FÍSICA I

EL ERROR EN LAS MEDICIONES FISICAS

1. **INTRODUCCION**

- **EL PROCESO DE MEDICIÓN**

¿Qué es el proceso de medición? Consiste en un proceso físico experimental en el cual interactúan tres sistemas: lo que va a medirse, el instrumento o conjunto de instrumentos con los que se mide (del cual forma parte el observador) y el sistema de referencia con el que se compara, es decir las unidades.

Al definir cada proceso de medición se da la “receta” mediante la cual interaccionan estos tres sistemas dando como resultado una cantidad que es la medida de la magnitud en cuestión.

Entonces ¿cómo se mide, por ejemplo, una longitud? Se toma un instrumento, una regla, por ejemplo, y se hace coincidir un extremo de la regla con es extremo del objeto cuya longitud se quiere determinar y se lee qué división coincide con el otro extremo. Obtenemos de esta manera, una medida de la longitud, pero obtenemos además la definición misma de longitud. Es lo que se llama definición operacional: la magnitud es definida en términos de las operaciones que se realizan para medirla.

Pero una misma longitud, puede ser definida operacionalmente de muchos modos diferentes. Los procesos de medición dependen en general del grado de desarrollo de los métodos de medición y del avance de las teorías científicas.

La coherencia de la ciencia está fundamentada en que mediciones de una misma magnitud, basadas en leyes físicas distintas y por lo tanto en procesos de mediciones diferentes, conducen a resultados aproximadamente iguales. Es decir, iguales dentro de los órdenes de error con que se determinaron.

Como resultado de este análisis surge con claridad la imposibilidad de medir una magnitud física exactamente, es decir, con error cero.

- **ORDEN DE MAGNITUD Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS**

Cuando se presenta la necesidad de efectuar una medición, es necesario conocer el orden de magnitud y la tolerancia o error admisible.

¿Qué es orden de magnitud? Es el orden de la potencia de 10 más próxima al valor de la magnitud. Así, 345m es del orden de 10^2, 0,0035 seg es del orden de 10^{-3} seg.

¿Y a qué llamamos cifras significativas? Del proceso de medición se obtienen un número con una cierta cantidad de dígitos que corresponden a los sucesivos órdenes de magnitud medidos. Es decir, cifras que provienen realmente de una medición. Por ejemplo, si queremos medir la longitud de una mesa con una regla en milímetros, expresamos el resultado como 2,725m ó 272,5cm, pero nunca escribiremos 2,725834m, ya que la regla no nos da información sobre las décimas y centésimas de milímetros (expresiones muy comunes encontradas en los resultados de los estudiantes).

Es frecuente que se incurra en confusiones cuando se cambia la unidad en la que se mide.
Por ejemplo: 37,5m $\neq$ 3750cm, ya que el segundo resultado indica que al medir en el orden de los centímetros, obtuvimos el cero, mientras que en el primer caso indica que no se midió el orden de los centímetros

- **ERRORES MINIMOS**

Existe siempre un límite para el número de cifras significativas con que se determina una magnitud.

Cada sistema (el sistema medidor, el sistema a medir, el proceso de medición) que interactúa en el proceso de medición introduce una limitación que no puede superarse sin cambiar el sistema mismo. Estos errores reciben el nombre de errores mínimos.

Este está formado por la suma de los siguientes errores:

- **Error definición**: es el límite de número de cifras significativas determinado por la naturaleza del sistema a medir. Ej. Si quisiéramos medir una mesa de x dimensiones, sería lógico utilizar una regla graduada en centímetros. Pero no tendría sentido hacerlo con un instrumento que capaz de leer 10^{-3} mm ya que la magnitud "largo de la mesa" no está definida hasta ese orden.
- **Error de apreciación**: se llama así, en general, a la mitad de la apreciación misma. Si por ejemplo, se mide la longitud con un vernier cuya apreciación es de 0,01 mm/div, el error de apreciación será de 0,005 m.
- **Error de interacción**: existe una frase muy cierta "no se puede medir sin perturbar". Por ej., cuando se mide un tiempo usando un cronómetro graduado en 1/10 de segundos y se lo opera manualmente, se introduce el tiempo de reacción del observador. De nada valdrá mejorar el instrumento si no se cambia también el mecanismo de interacción.

