

Unidad 3 – Dinámica del punto.

3.1- Introducción. Objeto de la Dinámica.

3.2- Leyes clásicas del movimiento. Fuerza y momento lineal.

3.3- Tipos de interacciones en la naturaleza: Interacción gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y débil.

3.4- Leyes de fuerzas fenomenológicas: reacciones en apoyos, rozamiento y fuerzas elásticas.

3.5- Momento angular. Variación temporal del momento angular.

3.6- Fuerzas centrales.

3.7- Trabajo de una fuerza.

3.8- Teorema de las fuerzas vivas. Energía cinética.

3.9- Potencia.

3.10- Trabajo de una Fuerza conservativa. Energía potencial.

3.11- Teorema de la energía mecánica. Conservación de la energía mecánica.

3.1 – Introducción. Objeto de la Dinámica.

- **¿Qué es el movimiento?**

Variación aparente de la posición de un cuerpo durante el transcurso del tiempo.

- **¿Qué es la aproximación de partícula o punto material?**

Aproximación que considera a los *cuerpos* como *masas puntuales* (no considera su forma, tamaño y dimensiones internas).

Simplificación razonable cuando la estructura interna y la composición de los cuerpos no cambia durante el movimiento y cuando se mueven en una región mucho mayor que su tamaño.

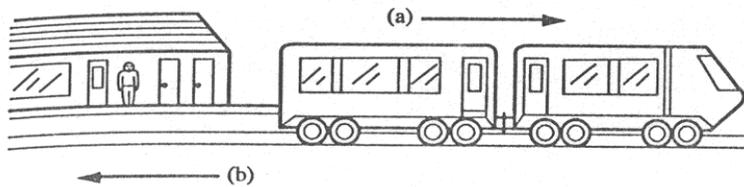
- **Carácter relativo de movimiento**

Un objeto *se mueve* respecto a otro cuando su posición respecto a éste cambia con el tiempo. Si la posición no cambia se dice que está en *reposo*.

El movimiento es un *concepto relativo* → Un cuerpo puede estar moviéndose respecto a un objeto y permanecer en reposo respecto otro.

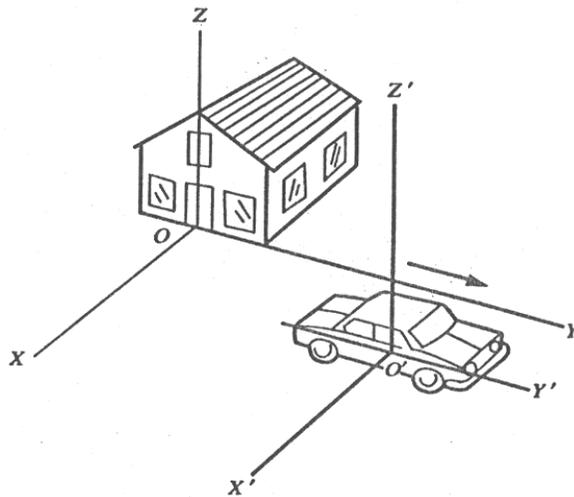
3.1 – Introducción. Objeto de la Dinámica.

- Para describir el movimiento es necesario definir un **sistema de referencia** en relación al cual se describe el movimiento. A este sistema de referencia se le asigna un **eje de coordenadas**.



(a) Vista de tren desde estación.

(b) Vista de estación desde tren



Sistemas de referencia en movimiento relativo

3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **¿Qué es una partícula libre?**

Aquella que no está sujeta a **ninguna interacción** con el medio que le rodea → Su movimiento no es perturbado por el medio.

Estrictamente **no existen**, pero pueden considerarse libres cuando

- Sus **interacciones son débiles al estar alejadas** unas partículas de otras.
- Los **efectos de interacción** de unas partículas con otras **se cancelan** y su interacción neta es nula.

- **Primera ley de Newton o ley de la inercia.**

Una partícula libre se mueve con velocidad constante (permanece en reposo o con MRU) respecto de ciertos sistemas de referencia especiales denominados inerciales (SRI).

Un SRI no está sujeta a interacción con el medio.



3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **Momento lineal**

Se define como:

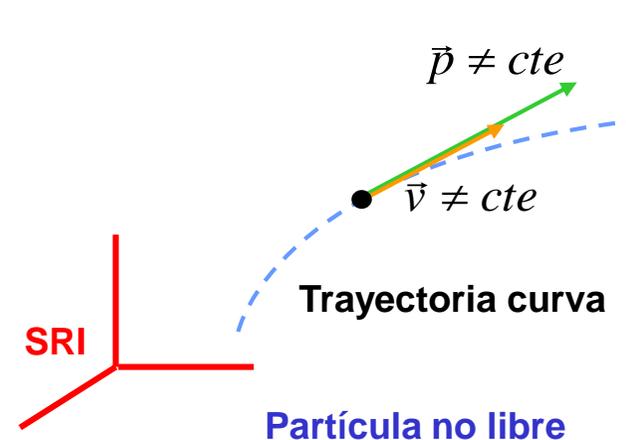
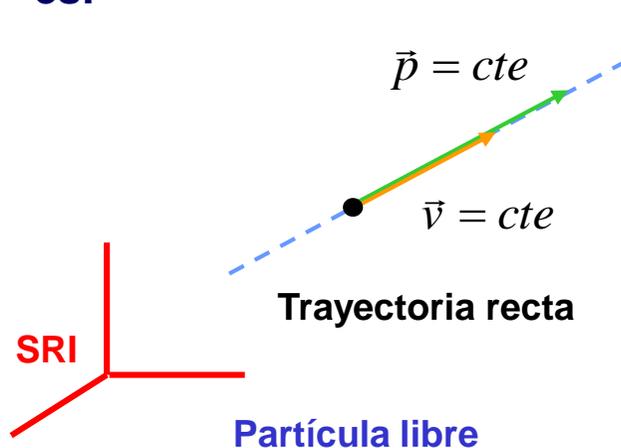
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Una **partícula libre** se mueve con momento lineal constante respecto un SRI.

$$\vec{p} = cte$$

Si la **partícula no es libre** y su velocidad cambia en un intervalo de tiempo Δt el cambio de momento lineal es:

$$\Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v}$$



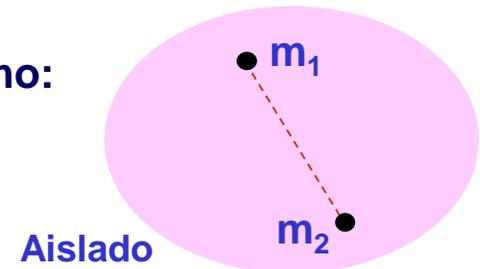
3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **Momento lineal de un sistema de partículas. Principio de conservación del momento lineal.**

Sea un **sistema de dos partículas aislado** en el que las únicas interacciones posibles es el de las dos partículas del sistema entre sí.

