

## **Unidad 3 – Dinámica del punto.**

**3.1- Introducción. Objeto de la Dinámica.**

**3.2- Leyes clásicas del movimiento. Fuerza y momento lineal.**

**3.3- Tipos de interacciones en la naturaleza: Interacción gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y débil.**

**3.4- Leyes de fuerzas fenomenológicas: reacciones en apoyos, rozamiento y fuerzas elásticas.**

**3.5- Momento angular. Variación temporal del momento angular.**

**3.6- Fuerzas centrales.**

**3.7- Trabajo de una fuerza.**

**3.8- Teorema de las fuerzas vivas. Energía cinética.**

**3.9- Potencia.**

**3.10- Trabajo de una Fuerza conservativa. Energía potencial.**

**3.11- Teorema de la energía mecánica. Conservación de la energía mecánica.**

## 3.1 – Introducción. Objeto de la Dinámica.

- **¿Qué es el movimiento?**

Variación aparente de la posición de un cuerpo durante el transcurso del tiempo.

- **¿Qué es la aproximación de partícula o punto material?**

Aproximación que considera a los *cuerpos* como *masas puntuales* (no considera su forma, tamaño y dimensiones internas).

Simplificación razonable cuando la estructura interna y la composición de los cuerpos no cambia durante el movimiento y cuando se mueven en una región mucho mayor que su tamaño.

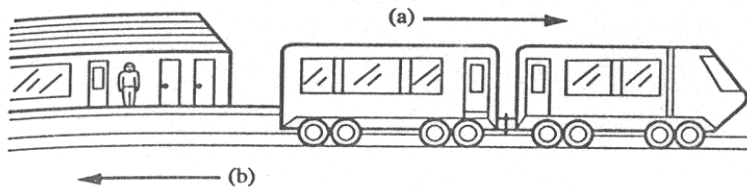
- **Carácter relativo de movimiento**

Un objeto *se mueve* respecto a otro cuando su posición respecto a éste cambia con el tiempo. Si la posición no cambia se dice que está en *reposo*.

El movimiento es un *concepto relativo* → Un cuerpo puede estar moviéndose respecto a un objeto y permanecer en reposo respecto otro.

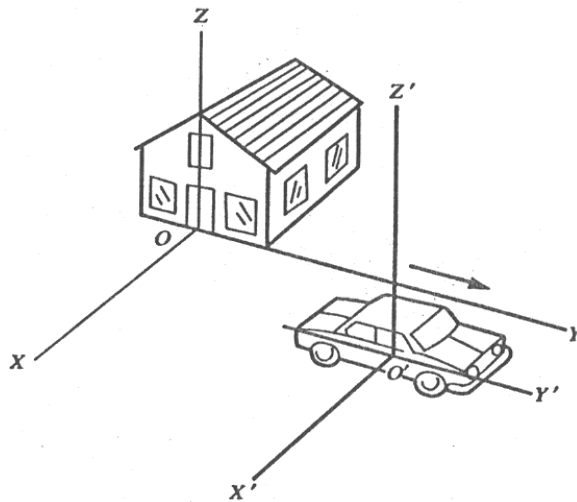
## 3.1 – Introducción. Objeto de la Dinámica.

- Para describir el movimiento es necesario definir un **sistema de referencia** en relación al cual se describe el movimiento. A este sistema de referencia se le asigna un **eje de coordenadas**.



(a) Vista de tren desde estación.

(b) Vista de estación desde tren



Sistemas de referencia en movimiento relativo

## 3.1 – Introducción. Objeto de la Dinámica.

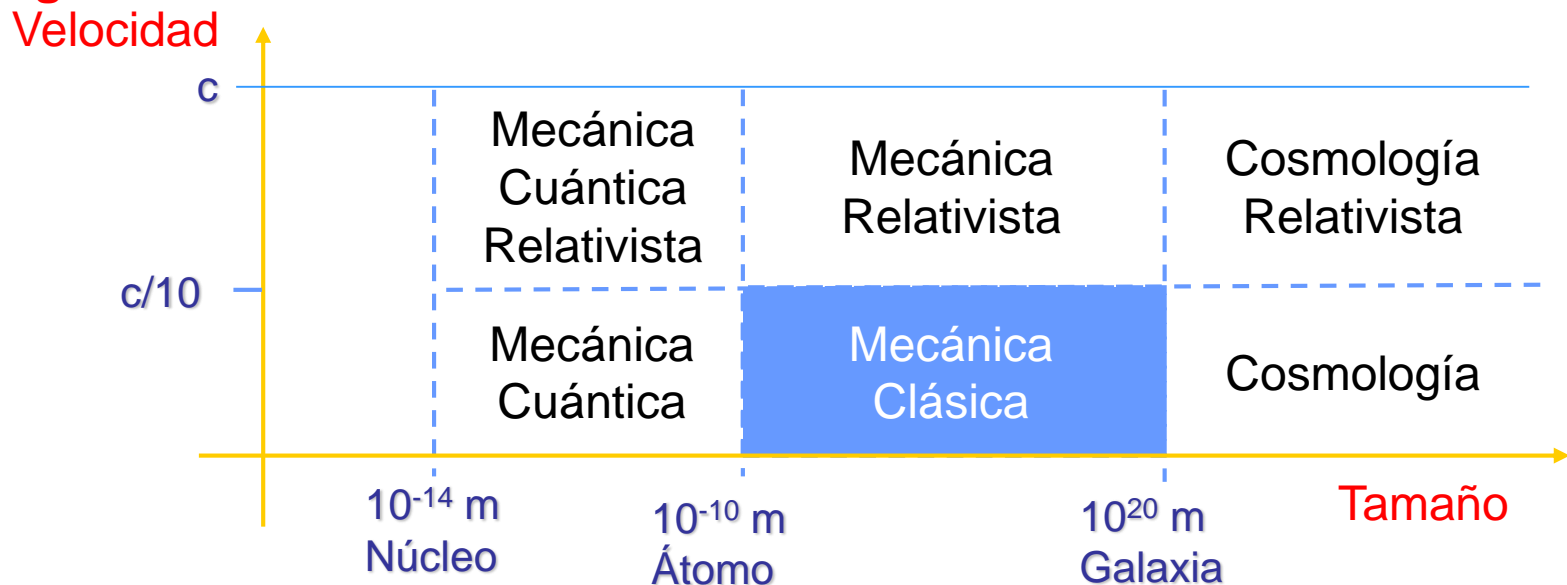
- **¿Qué es la dinámica?**

Parte de la Física que se ocupa del estudio de la **relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas** de dicho movimiento.

- **¿Por qué se mueven los cuerpos de una forma determinada?**

Por experiencia sabemos que el movimiento de un cuerpo es el **resultado directo de sus interacciones con otros cuerpos** que le rodean.

- **Rango de validez de la Mecánica Clásica.**



- **Concepto de fuerza.**

A menudo las interacciones se expresan cuantitativamente con la **fuerza**.

## 3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **¿Qué es una partícula libre?**

Aquella que no está sujeta a **ninguna interacción** con el medio que le rodea → Su movimiento no es perturbado por el medio.

