga vertical de resultante P , figura 6.32.- Sea en primer término que *la intensidad de carga "p" se exprese en kilogramos por metro lineal medido en proyección horizontal.*- Será:

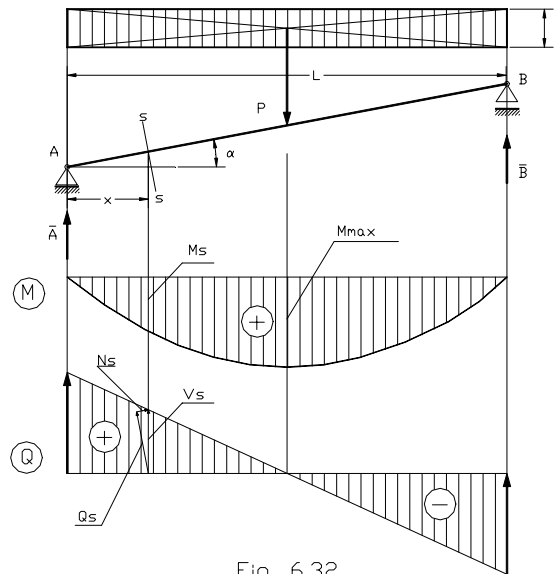


Fig. 6.32

$$P = p \cdot L \quad A = \frac{p \cdot L}{2} = B \quad M_s = \frac{p \cdot L \cdot x}{2} - \frac{p \cdot x^2}{2} \quad M_{\max} = \frac{p \cdot L^2}{8}$$

Se observa que las reacciones y momentos flectores son iguales a los de una viga recta horizontal de igual luz L entre apoyos.- Los esfuerzos de corte y normales se obtienen proyectando los esfuerzos verticales sobre el plano de la sección transversal y su normal en forma igual a la hecha en las vigas de eje curvo:

$$V_s = A - px \quad Q_s = V_s \cos \alpha \quad N_s = V_s \sin \alpha$$

Donde V_s es la proyección sobre un plano vertical de todas las fuerzas externas ubicadas a la izquierda de la sección considerada: representaría el esfuerzo de corte en la viga horizontal.- Los diagramas de esfuerzos de corte y normal para la viga inclinada varían linealmente respecto a x ; sus ordenadas extremas valen:

$$Q_A = A \cos \alpha \quad N_A = - A \sin \alpha \quad Q_B = - B \cos \alpha \quad N_B = B \sin \alpha$$



Si se expresa ahora **la resultante P de la carga distribuida en toda la viga utilizando la intensidad p' de carga por unidad de longitud del eje**, figura 6.33. ; llamando "s" la longitud AB del eje, se tiene:

$$L = s \cos \alpha$$

$$s = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$P = p' \cdot s = p \cdot L$$

$$p' = p \frac{L}{s} = p \cos \alpha$$

$$A=B = \frac{p' \cdot s}{2} = \frac{p \cos \alpha}{2} \frac{L}{\cos \alpha} = \frac{p \cdot L}{2}$$

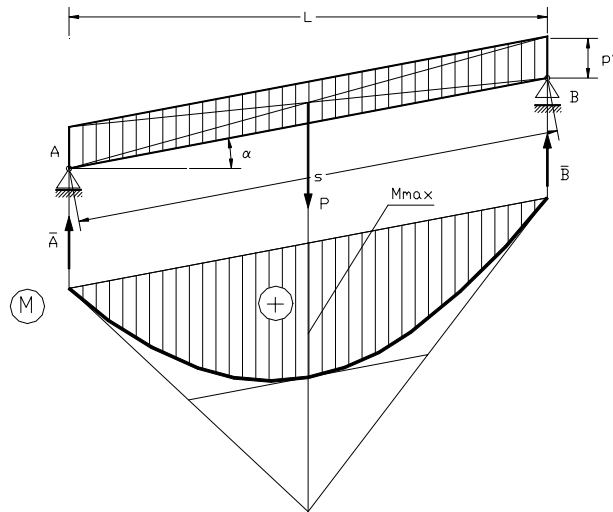


Fig. 6.33

$$M_{\max} = \frac{p' \cdot s \cdot L}{4} = \frac{p' \cdot s \cdot L}{8} = \frac{p \cdot \cos \alpha \cdot L^2}{8 \cos \alpha} = \frac{p \cdot L^2}{8}$$

