Condiciones de equilibrio

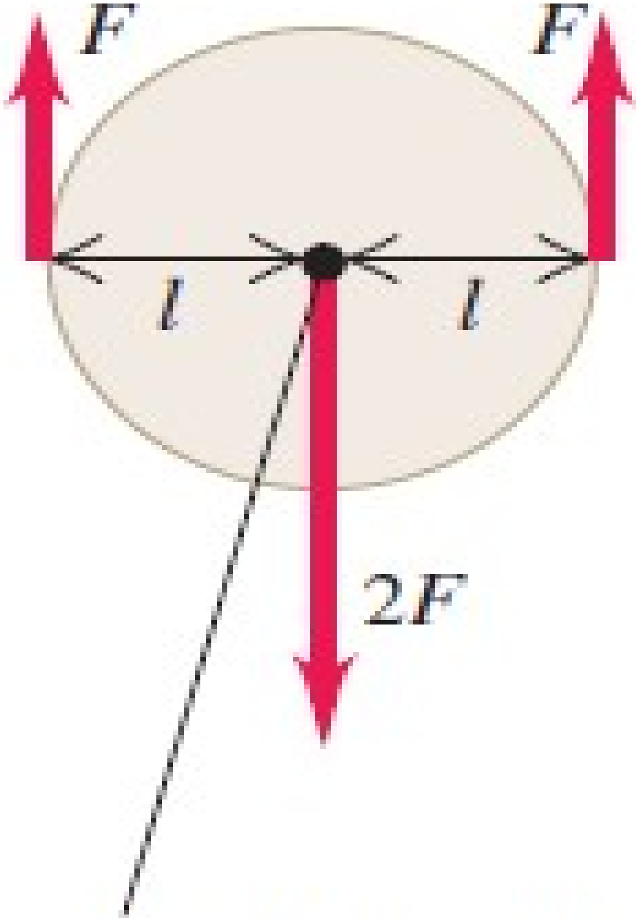
$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

(primera condición de equilibrio)

$$\sum \vec{\tau} = 0$$ alrededor de cualquier punto (segunda condición de equilibrio)

a) Este cuerpo está en equilibrio estático.



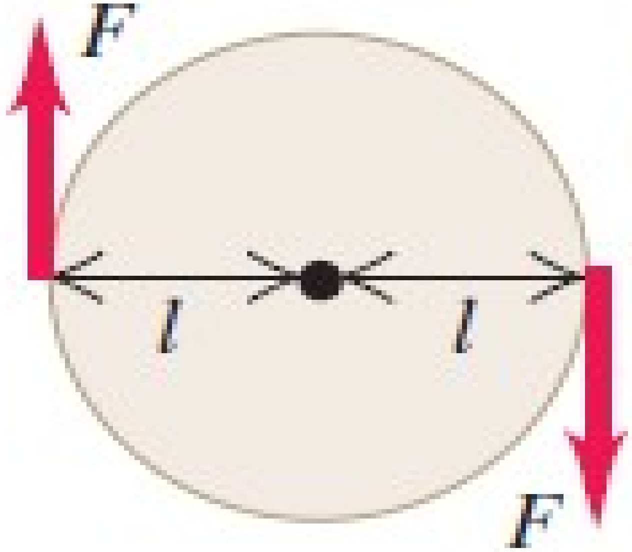
Condiciones de equilibrio:

primera condición satisfecha: fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición satisfecha: la torca total alrededor del eje = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Eje de rotación (perpendicular a la figura)

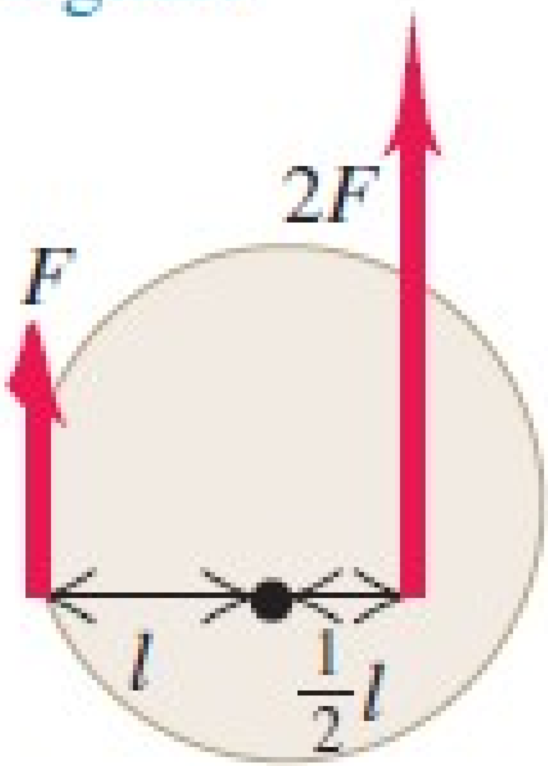
b) Este cuerpo no tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero tiene una tendencia a empezar a girar.