Se define el **momento lineal de este sistema de partículas** como:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$



El **principio de conservación del momento lineal** para un sistema establece que si éste se encuentra aislado su momento lineal permanece constante (respecto un SRI).

Principio de conservación del momento lineal

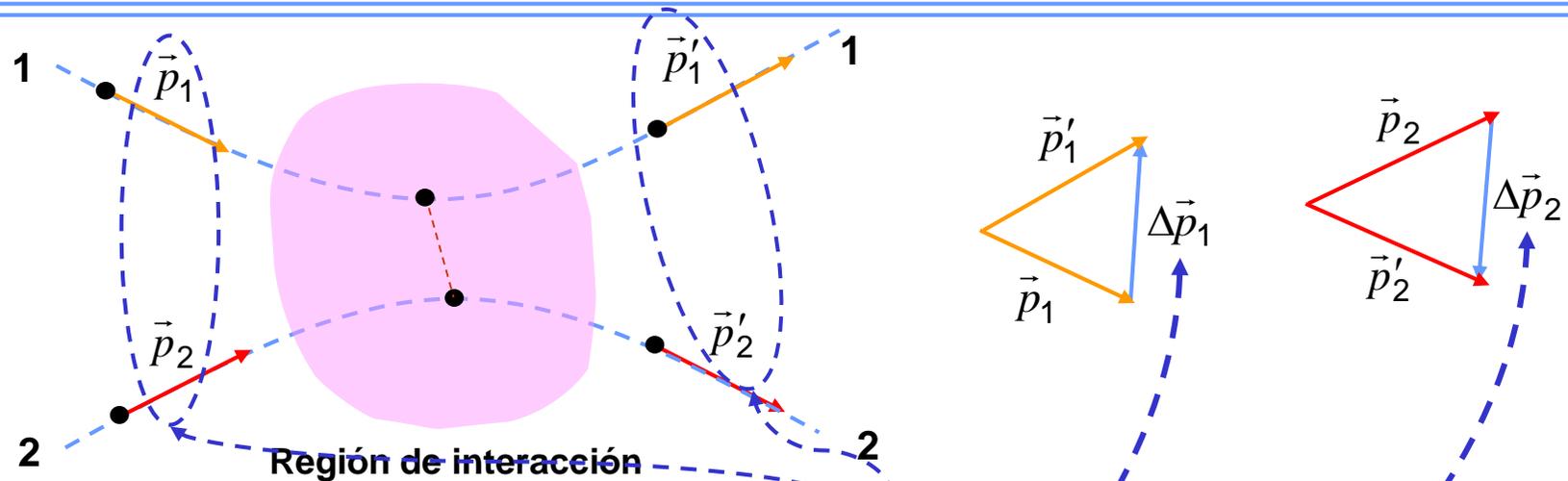
Aislado

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

El momento lineal de un sistema compuesto de dos partículas sujetas solo a su interacción mutua permanece constante.

Sin embargo el **momento lineal de cada una de las partículas** debido a su interacción con la otra **si puede cambiar**.

3.2 – Leyes clásicas del movimiento.



El momento lineal del sistema en los tiempos t y t' viene dado por:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad \vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Al estar aislado se cumple

$$\vec{P}' = \vec{P} \implies \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \implies \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$$

Y como la **variación del momento lineal** de las partículas vienen dados por:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p}_1 &= \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \\ \Delta \vec{p}_2 &= \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 \end{aligned} \implies \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

Una interacción produce un intercambio de momento lineal.

3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **Segunda y tercera ley de Newton.**

Hemos visto que para dos partículas aisladas sujetas a su interacción mutua.

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \xrightarrow{\substack{\text{Dividiendo por} \\ \Delta t = t' - t}} \quad \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \quad \xrightarrow{\substack{\text{Haciendo que} \\ \Delta t \rightarrow 0}} \quad \boxed{\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}}$$

Se define entonces **la fuerza** como:

Segunda ley de Newton

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

La tasa de cambio de momento lineal de una partícula con respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula.

Si la **partícula es libre** entonces:

$$\vec{p} = cte \quad \xrightarrow{\quad} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

La relación entre la fuerza y la aceleración viene dada a través de:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

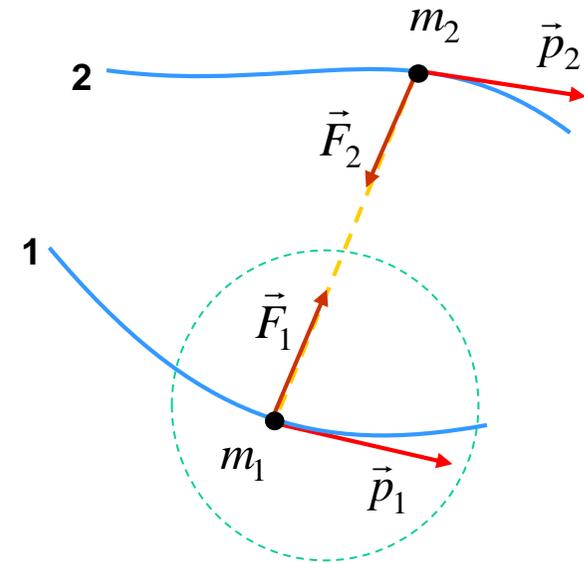
3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

Para dos partículas aisladas sujetas a su interacción usando el concepto de fuerza se tiene que:

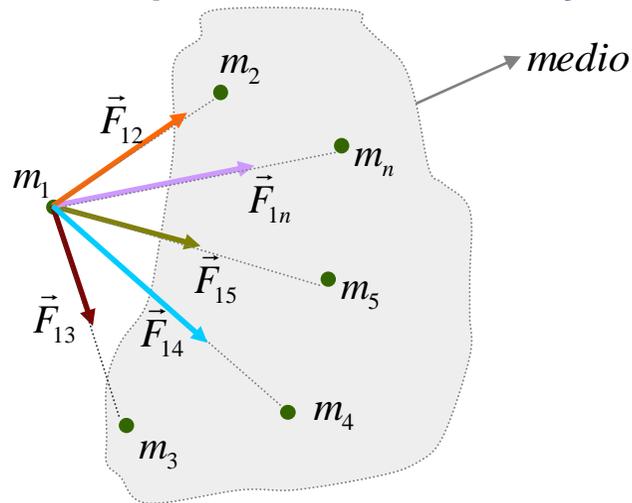
$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

Tercera ley de Newton

Cuando dos partículas interactúan la fuerza sobre la primera ejercida por la segunda, es igual y opuesta a la fuerza sobre la segunda ejercida por la primera.