Finalmente **la carga distribuida vertical de resultante P podemos expresarla por dos componentes según la dirección tangente al plano de una sección transversal cualquiera, PT, y según la normal a dicho plano, PN**, figura 6.34.- Sólo origina momento flector la componente transversal al eje; **la carga unitaria p'' tangencial al plano de la sección vale:**

$$p'' = \frac{P_T}{s} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{s} =$$

$$= p' \cos \alpha = p \cos^2 \alpha$$

$$A_T = B_T = \frac{p'' \cdot s}{2} = \frac{p \cdot \cos^2 \alpha \cdot s}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{p'' \cdot s^2}{4} = \frac{p'' \cdot s^2}{8} = \frac{p \cdot L^2}{8}$$

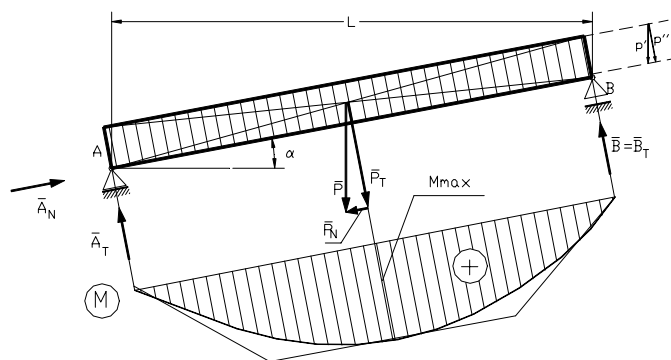


Fig. 6.34

De lo expuesto se concluye que sea cual fuese la forma en que se exprese la carga distribuida no varía el diagrama de momentos.- Observemos que en el último caso han cambiado las reacciones, lo que obedece exclusivamente al cambio de dirección del apoyo móvil en B.-

6.8.3.- VIGA DE EJE INCLINADO CON CARGAS CONCENTRADAS.-

En general resulta conveniente expresar las fuerzas externas en función de sus componentes tangencial y normal al plano de la sección transversal y trazar (si operamos gráficamente) el funicular de las componentes tangenciales que son las que producen momento de flexión.-

Se ha construido el polígono de fuerzas activas, F_1 , F_2 , F_3 , y con polo O se ha trazado un funicular auxiliar con el que se determinan las reacciones A y B.- Obsérvese que este polígono funicular, es prácticamente inútil para los diagramas de momentos flectores ya que, la dirección de la resultante izquierda varía entre punto de aplicación y punto de aplicación de las fuerzas externas.- Ha sido trazado no sólo para destacar lo dicho, sino para obtener la posición del polo O' de forma tal que la línea de cierre del diagrama de momentos resulte paralela al eje de la viga.-