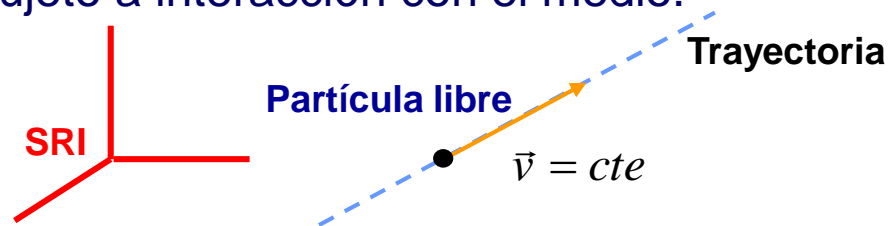
Estrictamente **no existen**, pero pueden considerarse libres cuando

- Sus **interacciones son débiles al estar alejadas** unas partículas de otras.
- Los **efectos de interacción** de unas partículas con otras **se cancelan** y su interacción neta es nula.

- **Primera ley de Newton o ley de la inercia.**

Una partícula libre se mueve con velocidad constante (permanece en reposo o con MRU) respecto de ciertos sistemas de referencia especiales denominados inerciales (SRI).

Un SRI no está sujeta a interacción con el medio.



## 3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **Momento lineal**

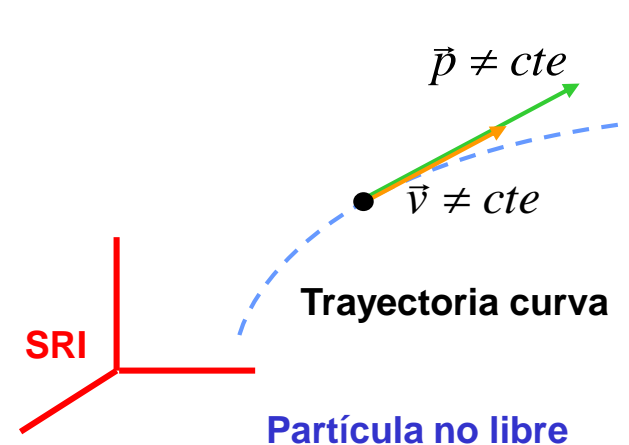
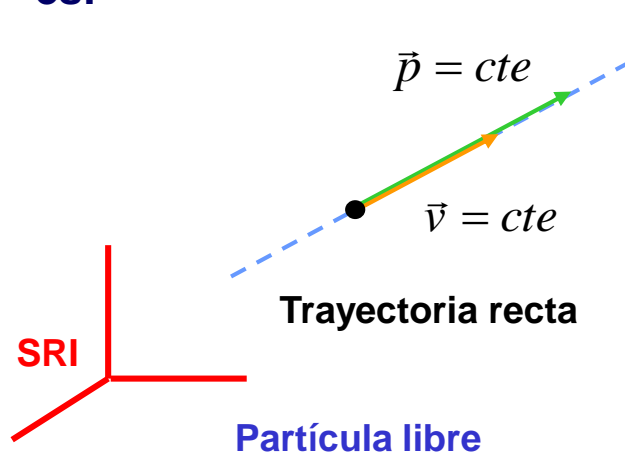
Se define como:  $\vec{p} = m\vec{v}$

Una **partícula libre** se mueve con momento lineal constante respecto un SRI.

$$\vec{p} = cte$$

Si la **partícula no es libre** y su velocidad cambia en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  el cambio de momento lineal es:

$$\Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v}$$



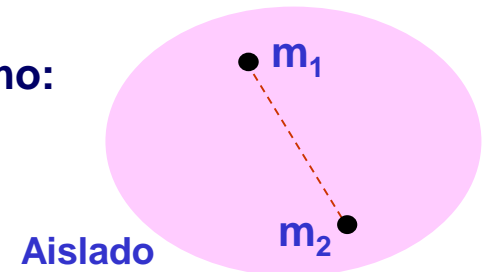
## 3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **Momento lineal de un sistema de partículas. Principio de conservación del momento lineal.**

Sea un **sistema de dos partículas aislado** en el que las únicas interacciones posibles es el de las dos partículas del sistema entre sí.

Se define el **momento lineal de este sistema de partículas** como:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$



El **principio de conservación del momento lineal** para un sistema establece que si éste se encuentra aislado su momento lineal permanece constante (respecto un SRI).

### Principio de conservación del momento lineal

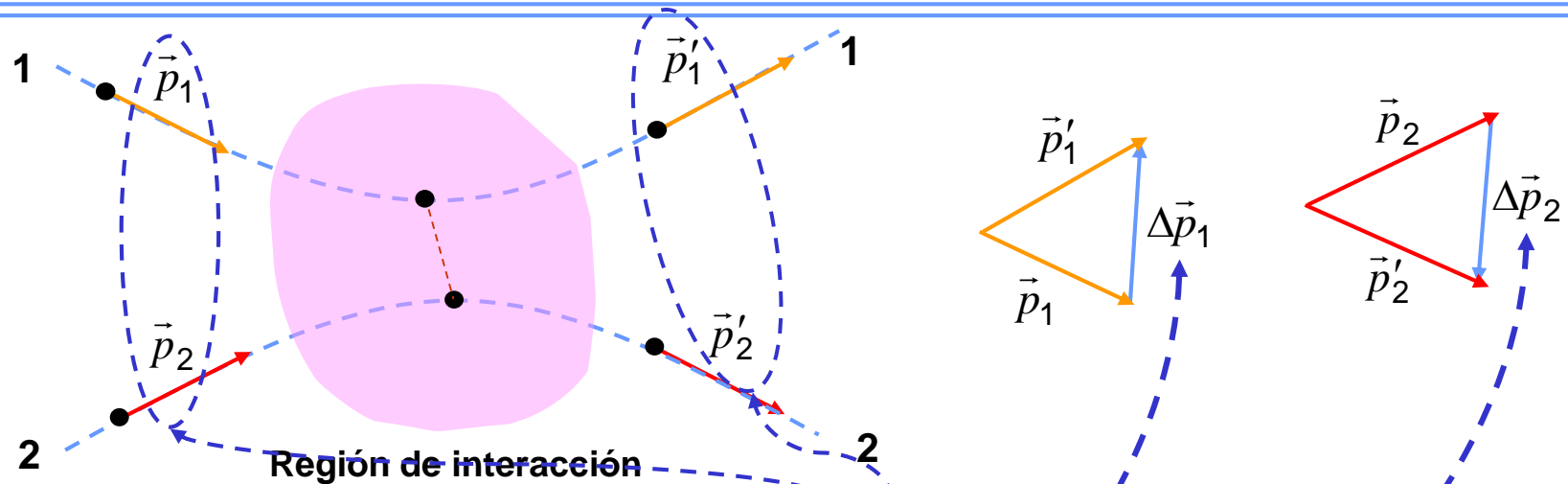
Aislado

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

El momento lineal de un sistema compuesto de dos partículas sujetas solo a su interacción mutua permanece constante.