El concepto de fuerza es útil ya que:



1 – Se cumple el principio de superposición:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

2 – Las formas funcionales de las fuerzas son conocida.

3.3 – Tipos de interacciones en la naturaleza.

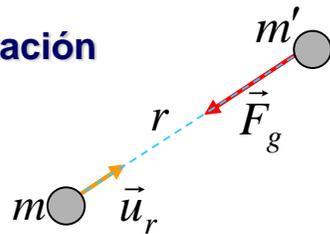
Aunque se conocen muchos tipos de fuerzas, las **interacciones fundamentales** de la naturaleza son:

Interacción	Intensidad relativa	Alcance (metros)	Propiedad de la materia	Escenario	Partícula mediadora
Nuclear fuerte	1	10^{-15}	Carga de color	Núcleos	Gluón
Electromagnética	10^{-2}	∞	Carga eléctrica	Átomos y moléculas	Fotón
Nuclear débil	10^{-12}	$< 10^{-17}$	Carga débil	Desintegración β	Bosón
Gravitatoria	10^{-40}	∞	masa	Cosmos	Gravitón

Interacción gravitatoria

$G \Rightarrow$ Cte de Gravitación Universal

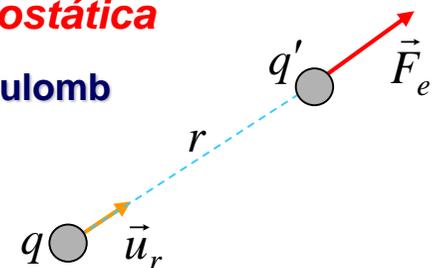
$$\vec{F}_g = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$



Interacción electrostática

$k \Rightarrow$ Cte de Coulomb

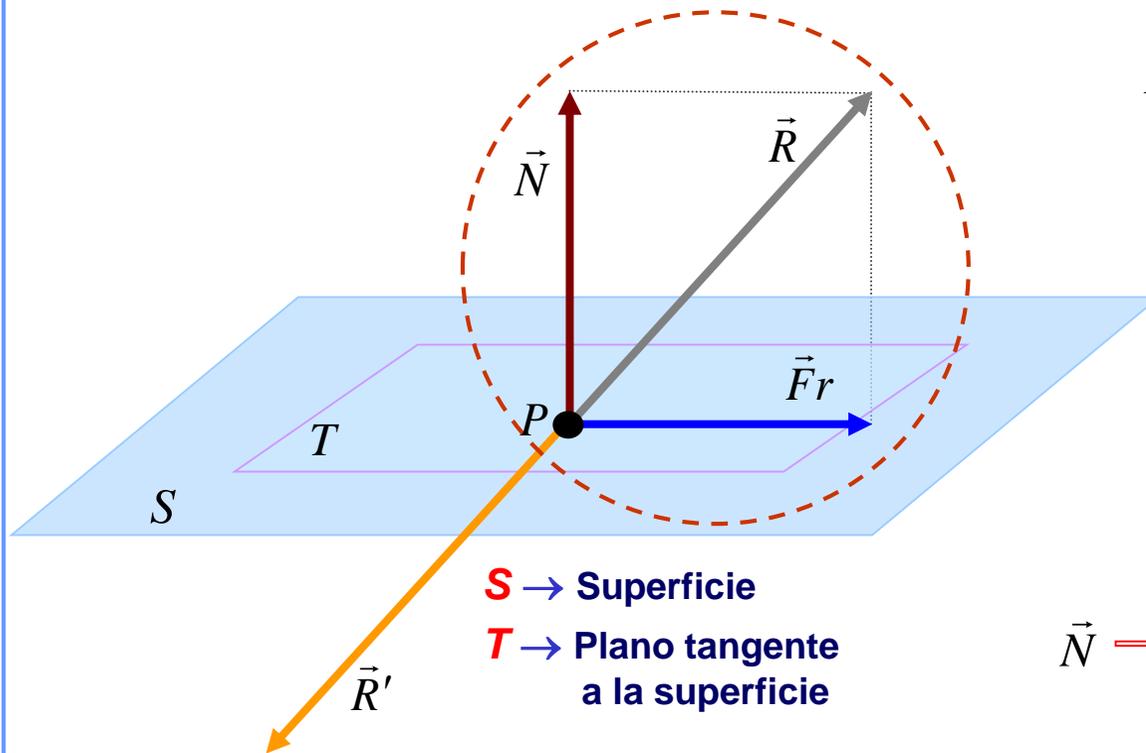
$$\vec{F}_e = k \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r$$



3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

- **Fuerzas de reacción en apoyos.**

Para un objeto P que se apoya sobre una superficie se tiene que:



$\vec{R}' \Rightarrow$ Fuerza que ejerce el objeto sobre la superficie.