Primera condición satisfecha: fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición NO satisfecha: hay una torca total en sentido horario alrededor del eje, así que el cuerpo en reposo empezará a girar en sentido horario.

c) Este cuerpo tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero no tiene una tendencia a empezar a girar.



Primera condición NO satisfecha: hay una fuerza neta hacia arriba, así que un cuerpo en reposo empezará a moverse hacia arriba.

Segunda condición satisfecha: la torca total alrededor del eje = 0 así que el cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a girar.

Centro de gravedad

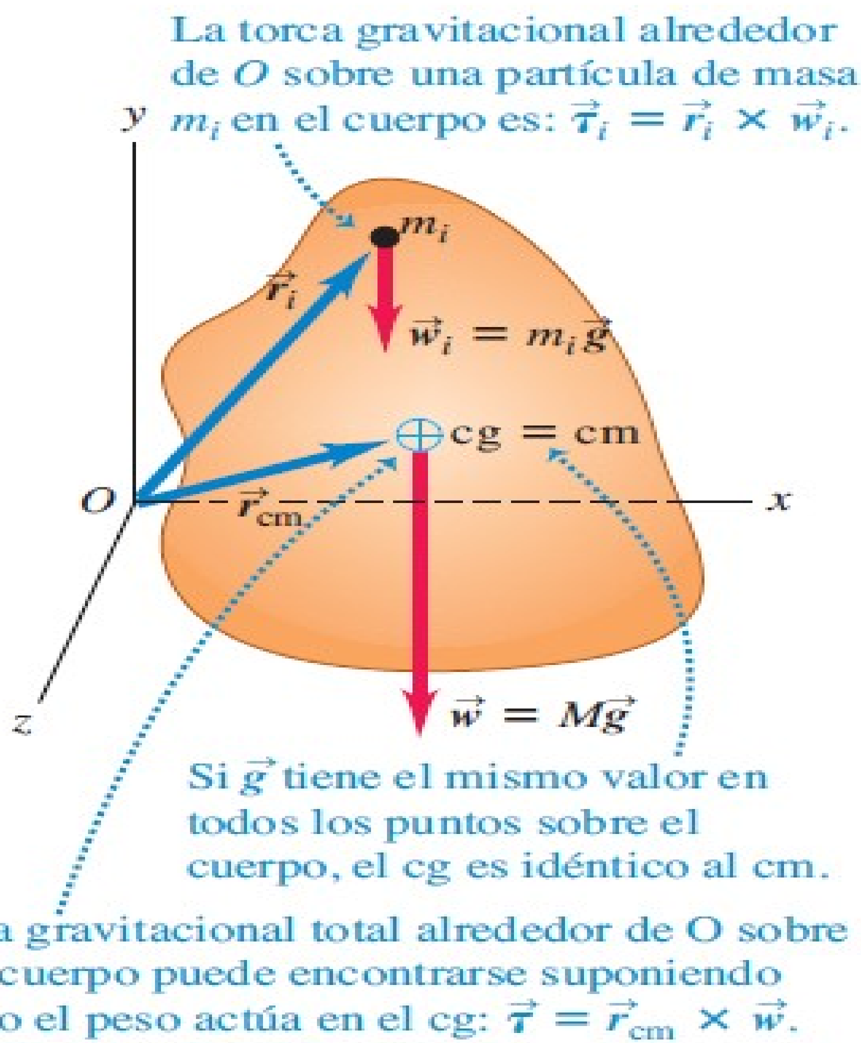
$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{(centro de masa)}$$