Sin embargo el **momento lineal de cada una de las partículas** debido a su interacción con la otra **si puede cambiar**.

## 3.2 – Leyes clásicas del movimiento.



El momento lineal del sistema en los tiempos  $t$  y  $t'$  viene dado por:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad \vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Al estar aislado se cumple

$$\vec{P}' = \vec{P} \implies \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \implies \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$$

Y como la **variación del momento lineal** de las partículas vienen dados por:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{p}_1 &= \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \\ \Delta \vec{p}_2 &= \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 \end{aligned} \implies \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

**Una interacción produce un intercambio de momento lineal.**



## 3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

- **Segunda y tercera ley de Newton.**

Hemos visto que para dos partículas aisladas sujetas a su interacción mutua.

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \xrightarrow{\substack{\text{Dividiendo por} \\ \Delta t = t' - t}} \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \xrightarrow{\substack{\text{Haciendo que} \\ \Delta t \rightarrow 0}} \boxed{\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}}$$

Se define entonces **la fuerza** como:

**Segunda ley de Newton**

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

La tasa de cambio de momento lineal de una partícula con respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula.

Si la **partícula es libre** entonces:

$$\vec{p} = cte \xrightarrow{\quad} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

La relación entre la fuerza y la aceleración viene dada a través de:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow{\quad} \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

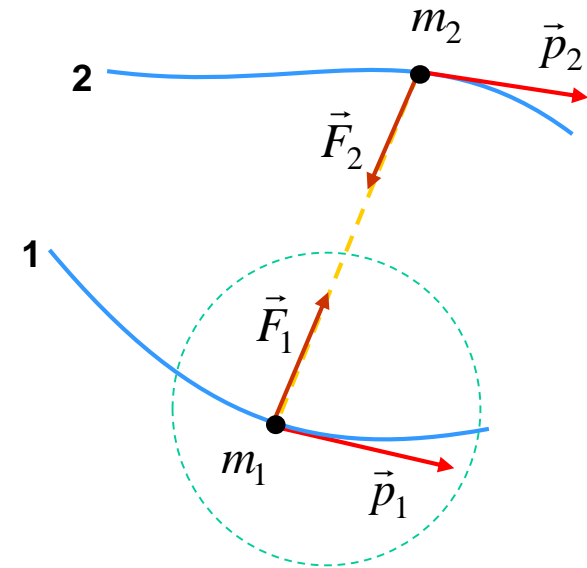
## 3.2 – Leyes clásicas del movimiento.

Para dos partículas aisladas sujetas a su interacción usando el concepto de fuerza se tiene que:

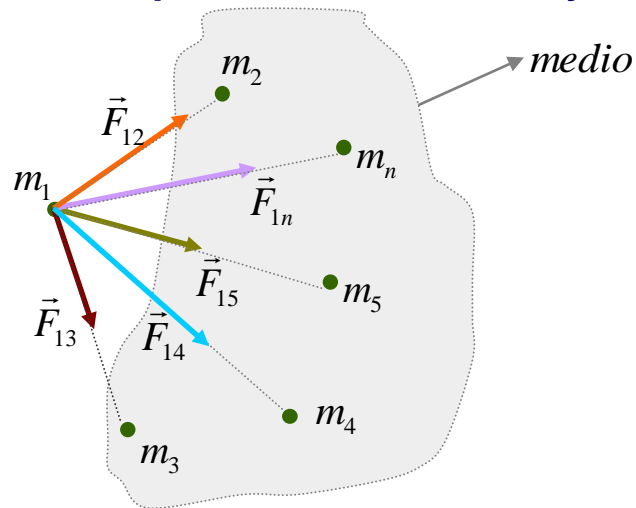
$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

**Tercera ley de Newton**

Cuando dos partículas interactúan la fuerza sobre la primera ejercida por la segunda, es igual y opuesta a la fuerza sobre la segunda ejercida por la primera.



El concepto de fuerza es útil ya que:



1 – Se cumple el principio de superposición:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

2 – Las formas funcionales de las fuerzas son conocidas.

### 3.3 – Tipos de interacciones en la naturaleza.

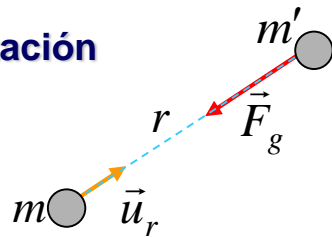
Aunque se conocen muchos tipos de fuerzas, las **interacciones fundamentales** de la naturaleza son:

Interacción	Intensidad relativa	Alcance (metros)	Propiedad de la materia	Escenario	Partícula mediadora
Nuclear fuerte	1	$10^{-15}$	Carga de color	Núcleos	Gluón
Electromagnética	$10^{-2}$	$\infty$	Carga eléctrica	Átomos y moléculas	Fotón
Nuclear débil	$10^{-12}$	$< 10^{-17}$	Carga débil	Desintegración $\beta$	Bosón
Gravitatoria	$10^{-40}$	$\infty$	masa	Cosmos	Gravitón

#### Interacción gravitatoria

$G \Rightarrow$  Cte de Gravitación Universal

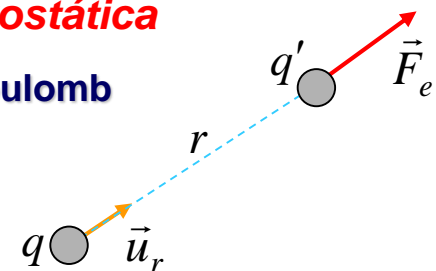
$$\vec{F}_g = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$