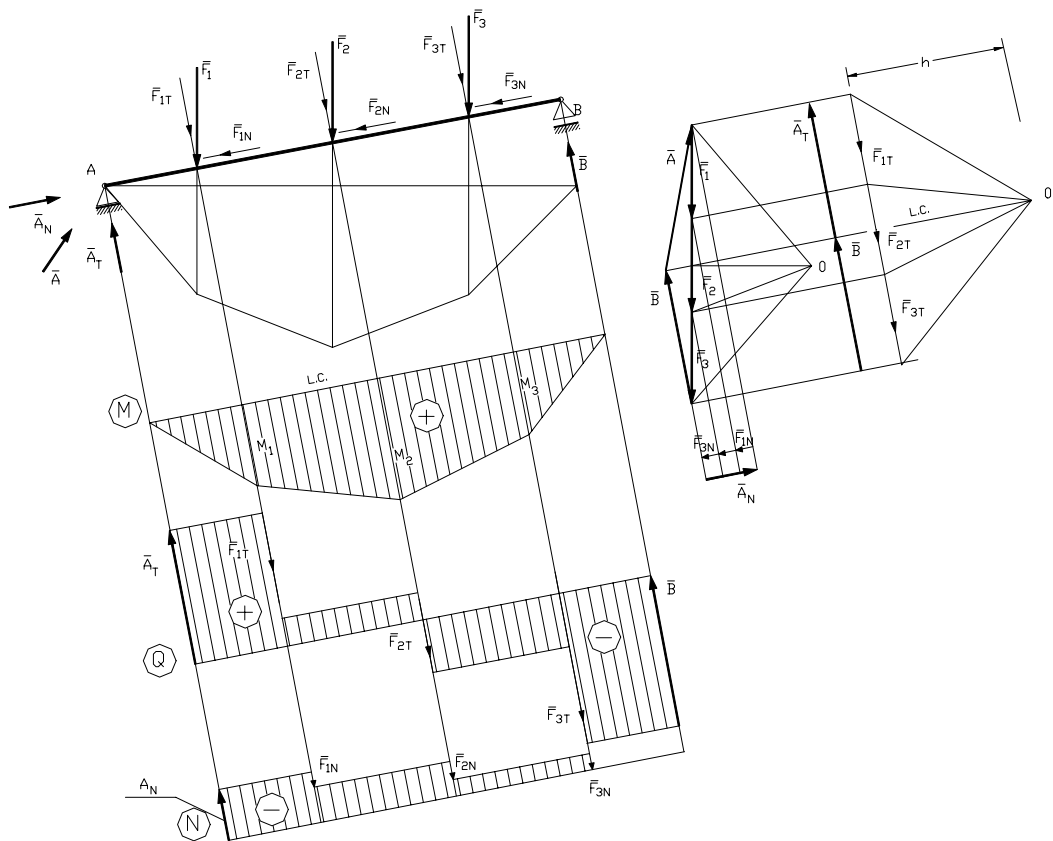


Fig. 6.35

Se proyecta el polígono de fuerzas sobre las direcciones tangente y normal a las secciones y con estas proyecciones se trazan todos los diagramas en la forma conocida.- Estas proyecciones permiten determinar las reacciones en función de sus componentes tangencial y normal.- Podría haberse prescindido del funicular auxiliar con la diferencia que la línea de cierre no sería paralela al eje de la viga.-



6.8.4.- VIGA DE EJE INCLINADO CON CARGAS CONCENTRADAS Y DISTRIBUIDAS.-

Sea figura 6.36, una viga simplemente apoyada de eje inclinado α grados respecto a la dirección horizontal cuyo apoyo móvil no coincide con esta última.- Está solicitada por una carga vertical concentrada en un punto cualquiera A_2 ; actúa además el peso propio de la viga expresado por una carga de intensidad “ g “ kilogramos por metro de longitud de viga.- Tomando la recta de acción de F_2 como divisoria de cargas, se obtienen las resultantes parciales P_1 y P_3 de la carga distribuida cuyas rectas de acción cortan el eje de la viga en los puntos A_1 y A_3 .- Se expresan las fuerzas exteriores en función de sus componentes rectangulares X e Y tomando como eje de abscisas al eje de la viga con origen en el apoyo izquierdo A : las componentes X resultan normales al plano de la sección transversal y las componentes Y tangenciales al mismo.- Se expone a continuación el desarrollo de la secuencia del cálculo cuyos fundamentos han sido ya explicados.-

Cargas distribuidas.-

g (kg/m) carga vertical por unidad de longitud de viga.-

p = g cos α carga transversal por unidad de longitud de viga.-

p' = g sen α carga axial por unidad de longitud de viga.-

$$P_1 = ga \quad \text{de componentes:} \quad \begin{aligned} X_1 &= P_1 \cos (90 - \alpha) = P_1 \sin \alpha = g a \sin \alpha = p'a \\ Y_1 &= P_1 \sin (90 - \alpha) = P_1 \cos \alpha = g a \cos \alpha = p a \end{aligned}$$

$$P_3 = gb \quad \text{de componentes:} \quad \begin{aligned} X_3 &= P_3 \cos (90 - \alpha) = P_3 \sin \alpha = g b \sin \alpha = p'b \\ Y_3 &= P_3 \sin (90 - \alpha) = P_3 \cos \alpha = g b \cos \alpha = p b \end{aligned}$$

Carga concentrada .-

$$F_2 \quad \text{de componentes :} \quad \begin{aligned} X_2 &= F_2 \cos (90 - \alpha) = F_2 \sin \alpha \\ Y_2 &= F_2 \sin (90 - \alpha) = F_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

Reacciones.- Observando el diagrama de cuerpo libre se establece:

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum M_B = 0 \quad &\text{despejando se obtiene } Y_A \text{ y de ésta : } A = Y_A / \sin \beta \quad ; \quad X_A = Y_A / \operatorname{tg} \beta \\ +\uparrow \sum M_A = 0 \quad &\text{despejando se obtiene } Y_B \\ +\rightarrow \sum X = 0 \quad &\text{despejando se obtiene } X_B \end{aligned}$$