$$z_{\text{cm}} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

11.2 El centro de gravedad (cg) y el centro de masa (cm) de un cuerpo extendido.



$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{g}$$

Momento de torsión gravitacional

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{g}$$

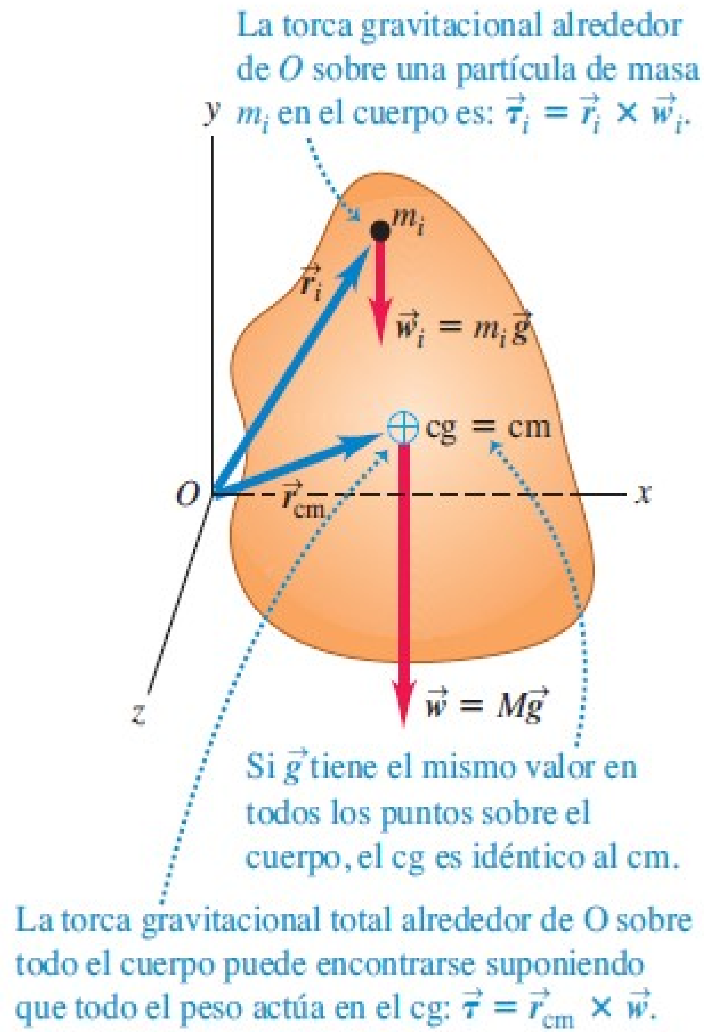
El momento de torsión total debido a las fuerzas gravitacionales que actúan sobre todas las partículas es:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} + \ldots$$

$$= (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots) \times \vec{g}$$

$$= (\sum_i m_i \vec{r}_i) \times \vec{g}$$

11.2 El centro de gravedad (cg) y el centro de masa (cm) de un cuerpo extendido.



…Obtenemos

$$\vec{\tau} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} \times M \vec{g} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} \times M \vec{g}$$

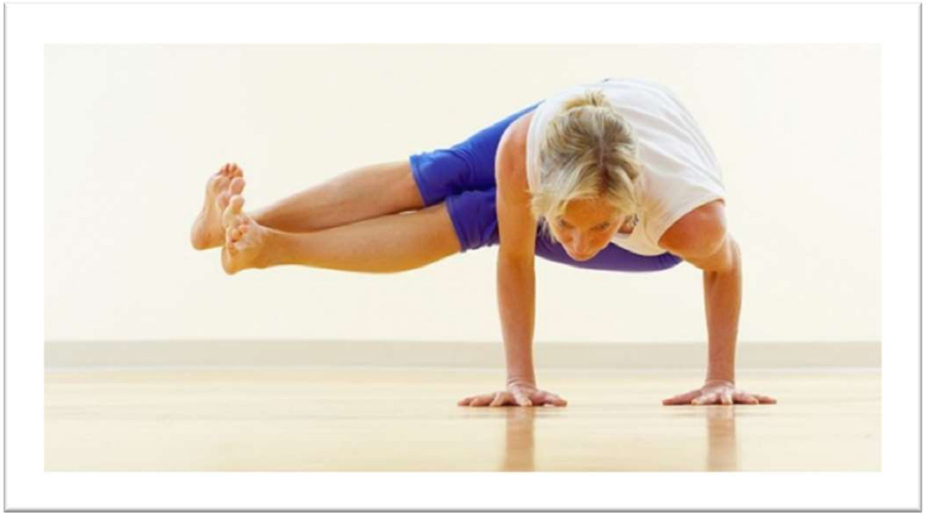
Si **g** tiene el mismo valor en todos los puntos de un cuerpo, el centro de gravedad es idéntico al centro de masa.