$\vec{R} \Rightarrow$ Fuerza que ejerce la superficie sobre el objeto (**Reacción al apoyo**)

La fuerza de reacción al apoyo se puede descomponer en:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_r$$

$\vec{N} \Rightarrow$ **Normal** (perpendicular al plano tangente)

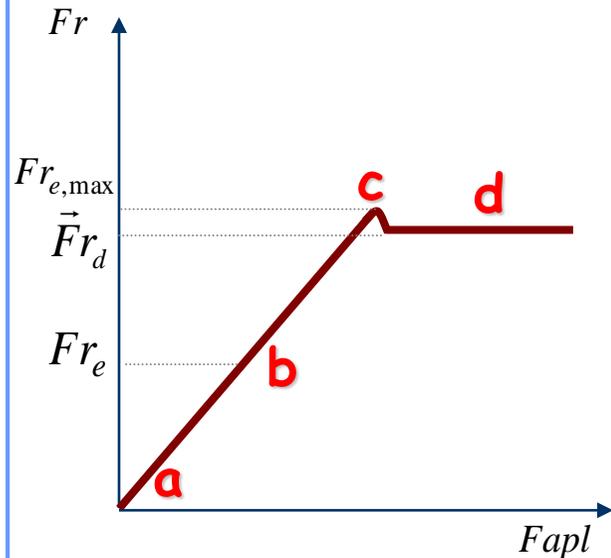
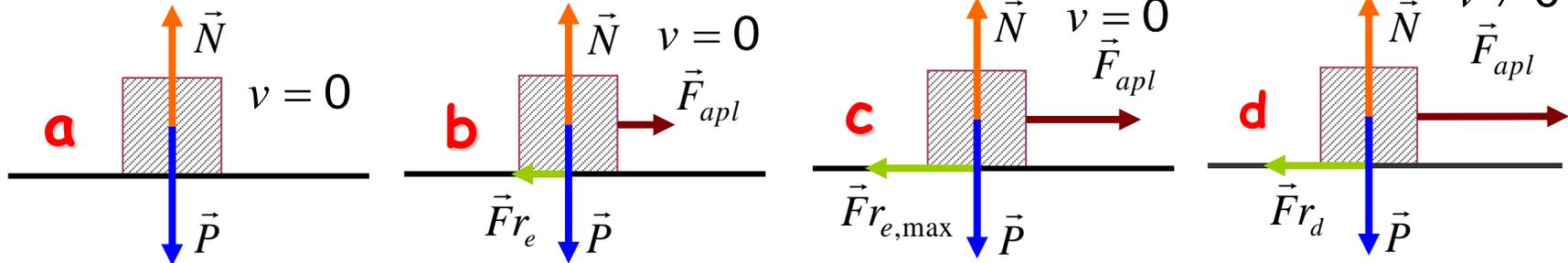
$\vec{F}_r \Rightarrow$ **Fuerza de rozamiento o fricción** (contenida en el plano tangente)

3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

Fuerza de rozamiento (F_r).

Rozamiento seco.

Producido entre dos cuerpos sólidos (ejemplo bloque sobre una superficie sólida).



a) Bloque en equilibrio bajo acción de su peso y la normal.

b) Se aplica una fuerza que aumenta gradualmente pero el bloque no se mueve → Existe una fuerza igual y de sentido contrario llamada **Fuerza de rozamiento estática**.

$$\vec{F}r_e = -\vec{F}_{apl}$$

c) La situación anterior continua hasta llegar a un momento que si aumenta la fuerza aplicada el bloque se mueve → El rozamiento se llama **Fuerza de rozamiento estática máxima**.

$$\vec{F}r_{e,max} = -\mu_e N \vec{u}_v$$

d) Una vez el bloque se mueve al continuar aumentando la fuerza aplicada el rozamiento disminuye y toma un valor constante → El rozamiento se llama **Fuerza de rozamiento dinámica**.

$$\vec{F}r_d = -\mu_d N \vec{u}_v$$

3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

Características del rozamiento seco esta fuerza:

- 1.- Dependen de la naturaleza y condiciones de las superficies en contacto, pero no del área de contacto entre las superficies.
- 2.- Son tangentes a la superficie de contacto de ambos cuerpos.
- 3.- Aparecen sobre ambos cuerpos al aplicar una fuerza sobre uno de ellos, pudiendo haber o no deslizamiento relativo entre ambos.

Material	μ_e	μ_d
Acero sobre acero	0'74	'057
Aluminio sobre acero	0'61	0'47
Vidrio sobre vidrio	0'94	0'40
Caucho sobre hormigón	0'90	0'80
Acero sobre hielo	0'10	0'06

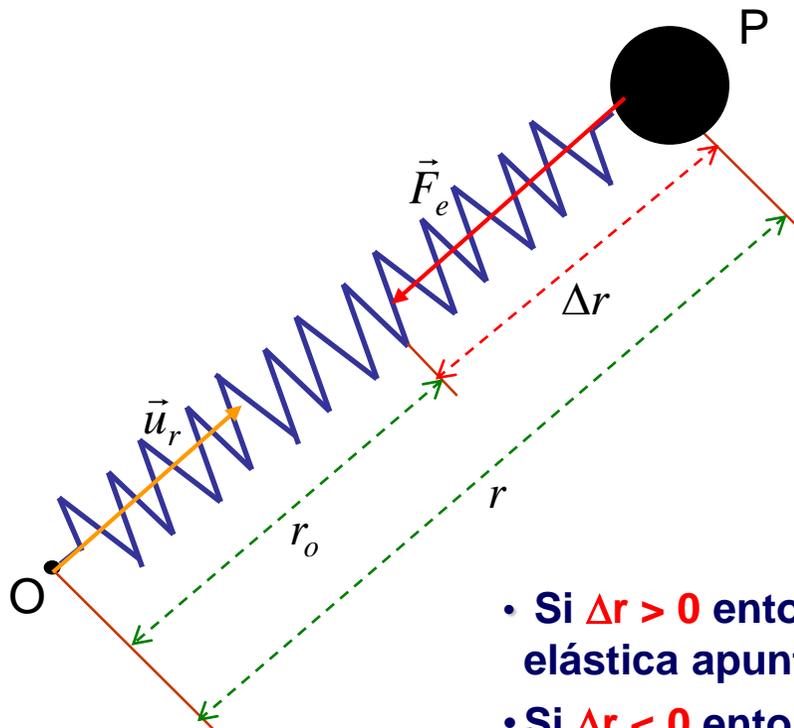
Rozamiento fluido.