  Otro ejemplo: para medir una temperatura, el sistema medidor debe tomar calor del sistema a medir y de este modo modifica la temperatura a medir. Si esta interacción es grande puede alterar el resultado enormemente.
- **Error de exactitud**: mide la fidelidad con que la señal de salida de un instrumento permite medir la señal de entrada. Este es un dato que por lo general, lo proporciona el fabricante. Por ej. Si quisiéramos comprar una regla, en el mercado encontraríamos una infinidad de materiales, desde una regla común y barata, hasta un triple decímetro cuyo precio puede ser veinte veces más elevado. ¿De qué depende esto? Precisamente de la exactitud del instrumento.

Además de estos errores mínimos, hay que considerar que al hacer cada medición existen innumerables fluctuaciones que modifican lo parámetros físicos determinantes del proceso.

Es evidente que resulta imposible medir el "verdadero valor" $\overline{X}$ de una magnitud y deberemos conformarnos a lo sumo con determinar el mejor valor o valor más probable m de la misma.

Nuestro problema consistirá justamente en determinar en cada caso cual es ese mejor valor $\overline{X}$ y el intervalo de variación de $\overline{X}$ en el cual podamos afirmar con cierta certeza que está el valor X:

$$X = \overline{X} \pm \Delta X$$

donde ΔX es lo que llamaremos error del mejor valor.

2. PROBLEMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO DE ERRORES

Cuando se mide n veces una magnitud m bajo el supuesto que los errores se distribuyan al azar los problemas básicos a resolver son:

a) ¿Cómo determinar el mejor valor $\overline{X}$?

b) Cuando acotamos el mejor valor $\overline{X}$ con la cota ΔX ¿con qué probabilidad podemos esperar que $\overline{X}$ esté comprendida dentro de un cierto entorno?

$$\overline{X} - \Delta X \leq \overline{X} \leq \overline{X} + \Delta X$$

c) ¿Cómo aplicar las reglas exactas de la matemática a estas cantidades acotadas?

En el caso trivial de una magnitud, el mejor valor es evidentemente el valor medido, y su error es el error mínimo. En este caso no aplicamos la teoría de errores.

Pero si es posible repetir la medición de un número n de veces y se obtienen valores en general diferentes. A este caso se refiere la teoría de errores, que está basada en conceptos del cálculo de probabilidades

3. CLASIFICACION DE LOS ERRORES

Si la medida de una magnitud se efectúa repetidas veces se obtienen generalmente diversos valores, aunque no muy distintos entre sí.

∗ Errores groseros son los que afectan a las medidas que se separan notablemente del "conjunto" y deben desecharse de inmediato.

∗ Errores tolerables son los que perduran una vez excluidos los errores groseros de la serie de mediciones y dan razón de la diversidad de valores hallados. Pueden atribuirse a diversas causas y se las clasifica en dos categorías:

- **ERRORES SISTEMATICOS**

Influyen de igual manera en todas las mediciones (de ahí su nombre) y son muy difíciles de localizar. No aparecen estudiando las medidas hechas y a menudo se ignoran las causas que lo produce. En general provienen de la imperfección de las teorías físicas que sirven de fundamento a las experiencias o de los instrumentos empleados y de ciertas peculiaridades del observador. Actúan de igual modo en todas las ocasiones que se realice una medición, es decir, sistemáticamente. Se caracterizan por actuar siempre en el mismo sentido (ya sea por exceso o por defecto) y porque su valor es, o bien constante o directamente proporcional al valor de la medición. Pueden ser de diversos orígenes, a saber:

a) Errores de calibración de los instrumentos de medida

Si un amperímetro, por ejemplo, tiene su aguja corrida con respecto al cero de la escala, todas las mediciones que con él se hagan estarán afectadas de un error sistemático igual a la diferencia entre el cero de la escala y la posición de la aguja cuando el aparato está desconectado. Es el llamado "error de cero".

