3.1. Variable aleatoria

La finalidad del apartado 3.1 es aprender a manipular una distribución de probabilidad, no saber cómo identificar un tipo específico de distribución. Es decir, la naturaleza general de la distribución de probabilidad para un fenómeno científico determinado no es obvia a partir de lo que se estudia aquí. En los dos apartados siguientes (3.2 y 3.3) se recorrerá un largo camino hacia la identificación respecto de la naturaleza general del fenómeno o sistema científico.

Consignas

A la hora de resolver los ejercicios y aplicaciones de la unidad, cuando corresponda, tenga en cuenta las siguientes consignas generales:

- Definir la variable en estudio.
- Identificar la distribución de la variable en estudio y sus parámetros.
- Justificar y plantear la solución del problema.
- Realizar los cálculos necesarios para encontrar responder la consigna.
- Interpretar el resultado para responder la consigna en el contexto del enunciado.

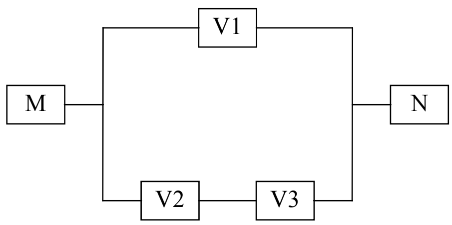
3-1.1.

Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas y reflexione sobre el rango para el cual están definidas:

A: Resistencia a tracción de las barras de acero del tipo ADM-420 (N), en MN/m².
B: Número de vehículos que pasan por día por control ubicado en Desaguadero.
C: Producción diaria de agua potable en la planta de tratamiento Alto Godoy, en miles de m³/día.
D: Altura total de la sección de una viga de madera obtenida uniendo dos escuadrías, a partir de las siguientes secciones individuales: (3"x 1"), (3"x 3") y (3"x 4").
E: Tiempo de fraguado de un hormigón en horas, medido en probetas curadas en condiciones normalizadas.
F: Número de permisos de construcción de edificios al año otorgados por la municipalidad de Godoy Cruz.
G: Superficie implantada con frutales en la Provincia de Mendoza, en Ha.
H: Consumo de energía eléctrica por tipo de actividad productiva en la Provincia, medidos en MWh/año.
I: Cantidad de líneas telefónicas instaladas durante 1998 en la provincia de Mendoza.
J: Superficie construida por año en la ciudad Capital de Mendoza, en m²/año.
K: Número de accidentes de tránsito por año en el departamento de Las Heras.
L: Volumen anual de efluentes cloacales tratados por la planta depuradora de Campo Espejo, en hm³/año.
M: Número de instalaciones eléctricas inspeccionadas anualmente por la municipalidad de Guaymallén.
N: Gas entregado en la Provincia de Mendoza por tipo de usuario, en miles de m³/año.
O: Espesor total del entablonado de madera que se puede formar a partir de la unión de dos espesores individuales. Los espesores individuales disponibles son: 1/8, 1/4 o 3/8 de pulgada.
P: Cantidad de intentos hasta acertar en el blanco
Q: Tiempo de espera hasta acceder al servidor
R: Piso en el que se encuentra un ascensor cuando se lo llama desde Planta Baja (Nivel 0).

3-1.2.*

En el esquema mostrado, el sistema de agua fluye a través de las válvulas V1, V2 y V3, desde M hacia N. Las válvulas V1, V2 y V3 trabajan de manera independiente y cada una se abre, con probabilidad igual a 0,80 cuando recibe la señal de accionamiento a distancia. Encontrar la función masa de probabilidad para el número de válvulas abiertas entre M y N después de enviar la señal.



3-1.3.

Un ingeniero estudia la variable aleatoria *Y*, definida como la resistencia a tracción en el límite de fluencia del acero F-36 utilizado en construcciones livianas de acero. Ha definido para la variable una función de densidad de probabilidad triangular basándose en datos experimentales observados y en la sencillez de su gráfica.

Los datos observados tienen una amplitud de 20 MN/m², comprendida entre 35 y 55 MN/m², y la moda es de 41 MN/m². La expresión matemática de la función de densidad de probabilidad es:

$$f(y) = [2 / (55 - 35)] \,.\, [(y - 35) / (41 - 35)]$$
para: $35 \leq y \leq 41$

$$f(y) = [2 / (55 - 35)] \,.\, [1 - (y - 41) / (55 - 41)]$$
para: $41 \leq y \leq 55$

$$f(y) = 0$$
para otros valores

a) Verificar que $f(y)$ es función de densidad de probabilidad.
b) Obtener la función de distribución acumulada.
c) Graficar la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada.
d) Calcular la probabilidad de que la resistencia a tracción en el límite de fluencia sea menor de 36 MN/m².
e) Determinar la probabilidad de que la resistencia a tracción en el límite de fluencia supere los 50 MN/m².
f) Calcular el valor esperado y la varianza de la variable en estudio e interpretar sus resultados.

3-1.4.

Un ingeniero está interesado en el estudio de la acción del viento sobre las estructuras en un lugar geográfico determinado. Con los datos proporcionados por la estación meteorológica más cercana al lugar ha representado la distribución de frecuencias mediante un histograma y ha llegado a la conclusión de que un modelo matemático de la función de densidad de probabilidad satisfactorio tiene la forma exponencial negativa dada por:

$$f(x) = k \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad para\ x \geq 0$$
$$f(x) = 0 \quad en\ otro\ caso$$

Donde X es la velocidad anual máxima del viento y k es una constante.

a) Determinar el valor de la constante k para que $f(x)$ sea función de densidad de probabilidad.
b) Encontrar la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X.
c) Representar gráficamente las funciones de densidad y de distribución acumulada.
d) Estimar el valor del parámetro λ, si los registros demuestran que la probabilidad de tener velocidades anuales máximas del viento menores que 70 km / h es aproximadamente 0,90.
e) Calcular la probabilidad de que la velocidad anual máxima del viento esté entre los 35 y los 70 km/h.
f) Calcular la probabilidad de que la velocidad anual máxima del viento supere los 140 km/h.

3-1.5.

Al estudiar el tiempo de espera de un vehículo en una estación de peaje determinada, X, se estableció para dicho tiempo la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = c \cdot x^2 \cdot (1 - x)^4$$
$$para\ 0\ min \leq x \leq 1\ min$$

$$f(x) = 0$$
$$en\ otro\ caso$$

a) Determinar el valor de la constante c para que $f(x)$ sea función de densidad de probabilidad.
b) Calcular el valor esperado y la varianza del tiempo de espera en la estación de peaje.
c) Encontrar la probabilidad de que un vehículo tenga que esperara menos de treinta segundos en dicha estación de peaje.

3-1.6.

El caudal máximo de una lluvia tempestuosa (que se define aquí como un período de ½ día con más de dos horas de precipitación) depende de la precipitación y de la duración de la tormenta. Los datos disponibles de cierta región sugieren que la función de densidad de probabilidad para la duración de la tormenta, X, está dada aproximadamente por:

$$f(x) = k \cdot (x - 2)^2$$
$$para\ 2\ hs < x \leq 7\ hs$$

$$f(x) = k \cdot (12 - x)^2$$
$$para\ 7\ hs < x \leq 12\ hs$$

$$f(x) = 0$$
$$en\ otro\ caso$$

a) Calcular el valor de la constante k.
b) Encontrar la función de distribución acumulada.
c) Graficar las funciones $f(x)$ y $F(x)$.
d) Calcular el valor esperado y la varianza para la duración de la tormenta.
e) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de la tormenta no exceda de 4 horas?

3-1.7.

El operario de una estación de bombeo ha observado que la demanda de agua durante las primeras horas de la tarde tiene aproximadamente una distribución exponencial con media igual a 100 m³/s. Calcular la probabilidad de que la demanda de agua durante las primeras horas de la tarde de un día cualquiera exceda los 200 m³/s.

3-1.8.*

Los estudios realizados por los ingenieros de una empresa distribuidora de energía, han permitido estimar que el consumo diario de energía eléctrica en la región que abastece, en GWh, se puede modelar, razonablemente, como una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = 1/9 \cdot x \cdot e^{-x/3} \quad para\ x \geq 0$$
$$f(x) = 0 \quad en\ otro\ caso$$

Si la planta de energía de la ciudad tiene una capacidad de generación diaria de 12 GWh, ¿cuál es la probabilidad de que el abastecimiento de energía sea inadecuado en un día cualquiera?

3-1.9.*

Los estudios experimentales realizados por un ingeniero le han permitido modelar la magnitud de los terremotos en una región dada, para valores comprendidos entre 0 y 8 de la escala Richter, mediante una función de densidad de probabilidad exponencial. En el sur de California, el valor del parámetro de esta distribución, β, se estimó en 2,35.

a) Calcule la probabilidad de que la magnitud de los terremotos en la región en estudio, exceda el valor 6,3. En realidad esta fue la magnitud que corresponde al desastroso terremoto de 1933 en Long Beach.
b) Calcule la mediana de la magnitud de los terremotos en escala Richter, en la región en estudio.
c) Calcule la probabilidad de que la magnitud de los terremotos en la región en estudio se encuentre comprendida entre 5,411 y 10,882.

3-1.10.

El espesor de un entablonado de madera que algún cliente ordena, en pulgadas, es una variable aleatoria que tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$F(x) = 0$ para $x < 1/8$
$F(x) = 0{,}2$ para $1/8 \leq x < 1/4$
$F(x) = 0{,}9$ para $1/4 \leq x < 3/8$
$F(x) = 1$ para $3/8 \leq x$

Determinar las siguientes probabilidades:

a) $P(X \leq 1/8)$
b) $P(X \leq 1/4)$
c) $P(X \leq 5/16)$
d) $P(X > 1/4)$
e) $P(X \leq 1/2)$

3-1.11.