Producido entre capas contiguas de fluido que se mueven a distinta velocidad o el que sufre un sólido que se desplaza por un fluido. Se le llama también **fuerza viscosa** y depende de muchos factores (forma del sólido, velocidad del objeto respecto fluido,...). Se expresa en ocasiones como:

$$\vec{F}r_v = -b\vec{v}$$

3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

Fuerza elástica (F_e)



$$\vec{F}_{el} = -k \Delta r \vec{u}_r \quad \text{Ley de Hooke}$$

k \Rightarrow Constante elástica o del resorte

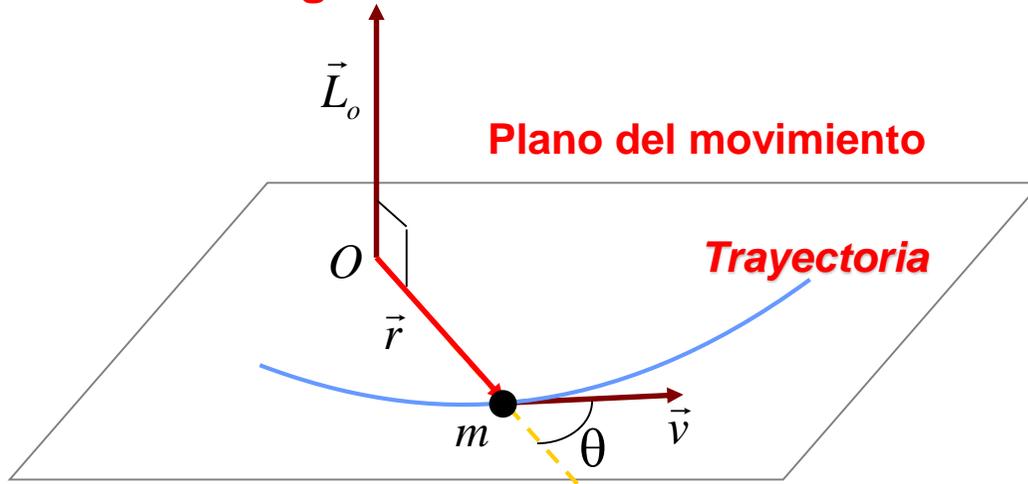
\vec{u}_r \Rightarrow Vector unitario en la dirección y sentido del resorte de O a P

$\Delta r = r - r_0$ \Rightarrow Deformación del resorte

- Si $\Delta r > 0$ entonces el resorte está **estirado** y la fuerza elástica apunta en sentido contrario al vector unitario.
- Si $\Delta r < 0$ entonces el resorte está **comprimido** y la fuerza elástica apunta en el sentido contrario del vector unitario.
- Por tanto la fuerza elástica se opone a que la partícula sea desplazada y por ello se denomina **fuerza recuperadora**.

3.5 – Momento angular. Variación temporal del momento angular.

Momento angular

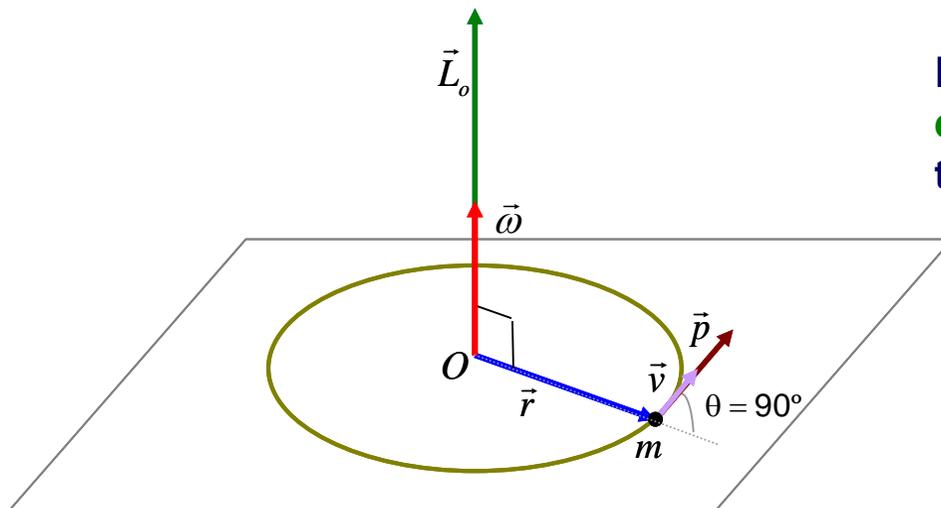


Se define como:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Su módulo es igual a:

$$L_o = |\vec{L}_o| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv \sin\theta$$

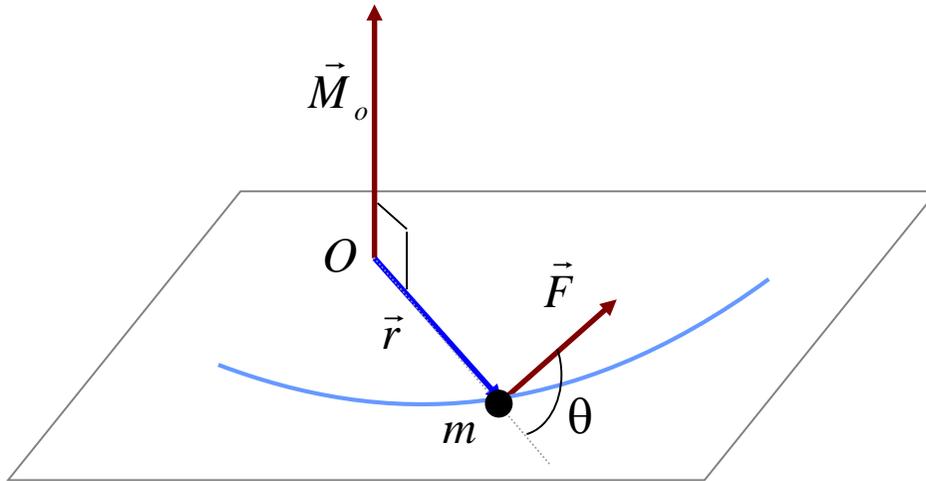


Para un movimiento curvilíneo o circular en un plano el momento angular puede también expresarse como:

$$\vec{L}_o = mr^2\vec{\omega}$$

3.5 – Momento angular. Variación temporal del momento angular.

Momento de una fuerza



Se define como: $\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

Su módulo es igual a:

$$M_o = |\vec{M}_o| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \text{sen}\theta$$

Se puede demostrar que:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

Teorema del momento angular

Se cumple que si:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_o = cte$$

Teorema de conservación del momento angular

3.6 – Fuerzas centrales.