Otro ejemplo es el de un cronómetro que atrasa, en cuyo caso los tiempos leídos son menores que los reales.

b) Errores Personales

Tratándose de observadores experimentados, se constata siempre que, cada uno tiene una manera particular de apreciar determinado fenómeno. Por ejemplo, la demora en poner en marcha un cronómetro al comienzo de un experimento o la tendencia permanente a leer desde la izquierda (o la derecha) sobre una escala con paralaje. Es notable el hecho de que cada observador repite este error con regularidad casi mecánica, derivando de allí el nombre de ecuación personal con que se lo designa. Es decir, son los causados por los hábitos individuales del observador.

c) Condiciones Experimentales

Se originan cuando las condiciones en que se utiliza el instrumento de medida difieren de aquéllas en las que fue calibrado. Por ejemplo, si una regla ha sido graduada a 15°C, las longitudes que se midan con ella a 20 °C estarán afectadas de un error sistemático por defecto debido a la dilatación.

d) Imperfección de Técnica

Por ejemplo, la demora en pesar líquidos en recipientes abiertos trae aparejado la comisión de errores debido a la evaporación.

- **ERRORES ACCIDENTALES**

También conocidos hoy como DESVIOS o INDETERMINACIONES, se deben a causas fortuitas y variables y sus valores están comprendidos dentro de la aproximación de los instrumentos. Es a éstos a los cuales se les aplica la "Teoría de errores". En una gama de medidas es notable observar la presencia de errores tanto por defecto como por exceso y de valor variable e impredecible, si bien los pequeños se dan en mayor número que los grandes. Entre ellos se pueden citar:

a) Errores de Juicio: La apreciación a ojo de la fracción de división en una escala es sólo aproximada y, por razones difíciles de conocer, dos fracciones iguales pueden ser leídas como distintas por un mismo observador.

b) Condiciones fluctuantes: Si se mide la intensidad luminosa de una fuente por comparación con una fuente patrón, los resultados estarán afectados por variaciones en la tensión de alimentación del patrón.

c) Definición: Cuando se mide la distancia desde una lente hasta la imagen dada por ella sobre una pantalla, la falta de precisión en la ubicación de la imagen produce error, lo mismo que el medir la temperatura de un líquido sin haber homogeneizado la mezcla.

> Nota: Los errores a los que se ha hecho referencia son legítimos, es decir, el trabajo del experimentador que los ha cometido es aceptable. No sucede lo mismo con otro grupo de errores cuya comisión es un defecto que no puede aparecer en un buen trabajo, por ejemplo, error al leer un número en una escala o al anotarlo en los apuntes. Deben ser considerados, más propiamente, errores groseros o equivocaciones.

4. CORRECION DE LOS ERRORES EN LAS MEDICIONES

Los errores sistemáticos conocidos y algunos errores accidentales pueden ser eliminados mediante la aplicación de correcciones adecuadas. Así sucede, por ejemplo, con los errores de cero o los debidos a la dilatación de una escala por aumentos de temperatura. Ello obliga a controlar cuidadosamente las condiciones de trabajo. Las correcciones, en estos casos, tienen el mismo sentido, ya que la causa que provocó el error hizo que las mediciones fuesen siempre por exceso o siempre por defecto.