El ingeniero de transporte estudia el comportamiento del tránsito en un cruce de calles, para lo cual se dirige al mismo todos los días de la semana en la hora pico, alrededor del mediodía; espera que el semáforo cumpla un ciclo y registra el número de vehículos con dirección sur que se detienen antes de que el semáforo cambie a verde. Define su variable en estudio, *X*, como el número observado de vehículos detenidos en el semáforo, y después de analizar los resultados obtenidos decide asignar las siguientes probabilidades:

x:	0	1	2	3	4	5	≥ 6
f(x):	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0

a) Verificar si la función *f(x)* cumple las condiciones para ser una función masa de probabilidad.
b) Construir la función de distribución acumulada.
c) Representar gráficamente las funciones *f(x)* y *F(x)*.
d) Calcular la probabilidad de que se forme una cola con dos o más vehículos.
e) Determinar el valor esperado y la varianza del número de vehículos detenidos en el semáforo.

3-1.12.

La variable aleatoria *X* puede tomar tres posibles valores: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; x_3, con probabilidades $f(2) = 2/10$; $f(4) = 3/10$ y $f(x_3)$.

a) Determinar el valor de x_3 y $f(x_3)$, si se conoce que el valor esperado de la variable es 6,6.
b) Calcular F(7).
c) Calcular la varianza de la variable aleatoria V(*X*).

3-1.13.

Calcule el valor esperado, la mediana y la moda de un variable *X* cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = -\,{}^{3}/4 \,.\, x^2 + {}^{9}/2 \,.\, x - 6$$
en el intervalo [2; 4]

$f(x) = 0$
fuera del intervalo

3-1.14.

Demostrar que las siguientes funciones son funciones de densidad de probabilidad para algún valor de *k*. Encuentre el valor de *k*.

$f(x) = k \,.\, x^2$ para $0 < x < 4$
$f(x) = k \,.\, (1 + 2.x)$ para $0 < x < 2$
$f(x) = k \,.\, e^{-x}$ para $x > 0$

3-1.15.

La proporción de personas que responden cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua, *X*, que tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$f(x) = 2/5 \,.\, (x + 2)$ para $0 < x < 1$
$f(x) = 0$ en otro caso

a) Muestre que *f(x)* es función de densidad de probabilidad.
b) Encuentre la función de distribución acumulada.
c) Encuentre la probabilidad de que más de ¼ pero menos de ½ de las personas contactadas respondan este tipo de encuestas.
d) Determine e interprete el valor de la mediana y el valor del percentil veintinueve.

3-1.16.

Suponga que la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es:

$F(x) = 0$ para $x < -2$
$F(x) = 0{,}2$ para $-2 \leq x < 0$
$F(x) = 0{,}7$ para $0 \leq x < 2$
$F(x) = 1$ para $2 \leq x$

Determine la función de probabilidad de X.

3.2. VA Discretas

3-2.17.

La variable aleatoria X tiene distribución binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}01$.

a) Representar gráficamente la función masa de probabilidad de X.
b) Indicar si la distribución es simétrica o sesgada; en este último caso, si es sesgada a izquierda o derecha.
c) Determinar el valor más probable y el menos probable de la variable X.
d) Determinar las siguientes probabilidades: $P(X = 5)$; $P(X \leq 2)$; $P(X \geq 9)$; $P(3 \leq X < 5)$.

3-2.18.

Un fabricante utiliza un esquema de aceptación de producción de artículos antes de que se embarquen. El plan tiene dos etapas. Se preparan cajas de 25 artículos para su embarque y se prueba una muestra de tres en busca de defectuosos. Si se encuentra alguno defectuoso, toda la caja se devuelve para verificar el 100%. Si no se encuentran defectuosos, la caja se embarca.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja que contiene tres defectuosos se embarque?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja que contenga sólo un artículo defectuoso se devuelva?

Si el fabricante decide cambiar su esquema de aceptación, de manera que se toma un artículo al azar, lo inspecciona y después lo reintegra a la caja; luego hace lo mismo por segunda y por tercera vez. La caja no se embarca si cualquiera de los tres artículos es defectuoso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja que contiene tres defectuosos se embarque?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja que contenga sólo un artículo defectuoso se devuelva?

3-2.19.

Los cambios en los procedimientos de los aeropuertos requieren una planificación considerable. La frecuencia con que llegan los aviones es un factor importantísimo que se debe tener en cuenta. Suponga que los aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto con una frecuencia de seis por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro aeronaves pequeñas lleguen durante un período de una hora?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos cuatro lleguen durante un período de dos horas?
c) Si se define un día laboral de 12 horas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 75 pequeñas aeronaves lleguen durante el día?

3-2.20.

De acuerdo con la Chemical Engineering Progress (noviembre de 1990), aproximadamente 30% de todas las fallas de operación de tuberías en plantas químicas son ocasionadas por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de las siguientes 20 fallas al menos 10 se deban a error del operador?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de cuatro de 20 fallas se deban a error del operador?
c) Suponga para una planta particular que de la muestra aleatoria de 20 de tales fallas exactamente cinco sean errores de operación. ¿Considera que la cifra de 30% anterior se aplique a esta planta? ¿Por qué?

3-2.21.

Se analiza una máquina de soldar automática con el fin de comprarla. La compra se realizará si no se producen defectos en el 99% de las soldaduras; de otra manera, se considera ineficiente y no se realiza la compra. Si se lleva a cabo la prueba de un prototipo que realizará 100 soldaduras.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren exactamente cuatro defectos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de no encontrar defectos?

3-2.22.

Un ingeniero de seguridad afirma que sólo el 40% de todos los trabajadores utilizan cascos de seguridad cuando almuerzan en el lugar de trabajo. Suponga que esta afirmación es cierta y encuentre la probabilidad de que cuatro de seis trabajadores, elegidos al azar, utilicen sus cascos mientras almuerzan en el lugar de trabajo.

3-2.23.

En cierta intersección, en promedio, ocurren tres accidentes de tránsito por mes. Calcule la probabilidad de que en esta intersección:

a) Ocurran exactamente cinco accidentes al mes.
b) Ocurran menos de tres accidentes al mes.
c) No ocurran accidentes en un día dado.

3-2.24.

Un proceso para fabricar un componente electrónico tiene 1% de defectuosos. El plan de control de calidad indica seleccionar 100 artículos del proceso y si ninguno resulta defectuoso el proceso continúa. Encontrar la probabilidad de que el proceso continúe con el plan de muestreo en las condiciones que se describe.

3-2.25.

a) Suponiendo que haya una posibilidad en cincuenta de que ocurra una inundación mayor que el valor crítico en un año dado, calcule la probabilidad de que ocurra al menos una gran inundación durante la duración prevista, 30 años, de un sistema propuesto de control de inundaciones.

b) Si se considera este riesgo de al menos una inundación crítica demasiado grande en relación con las consecuencias, el ingeniero puede incrementar la capacidad del diseño, de modo que la magnitud de la inundación crítica sea sólo excedida con probabilidad 0,01 en un año cualquiera. Calcule la probabilidad de que ocurra al menos una gran inundación durante la duración prevista, 30 años, de un sistema propuesto de control de inundaciones en estas condiciones.
c) Determine la probabilidad de que transcurran por lo menos diez años para que ocurra la primera gran inundación crítica.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran por lo menos 30 años para que se produzca la primera gran inundación crítica?
e) Calcule la probabilidad de que no haya inundaciones críticas en 30 años. Comparar con el resultado anterior.
f) Calcule el número promedio de años que deben transcurrir para que ocurra la primera inundación de magnitud mayor que la inundación crítica, para la capacidad de diseño del ítem a). En ingeniería civil esto se llama *período de retorno*.

3-2.26.

El número de grietas que aparecen en un hormigón con determinada dosificación durante las primeras 10 horas del proceso de fragüe tiene una tasa de 1,5 por minuto. Calcular la probabilidad de que, dentro del periodo de las primeras diez horas:

a) aparezcan no más de cuatro en un minuto cualquiera.
b) aparezcan al menos tres durante un intervalo de dos minutos.
c) a lo sumo, aparezcan quince durante un período de seis minutos.

3-2.27.

El promedio de automóviles que entran en un túnel de montaña es de un vehículo cada dos minutos. Si entra un número excesivo se produce una situación de peligro. Encuentre la probabilidad de que el número de vehículos que entre en un período de dos minutos exceda tres.

3-2.28.

La posibilidad de que un operario muera durante la construcción de las obras componentes de un aprovechamiento hidroeléctrico es de 2 ‰. Encontrar la probabilidad de que mueran menos de cinco operarios de las siguientes 2000 personas que estarán afectadas a la construcción de una nueva obra.

3-2.29.

Si probabilidad de efectuar una mala maniobra en la válvula mariposa de una central hidroeléctrica es igual a 0,0002, ¿cuál es la probabilidad de que la central tenga que salir de servicio en las próximas 100 maniobras de la válvula por una mala maniobra de la misma?

3-2.30.

El número de nudos de una madera de álamo tiene una distribución de Poisson con una media igual a 1,5 nudos cada 10 pies de madera. Encontrar la probabilidad de que un tablón de 10 pies tenga a lo sumo un nudo.

3-2.31.

Representar gráficamente la función de densidad de probabilidad de las distribuciones geométricas para valores del parámetro: 0,1; 0,5 y 0,9. ¿Qué comentario merece la asimetría en relación al parámetro de la distribución?

3-2.32.

Una fábrica utiliza un sistema de aceptación para cierto insumo. El método es de doble etapa. Se preparan cajas de 25 artículos y se prueba una muestra de 3 para localizar defectuosos. Si se encuentra algún defectuoso, la caja se devuelve para su reposición. Si no se halla ninguno, se envía a destino. A diferencia del ejercicio 17, suponga aquí que el muestreo se realiza con reposición.

a) Calcular la probabilidad de que una caja sea enviada a destino si contiene dos artículos defectuosos.
b) Calcular la probabilidad de que una caja con un sólo defectuoso sea devuelta para su reposición.