#### Interacción electrostática

$k \Rightarrow$  Cte de Coulomb

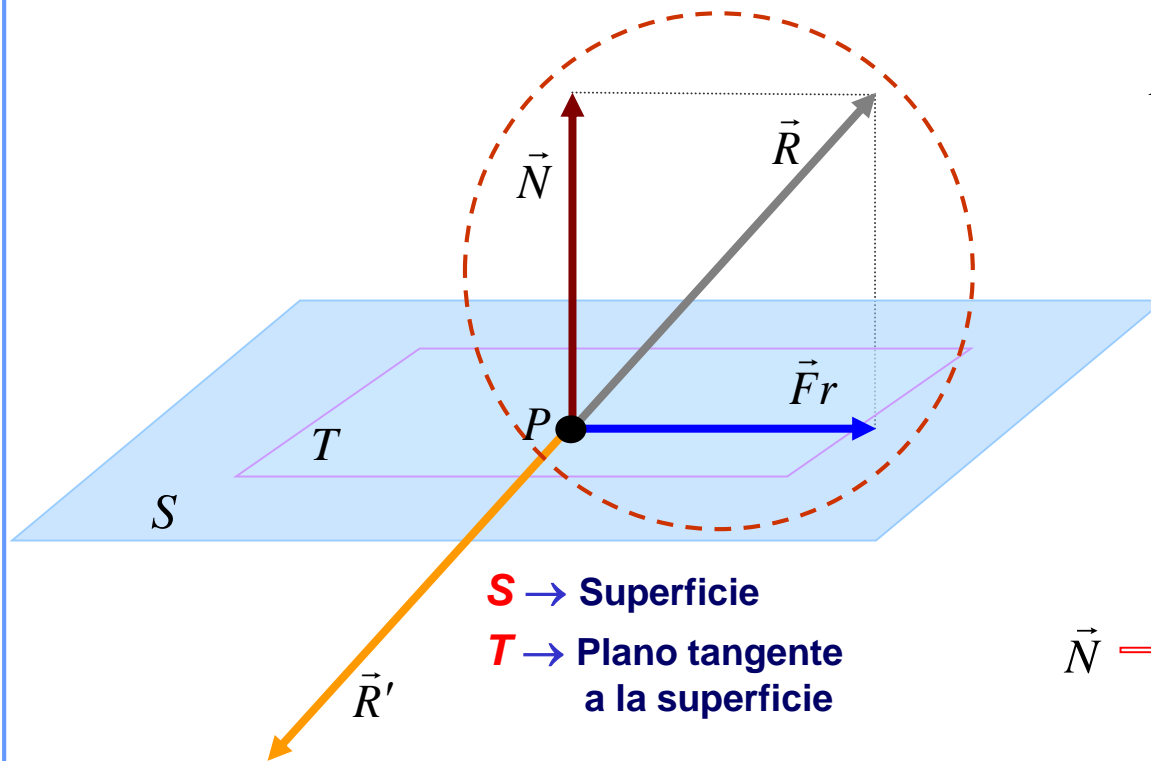
$$\vec{F}_e = k \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_r$$



## 3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

- **Fuerzas de reacción en apoyos.**

Para un objeto  $P$  que se apoya sobre una superficie se tiene que:



$\vec{R}' \Rightarrow$  Fuerza que ejerce el objeto sobre la superficie.

$\vec{R} \Rightarrow$  Fuerza que ejerce la superficie sobre el objeto (**Reacción al apoyo**)

La fuerza de reacción al apoyo se puede descomponer en:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_r$$

$\vec{N} \Rightarrow$  **Normal** (perpendicular al plano tangente)

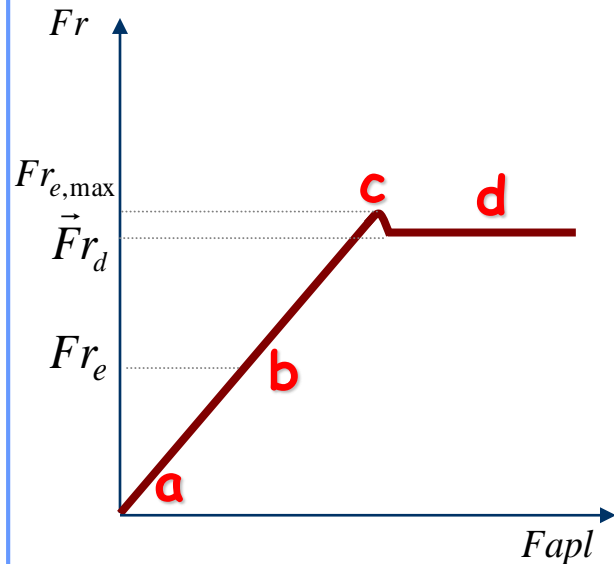
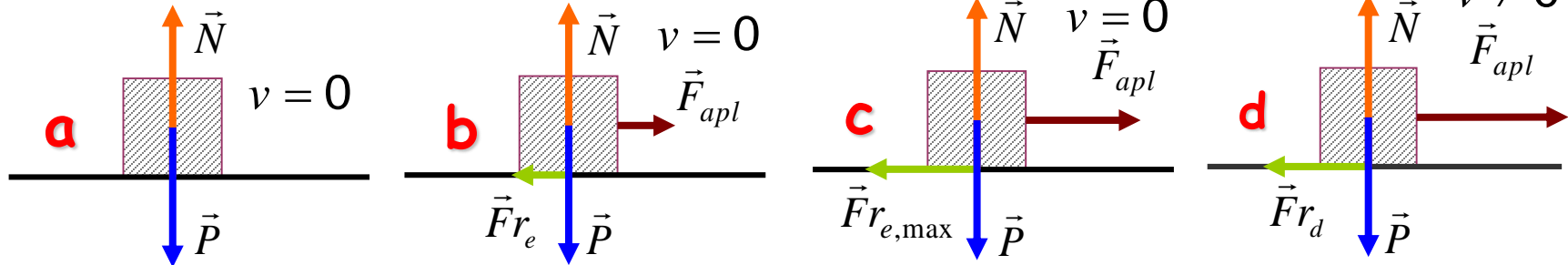
$\vec{F}_r \Rightarrow$  **Fuerza de rozamiento o fricción** (contenida en el plano tangente)

## 3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

### Fuerza de rozamiento ( $F_r$ ).

Rozamiento seco.

Producido entre dos cuerpos sólidos (ejemplo bloque sobre una superficie sólida).



a) Bloque en equilibrio bajo acción de su peso y la normal.

b) Se aplica una fuerza que aumenta gradualmente pero el bloque no se mueve → Existe una fuerza igual y de sentido contrario llamada **Fuerza de rozamiento estática**.

$$\vec{F}r_e = -\vec{F}_{apl}$$

c) La situación anterior continua hasta llegar a un momento que si aumenta la fuerza aplicada el bloque se mueve → El rozamiento se llama **Fuerza de rozamiento estática máxima**.

$$\vec{F}r_{e,max} = -\mu_e N \vec{u}_v$$

d) Una vez el bloque se mueve al continuar aumentando la fuerza aplicada el rozamiento disminuye y toma un valor constante → El rozamiento se llama **Fuerza de rozamiento dinámica**.

$$\vec{F}r_d = -\mu_d N \vec{u}_v$$

## 3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

**Características del rozamiento seco esta fuerza:**

- 1.- Dependen de la naturaleza y condiciones de las superficies en contacto, pero no del área de contacto entre las superficies.
- 2.- Son tangentes a la superficie de contacto de ambos cuerpos.
- 3.- Aparecen sobre ambos cuerpos al aplicar una fuerza sobre uno de ellos, pudiendo haber o no deslizamiento relativo entre ambos.