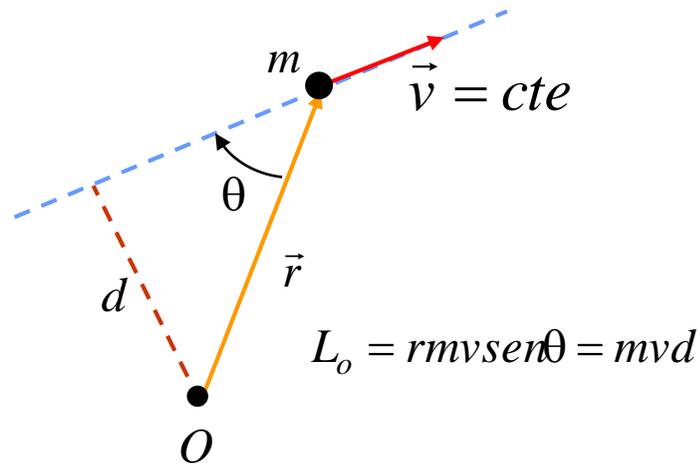
El momento de una fuerza es nulo (y por tanto el momento angular se mantiene constante) cuando:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

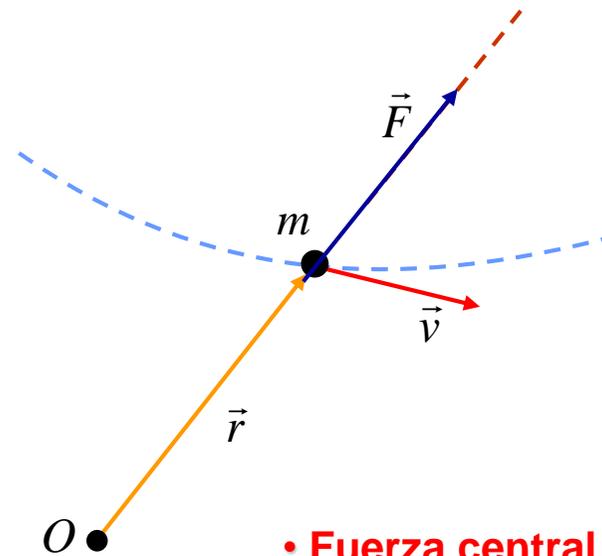
$\vec{r} = \vec{0}$
 $\vec{F} = \vec{0}$
 $\vec{r} \parallel \vec{F}$

⇒ Cuando la partícula es **libre**.

⇒ Cuando ambos vectores son paralelos. La fuerza se dice que es **central**.



• **Partícula libre**



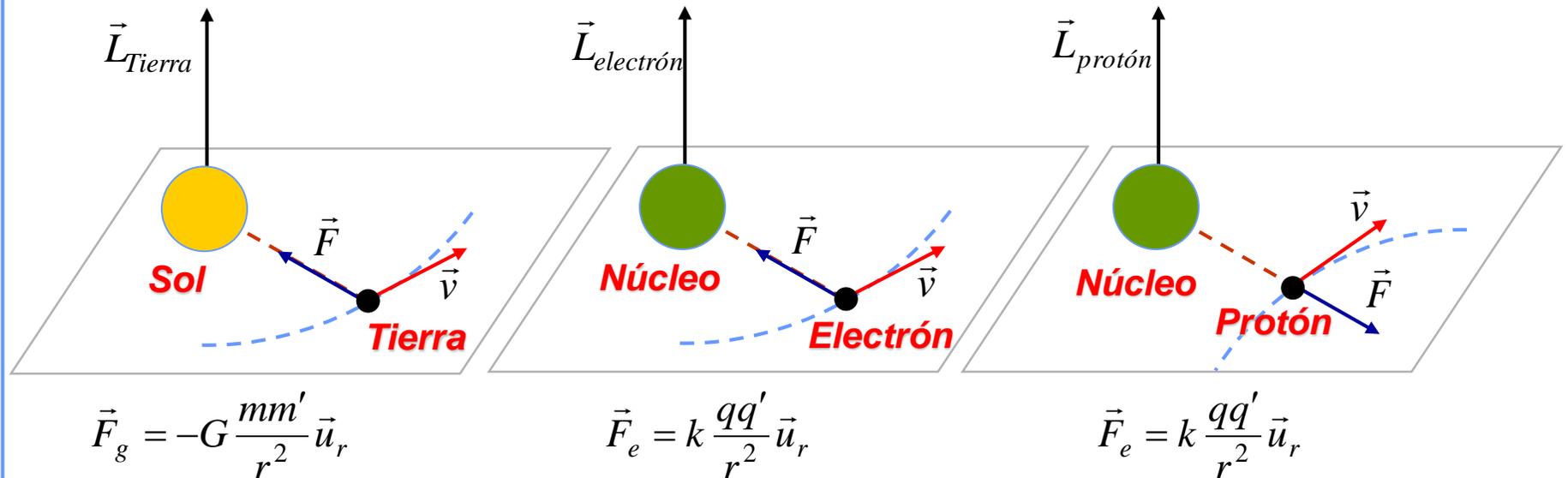
• **Fuerza central**

3.6 – Fuerzas centrales.

- Cuando la fuerza es central su dirección pasa por un punto fijo \circ que se denomina **centro de la fuerza**. Por tanto:

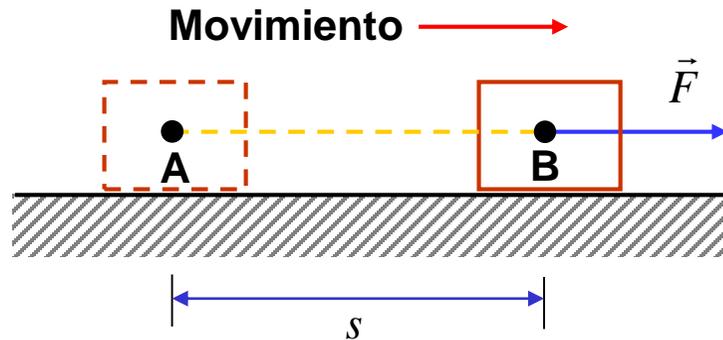
Cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, el momento angular en relación con el centro de fuerza es una constante de movimiento y viceversa.

- Muchas fuerzas que aparecen en la naturaleza son centrales.



3.7 – Trabajo de una fuerza.