3-2.33.

Un contratista presenta su oferta para la construcción de tres obras independientes. De experiencias anteriores sabe que la probabilidad de que la cotización efectuada le permita construir la obra es 1/3, para cada una de las obras. Si se presenta a las tres licitaciones:

a) Obtener y graficar la función masa de probabilidad para el número de cotizaciones favorables.
b) ¿Es seguro que el contratista obtendrá al menos una de las tres obras?

3-2.34. EX270901

Los componentes de un sistema se envían a destino en lotes de 8 unidades cada uno. El control de calidad del producto establece que de cada lote se prueben 2 unidades seleccionadas aleatoriamente y se acepte el lote si no se encuentran defectos en la muestra. Suponga que el lote contiene 3 unidades defectuosas.

a) Calcule la probabilidad de que un lote inspeccionado se acepte.
b) Calcule el valor esperado del número de componentes defectuosos en la muestra utilizando la distribución de probabilidad correspondiente al número de unidades defectuosas en la muestra aplicando la definición de media o valor esperado de una variable aleatoria.

3-2.35. EX291101

De acuerdo con las especificaciones del departamento de control de calidad de la empresa sobre los envases de las bolsas de cal, se debe tomar una muestra de la línea de producción según el procedimiento de muestreo previsto y verificar el cierre de las bolsas de la muestra. Si no se encuentra defectos en las bolsas de la muestra, el proceso continúa; caso contrario, se detiene.

La persona a cargo de este trabajo informa que de acuerdo a la experiencia previa, se sabe que el 2% de los envases de cal presentan defectos en el cierre.

Si usted selecciona una muestra de tres bolsas por cada lote de cincuenta bolsas de la línea de producción, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso no se detenga según este criterio?

3-2.36. EX291101 (Continuación)

Según el plan de trabajo hoy debe realizar tareas en el área de recursos humanos. Debe dictar un curso y diseñar la evaluación del mismo para un grupo de los empleados de la empresa. Las directivas para elaborar la evaluación del curso indican que la estructura de la misma debe ser de 20 preguntas con opciones múltiples, cuatro por cada pregunta, donde sólo una de las cuatro es correcta.

Si se aprueba contestando correctamente la mitad de las preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que un empleado que no estudie, apruebe contestando al azar?

3-2.37. EX201201

En la progresiva del río correspondiente a la estación B se quiere construir una presa de embalse. Se ha propuesto dar una capacidad al vertedero de la misma definida por un caudal de diseño determinado *Qd*. Si el caudal del río excede el valor *Qd* se producirían inundaciones en dicho año.

De los registros disponibles es aceptable suponer que la probabilidad de que en un año dado el caudal del río exceda al caudal *Qd* es igual a 0,02. Si se da al vertedero la capacidad *Qd*, y se acepta la independencia de caudales de año a año:

a) Calcule la probabilidad de que en los próximos 20 años, se produzcan inundaciones en por lo menos uno de los años.
b) Calcule la probabilidad de que transcurran diez años para que recién se produzca la primera inundación, después de construir la obra.

3-2.38. EX230502

a) Un estadio de fútbol tiene cuatro torres de iluminación con 30 reflectores de alta intensidad montados en cada una de ellas. En ocasiones, una torre completa se queda a oscuras. El ingeniero a cargo del mantenimiento del estadio se pregunta ¿qué distribución de probabilidad tendrá el número de torres que pueden quedar a oscuras durante un partido de fútbol, si sabe que cualquier torre individualmente tiene una probabilidad de fallar y quedar a oscuras durante un partido de fútbol de 0,10? Suponiendo independencia de fallas entre torres, grafique y describa la distribución de probabilidad para el número de torres que pueden fallar durante un partido de fútbol en estas condiciones.
b) El ingeniero sabe también que la probabilidad de que cualquiera de los 30 reflectores de una torre falle durante un partido de fútbol es de 0,05. Si se considera deficiente la iluminación que proporciona una torre cuando más de cuatro de sus reflectores fallan, ¿cuál es la probabilidad de que una torre proporciones iluminación deficiente durante un partido de fútbol?
c) Si más de dos torres proporcionan una iluminación deficiente, el partido se suspende. Sabiendo que el funcionamiento de las torres es independiente, calcule la probabilidad de que se suspenda un partido de fútbol por razones de iluminación deficiente.

3-2.39. EX010802

La probabilidad de recibir sin errores un bit enviado por un canal de transmisión digital es 0,9. Suponga que las transmisiones de bit son independientes y calcule la probabilidad de que el quinto de los bits transmitidos, sea el primero que falle.

3-2.40. EX010802

Un lote de piezas contiene 100 de un proveedor local de tuberías, y 200 de un proveedor del mismo material pero de otra localidad. Si se eligen cuatro piezas al azar y sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro piezas extraídas provengan del proveedor local?

3-2.41. EX191202

El Ministerio de Medio Ambiente sospecha que algunas industrias descargan sus efluentes al río violando los reglamentos contra la contaminación ambiental.

a) Suponga que hay veinte industrias que están bajo sospecha y sólo tres de ellas realmente están contaminando el río. ¿Cuál es la probabilidad de que si se inspeccionan cinco de tales industrias no se detecte el problema?
b) Suponga ahora que las industrias que están bajo sospecha son trescientas pero sólo tres de ellas realmente están contaminando el río. ¿Cuál es la probabilidad de que tampoco se detecten problemas en las cinco industrias inspeccionadas?
c) ¿Está de acuerdo con el procedimiento de inspección? Justifique su respuesta.

3-2.42. EX100703 (Continuación)

Aceptando que la estimación de la gestión anterior es correcta (de 174 vecinos entrevistados 157 están de acuerdo con el sistema de obra reembolsable), calcule la probabilidad de que al seleccionar una muestra aleatoria de vecinos, no se encuentren vecinos que apoyen la modalidad de obras reembolsables entre los dos primeros entrevistados y recién el tercero entrevistado apoye la modalidad.

3-2.43. EX060727

Juan Pérez estudia el tiempo de secado del pegamento que fabrica su empresa. De análisis de los primeros resultados, piensa que dichos tiempos siguen una distribución exponencial y que el tiempo medio de secado es de 20 minutos. Las especificaciones del pegamento que Juan produce, establecen que el tiempo de secado del pegamento no debe superar los 92 minutos.

a) ¿Qué porcentaje de los pegamentos fabricados por Juan no cumplen las especificaciones?
b) Cada día, Juan controla la calidad de los productos extrayendo una muestra aleatoria de 40 unidades de su línea de producción, los prueba y si todas las unidades de la muestra cumplen las especificaciones, el proceso continúa; caso contrario indica detener el proceso para su revisión. En estas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera se ordene detener el proceso para su revisión?
c) Los pegamentos se preparan para su embarque en cajas de 100. Al llegar a destino, el cliente de Juan selecciona una muestra de 12 pegamentos y los prueba. Si todos cumplen las especificaciones, el cliente acepta la caja; caso contrario la rechaza. Si el 1% de los pegamentos de la caja no cumplen las especificaciones, ¿cuál es la probabilidad de que la caja se acepte?

3-2.44.

Se sabe que la probabilidad de recibir de manera errónea un bit enviado por un canal de transmisión digital es 0,1. Suponiendo que las transmisiones son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que al transmitir cinco bits, sólo el último sea erróneo?

3-2.45.

La contaminación es un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. El número de partículas contaminantes que aparecen en un disco óptico tiene una distribución de Poisson y se sabe que el promedio de partículas por centímetro cuadrado de superficie del medio de almacenamiento es 0,1. Si el área de un disco que se estudia es 100 centímetros cuadrados, determine la probabilidad de encontrar 12 partículas en el disco.

3-2.46.

Se estudia un tipo de partículas suspendidas en un medio líquido con concentración de seis partículas por mililitro. Se agita por completo un volumen grande de la suspensión y después se extraen 3 mililitros. Si el número de partículas que se extraen sigue una distribución de Poisson ¿cuál es la probabilidad de que sólo se retiren 15 partículas?

3-2.47.

Una suspensión contiene partículas en una concentración desconocida λ por mililitro. Se agita por completo la suspensión, después se extraen 4 mililitros y se cuentan 17 partículas. Estime el valor de λ.

3-2.48.

Suponga que el número de visitas a cierto sitio web durante un intervalo fijo sigue una distribución de Poisson. Si se sabe que la media del número de visitas es de cinco en cada minuto, determine la probabilidad de que haya sólo 17 visitas en los siguientes tres minutos.

3-2.49.

Se piensa que el 30% de los pozos que se perforan para extraer agua potable en cierta comunidad rural están contaminados. Para obtener algún conocimiento del problema se decidió realizar algún tipo de prueba. Por el alto costo de los ensayos se eligieron al azar sólo10 pozos para realizar la prueba.

a) Si lo que se piensa es cierto, ¿cuál es la probabilidad de que tres de los pozos seleccionados para la prueba estén contaminados?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de tres de los pozos seleccionados estén contaminados?

3-2.50.

El ingeniero a cargo del control de calidad, cada día, debe comprobar (de acuerdo a las especificaciones) si el 95% de los componentes electrónicos embarcados por su compañía funcionan correctamente. A tal fin, selecciona aleatoriamente 15 componentes de cada lote listo para ser embarcado y aprueba su salida si todos están en perfectas condiciones; de lo contrario, todos los componentes del lote son revisados.

Encuentre las probabilidades de que el ingeniero cometa el error de:

a) Mantener un lote para revisión adicional a pesar de que el 95% de los componentes funcionan correctamente.
b) Aprobar la salida de un lote completo sin revisión adicional a pesar de que sólo el 90% de los componentes funcionan correctamente.

3-3. VA Continuas

3-3.51.