<b>Material</b>	$\mu_e$	$\mu_d$
Acero sobre acero	0'74	'057
Aluminio sobre acero	0'61	0'47
Vidrio sobre vidrio	0'94	0'40
Caucho sobre hormigón	0'90	0'80
Acero sobre hielo	0'10	0'06

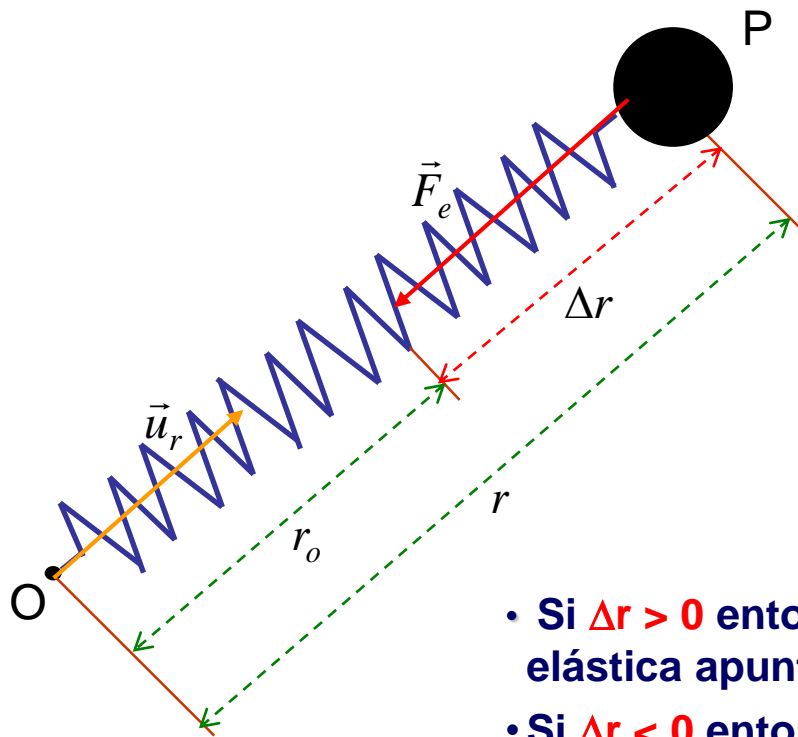
**Rozamiento fluido.**

Producido entre capas contiguas de fluido que se mueven a distinta velocidad o el que sufre un sólido que se desplaza por un fluido. Se le llama también **fuerza viscosa** y depende de muchos factores (forma del sólido, velocidad del objeto respecto fluido,...). Se expresa en ocasiones como:

$$\vec{F}r_v = -b\vec{v}$$

## 3.4 – Leyes de fuerzas fenomenológicas.

### Fuerza elástica ( $F_e$ )



$$\vec{F}_{el} = -k \Delta r \vec{u}_r \quad \text{Ley de Hooke}$$

$k$   $\Rightarrow$  Constante elástica o del resorte

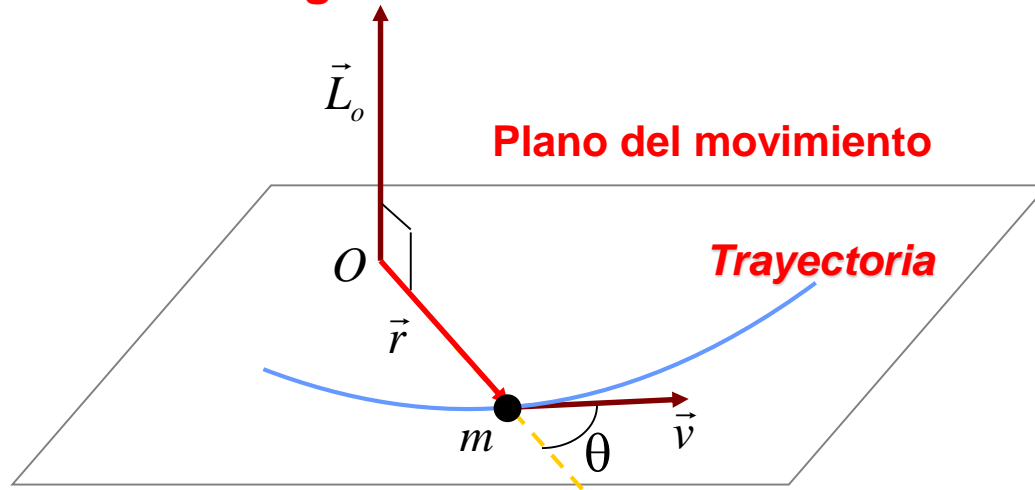
$\vec{u}_r$   $\Rightarrow$  Vector unitario en la dirección y sentido del resorte de O a P

$\Delta r = r - r_0$   $\Rightarrow$  Deformación del resorte

- Si  $\Delta r > 0$  entonces el resorte está **estirado** y la fuerza elástica apunta en sentido contrario al vector unitario.
- Si  $\Delta r < 0$  entonces el resorte está **comprimido** y la fuerza elástica apunta en el sentido contrario del vector unitario.
- Por tanto la fuerza elástica se opone a que la partícula sea desplazada y por ello se denomina **fuerza recuperadora**.

### 3.5 – Momento angular. Variación temporal del momento angular.

#### Momento angular

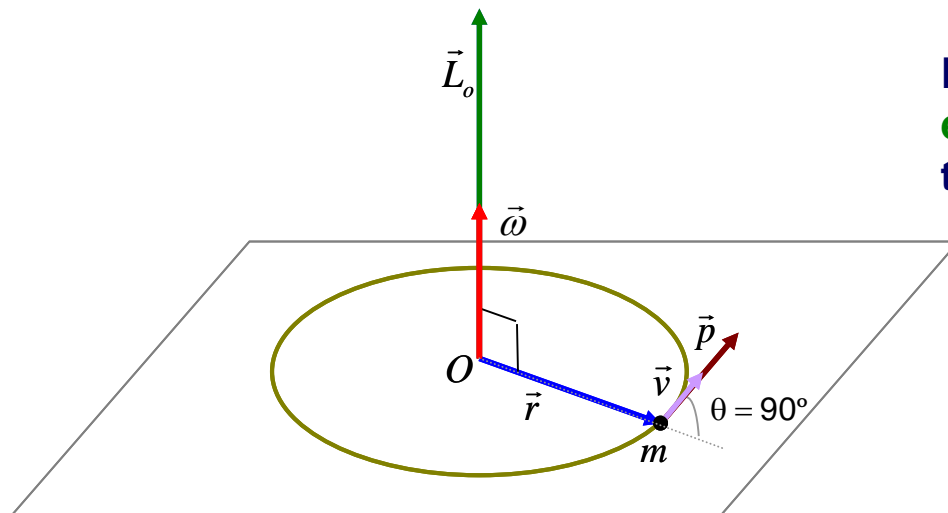


Se define como:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Su módulo es igual a:

$$L_o = |\vec{L}_o| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv \sin\theta$$