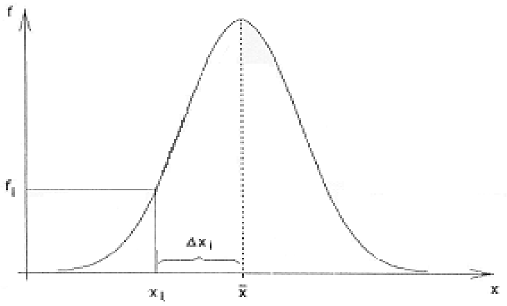
No sucede lo mismo con los errores accidentales comunes, ya que ellos provocan, indiscriminadamente, lecturas por exceso y por defecto. Puesto que las causas son fortuitas, se admite que los valores de las mediciones se reparten igualmente a un lado y a otro del "valor verdadero". Esa es la Ley de distribución de Gauss, y la curva que representa es la llamada Curva Normal de Error.

Supongamos que se mide una misma magnitud un gran número de veces (teóricamente un número infinito de veces) y que con los valores obtenidos se confecciona un gráfico colocando, en las abscisas, los valores de las mediciones, y en las ordenadas, la frecuencia (número de veces que se repite cada valor). Se obtiene una curva campanular llamada Curva Normal de error o Campana de Gauss.

La simetría de la distribución hace aceptar como valor verdadero de la magnitud al que corresponde a la abscisa del vértice, esto es, el valor más frecuente que puede calcularse, en este caso, como la media aritmética de todos los valores.

Todo ello es efectivamente verdadero para un número infinito de valores. En las condiciones reales nunca se dispone de infinitos valores, pero igual se acepta la validez del promedio aritmético con el nombre de "valor más probable", que se toma como la mejor estimación del valor verdadero cuanto mayor sea el número de mediciones que se promedien.

Para dar una idea más precisa de la bondad del trabajo, se acostumbra acompañar el valor más probable con otros valores como el error medio, error cuadrático medio, error medio del promedio, etc.



5. DEFINICIONES UTILES

- **Si se ha realizado una sola medición**

En este caso, el mejor valor es el medido y los errores que los afectan están representados por los errores mínimos (apreciación, exactitud, interacción y definición).

- **Si se han realizado varias mediciones de la misma magnitud**

Si X_i es el resultado de una medición y X el valor exacto de la magnitud medida, definimos como:

a) Error aparente de la medición, definido como $e_i = X_i - \overline{X}$ (también tiene signo y unidad de medida) donde $\overline{X}$ es el

b) Valor más probable de la magnitud medida. Según la hipótesis de Gauss, se admite como tal al promedio aritmético de todas las mediciones

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

c) Error relativo de la medición (adimensional) se define como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero. En la práctica se considera igual al cociente entre el error aparente y el valor más probable

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta x_i}{\overline{X}}$$

y tiene mayor importancia que el error absoluto para juzgar la precisión de una medida. En efecto, afirmar haber cometido un error absoluto de un metro en la medición de una longitud, por ejemplo, nada nos dice respecto del cuidado con que se efectuó si no se aclara cuál es el valor de dicha longitud. Un error absoluto de un metro puede estimarse excesivo si la longitud medida es de 10 m y extraordinariamente pequeño si L = 10 km. El cálculo del error relativo, en cada caso, hará evidente esta conclusión

$$\varepsilon_L = \frac{1m}{10m} = 0{,}1 \quad ; \quad \varepsilon_L' = \frac{1m}{10000m} = 0{,}0001$$

d) Error Relativo Porcentual: Es el error relativo multiplicado por cien. Es la forma más común de expresar el error.

$$\varepsilon_i\% = \frac{x_i}{\overline{X}}.100$$

e) Error Medio: Es la media aritmética de los errores aparentes considerados en valor absoluto.

$$\frac{\sum |x_i|}{n}$$

f) Error cuadrático medio: Definido como la raíz cuadrada del promedio de los CUADRADOS de los errores aparente.