La cantidad diaria de café, en litros, que sirve una máquina ubicada en el vestíbulo de un aeropuerto es una variable aleatoria continua uniforme en el intervalo [7, 10]. Encuentre la probabilidad de que en un día dado la cantidad de café que sirve sea:

a) A lo sumo 8,8 litros.
b) Más de 7,4 pero menos de 9,5 litros.
c) Al menos 8,5 litros.

3-3.52.

Un trabajador sabe que el momento de llegada del transporte que lo lleva hasta su puesto de trabajo, entre las 6:30 y las 6:40 a.m. está distribuido uniformemente. Si el trabajador llega a las 6:30 horas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de siete minutos?
b) ¿Cuánto tiempo esperará en promedio?

3-3.53.

Se regula una máquina despachadora de gaseosas para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Se sabe que la cantidad de bebida despachada se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué proporción de los vasos contendrán más de 224 mililitros?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 190 y 205 mililitros?
c) Si los vasos utilizados en la máquina tienen una capacidad de 230 mililitros, ¿cuántos vasos se derramarán al servir las siguientes 1000 bebidas?
d) ¿Por debajo de qué valor obtendremos 25% de los vasos menos llenos?
e) ¿Qué cantidad de bebida tendrá el 95% de los vasos, alrededor de la media?

3-3.54.

Una compañía paga a sus empleados un salario promedio de \$15,90 por hora, con una desviación estándar de \$1,50. Si los salarios se distribuyen en forma normal y se pagan al centavo:

a) ¿Qué porcentaje de los trabajadores reciben salarios entre \$12,75 y \$14,85 por hora?
b) ¿Cuánto ganan por hora el 15% de los empleados con menores sueldos?
c) ¿El 5% más alto de los salarios por hora es mayor a qué cantidad?
d) ¿Cuánto gana por hora el 60% de los empleados alrededor del valor promedio?

3-3.55.

De acuerdo al teorema de Chebyshev:

a) La probabilidad de que cualquier variable aleatoria tome un valor dentro de tres desviaciones estándar de la media es al menos de 8/9. Si se sabe que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es normal con media μ y varianza σ^2, ¿cuál es el valor exacto de $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$?
b) La probabilidad de que cualquier variable aleatoria tome un valor dentro de dos desviaciones estándar de la media es al menos de 3/4. Si se sabe que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es normal con media μ y varianza σ^2, ¿cuál es el valor exacto de $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$?
c) La probabilidad de que cualquier variable aleatoria tome un valor dentro de una desviación estándar de la media es al menos de 0. Si se sabe que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es normal con media μ y varianza σ^2, ¿cuál es el valor exacto de $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$?
d) Resuma las conclusiones obtenidas.

3-3.56.

Un ingeniero va todos los días de su casa en las afueras de la ciudad a su oficina en el centro de la ciudad. El tiempo promedio para un viaje de ida es 24 minutos, con una desviación estándar de 3,8 minutos. Suponga que la distribución de los tiempos de viaje está distribuida normalmente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un viaje tome al menos media hora?
b) Si entra a su trabajo a las 9:00 y él sale de su casa a la 8:45 horas, ¿qué porcentaje de las veces llega tarde?
c) Saliendo a las 8:45 de su casa, ¿cuántos días se espera que llegue tarde en un mes con 24 días laborables?
d) Si sale de su casa a las 8:35 y el café se sirve a las 8:50, ¿cuál es la probabilidad de que pierda el café?
e) ¿A qué hora debería salir de su casa para asegurarse de llegar temprano, al menos el 90% de las veces?, ¿y si además quiere tomar el café?
f) Encuentre la probabilidad de que dos de los próximos tres viajes duren al menos media hora.

3-3.57.

Un proceso para fabricar un componente electrónico tiene un 1% de defectuosos. Un plan de control de calidad es seleccionar 100 artículos del proceso y si ninguno está defectuoso el proceso continúa. Calcule la probabilidad de que el proceso continúe con el plan de muestreo que se describe:

a) Usando la distribución binomial.
b) Usando la distribución de Poisson.
c) Usando la distribución normal.

d) Compare los resultados obtenidos y analice las siguientes cuestiones:
e) ¿Se dan las condiciones para realizar la aproximación en cada uno de los casos?
f) ¿Cuál sería el mejor valor para dar como resultado? ¿y en segundo lugar? ¿por qué?

3-3.58.

Un proceso produce 10% de artículos defectuosos. Se seleccionan al azar 100 artículos del proceso; calcule la probabilidad de que el número de defectuosos:
a) Exceda de 13; b) Sea menor que 8; c) Esté entre 11 y 12, inclusive.

3-2.59. c/PC

En cierta ciudad, el consumo diario de agua, en millones de litros, sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha=2$ y $\beta=3$.
a) Si la capacidad diaria de dicha ciudad es nueve millones de litros de agua, ¿cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera el suministro de agua sea inadecuado?
b) Encuentre la media y la varianza del consumo diario de agua.
c) ¿En qué intervalo se encuentra al menos ¾ de los consumos diarios, según el teorema de Chebyshev?

3-2.60.

La vida, en años, de cierto interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con una vida promedio de dos años. Si cien de estos interruptores se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 30 fallen durante el primer año?

3-3.61. EX190902

Una persona sabe que, según el fabricante, la cantidad de kilómetros que puede recorrer un automóvil antes de que se le acabe la batería sigue una distribución exponencial, con una media de 10000 kilómetros. La persona debe realizar un viaje de 5000 kilómetros, pero sólo lo hará si tiene al menos una probabilidad de 0,95 de llegar a destino, sin tener que cambiar la batería. Si usted debe asesorar al respecto, ¿aprobaría su partida?

3-3.62.

Los datos de porcentaje a menudo siguen una distribución logarítmica normal. Se estudia el uso promedio de potencia (dB por hora) para una compañía particular y se sabe que tiene una distribución lognormal con parámetros $\mu = 4$ y $\sigma = 2$.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía utilice más de 270 dB durante una hora cualquiera?
b) ¿Cuál es el uso de potencia media? ¿y la varianza?

3-3.63. c/PC

Suponga que la vida de servicio, en años, de la batería de un aparato para sordos es una variable aleatoria que tiene una distribución de Weibull con $\alpha=½$ y $\beta=2$.
a) ¿Cuánto tiempo se puede esperar que dure tal batería?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tal batería esté en operación después de dos años?

3-3.64. c/PC

Las vidas de ciertos sellos de automóviles tienen la distribución de Weibull con tasa de falla $Z(t)=1/\sqrt{t}$. Encuentre la probabilidad de que tal sello aún esté en uso después de cuatro años.

3-3.65. c/PC

El tiempo de respuesta de una computadora es una aplicación importante de las distribuciones gamma y exponencial. Suponga que un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de tres segundos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda cinco segundos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?

3-3.66.

El diámetro interior del anillo de un pistón ya terminado se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación estándar de 0,03 cm.
a) ¿Qué proporción de anillos tendrán diámetros interiores que excedan 10,075 cm?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el anillo de un pistón tenga un diámetro interior entre 9,97 y 10, 03 cm?
c) ¿Por debajo de qué valor del diámetro interior caerá el 15% de los anillos de pistón?

3-2.67. c/PC

Se sabe que la tasa promedio de uso de agua (miles de litros por hora) en cierta comunidad implica la distribución logarítmica normal con parámetros $\mu = 5$ y $\sigma = 2$. Es importante para propósitos de planeamiento obtener una apreciación de los períodos de alta utilización.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, para cualquier hora dada, se usen 50000 litros de agua?
b) ¿Cuál es la probabilidad media del uso de agua por hora promedio en miles de litros?

3-2.68.

Una compañía produce componentes para un motor. Las especificaciones de las partes sugieren que 95% de los componentes cumplan con ellas. Suponga que se cumplen las especificaciones y que los componentes se embarcan en lotes de 100.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren más de dos componentes defectuosos en un lote dado?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre menos de diez componentes defectuosos en un lote?

3-3.69. EX271103

El 90% de los pedidos que recibe la empresa proveedora de hormigones indican que no se le incorpore aditivo alguno al hormigón. De mantenerse tales condiciones, la probabilidad de que de los próximos cinco pedidos, sólo uno de los clientes solicite hormigón con aditivo es: a) 0,32805; b) 0,00046; c) 0,0045; d) 0,91854

3-3.70.

Un proceso para fabricar un producto químico no está funcionando bien, a punto tal que el 5% de los productos no son eficientes. El plan de control de calidad del proceso consiste en seleccionar 120 productos y si encuentran más de dos productos deficientes, el proceso se detiene.

a) ¿Qué probabilidad de continuar tiene el proceso si se continúa con este plan de muestreo?
b) ¿Cuál sería el límite de productos deficientes que se debería tolerar en la muestra para limitar las posibilidades de continuar con el proceso al 3%?

3-3.71.

Un fabricante de medicamentos sostiene que cierto medicamento cura una enfermedad de la sangre, en promedio, en el 80 % de los casos. Para verificar la aseveración, inspectores gubernamentales utilizan el medicamento en una muestra de 100 individuos y deciden aceptar la afirmación si 75 o más se curan.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la afirmación se rechace cuando la probabilidad de curación sea 0,8?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el gobierno acepte la afirmación cuando la probabilidad de curación sea tan baja como 0,7?

3-3.72.

Si el 20% de los residentes de una ciudad prefiere el teléfono de color blanco sobre cualquier otro color disponible, ¿cuál es la probabilidad de que entre los siguientes 1000 teléfonos que se instalen en la ciudad, entre 170 y 185 inclusive sean blancos?

3-3.73.