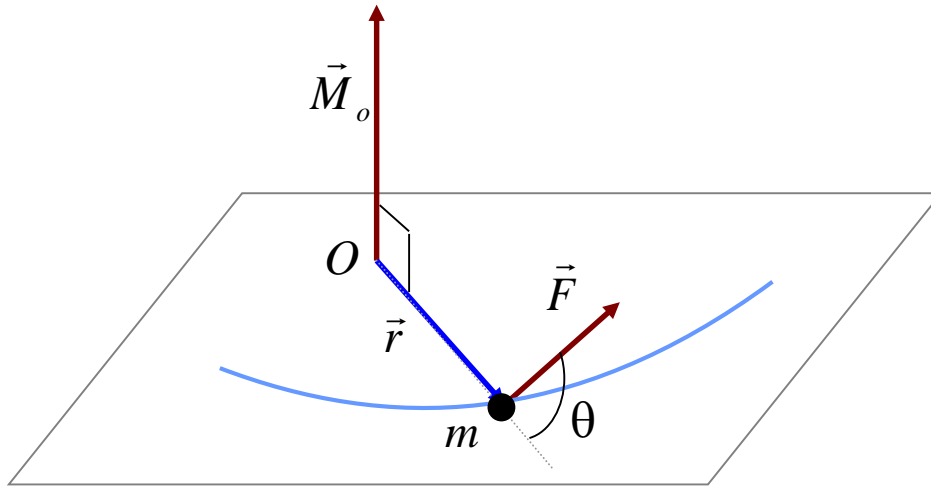
Para un movimiento curvilíneo o circular en un plano el momento angular puede también expresarse como:

$$\vec{L}_o = mr^2\vec{\omega}$$



## 3.5 – Momento angular. Variación temporal del momento angular.

### Momento de una fuerza



Se define como:  $\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

Su módulo es igual a:

$$M_o = |\vec{M}_o| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \text{sen}\theta$$

Se puede demostrar que:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

**Teorema del momento angular**

Se cumple que si:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_o = cte$$

**Teorema de conservación del momento angular**

### 3.6 – Fuerzas centrales.

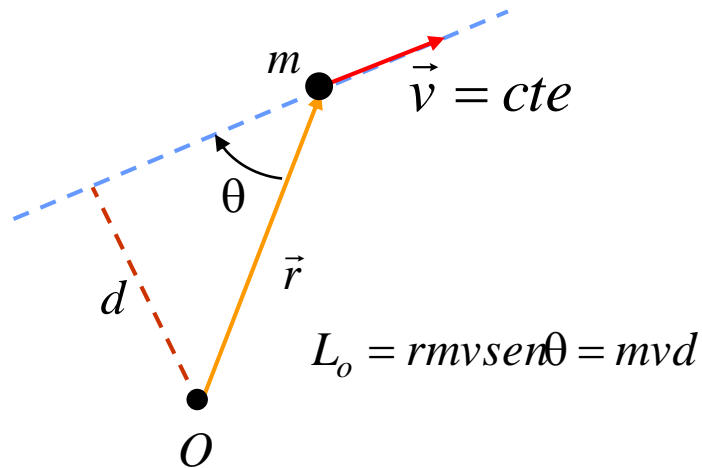
El momento de una fuerza es nulo (y por tanto el momento angular se mantiene constante) cuando:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

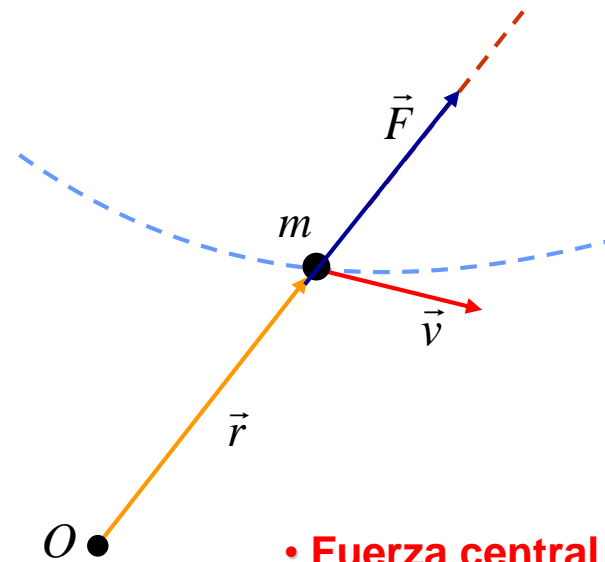
$\vec{r} = \vec{0}$   
 $\vec{F} = \vec{0}$   
 $\vec{r} \parallel \vec{F}$

⇒ Cuando la partícula es **libre**.

⇒ Cuando ambos vectores son paralelos. La fuerza se dice que es **central**.



• **Partícula libre**



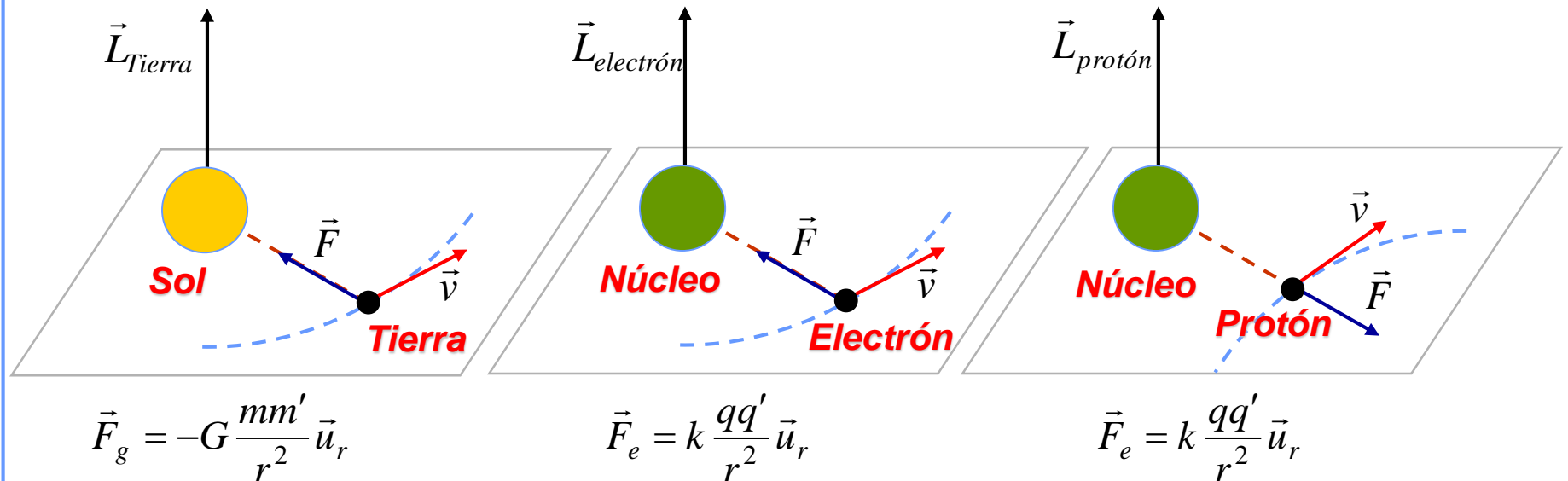
• **Fuerza central**

## 3.6 – Fuerzas centrales.

- Cuando la fuerza es central su dirección pasa por un punto fijo  $\circ$  que se denomina **centro de la fuerza**. Por tanto:

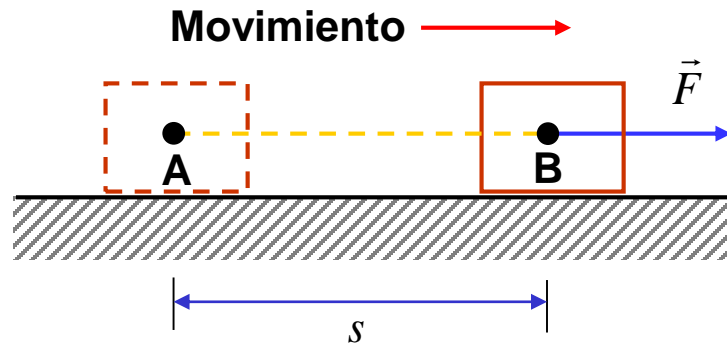
Cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, el momento angular en relación con el centro de fuerza es una constante de movimiento y viceversa.