Momentos flectores.- Sólo producen momento flector las componentes Y de las fuerzas exteriores ya que las X tienen por recta de acción el eje de la viga , lugar geométrico de los baricentros de las secciones transversales ; se tendrá entonces:

$$M_A = 0$$

En cualquier sección de abscisa x comprendida entre A y A_2 se tiene:

$$M_x = Y_A x - p x^2 / 2$$

Si la sección tiene por abscisa x = a :

$$M_2 = Y_A a - p a^2 / 2$$

Para una sección de abscisa x comprendida entre A_2 y B :

$$M_x = Y_A x - p x^2 / 2 - Y_2 (x - a) = Y_B (s - x) - p (s - x)^2 / 2$$

La primera igualdad resulta de tomar las fuerzas situadas a la izquierda de la sección y la segunda tomando las fuerzas de la derecha.-

Finalmente, si x = s resulta:



$$M_B = 0$$

lo que es evidente por no haber fuerzas a la derecha del punto B, ni par concentrado en él.-

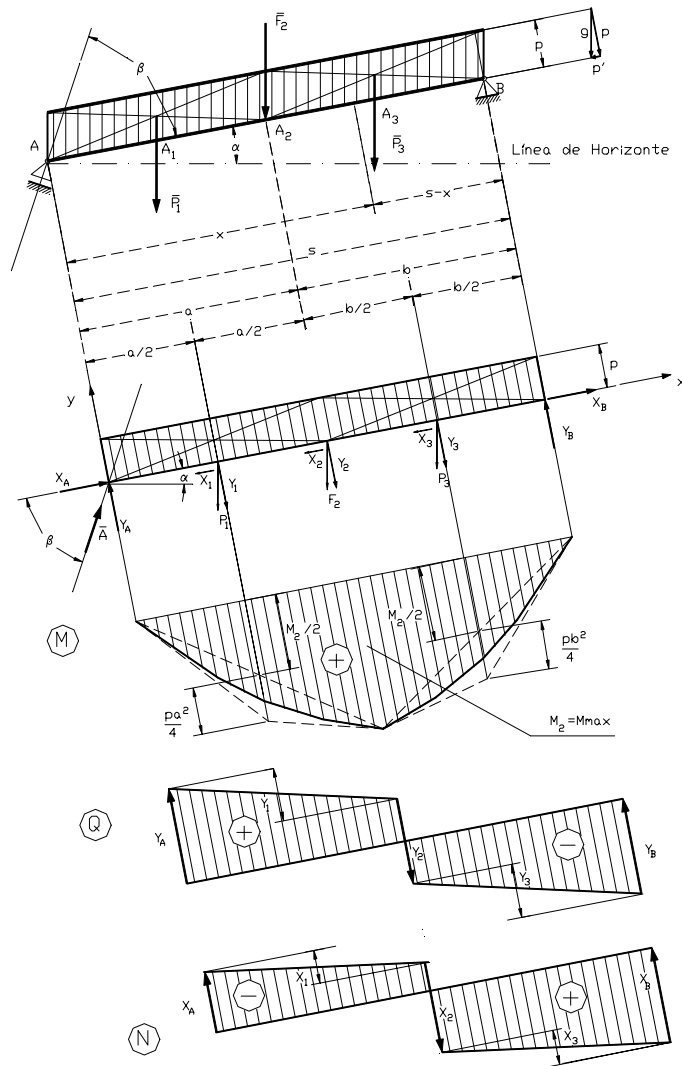


Fig. 6.36

Esfuerzos de corte.-

$$Q_A = Y_A$$

Para un punto de abscisa x ubicado entre A y A_2 :

$$Q_x = Y_A - p x$$

Para una sección infinitamente próxima a la izquierda de A_2 :

$$Q_{2izq} = Y_A - p a$$

En una sección infinitamente próxima a la derecha de A_2 :

$$Q_{2der} = Q_{2izq} - Y_2$$

Para un punto ubicado entre A_2 y B



$$Q_X = Q_{2der} - p(x - a) = - \{ Y_B - p(s - x) \}$$

La primera ecuación resulta de tomar las fuerzas de la izquierda de la sección y la segunda tomando las fuerzas de su derecha.-

$$Q_{Bizq} = - Y_B$$

$$Q_{Bder} = 0$$

Esfuerzos normales.-

$$N_A = - X_A$$

Para una sección ubicada entre A y A₂ :

$$N_X = - X_A + p'x$$

Infinitamente próximo a la izquierda de A₂

$$N_{2izq} = -X_A + p'a$$

Inmediatamente a la derecha de A₂:

$$N_{2der} = N_{2izq} + X_2$$

Entre A₂ y B

$$N_X = N_{2der} + p'(x - a) = X_B - p'(s - x)$$

La primer igualdad se obtiene considerando las fuerzas de la izquierda de la sección y la segunda de su derecha.-

$$N_{Bizq} = X_B$$

$$N_{Bder} = 0$$