Si se acepta que la resistencia a compresión de probetas de morteros preparados con una mezcla de albañilería ofrecida por una empresa local a la edad de 28 días, se distribuye normalmente con media 4,6 MPa y desviación estándar 0,25 MPa:

a) Calcular la probabilidad de que la resistencia de tales probetas sea menor que 4,19 MPa.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia se encuentre entre 4,0 y 4,3 MPa?
c) ¿Qué proporción de probetas preparadas con la mezcla en estudio tiene una resistencia superior a 5,1 MPa?
d) Determinar la resistencia característica de tales morteros, si es aquella por encima de la cual se encuentra el 95 % de los resultados de ensayo.

3-3.74.

El Grupo Aglomerantes Asociados S.A. fabrica cemento pórtland normal diseñando un clinker especial para lograr las especificaciones de un cemento CP40, (categorización según la resistencia a compresión a la edad de 28 días: 40 MPa). Los resultados obtenidos permiten afirmar que la media de tales resistencias es de 42,0 MPa con una desviación estándar de 6,5 MPa y que, además, es aceptable suponer que dicha resistencia sigue una distribución aproximadamente normal.

a) La normativa especifica que la probabilidad de superar el valor mínimo (Xmín = 30 MPa) debe ser al menos del 95 % para ser aceptado. Verificar si se cumple esta condición.
b) ¿Qué probabilidad hay de que la resistencia sea menor de 40,0 MPa?
c) ¿Entre qué valores se encontrará el 90 % de los resultados de ensayo respecto de la media?
d) ¿Qué proporción de resultados de ensayo se encontrará entre 30,0 y 30,8 MPa?

3-3.75.

Teniendo en cuenta que para estudios relacionados con problemas de la construcción puede considerarse que, desde el punto de vista práctico y sin error apreciable, el conjunto de los resultados de ensayo de las resistencias a compresión de probetas de hormigón a la edad de 28 días, está comprendido entre los valores extremos dados por: $\sigma'bm \pm 3.S$, calcular las resistencias mínima y máxima probables, correspondientes a cuatro conjuntos de hormigones que tienen la misma resistencia media, $\sigma'bm = 13$ MPa y los siguientes coeficientes de variación y saque conclusiones para: a) $\delta = 5$ % b) $\delta = 10$ % c) $\delta = 15$ % d) $\delta = 20$ %

Nota: aquí se ha conservado la nomenclatura técnica del Reglamento correspondiente. Recuerde que $\sigma'bm = \mu$ y que $\delta = CV$.

3-3.76.

La cantidad real de cal hidratada que una máquina vierte en bolsas de 30 kilogramos puede considerarse como una variable aleatoria distribuida normalmente con desviación estándar igual a 15 gramos. Si el 2% de las bolsas contienen menos de 30 kilogramos, ¿cuál es el peso medio de las bolsas que se han llenado?

3-3.77.

Si la demanda mensual de asfalto para la construcción de una autopista se distribuye aproximadamente normal con una media de 200 toneladas y una desviación estándar de 40 toneladas, ¿qué tan grande debe ser el acopio de asfalto a principio de un mes para que la probabilidad de que la existencia se agote no sea mayor de 0,05?

3-3.78.

Cierto tipo de tamices son utilizados en una planta clasificadora de áridos y duran en promedio 3 años, con una desviación estándar de 6 meses. Suponiendo que las duraciones de los tamices están normalmente distribuidas, encontrar la probabilidad de que un determinado tamiz dure menos de 2 años y 3 meses.

3-3.79.

El ingeniero sabe que el 10% de las fallas registradas en postes de hormigón utilizados en líneas de alta tensión se deben a un diseño inadecuado de la fundación. Calcular la probabilidad de que de los 88 postes que deben colocarse en la próxima línea, fallen por esta causa no más de cinco.

3-3.80.

Suponga que el número de partículas de asbesto en un centímetro cuadrado de placas de asbesto cemento utilizadas en cubiertas de techo tiene una distribución de Poisson con media 1000. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 950 partículas de asbesto al analizar un centímetro cuadrado de una placa?

3-3.81.

Un consultor está investigando cuánto tiempo necesitan los oficiales armadores para el armado de una tonelada de acero[1] en edificios de altura y ha determinado que cuando se trata de edificios construidos en zonas de alto riego sísmico, la información está distribuida normalmente con una media de 25 horas y una desviación estándar de 2 horas. Determine cuál es la probabilidad de que un oficial seleccionado aleatoriamente pueda armar una tonelada de acero:

a) En menos de 25 horas o en más de 27 horas
b) Entre 23 y 27 horas
c) En menos de 21 horas
d) En más de 30 horas
e) ¿Cuántas horas deben pasar antes de que el 50% de los oficiales armen una tonelada de acero?
f) ¿Cuántas horas deben pasar antes de que el 10% de los oficiales armen una tonelada de acero?
g) ¿Cuál es el rango intercuartílico (tiempo en horas entre el cuartil inferior y el superior) esperado para que los oficiales armen una tonelada de acero?

[1] La tarea comprende: descarga de camión y clasificación en almacén; marcado, cortado y doblado; clasificación y posicionamiento.

3-3.82.

Una máquina envasa bolsas de cal hidratada cuyos pesos están normalmente distribuidos, con una desviación estándar de 200 gramos. ¿Cuál es el peso medio en que debe ajustarse la máquina para lograr que no más del 5 % de las bolsas tenga un peso menor de 29,6 kg?

3-3.83.

Un fabricante de pinturas sabe que el tiempo de secado de sus pinturas de secado rápido está distribuido normalmente, con media 20 minutos y desviación estándar 2,4 minutos. Calcular la probabilidad de que al menos 20 de los siguientes 36 tableros pintados con la misma pintura, demoren más de 25 minutos en secar.

3-3.84.

Los estudios hidrológicos permiten admitir que los caudales medios anuales de un río dado tiene una distribución normal, con un caudal medio anual de 40 m^3/s. Determinar el caudal medio anual máximo característico para el río en estudio que tiene un coeficiente de variación del 10%. (Nota: el caudal máximo característico de un río es aquel que es superado sólo el 5% del tiempo).

3-3.85.

Para determinar el grado de inteligencia de un ratón se mide el tiempo que tarda en recorrer un laberinto en busca de comida. Dicho tiempo es una variable aleatoria de función densidad:

$f(y) = b / y^2$ si $y \geq b$
$f(y) = 0$ en otro caso

El coeficiente b es el tiempo mínimo.

a) Demuestre que la función $f(y)$ cumple las propiedades de una función de densidad de probabilidad.
b) Obtenga la función de distribución acumulada.
c) Calcular la $P(Y > b+c)$ para c positiva.

3-3.86.

La función de densidad de probabilidad de las ventas diarias de una bomba en una estación de servicios, expresada en miles de pesos) es:

$f(y) = y$ si $0 < y < 1$
$f(y) = 2 - y$ si $1 \leq y \leq 2$
$f(y) = 0$ en otro caso

a) Graficar la función de densidad de probabilidad.
b) Encontrar la función de distribución acumulada.
c) Graficar la función de distribución acumulada.
d) Calcular la probabilidad de que las ventas de un día cualquiera estén entre 800 y 1200 pesos.

3-3.87.

La proporción del tiempo de ocupación de las cajas de un supermercado es una variable aleatoria *Y* de función de densidad de probabilidad:

$f(y) = cy^2 (1 - y)^4$ si $0 \leq y \leq 1$
$f(y) = 0$ en otro caso

Encontrar el valor de *c* para que *f(y)* sea función de densidad de probabilidad.

3-3.88.

La radiación solar diaria en el mes de setiembre tiene una función de densidad de probabilidad:

$f(y) = 3/32\ (y - 2)\ (6 - y)$ si $0 \leq y \leq 1$
$f(y) = 0$ en otro caso

Encuentre el valor de la radiación media diaria del mes de setiembre.

3-3.89. EX230502

El ingeniero a cargo de una central hidroeléctrica sabe que las turbinas de la central generan electricidad a la tasa máxima de producción sólo cuando se turbinan al menos 3000 m³ por día. También sabe, por experiencia, que el flujo diario en su central hidroeléctrica tiene una distribución normal, con media igual al flujo del día anterior y una desviación estándar de 600 m³. El día anterior, 2550 m³ fluyeron por las turbinas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las turbinas generen electricidad a la tasa máxima durante todo el día?
b) De mantenerse las condiciones del apartado anterior para los siguientes siete días, ¿cuál es la probabilidad de que durante toda la semana se genere energía a la tasa máxima?

3-3.90. EX010802

Se estudia la corriente en un conductor delgado de cobre, medida en mili amperes. Suponga que el rango de medición de la corriente es [0; 20] y que la función de densidad en el rango es constante y vale 0,05.

a) Calcule la probabilidad de que una medición de corriente en tales conductores sea menor que 10 mA.
b) Determine analíticamente y grafique la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada de la corriente en el conductor delgado.

3-3.91. EX260802

El Reglamento CIRSOC 201 establece que la resistencia característica de un hormigón a la edad de veintiocho días, es aquella por encima de la cual se encuentra el 95% de los resultados de ensayo disponibles. Indica además que, cuando el número de resultados de ensayo disponibles es de 18, la fórmula para calcular la resistencia característica es la siguiente: σ'bk = σ'bm – 1,74 . S; donde σ'bk es la resistencia característica; σ'bm es la resistencia media y S es la desviación estándar de la muestra de tamaño *n* (número de resultados de ensayo disponibles). Admitiendo que la resistencia a la compresión del hormigón a tal edad sigue una distribución normal, demuestre la fórmula propuesta por el Reglamento.

3-3.92. EX190902

En una universidad determinada el tamaño ideal de una clase de primer año es de 150 estudiantes. Como la universidad sabe por experiencia que en promedio sólo el 30% de los estudiantes que solicitan inscripción se inscriben realmente, sigue la política de aprobar 450 solicitudes de inscripción. Calcule la probabilidad de que se inscriban, para primer año, más de 150 alumnos. ¿Qué puede decir respecto de las veces que se verá en problemas la universidad por exceder el número óptimo de estudiantes para el que está dimensionada?