- Muchas fuerzas que aparecen en la naturaleza son centrales.



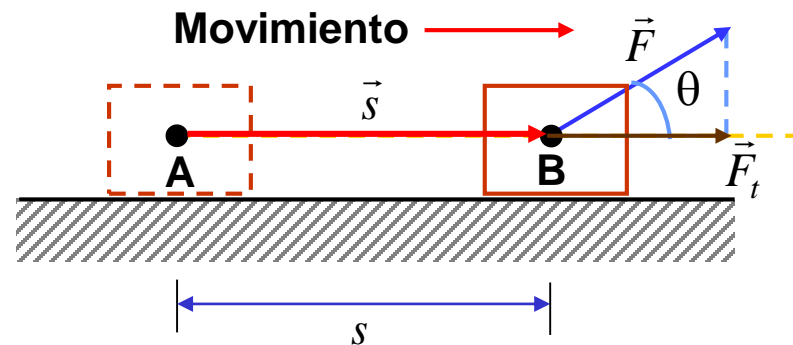
### 3.7 – Trabajo de una fuerza.

- Para una fuerza constante paralela al desplazamiento que es rectilíneo, se define el **trabajo** como:



Trabajo = Fuerza  $\times$  distancia  $\Rightarrow$   $W = F s$

- Si la fuerza constante forma un ángulo con la dirección del desplazamiento, solo la **componente en la dirección del desplazamiento** se usa para calcular el trabajo.



Como  $F_t = F \cos \theta$  Producto escalar

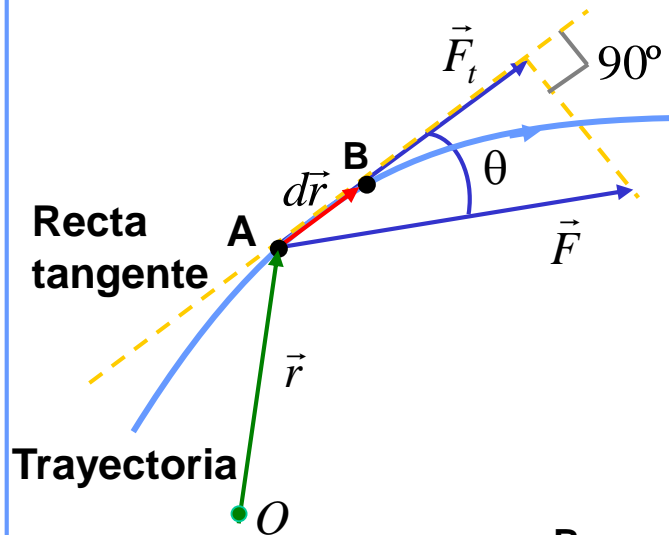
$W = F_t s \Rightarrow W = F s \cos \theta \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

- Si  $\theta = 90^\circ \Rightarrow W = 0$
- Si  $90^\circ > \theta \geq 0^\circ \Rightarrow W > 0$
- Si  $180^\circ \geq \theta > 90^\circ \Rightarrow W < 0$

### 3.7 – Trabajo de una fuerza.

- Si la trayectoria de la partícula **no es rectilínea** y/o la fuerza que actúa es **variable**, se divide la trayectoria en pequeños elementos rectilíneos para los cuales la fuerza es constante. Llamando a uno de estos **desplazamientos elementales** como:

$$d\vec{r} = \mathbf{AB}$$



- El **trabajo elemental** hecho por la fuerza durante ese desplazamiento es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad dW = F ds \cos\theta \quad \longrightarrow \quad dW = F_t ds$$

Como  $|d\vec{r}| = ds$

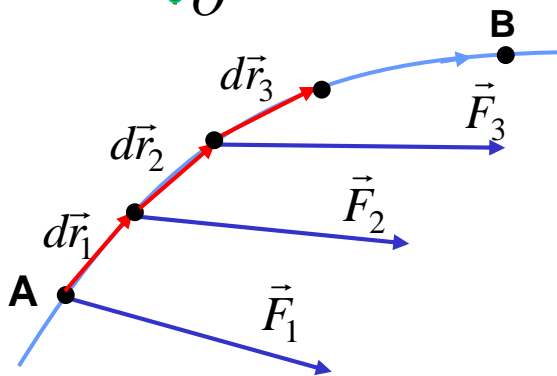
Como  $F_t = F \cos\theta$

- El **trabajo total** hecho sobre la partícula es la suma de los trabajos elementales realizados en los pequeños desplazamientos a lo largo de la trayectoria.

$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \dots = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

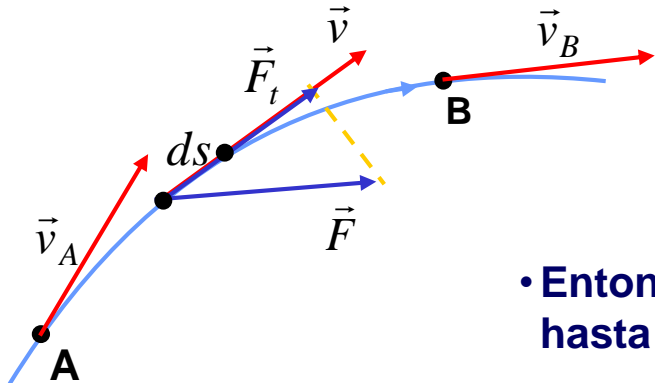
- Si los desplazamientos son muy pequeños la suma se puede reemplazar por una integral.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F ds \cos\theta = \int_A^B F_t ds$$



### 3.8 – Teorema de las fuerzas vivas. Energía cinética.

- Para un cuerpo que se mueve en una trayectoria curvilínea, la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es:



Trayectoria

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

- El trabajo realizado en un desplazamiento elemental es:

$$dW = F_t ds$$

- Entonces el trabajo total para desplazar al cuerpo desde **A** hasta **B** es:

$$W = \int_A^B \vec{F}_t ds = \int_A^B mv dv = \left[ \frac{1}{2} mv^2 \right]_A^B = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2$$

- Definiendo la **energía cinética** como:

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2$$

Resulta el trabajo total

$$W = Ec_B - Ec_A = \Delta Ec$$

**Teorema del trabajo y la energía cinética o de las fuerzas vivas**

**El trabajo hecho por la fuerza que actúa sobre una partícula es igual al cambio de su energía cinética.**

## 3.9 – Potencia.

- Para el trabajo realizado en un intervalo de tiempo muy pequeño se define la **potencia** o **potencia instantánea** como:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \quad \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} \quad P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