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times M \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{w}}$$

Localización y uso del centro de gravedad

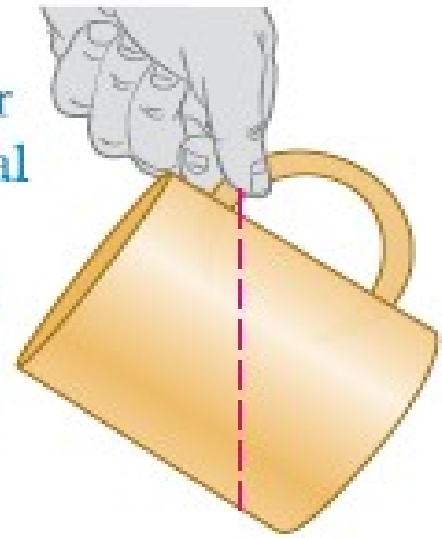
- Podemos usar consideraciones de simetría para encontrar el centro de gravedad, en caso de cuerpos homogéneos.

- Para cuerpos irregulares, es posible encontrar el centro de gravedad deviniendo el cuerpo en piezas simétricas.

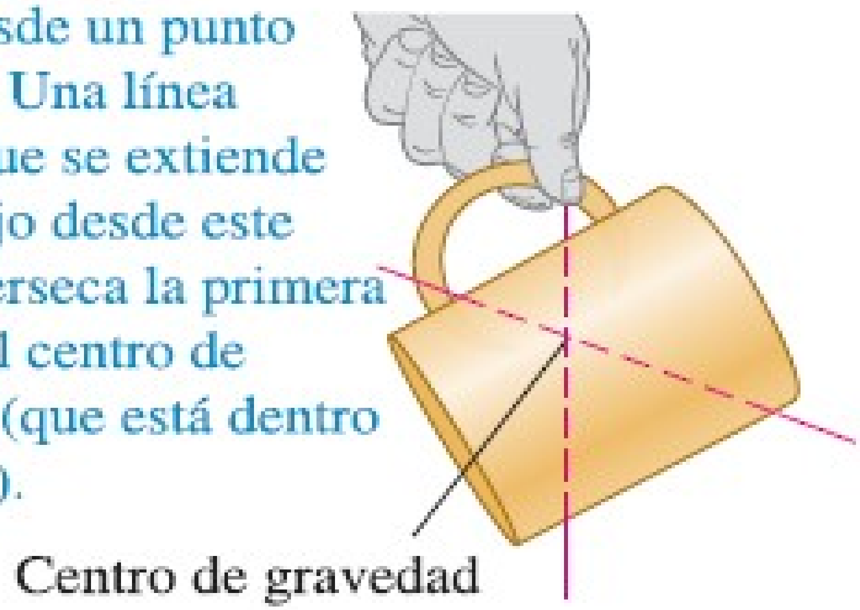


¿Cuál es el centro de gravedad de esta taza?

1. Haga que la taza cuelgue desde cualquier punto. Una línea vertical que se extienda hacia abajo desde el punto de suspensión pasa por el centro de gravedad.

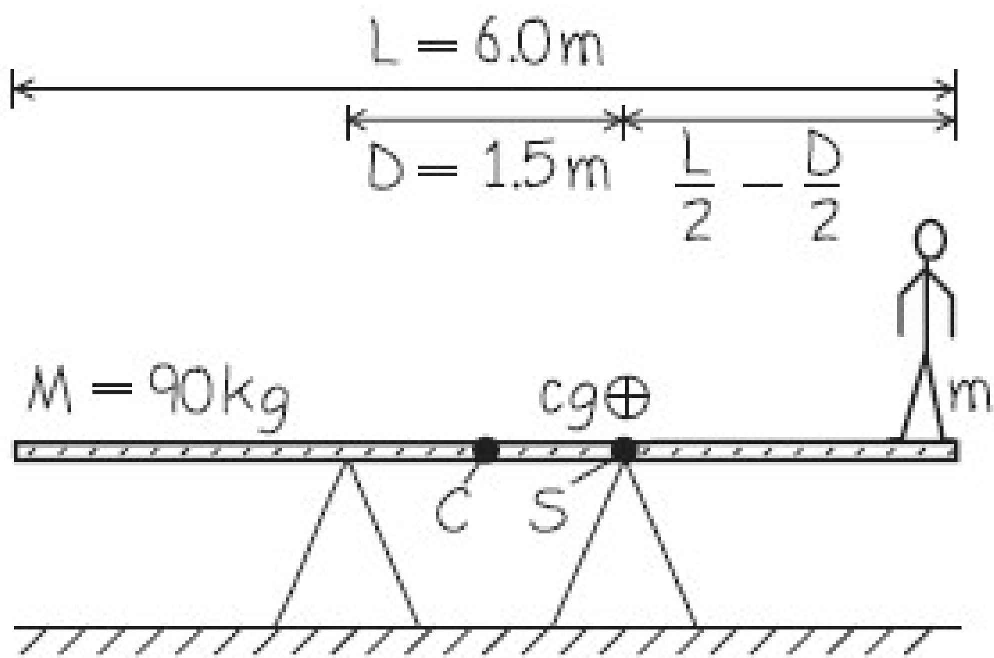


2. Ahora cuelgue la taza desde un punto diferente. Una línea vertical que se extiende hacia abajo desde este punto interseca la primera línea en el centro de gravedad (que está dentro de la taza).