3-3.93. EX180903

Si se sabe que la resistencia a compresión a la edad de 28 días de la población de hormigones elaborados por el Proveedor X se distribuye normalmente con media 15 MPa y desviación estándar 3 MPa, determine la probabilidad de que, de los siguientes cuatro ensayos que se practiquen (pastones de hormigón que se le controlen al proveedor), al menos uno de ellos NO CUMPLA con la especificación indicada. Las especificaciones indican que el percentil cinco (resistencia característica) debe ser al menos igual a 13 MPa. Si usted fuera el Director Técnico, ¿continuaría comprando hormigón al Proveedor X? Justifique su respuesta.

3-3.94. EX281102

La vida en años de cierto interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con una vida promedio de dos años. Si se instalan cien de estos interruptores en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo fallen treinta interruptores durante el primer año?

3-3.95. EX280202

La industria utiliza fusibles eléctricos para la protección de sus máquinas. Estos fusibles se compran en lotes grandes y se prueban secuencialmente hasta que se observa el primer fusible defectuoso. Suponga que el 90% de los fusibles del lote están en buenas condiciones.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el primer fusible defectuoso sea el quinto de los fusibles probados?
b) ¿Qué probabilidad hay de que el primer fusible defectuoso sea uno de los cinco primeros que se prueben?

3-3.96. EX270202

Al localizar y corregir errores en un programa de computadora (*depuración*) para determinar la confiabilidad del mismo, los expertos en software han observado la importancia de la distribución del tiempo que transcurre antes de encontrarse el siguiente error en el programa. Un programador piensa que el tiempo medio entre la localización de errores de programa es de 24 días, y de estudios previos se conoce que esta variable aleatoria tiene una distribución gamma con parámetro $\alpha = 1$. Si hoy se ha producido un error de programación, aceptando lo que piensa el programador, calcule la probabilidad de que pasarán por lo menos 60 días antes de que se descubra el siguiente error de programación.

3-3.97. EX220502

Suponga que el peso de las bolsas de té se distribuye normalmente con una media de 5,5 gramos y desviación estándar de 0,105 gramos, calcule el porcentaje de bolsas que quedan incluidas en el intervalo $\mu \pm 2\sigma$ y compárelo con el porcentaje observado en la muestra de las 50 bolsas.

a) ¿Son muy diferentes? Sugerencia: utilice el gráfico de tallos y hojas de abajo para calcular el porcentaje de observaciones de la muestra incluidas en el intervalo.
b) ¿Qué otros intervalos compararía para determinar, con un enfoque descriptivo exploratorio, si el peso de las bolsas de té está distribuido normalmente?

Diagrama de tallos y hojas para el peso de las bolsas de té, en gramos: 52 | 5 = 5,25 gramos

52 | 59
53 | 2246
54 | 000122444556779
55 | 00012333344556677788
56 | 1123577
57 | 7

3-3.98. EX270406

Se sabe que el tiempo que tardan los estudiantes en resolver un examen dado tiene una media de 90 minutos y que el modelo matemático que lo interpreta está dado por la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{90} e^{-\frac{x}{90}} \quad \textit{para } x > 0$$

$$f(x) = 0 \qquad \textit{en otro caso}$$

a) Carolina iniciará su examen a las 16:00 y para llegar a tiempo a una entrevista, debe retirarse a las 17:00. ¿Cuál es la probabilidad de que Carolina pueda terminar antes de las 17:00 y salir a tiempo para llegar a su entrevista?
b) Calcule e interprete el percentil 80 para el tiempo que tardan los estudiantes en resolver el examen.

3-3.99. EX

Pablo ha investigado el tiempo de vida de las cuentas de ahorro comunes que se tiene en uno de los bancos miembros de la corporación en la que se desempeña, concluyendo que la vida media de las mismas es de 30 meses, con una desviación estándar de 6 meses. Sus estudios también advierten que es posible aceptar que el modelo de la distribución normal explica muy bien el tiempo de vida de las cuentas en cuestión.

a) Si un depositante abre una cuenta de ahorro común en un banco miembro de la corporación de Pablo, ¿cuál es la probabilidad de que todavía haya dinero en la cuenta después de cuatro años?
b) ¿Cuál es el tiempo de vida del 5% de las cuentas que se cierran más rápidamente?

3-3.100. EX

Mauricio, administrador de la Aerolínea Vientos del Sur, está terriblemente orgulloso del grado de puntualidad de su compañía. Sólo el 2% de todos los vuelos de Vientos del Sur llegan con más de diez minutos de anticipación o retraso. En el discurso que piensa hacer durante la próxima reunión de la junta de directores de la compañía, Mauricio desea incluir la probabilidad de que ninguno de sus 180 vuelos programados para la semana siguiente llegue con más de diez minutos de anticipación o retraso.

a) ¿Cuál es el valor numérico de la probabilidad que Mauricio debe incluir en su discurso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de nueve vuelos lleguen con más de diez minutos de anticipación o retraso?

3-3.101. EX090206

Era la hora 19:30 del miércoles y entró uno de los integrantes a la reunión del equipo de trabajo y dijo:

– Disculpen. Estoy preparando el examen para mañana y quiero preguntarles qué les parece este problema para incluirlo en el examen.

Después de leerlo en vos alta, todos asintieron con la cabeza. Es más, una de las personas replicó:

– Me parece muy bueno. Para pensar, ¿no?

Veamos qué opinas. El enunciado es el siguiente:

1. El gerente de producción está revisando su política de pedidos del pegamento utilizado en la línea Nº 1. Actualmente ordena 110 unidades por semana, pero se queda sin pegamento una de cada cuatro semanas. Sabe que, en promedio, en la línea se utilizan 95 unidades por semana. También está dispuesto a suponer que la demanda de las unidades del pegamento se distribuye normalmente. En tales condiciones, la *desviación estándar* de la distribución:
   a) Es un valor comprendido entre el primer cuartil y la mediana de la distribución.
   b) Es un valor mayor que el sexto decil de la distribución.
   c) Es un valor menor de 10 unidades.
   d) Ninguna de las anteriores. El valor correcto es:.....................................

2. El gerente desea pedir un número de unidades de pegamento tal que la probabilidad de que se quede sin pegamento en una semana cualquiera, no exceda el valor 0,2. En tal caso, cada semana se deberá pedir:
   a) Menos unidades de las que actualmente está ordenando.
   b) Deberá entre 120 y 130 unidades.
   c) Deberá pedir entre 131 y 140 unidades.
   d) Ninguna de las anteriores. El valor correcto es: .... Justificar.

3-3.102. EX090206 – Horas de estudio

1. A partir de la estadística descriptiva de la asignatura A2 (ver Cuadro 1) y de la distribución de frecuencias (ver Cuadro 2), es posible concluir que:
   a) Un cuarto de los alumnos dedicó a la asignatura 9,25 horas por semana.
   b) La moda no existe.
   c) La distribución de las horas semanales extra clase de la asignatura A2 es sesgada a la izquierda.
   d) Ninguna de las anteriores.

2. Si se construyera un gráfico de caja para la variable en estudio de la asignatura A2:
   a) No se observarían *datos apartados (o valores extremos)*.
   b) Al menos, se observaría un dato apartado, debido a que el o los estudiantes dedicaron mucho *tiempo extra clase* a la asignatura.
   c) Se observarían datos apartados, tanto por dedicar mucho como por dedicar poco *tiempo extra clase* a la materia en algunas semanas.
   d) Ninguna de las anteriores.

2. En principio y para la Asignatura A2, el profesor y su equipo:
   (Nota: No se trata de probar la normalidad, sino de imaginar el patrón de comportamiento de los datos y compararlo con el de la distribución normal).
   a) Deberían suponer que la *variable* en estudio se distribuye aproximadamente normal.
   b) Deberían descartar que la *variable* en estudio se distribuye aproximadamente normal.
   c) Deberían indicar que la información disponible en los Cuadros 1 y 2 no es suficiente como para hacer supuestos acerca de la normalidad.
   d) Ninguna de las anteriores.

Cuadro 1. Estadísticas descriptivas	A1	A2
Cantidad de datos	120	89
Promedio	6,03	7,36
Mediana	4	4,5
Moda	0	0
Desviación estándar	8,39	6,34
Mínimo	0	0
Máximo	34	38,5
Rango	34,0	38,5
Cuartil inferior	1,125	1
Cuartil superior	9,25	11
Coeficiente de variación (%)	105,16	114,06

Cuadro 2. Distribución de frecuencias para las horas de trabajo independiente de la asignatura A2

i	LInf	LSup	Marca	fi	fri	Fi	Fri
1	0,00	4,74	2,37	68	0,5528	68	0,5528
2	4,74	9,49	7,12	25	0,2033	93	0,7561
3	9,49	14,24	11,87	17	0,1382	110	0,8943
4	14,24	18,99	16,62	5	0,0407	115	0,9350
5	18,99	23,75	21,37	5	0,0407	120	0,9756
6	23,75	28,50	26,12	2	0,0163	122	0,9919
7	28,50	33,25	30,87	0	0,0000	122	0,9919
8	33,25	38,00	35,62	1	0,0081	123	1,0000

3-3.103.

Según la información de una estación sismológica, es posible modelar las magnitudes de los terremotos en un lugar mediante una distribución exponencial con promedio 2,4 en la escala de Richter.

a) Calcular la probabilidad de que el siguiente terremoto que se produzca en la región tenga menos de 3,0 grados en la escala de Richter.
b) Calcular la probabilidad de que el siguiente terremoto que se produzca en la región tenga entre 2,0 y 3,0 grados en la escala de Richter.
c) Si el código de construcción del lugar prevé que los edificios estén preparados para soportar un sismo de proyecto de intensidad 10 en la escala Richter, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente sismo no sea soportado por los edificios del lugar?
d) Para los siguientes diez temblores que se produzcan en la zona, calcular la probabilidad de que por lo menos uno tenga intensidad mayor de 5,5262 grados en la escala Richter.
e) Se sabe que la probabilidad de que ocurra un sismo destructivo en el lugar es 0,0155. Calcule

la probabilidad de que de los siguientes 25 sismos al menos tres sean destructivos.

f) En promedio, ¿cuántos sismos se producirán entre dos sismos destructivos consecutivos? Esto es lo que suele denominarse *recurrencia del terremoto de proyecto o periodo de retorno*.