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

g) Error medio del promedio: Es también llamado error **absoluto**, se determina con una sola cifra significativa y mediante un razonamiento cuidadoso y relativamente extenso que relaciona la definición (1) con las definiciones de error aparente $e_i = X_i - X$ puede demostrarse que :

$$E = \pm\sqrt{\frac{\sum e^2{}_i}{n(n-1)}}$$

h) Error relativo del promedio: Usualmente llamado error relativo, es el calculado dividiendo el absoluto por el valor del promedio.

$$\varepsilon = \frac{E_L}{\overline{L}}$$

6) EXPRESION DE RESULTADOS

- **Si se ha realizado una sola medición**

El resultado de una única medición se expresa acompañando a dicho valor con la cota de errores mínimos

$$\mathbf{X} = X \pm \Delta x$$

- **Si se han realizado varias mediciones de la misma magnitud**

El resultado de varias mediciones de una misma magnitud se expresa mediante el valor más probable acompañado del error medio del promedio o el error mínimo, dependiendo del orden de cada error

$$\mathbf{X} = X \pm \Delta x$$

Ejemplo: *Con un palmer de aproximación 0,01 mm se realizaron diez mediciones del diámetro D de una varilla de bronce, como muestra el siguiente cuadro:*

Nº	**Lectura (mm)**	**Valor más Probable (mm)**	**Error Aparente (mm) $x_i . 10^3$**	**Error Relativo**	**Error Relativo Porcentual**	**Errores Aparentes al cuadrado $e_i^2 . 10^6$**
1	2,99		-1	-0,0003	-0,03	1
2	3,00		9	0,0030	0,30	81
3	2,99		-1	-0,0003	-0,03	1
4	3,00		9	0,0030	0,30	81
5	2,98	2,991	-11	-0.0037	-0,37	121
6	2,99		-1	-0,0003	-0,03	1
7	2,98		-11	-0,0037	-0,37	121
8	3,00		9	0,0030	0,30	81
9	3,01		19	0,0063	0,63	361

10	2,97		-21	-0,0070	-0,70	441
Σ	29,91		0,000			1290

$$E_D = \sqrt{\frac{\sum (e_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1290}{10.9}} = 0{,}004$$

El error absoluto del conjunto de mediciones será:

La expresión de D en función del valor más probable acompañado del error medio del promedio

D = 2,991 mm ± 0,004 mm

El error relativo del conjunto de mediciones será: ε = 0.013

y el error porcentual del conjunto de mediciones: ε% = 1.3%

Sin embargo como el error absoluto es menor que la apreciación del instrumento es este el que determina el error de la medición, con lo que la expresión de la medición será:

D = 2,99 mm ± 0,01 mm

7) MEDICIÓN DE UNA MAGNITUD FUNCIÓN DE OTRAS

Ley de Propagación de los errores

Comúnmente los valores medidos se utilizan para obtener otros por cálculo, realizando entre aquellas operaciones matemáticas. Se hace así evidente que los valores obtenidos por cálculo estarán afectados por los errores cometidos en las mediciones. La influencia que en los resultados tienen los errores de cada medición no es la misma y, en general, habrá que aplicar en cada caso los métodos desarrollados en la Teoría de Errores.

Sin necesidad de demostración alguna, el menos avisado podrá advertir que si las magnitudes componentes se miden con un cierto error, la magnitud resultante también lo poseerá en mayor o menor grado. ¿Cómo calcularlo? Es evidente que aquí deberemos considerar una especie de “arrastre” de errores y su estudio pormenorizado, que no efectuaremos por exceder ello el alcance de este curso, nos conduce a la llamada “Ley de propagación de los errores” .

Ella nos indica la forma de calcular el error de una magnitud L = f (X – Y – Z – .....W)

cuando se conocen:

$$X = \overline{X} - E_X \,..... \quad \therefore \quad \varepsilon_X = \frac{E_X}{\overline{X}} \qquad\qquad Y = \overline{Y} - E_Y \,..... \quad \therefore \quad \varepsilon_Y = \frac{E_Y}{\overline{Y}}$$

$$Z = \overline{Z} - E_Z \,..... \quad \therefore \quad \varepsilon_Z = \frac{E_Z}{\overline{Z}} \qquad\qquad W = \overline{W} - E_W \,..... \quad \therefore \quad \varepsilon_W = \frac{E_W}{\overline{W}}$$

Es decir, los valores más probables y los correspondientes errores de las magnitudes de las que L es función.