**Como**  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$       **Como**  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$

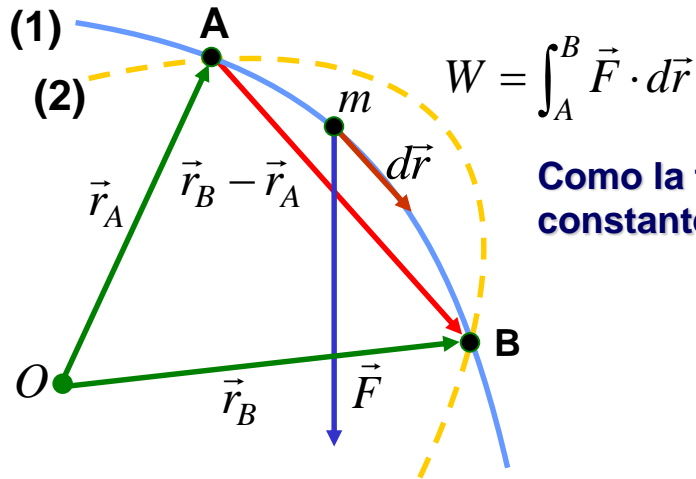
- La **potencia media** durante un cierto intervalo de tiempo se obtiene a través de:

$$\boxed{P = \frac{W}{\Delta t}}$$

### 3.10 – Trabajo de una fuerza conservativa. Energía potencial.

- **Trabajo de una fuerza constante.**

Sea una partícula que se mueve bajo la acción de una **fuerza constante en módulo y dirección**. El trabajo realizado por ésta será:

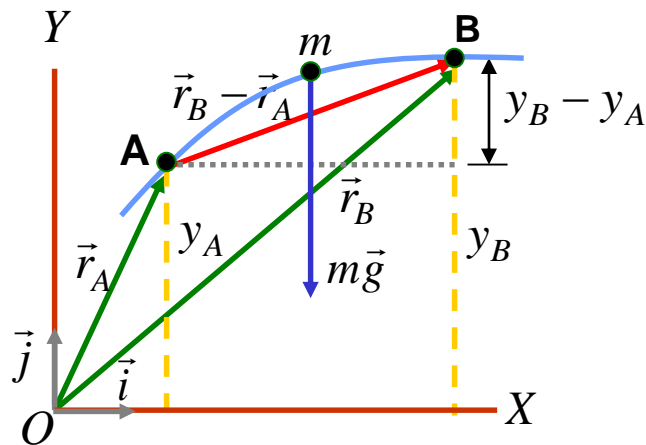


El trabajo es igual para las trayectorias (1) ó (2) al ir de A hasta B.

También se puede expresar

El trabajo es igual a la diferencia de una cierta cantidad evaluada al final y al principio de la trayectoria.

$$W = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{r}_B}_{\text{final}} - \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{r}_A}_{\text{inicial}}$$



• Para una fuerza constante como el **peso** se tiene:

$$\vec{F} = m\vec{g} - mg\vec{j} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{r} = -mg\vec{j} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = -mgy$$

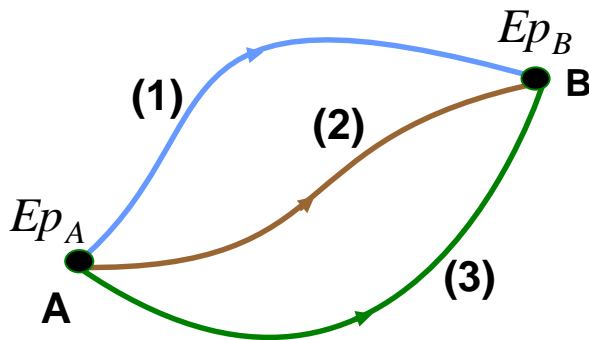
$$W = -mgy_B - (-mgy_A)$$



### 3.10 – Trabajo de una fuerza conservativa. Energía potencial.

- **Energía potencial.**

El caso anterior corresponde a una clase de fuerzas llamadas **conservativas** para las cuales el trabajo es **independiente de la trayectoria** y puede expresarse como la diferencia de una cierta cantidad llamada **energía potencial** evaluada en los puntos **inicial y final**.



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{Ep_A}_{\text{inicial}} - \underbrace{Ep_B}_{\text{final}} \implies W = -\Delta Ep$$

- **Fuerza constante**  $\implies Ep = -\vec{F} \cdot \vec{r}$

- **Peso**  $\implies Ep = mgy$

- La energía potencial está definida salvo una constante arbitraria que se fija estableciendo el **cero o nivel de referencia** de la energía potencial.
- El trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de cualquier **trayectoria cerrada** es **nulo**.

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

### 3.10 – Trabajo de una fuerza conservativa. Energía potencial.

- **Relación entre fuerza y energía potencial.**

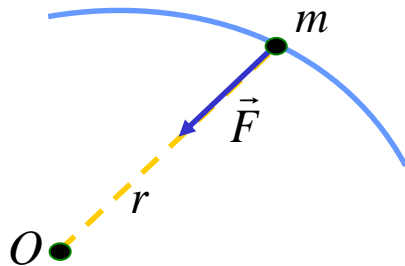
Para que se cumpla  $W = -\Delta E_p$  es necesario que par un desplazamiento elemental esté relacionado con el cambio de energía potencial a través de:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p \implies F ds \cos\theta = F_t ds = -dE_p \implies F_t = -\frac{dE_p}{ds}$$

- Las componentes de las fuerzas a lo largo de los ejes coordenados vienen dadas a través de:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}, \quad F_y = -\frac{dE_p}{dy}, \quad F_z = -\frac{dE_p}{dz}$$

- Si  $E_p$  solo depende de la distancia  $r$  a un punto fijo y no de la dirección, la **única componente de la fuerza** está definida en la dirección en que  $r$  aumenta o disminuye (se trata de una **fuerza central**), y se tiene que:



$$F = -\frac{dE_p}{dr}$$

### 3.11 – Teorema de la energía mecánica. Conservación de la energía mecánica.

- Cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es **conservativa** se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} W = -\Delta E_p \\ W = \Delta E_c \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \text{Los cambios de energía cinética y potencial son iguales y opuestos}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \Delta(E_c + E_p) = 0$$

- Definiendo la **energía mecánica** o **energía total** de la partícula como:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

**Principio de conservación de la energía**

Cuando la fuerza que actúa es **conservativa** la energía total **permanece constante**

Si la fuerza que actúa es conservativa

$$\Delta(E) = 0 \Rightarrow E = E_c + E_p = \text{constante} \Rightarrow (E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$$

- Cuando sobre la partícula actúan fuerzas **conservativas** y **no conservativas** se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} W_c = -\Delta E_p \\ W = W_c + W_{nc} = \Delta E_c \end{array} \right\} \Rightarrow W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) \Rightarrow W_{nc} = \Delta E = E_B - E_A$$

**Teorema de la energía mecánica**

Cuando las fuerzas que actúan son **conservativas** y **no conservativas**, el trabajo de las no conservativas es igual a la variación de la energía total