Problema

Una tabla de madera uniforme de longitud $L = 6.0$ m y masa $M = 90$ kg descansa sobre dos caballetes separados por $D = 1.5$ m, situados a distancias iguales del centro de la tabla. El primo Morton trata de pararse en el extremo derecho de la tabla. ¿Qué masa máxima puede tener Morton si la tabla no se mueve?



Solución

$$x_{cg} = \frac{M(0) + m(L/2)}{M + m} = \frac{m}{M + m}\frac{L}{2}$$

Si igualamos esto a $D/2$, la coordenada x del apoyo derecho, tenemos

$$\frac{m}{M + m}\frac{L}{2} = \frac{D}{2}$$

$$mL = (M + m)D$$

$$m = M\frac{D}{L - D} = (90\,\text{kg})\frac{1.5\,\text{m}}{6.0\,\text{m} - 1.5\,\text{m}}$$

$$= 30\,\text{kg}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, repitamos el cálculo eligiendo otro origen. Ahora el origen estará en S, la posición del apoyo derecho, de modo que $x_{cg} = 0$. Los centros de gravedad de la tabla y de Morton ahora están en $x_P = -D/2$ y $x_T = (L/2) - (D/2)$, respectivamente, así que

$$x_{cg} = \frac{M(-D/2) + m[(L/2) - (D/2)]}{M + m} = 0$$

$$m = \frac{MD/2}{(L/2) - (D/2)} = M\frac{D}{L - D} = 30\,\text{kg}$$

EQUILIBRIO DE CUERPOS SUSPENDIDOS Y APOYADOS

Centro de gravedad

Definimos centro de gravedad de un cuerpo al punto por donde pasa la recta de acción de la fuerza peso, W, cualquiera sea la posición del cuerpo.

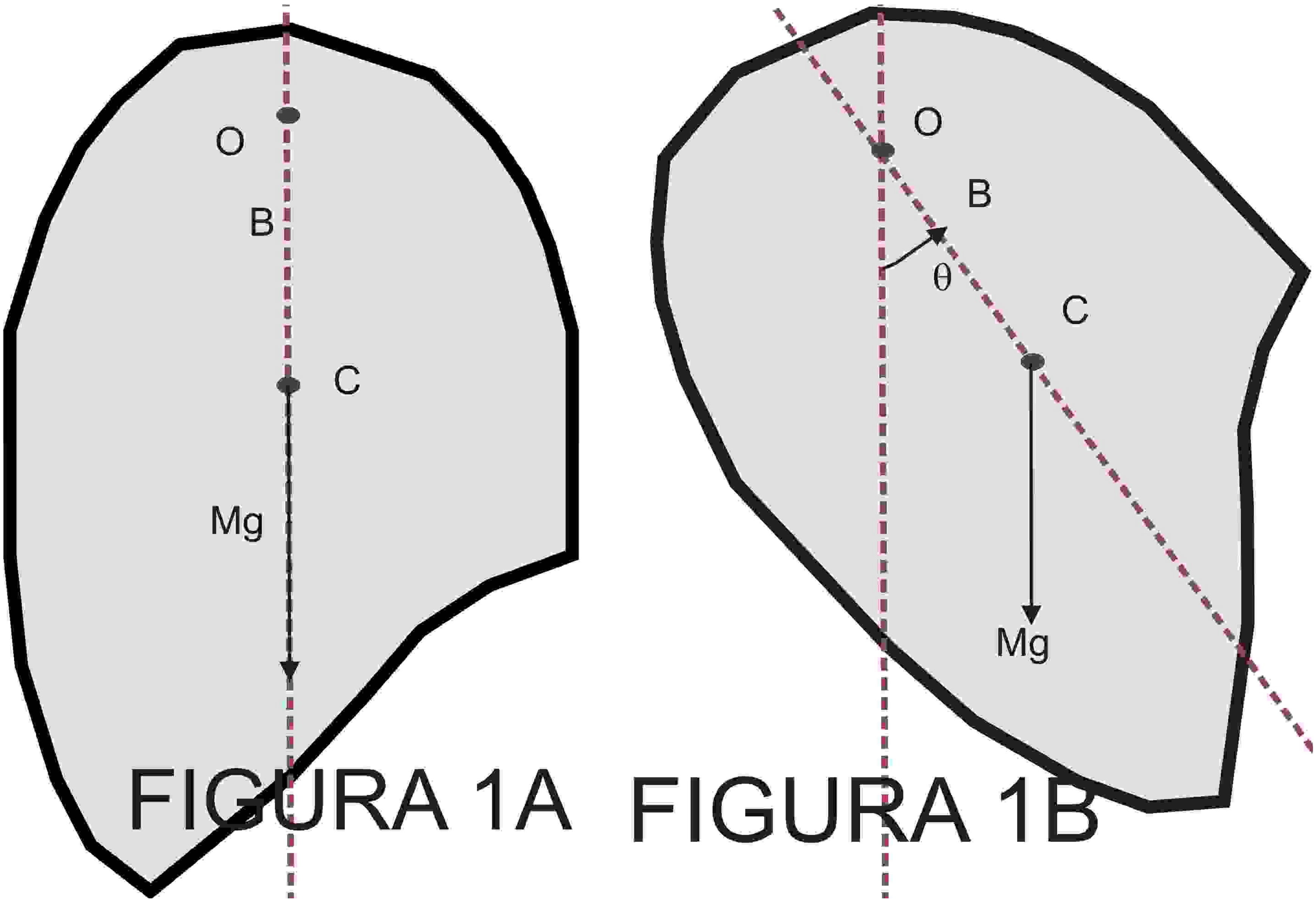
Según la posición relativa del centro de gravedad con respecto al punto o eje de suspensión o apoyo de un cuerpo, pueden presentarse tres tipos de equilibrio:

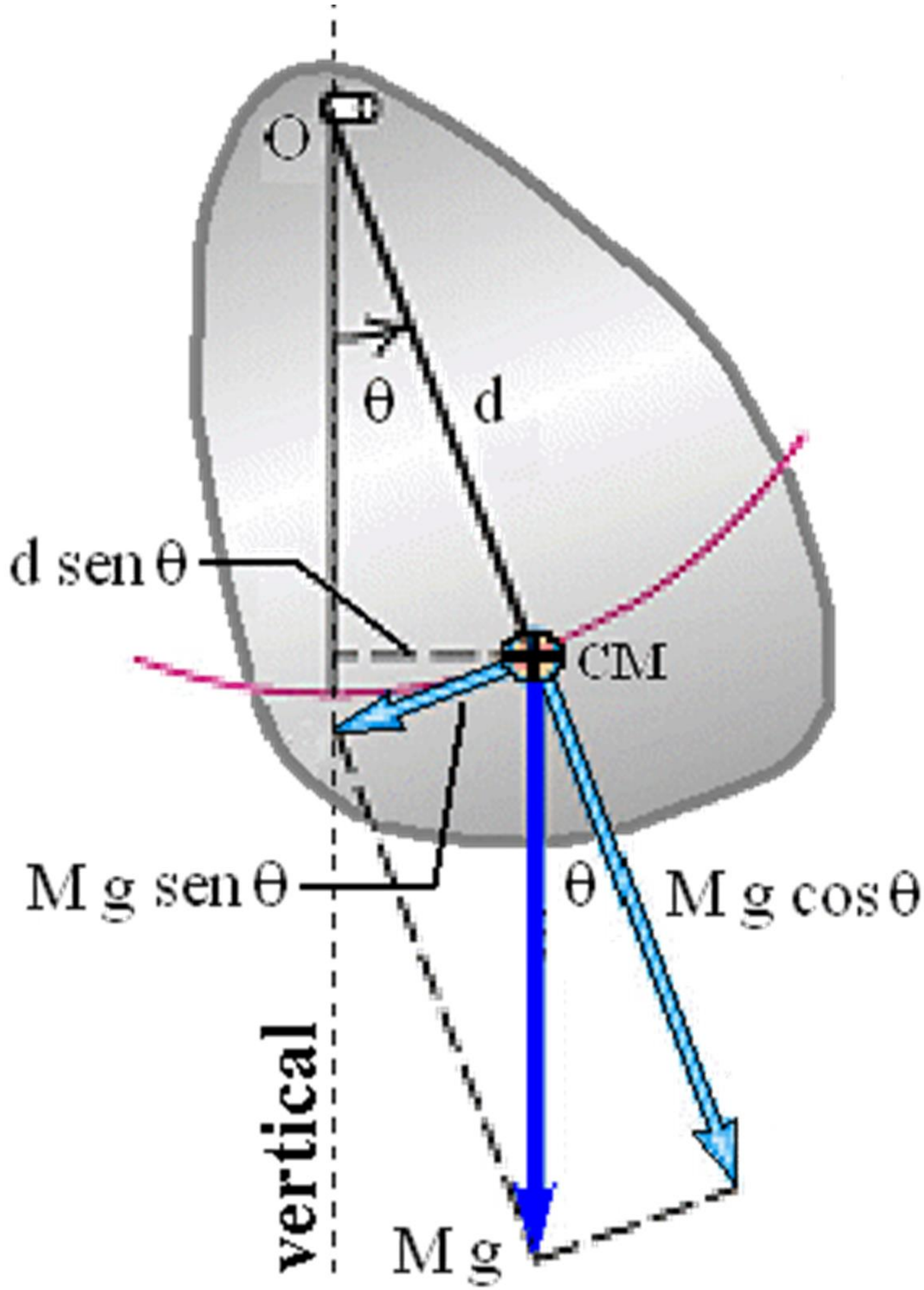
a) **Estable:** cuando al desviar al cuerpo de su posición de equilibrio, vuelve a ella.