3-3.104. (continuación)

Suponga que en otro lugar determinado, de acuerdo con la información de la estación sismológica, se estableció para modelar las magnitudes de los terremotos en dicho lugar, una distribución exponencial con media igual a 2 en la escala de Richter.

a) Calcular la probabilidad de que el siguiente terremoto que se produzca en el lugar, tenga una magnitud comprendida entre 0,5 y 1,5 grados en la escala Richter.
b) Determinar la probabilidad de que, en los siguientes doce temblores que se produzcan en el lugar, por lo menos uno tenga una magnitud mayor de 3 grados en la escala Richter.

3-3.105.

Si el 62% de todas las nubes impregnadas con yoduro de plata experimentan un crecimiento espectacular, ¿cuál es la probabilidad de que en 40 nubes impregnadas con yoduro de plata, seleccionadas aleatoriamente, a lo sumo 20 experimenten un crecimiento espectacular?

3-3.106.

La cantidad real de cal hidratada que una máquina vierte en bolsas de 30 kilogramos puede considerarse como una variable aleatoria normal, con una desviación estándar de 15 gramos. Si se sabe que el 2% de las bolsas que llena dicha máquina contienen menos de 30 kilogramos, ¿cuál es el peso medio de la cantidad de cal que la máquina vierte en las bolsas de 30 kilogramos?

3-3.107.

Un fabricante sabe que, en promedio, 2% de los tostadores eléctricos que produce necesitarán ser reparados en los 90 días siguientes a su venta. Encuentre la probabilidad de que entre los últimos 1200 tostadores que se vendieron en el mes, al menos 30 necesiten ser reparados en los primeros 90 días después de la venta.

3-3.108.

Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en el taller de Mara tienen encuadernación defectuosa. Calcule la probabilidad de que dos de mil libros terminados tengan una encuadernación defectuosa.

3.4. Funciones de variables aleatorias

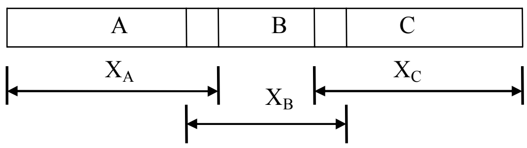
3-4.109.

En un estudio de suelos el ingeniero que desea estimar el asentamiento de una fundación a largo plazo establece que la carga total soportada por la misma es la suma de la carga gravitatoria permanente de la estructura y la debida a la sobrecarga por el uso y la ocupación de los espacios. En realidad cada una de las cargas mencionadas es la suma de muchos pesos relativamente pequeños y el ingeniero supone que tanto la carga permanente, *X*, como la sobrecarga, *Y*, pueden suponerse distribuidas normalmente. Por otra parte, al no ver una correlación importante entre ellas, decide tratarlas como variables independientes.

Los datos de numerosas construcciones del tipo de la estudiada le sugieren que la carga permanente promedio es de 50 toneladas y la sobrecarga media es de 20 toneladas, con una desviación estándar de 5,1 y 4,2 toneladas, respectivamente. Determine la carga de diseño de la fundación, si se establece como aquélla que es excedida con una probabilidad no mayor de 0,05.

3-4.110.

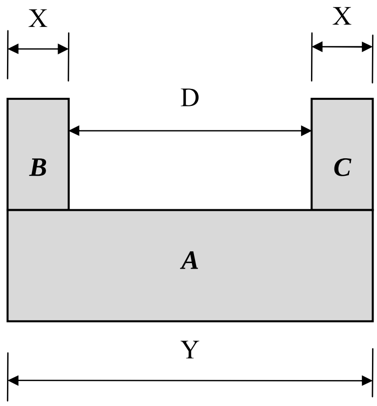
Una barra recta se forma conectando tres tramos A, B y C, cada uno fabricado con una máquina distinta. Las longitudes de cada tramo, medidas en pulgadas, se identifican con las variables X_A, X_B y X_C respectivamente. Se sabe también que las longitudes de los tres tramos están distribuidas normalmente con media y varianza iguales a (20; 0,04), (14; 0,01) y (26; 0,04) respectivamente. Como se indica en la figura, las tres secciones se unen superponiéndose 2 pulgadas en cada conexión. Suponga que la barra se puede utilizar en la construcción del árbol del generador de una central si su longitud total en pulgadas está entre 55,7 y 56,3. ¿Cuál es la probabilidad de que la barra pueda ser utilizada con el fin previsto?



3-4.111.

El esquema de la figura ilustra el dispositivo formado por tres piezas, A, B y C, diseñado para el apoyo de las vigas de una estructura metálica. La longitud A está distribuida normalmente con media 10 centímetros y desviación estándar 0,1 centímetros. Los espesores de las piezas B y C están distribuidos normalmente con media 2 centímetros y desviación estándar de 0,05 centímetros. Suponiendo que las dimensiones son independientes:

a) Determinar la media y la desviación estándar de la longitud del hueco D.
b) Calcular la probabilidad de que el hueco D sea menor que 5,9 cm.



3-4.112.

Suponga que las variables aleatorias *X* e *Y* denotan la longitud y el ancho, respectivamente, de una pieza. Suponga también que E(X) = 2 centímetros, con una desviación estándar de 0,1 y que E(Y) = 5 centímetros, con una desviación estándar de 0,2 centímetros. Se sabe también que las variables están distribuidas normalmente y son independientes. Encuentre la probabilidad de que el perímetro de una pieza seleccionada sea mayor que 14,5 centímetros.

3-4.113.

Una máquina automática que envasa latas de gaseosas está trabajando de modo tal que, el promedio de llenado es de 12,1 onzas de líquido y la desviación estándar es de 0,05 onzas de líquido. Suponga que el volumen de llenado de las latas son variables aleatorias normales independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar 10 latas, el volumen promedio de ese proceso sea menor que 12 onzas de líquido?

3-4.114.

Un topógrafo quiere determinar el perímetro de un terreno rectangular. Ha medido dos lados adyacentes, *X* e *Y*, y ha encontrado que E(X) = 50,11 metros, con una desviación estándar de 0,05 metros, y que E(Y) = 75,21 metros, con una desviación estándar de 0,08 metros. Suponiendo que las mediciones son independientes, encuentre el valor esperado del perímetro del terreno y su desviación estándar.

3.5. Distribuciones de probabilidad conjunta

3-5.115.

Dada la función:

x	y	$f_{XY}(x, y)$
1,5	2	1/8
1,5	3	1/4
2,5	4	1/2
3,0	5	1/8

a) Demuestre que satisface las propiedades de una función de probabilidad conjunta.
b) Calcule las siguientes probabilidades:
   1. P(X < 2,5, Y < 3)
   2. P(X < 2,5)
   3. P(Y < 3)
   4. P(X > 1,8, Y > 4,7)
c) Encuentre E(X) y E(Y).
d) Determine la distribución de probabilidad:
   1. Marginal de la variable aleatoria X.
   2. Condicional de la variable aleatoria Y dado que X = 1,5.
   3. Condicional de la variable aleatoria X dado que Y = 2.
e) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y?

3-5.116.

En la transmisión de información digital, la probabilidad de que un bit tenga una distorsión alta, moderada o baja es 0,01; 0,04 y 0,95, respectivamente. Suponga que se transmiten tres bits y que la cantidad de distorsión de cada uno es independiente. Sean *X* e *Y* las variables aleatorias que denotan el número de bits, de los tres transmitidos, que tienen distorsión alta o moderada, respectivamente.

a) ¿Cuál es el rango de la probabilidad conjunta de *X* e *Y*?
b) Calcule P(X = 3, Y = 0)
c) Determine P(X = 2, Y = 1)
d) Encuentre P(X = 2, Y = 0)
e) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y?

3-5.117.

En la fabricación de una cinta magnética, se coloca un rollo de cinta de 24 pulgadas en carretes de 48,5 pulgadas. Sean las variables aleatorias *X* e *Y* el número de carretes defectuosos en un rollo producido por un proveedor local y por uno internacional, respectivamente. Suponga que el número de carretes defectuosos de los dos proveedores son independientes y que la proporción de carretes defectuosos de los proveedores local e internacional son 2% y 3%, respectivamente.

a) Describa el rango de la distribución de probabilidad conjunta de *X* e *Y*.
b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad marginal de *X*? ¿Cuál es la de *Y*?
c) Calcule el valor de la P(X = 0, Y = 0)
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto *X* como *Y* sean menores o iguales que uno?
e) Encuentre el valor de: E(X), V(X), E(Y), VY)

3-5.118.

Un pedido de 15 impresoras contiene cuatro con una característica de mejoramiento de gráficas, cinco con memoria adicional y seis con ambas características. De este conjunto se eligen al azar cuatro impresoras, sin reemplazo. Sean *X*, *Y* y *Z* las variables aleatorias que denotan el número de impresoras en la muestra que tienen mejoramiento de gráficas, memoria adicional o ambas características, respectivamente.

a) Describa el rango de la distribución de probabilidad conjunta de *X*, *Y* y *Z*.
b) ¿Es multinomial la distribución de probabilidad de *X*, *Y* y *Z*? Justifique su respuesta.
c) Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que Y = 2.
d) Calcule las siguientes probabilidades:
   1. P(X = 1, Y = 2, Z = 1)
   2. P(X = 1, Y = 1)
e) Encuentre E(X) y V(X)

3-5.119.