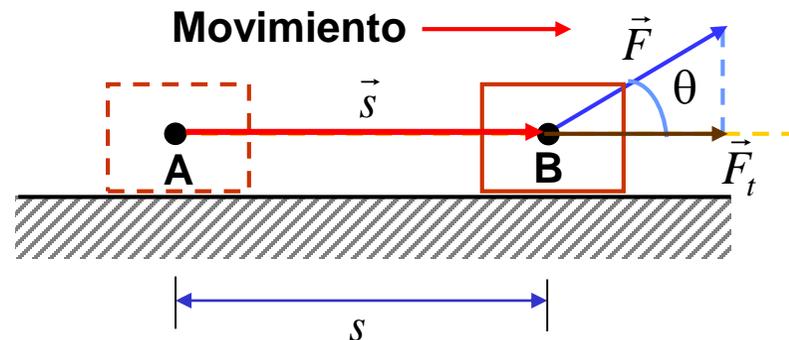
- Para una fuerza constante paralela al desplazamiento que es rectilíneo, se define el **trabajo** como:



Trabajo = Fuerza \times distancia

$$\Rightarrow W = F s$$

- Si la fuerza constante forma un ángulo con la dirección del desplazamiento, solo la **componente en la dirección del desplazamiento** se usa para calcular el trabajo.



Como $F_t = F \cos \theta$

Producto escalar

$$W = F_t s$$

$$\Rightarrow W = F s \cos \theta$$

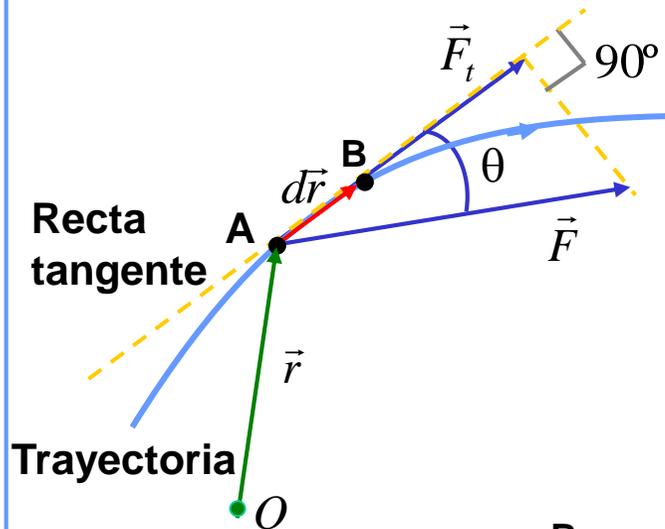
$$\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

- Si $\theta = 90^\circ \Rightarrow W = 0$
- Si $90^\circ > \theta \geq 0^\circ \Rightarrow W > 0$
- Si $180^\circ \geq \theta > 90^\circ \Rightarrow W < 0$

3.7 – Trabajo de una fuerza.

- Si la trayectoria de la partícula **no es rectilínea** y/o la fuerza que actúa es **variable**, se divide la trayectoria en pequeños elementos rectilíneos para los cuales la fuerza es constante. Llamando a uno de estos **desplazamientos elementales** como:

$$d\vec{r} = \mathbf{AB}$$



- El **trabajo elemental** hecho por la fuerza durante ese desplazamiento es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad dW = F ds \cos\theta \quad \longrightarrow \quad dW = F_t ds$$

Como $|d\vec{r}| = ds$

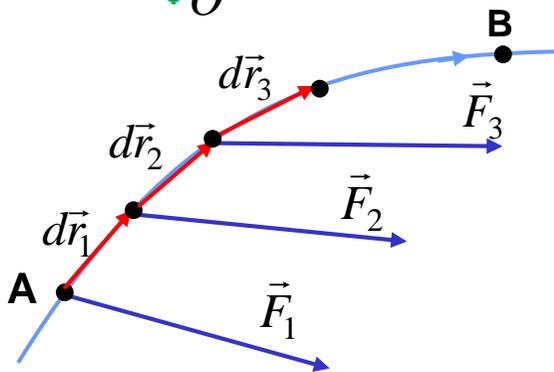
Como $F_t = F \cos\theta$

- El **trabajo total** hecho sobre la partícula es la suma de los trabajos elementales realizados en los pequeños desplazamientos a lo largo de la trayectoria.

$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \dots = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

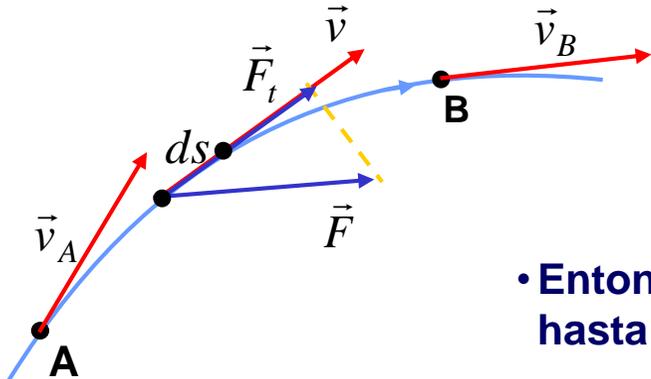
- Si los desplazamientos son muy pequeños la suma se puede reemplazar por una integral.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F ds \cos\theta = \int_A^B F_t ds$$



3.8 – Teorema de las fuerzas vivas. Energía cinética.

- Para un cuerpo que se mueve en una trayectoria curvilínea, la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es:



Trayectoria

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

- El trabajo realizado en un desplazamiento elemental es:

$$dW = F_t ds$$

- Entonces el trabajo total para desplazar al cuerpo desde **A** hasta **B** es:

$$W = \int_A^B \vec{F}_t ds = \int_A^B mv dv = \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$$

- Definiendo la **energía cinética** como:

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2$$

Resulta el trabajo total

$$W = Ec_B - Ec_A = \Delta Ec$$

Teorema del trabajo y la energía cinética o de las fuerzas vivas

El trabajo hecho por la fuerza que actúa sobre una partícula es igual al cambio de su energía cinética.

3.9 – Potencia.