- **Función L desarrollable por SUMA ALGEBRAICA**

Si la magnitud L, función de otras cuyo error se quiere calcular es suma algebraica de otras magnitudes que se miden, el error absoluto del mismo es la suma de los errores absolutos de las mediciones realizadas, es decir:

Si: L = a.X ± b.Y ± c.Z ± ...... ± k.W

donde a – b – c - ,...- k son coeficientes numéricos reales.

En este caso , el error absoluto E_L de la magnitud L se determina mediante la fórmula:

$$E_L = \pm\sqrt{a^2 E_X^2 + b^2 E_Y^2 + c^2 E_Z^2 + ... + k^2 E_W^2}$$

Y en la gran mayoría de los casos que se nos presentan en el laboratorio, es suficientemente aproximada la sustitución de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados por la suma de los valores absolutos de los términos, es decir, resulta perfectamente lícito utilizar:

$$E_L = \pm(a.E_X + b.E_Y + c.E_Z + ... + k.E_W)$$

- **Función L desarrollable por LOGARITMOS**

Si la magnitud L, función de otras cuyo error se quiere calcular responde a la expresión general: $L = X^a.Y^b.Z^c....W^k$

donde a, b, c y k son coeficientes numéricos reales.

Ahora el cálculo del error absoluto E_L no es tan inmediato como en el caso anterior. Lo que se

$$\varepsilon_L = \sqrt{a^2.\varepsilon_X^2 + b^2\varepsilon_Y^2 + c^2\varepsilon_Z^2 + ... + k^2\varepsilon_W^2}$$

determina en primer lugar es el error relativo de L mediante la fórmula:

Siendo suficientemente aproximada la fórmula

$$\varepsilon_L = \pm(a.\varepsilon_X + b.\varepsilon_Y + c.\varepsilon_Z + ... + k\varepsilon_W)$$

Luego, teniendo en cuenta la definición de error relativo: $\varepsilon_L = \frac{E_L}{\overline{L}}$

Resulta el error absoluto: $E_L = \varepsilon_L.\ \overline{L}$

Con el valor más probable: $\overline{L} = \overline{X}^a.\overline{Y}^b.\overline{Z}^c...\overline{W}^k$

8. OBSERVACIONES

1.- Las magnitudes consideradas deben ser independientes; es decir: las mediciones que conduzcan a determinar una cualquiera de ellas no deben depender de las que conduzcan a la determinación de las restantes. Por eso en las fórmulas aproximadas siempre SUMAMOS los errores, aun reconociendo que en ciertos casos podrían cancelarse parcialmente.

2.- Debido a lo anterior es recomendable, al calcular el valor de una expresión, efectuar todas las simplificaciones posibles antes de sustituir los valores numéricos.

Por ejemplo, ante una expresión del tipo $L = \frac{3X^4}{4X^3}$ debemos simplificar antes de sustituir X por su valor. Hecho esto encontramos: L = ¾ X y $\varepsilon_L = \varepsilon_X$ caso contrario llegaríamos a que:

$$\varepsilon_L = 4\varepsilon_X + 3\ \varepsilon_X = 7\ \varepsilon_X$$

9. CONCLUSION

La teoría y aplicaciones que hemos tratado en este apéndice resultan de gran utilidad en el trabajo experimental posibilitándonos, al par que determinar el error del resultado en cualquier caso, decidir con qué precisión debemos efectuar las medidas parciales al trabajar con una magnitud función de otras y a cuáles prestar mayor atención.

Siempre debe tratarse que los errores cometidos en las distintas mediciones sean del mismo orden, porque el mayor será el que se refleje en el resultado final y nada ganamos afinando exageradamente la precisión de una medida, si por otro lado el error que se comete es de un orden muy superior e imposible de disminuir.