Dada la función $f(x,y) = cxy$, para la que $0 < x < 3$ y $0 < y < 3$:

a) Determine el valor de c tal que la función $f(x,y)$ cumpla con las propiedades de una función de densidad de probabilidad conjunta.
b) Determine la distribución de probabilidad:
   1. Marginal de la variable aleatoria X.
   2. Condicional de la variable aleatoria Y dado que X = 1,5.
   3. Condicional de la variable aleatoria X dado que Y = 2.

3-5.120.

Se utilizan dos métodos para medir la rugosidad superficial con la finalidad de evaluar un producto de papel. Las mediciones se registran como una desviación a partir del valor nominal de la rugosidad de la superficie. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones puede describirse mediante una distribución uniforme sobre el interior de la región $0 < x < 4$; $0 < y$; y $(x–1) < y < (x+1)$. Esto es, $f(x, y) = c$ para (x, y) tal que $0 < x < 4$; $0 < y$; y $(x–1) < y < (x+1)$.

a) Determine el valor de c para el que la función $f(x, y)$ es una función de distribución de densidad de probabilidad conjunta.
b) Determine P(X < 0,5, Y < 0,5)
c) Obtenga P(X < 0,5)

d) Calcule E(X) y E(Y)
e) Obtenga la distribución de probabilidad condicional de X dado que Y = 1.

3-5.121.

La distribución de probabilidad conjunta de X e Y es:

x	y	$f_{XY}(x, y)$
–1	0	1/4
0	–1	1/4
0	1	1/4
1	0	1/4

Demuestre que la correlación entre X e Y es cero, pero que X e Y no son estadísticamente independientes.

Respuestas

3-1.2

$f(0) = 0{,}008$; $f(1) = 0{,}096$
$f(2) = 0{,}384$; $f(3) = 0{,}512$

3-1.4

a) $k = \lambda = 0{,}3289$
b y c) Se dejan para el estudiante.
d) $\lambda = 0{,}3289$
e) $F(x) = (1 - e^{-\lambda x})$
$F(70) - F(35) = 0{,}21623 \approx 0{,}216$

3-1.5

a) 105
b) E(X) = 0,375; V(X) = 0,2604; $E(X^2) = 0{,}16667$
c) 0,77344

3-1.8

$F(x) = (x + 1)\, e^x$ para valores de $x > 0$
$P(X > 12) = 1 - F(12)$
Rta. = 0,092

3-1.16

$f(-2) = 0{,}2$; $f(0) = 0{,}5$; $f(2) = 0{,}3$
$f(x) = 0$ en otro caso

3-2.17

a) Graficar; b) Sesgada a la derecha; c) 0 y 10;
d) 0,0000; 0,9957; 0,0000; 0,0043

3-2.24

0,3660

3-2.25

a) 0,45452; b) 0,26030; c) 0,90438; d) 0,7397;
e) 0,7397; f) 50

3-2.26

a) 0,9814; b) 0,5768; c) 0,9780

3-2.27

0,019

3-2.30

0,558

3-2.35

0,94

3-2.36

0,0139

3-2.37

a) 0,3324; b) 0,0167

3-2.41

a) 0,3991; b) 0,9510; c) No es un buen procedimiento; hay alta probabilidad de no detectar industrias que contaminan.

3-2.42

0,0147

3-2.43

a) 0,010051836 ≈ 0,01; b) 0,331028; c) 0,88

3-2.44

0,066

3-2.45

0,095

3-2.46

0,0786

3-2.47

4,25

3-2.48

0,0847

3-2.49

a) 0,2668; b) 0,3504

3-3.53

a) 0,0548; b) 0,3779; c) 22,8 ≈ 23
d) 189,95; e) (170,6; 229,4)

3-3.58

a) 0,121; b) 0,2033; c) 0,2292

3-3.60

$z = -1{,}81$; 0,0352

3-3.61

0,6065 < 0,95; no aprobar partida.

3-3.68

a) 0,8749; b) 0,9803

3-3.69

a)

3-3.70

a) 0,0294; b) 1,51 ≈ 1

3-3.73

a) 0,05050; b) 0,10687; c) 0,02275
d) 4,18879 ≈ 4,19

3-3.77

265,8 toneladas

3-3.85

a) Se deja para el alumno.
b) $F(y) = 1 - b/y$ (si $y \geq b$); $F(y) = 0$ (en otro caso).

3-3.86

a) Se deja para el alumno. Debe cumplirlas.
b) $F(y) = 0$ para $y \leq 0$
$F(y) = (y^2 / 2)$ para $0 < y < 1$
$F(y) = (-\frac{1}{2} y^2 + 2y - 1)$ para $1 \leq y \leq 2$
$F(y) = 1$ para $y > 2$
c) 0,36

3-3.87

105

3-3.88

4

3-3.92

0,0559 ≈ 6% de las veces

3-3.93

P(no cumpla) = 0,2514
P(al menos uno de los cuatro no cumpla) = 0,6859; No.

3-3.95

a) 0,06561; b) 0,40951

3-3.103

c) 0,0155039; d) $P(X>5{,}5262) = 0{,}1$; $P(Y \geq 1) = 0{,}651322$; e) $P(X \geq 3) = 0{,}0066365$ por binomial; $P(X \geq 3) = 0{,}00727271$ por Poisson; f) 64,516 ≈ 65

3-3.104

a) 0,30646; b) 0,951674

3-3.105

0,0808

3-3.106

30,031

3-3.107

0,12715

3-3.108

0,0811819 (Binomial)
0,084224 (Poisson); error relativo = +3,75%
0,0715274 (Normal); error relativo = –11,89%

3-3.109

80,873

3-3.110

0,68268

3-3.112

0,13

3-3.113

E(Promedio) = 12,1; V(Promedio) = 0,00025

Rta. P(Z < –6,32) = 0

3-5.114

E(Perímetro) = E(2X + 2Y) = 250,64 metros

V(Perímetro) = V(2X + 2Y) = 4V(X) + 4V(Y)

Desviación estándar (Perímetro) = 0,19 metros

3-5.114

a) Debe verificar. Se deja al alumno la demostración.

b.1) 1/8; b.2) 3/8; b.3) 1/8; b.4) 1/8

c) 35/16 = 2,1875

d.1) $f_X(1,5) = 3/8$; $f_X(2,5) = 4/8$; $f_X(3) = 1/8$

$f_Y(2) = 1/8$; $f_Y(3) = 2/8$; $f_Y(4) = 2/8$; $f_Y(5) = 1/8$

d.2) P(Y = 2 | X = 1,5) = 1/3

P(Y = 3 | X = 1,5) = 2/3

P(Y = 4 | X = 1,5) = 0

P(Y = 5 | X = 1,5) = 0

d.3) P(X = 1,5 | Y = 2) = 1

P(X = 2,5 | Y = 2) = 0

P(X = 3,0 | Y = 2) = 0

e) $f_{XY}(1,5;\ 2) = 1/8 \neq f_X(1,5) . f_Y(2) = 3/8 . 1/8$. No son independientes. Si las variables aleatorias discretas *X* e *Y* fueran independientes, se debería cumplir la igualdad $f_{XY}(x;\ y) = f_X(x) . f_Y(y)$ para todo *(x, y)*.

3-5.116

a) Todos los pares de enteros no negativos *(x, y)* tal que $(x + y) \leq 3$.

b) 1×10^{-6}

c) 12×10^{-6}

d) 285×10^{-6}

e) $f_{XY}(0;\ 0) = 0,857375 \neq f_X(0) . f_Y(0) = 0,970299 . 0,884736$. No son independientes. Si las variables aleatorias discretas *X* e *Y* fueran independientes, se debería cumplir la igualdad $f_{XY}(x;\ y) = f_X(x) . f_Y(y)$ para todo *(x, y)*.

3-5.117

a) Todos los pares de enteros no negativos *(x, y)* tal que $(x + y) \leq 2$.

b) $f_X(0) = 0,9604$; $f_X(1) = 0,0392$; $f_X(2) = 0,0004$

$f_Y(0) = 0,9409$; $f_Y(1) = 0,0582$; $f_Y(2) = 0,0009$

c) 0,9036

d) 0,99987

e) E(X) = 0,0472; V(X) = 0,03925

E(Y) = 0,06; V(Y) = 0,0582

3-5.118

a) Todos los enteros no negativas en los que se cumple que $(x + y + z) \leq 4$.

b) El alumno debería tener presente que los ensayos deberían ser independientes, pero no lo son. Por lo tanto, se trata de una distribución hipergeométrica multivariada.

c) P(X = 0; Z = 2 | Y = 2) = 5/15

P(X = 1; Z = 1 | Y = 2) = 8/15

P(X = 2; Z = 0 | Y = 2) = 2/15

d.1) P(X = 1; Y = 2; Z = 1) = 0,17582

d.2) P(X = 1; Y = 1) = 0,21978

e) E(X) = 16/15 = 1,06667; V(X) = 0,6146

3-5.119

a) $c = 4/81$

b.1) $f_X(x) = 2/9\ x$, *para* $0 \leq x \leq 3$

b.2) $f_{Y\,|\,X=1,5}(y) = 2/9\ y$

b.3) $f_{X\,|\,Y=2}(X) = 2/9\ x$

3-5.120

a) $c = 2/15$

b) 1/30

c) 1/12

d) E(X) = 19/9; E(Y) = 97/45

e) 0,5

3-5.121

El alumno debería demostrar la covarianza y la correlación son iguales a cero ($\sigma_{XY} = 0$ y $\rho_{XY} = 0$). Sin embargo, la igualdad $f_{XY}(x;\ y) = f_X(x) . f_Y(y)$ que debería cumplirse para todo *(x, y)*, no se cumple para el par de valores (–1; 0), por ejemplo, por lo tanto, no son estadísticamente independientes.