- Para el trabajo realizado en un intervalo de tiempo muy pequeño se define la **potencia** o **potencia instantánea** como:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \quad \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} \quad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Como $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ **Como** $\vec{v} = d\vec{r}/dt$

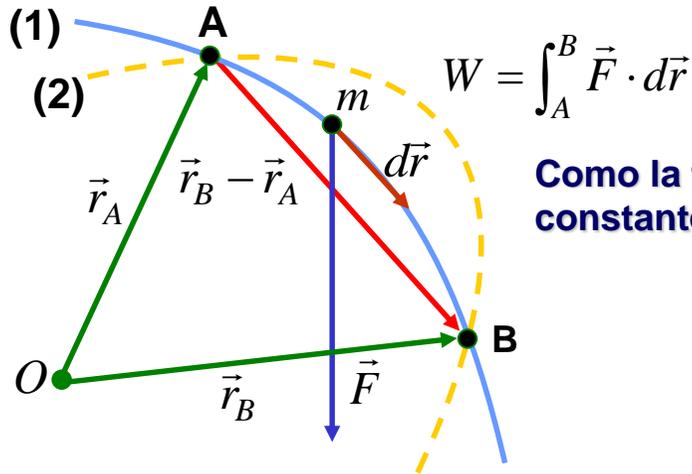
- La **potencia media** durante un cierto intervalo de tiempo se obtiene a través de:

$$\boxed{P = \frac{W}{\Delta t}}$$

3.10 – Trabajo de una fuerza conservativa. Energía potencial.

- **Trabajo de una fuerza constante.**

Sea una partícula que se mueve bajo la acción de una **fuerza constante en módulo y dirección**. El trabajo realizado por ésta será:

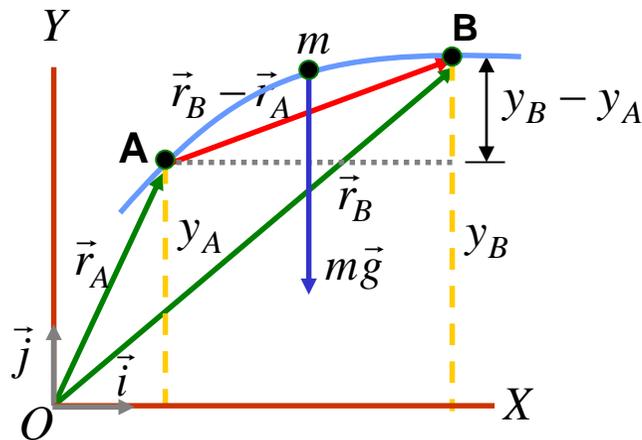


El trabajo es igual para las trayectorias (1) ó (2) al ir de A hasta B.

También se puede expresar

El trabajo es igual a la diferencia de una cierta cantidad evaluada al final y al principio de la trayectoria.

$$W = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{r}_B}_{\text{final}} - \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{r}_A}_{\text{inicial}}$$



• Para una fuerza constante como el **peso** se tiene:

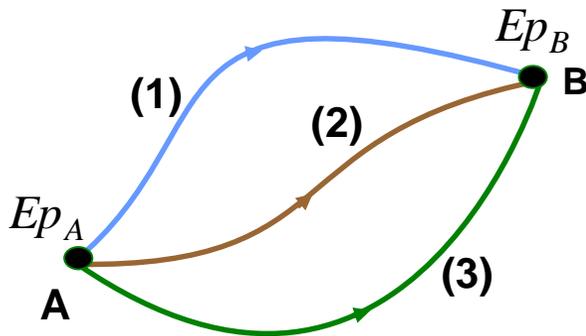
$$\vec{F} = m\vec{g} - mg\vec{j} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{r} = -mg\vec{j} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = -mgy$$

$$W = -mgy_B - (-mgy_A)$$

3.10 – Trabajo de una fuerza conservativa. Energía potencial.

- **Energía potencial.**

El caso anterior corresponde a una clase de fuerzas llamadas **conservativas** para las cuales el trabajo es **independiente de la trayectoria** y puede expresarse como la diferencia de una cierta cantidad llamada **energía potencial** evaluada en los puntos **inicial y final**.



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{Ep_A}_{\text{inicial}} - \underbrace{Ep_B}_{\text{final}} \implies W = -\Delta Ep$$

- **Fuerza constante** $\implies Ep = -\vec{F} \cdot \vec{r}$

- **Peso** $\implies Ep = mgy$

- La energía potencial está definida salvo una constante arbitraria que se fija estableciendo el **cero o nivel de referencia** de la energía potencial.
- El trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de cualquier **trayectoria cerrada** es **nulo**.

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

3.10 – Trabajo de una fuerza conservativa. Energía potencial.

- **Relación entre fuerza y energía potencial.**

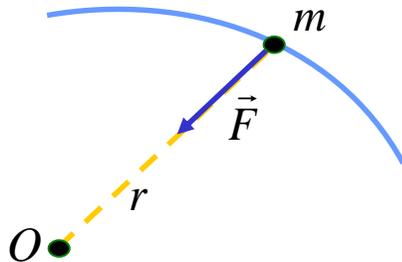
Para que se cumpla $W = -\Delta E_p$ es necesario que par un desplazamiento elemental esté relacionado con el cambio de energía potencial a través de:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p \implies F ds \cos\theta = F_t ds = -dE_p \implies F_t = -\frac{dE_p}{ds}$$

- Las componentes de las fuerzas a lo largo de los ejes coordenados vienen dadas a través de:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}, \quad F_y = -\frac{dE_p}{dy}, \quad F_z = -\frac{dE_p}{dz}$$

- Si E_p solo depende de la distancia r a un punto fijo y no de la dirección, la **única componente de la fuerza** está definida en la dirección en que r aumenta o disminuye (se trata de una **fuerza central**), y se tiene que:



$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

3.11 – Teorema de la energía mecánica. Conservación de la energía mecánica.

- Cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es **conservativa** se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} W = -\Delta E_p \\ W = \Delta E_c \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \text{Los cambios de energía cinética y potencial son iguales y opuestos}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = 0$$

- Definiendo la **energía mecánica** o **energía total** de la partícula como:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

Principio de conservación de la energía

Cuando la fuerza que actúa es **conservativa** la energía total permanece **constante**

Si la fuerza que actúa es conservativa

$$\Delta(E) = 0 \Rightarrow E = E_c + E_p = \text{constante} \Rightarrow (E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$$

- Cuando sobre la partícula actúan fuerzas **conservativas** y **no conservativas** se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} W_c = -\Delta E_p \\ W = W_c + W_{nc} = \Delta E_c \end{array} \right\} \Rightarrow W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) \Rightarrow W_{nc} = \Delta E = E_B - E_A$$

Teorema de la energía mecánica

Cuando las fuerzas que actúan son **conservativas** y **no conservativas**, el trabajo de las no conservativas es igual a la variación de la energía total