b) **Inestable:** cuando al desviarlo de su posición de equilibrio, se aleja de ella.

c) **Indiferente:** cuando al alejarlo de su posición, se mantiene en equilibrio.

EQUILIBRIO DE CUERPOS SUSPENDIDOS

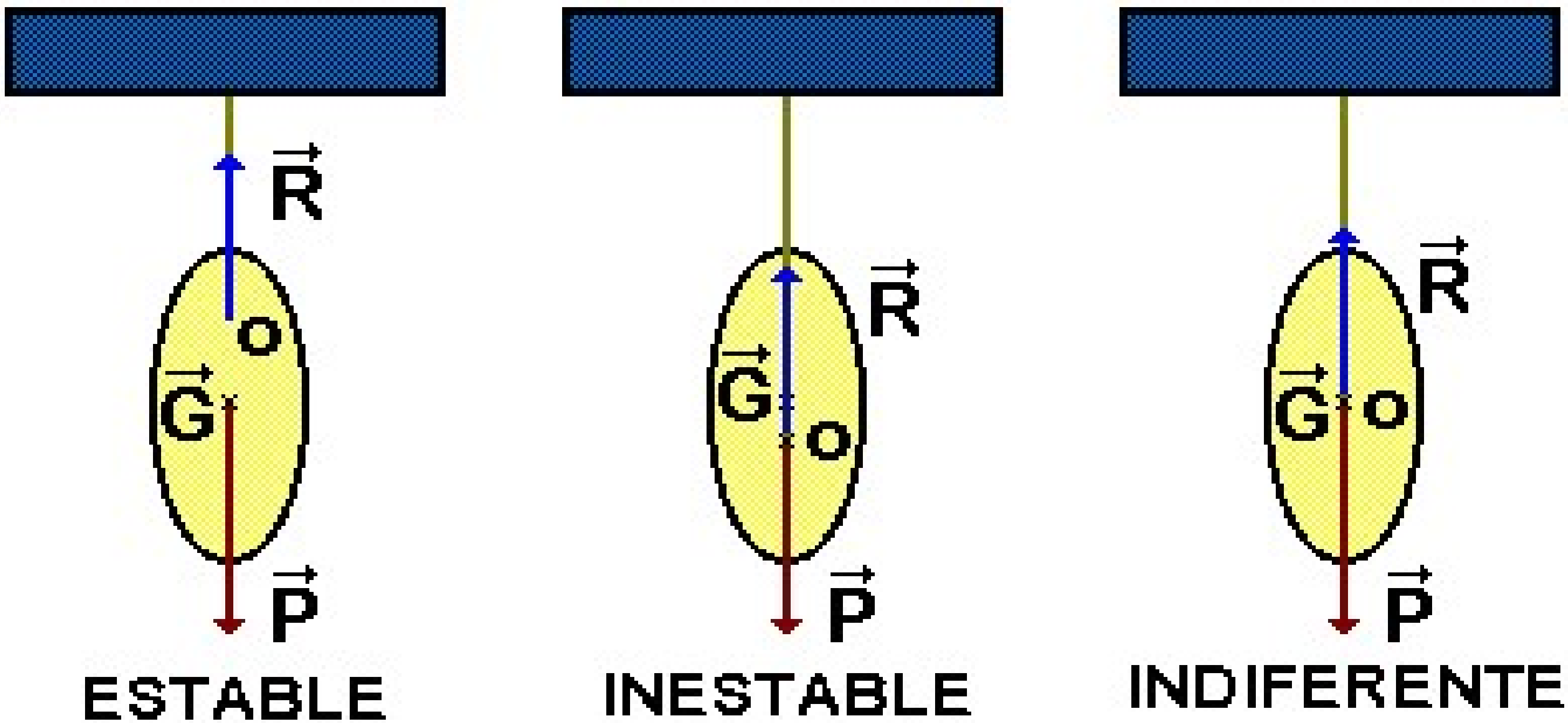




O
θ
d
d sen θ
CM
M g sen θ
θ
M g cos θ
vertical
M g

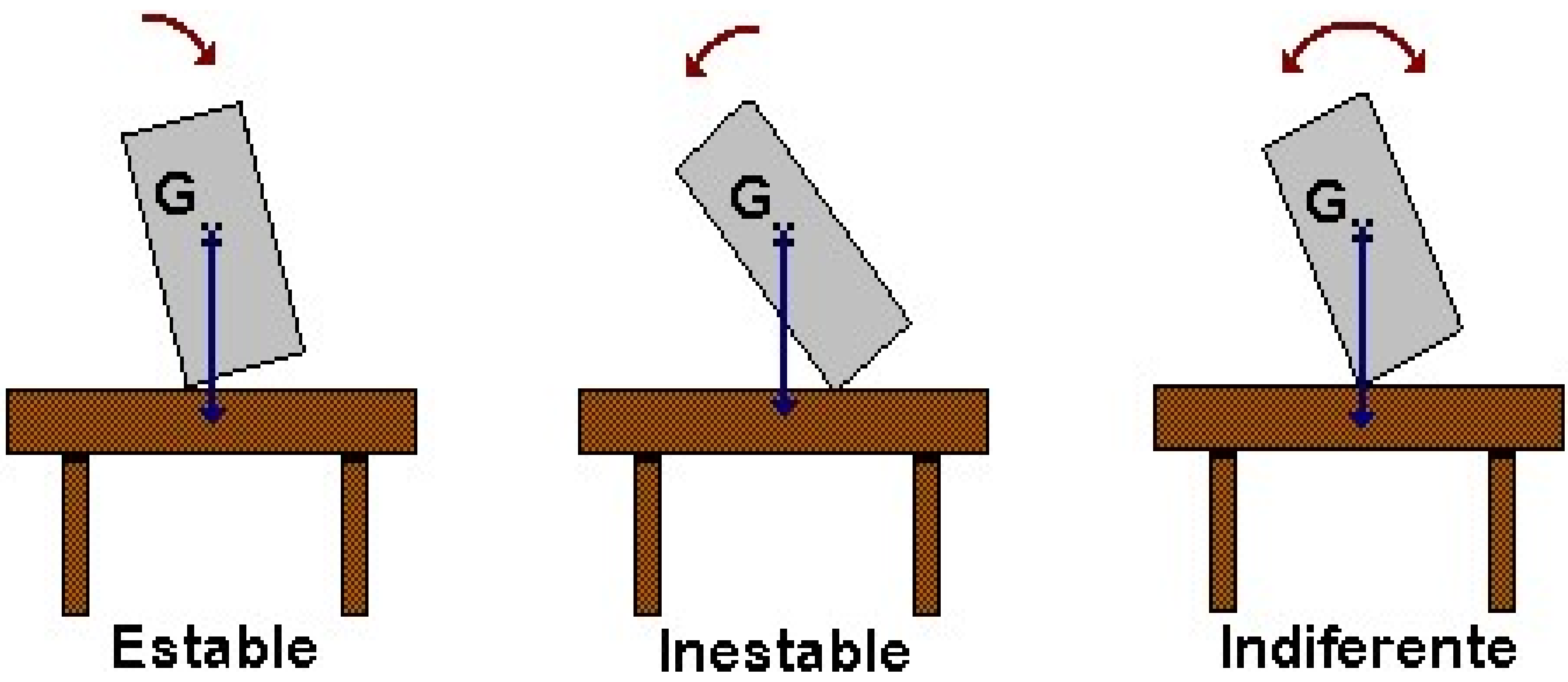
Cuerpos suspendidos

Para que un cuerpo suspendido esté en equilibrio, el eje vertical que pasa por el centro de gravedad G, debe pasar por el punto de suspensión O. Si el centro de gravedad está por debajo del punto de suspensión O, entonces el equilibrio es estable. Si en cambio, está por encima, el equilibrio es inestable. En el caso en que G y O coincidan, el equilibrio es indiferente. ***R*** es la fuerza de reacción ***R*** (igual y contraria a ***P***) que mantiene al cuerpo suspendido.

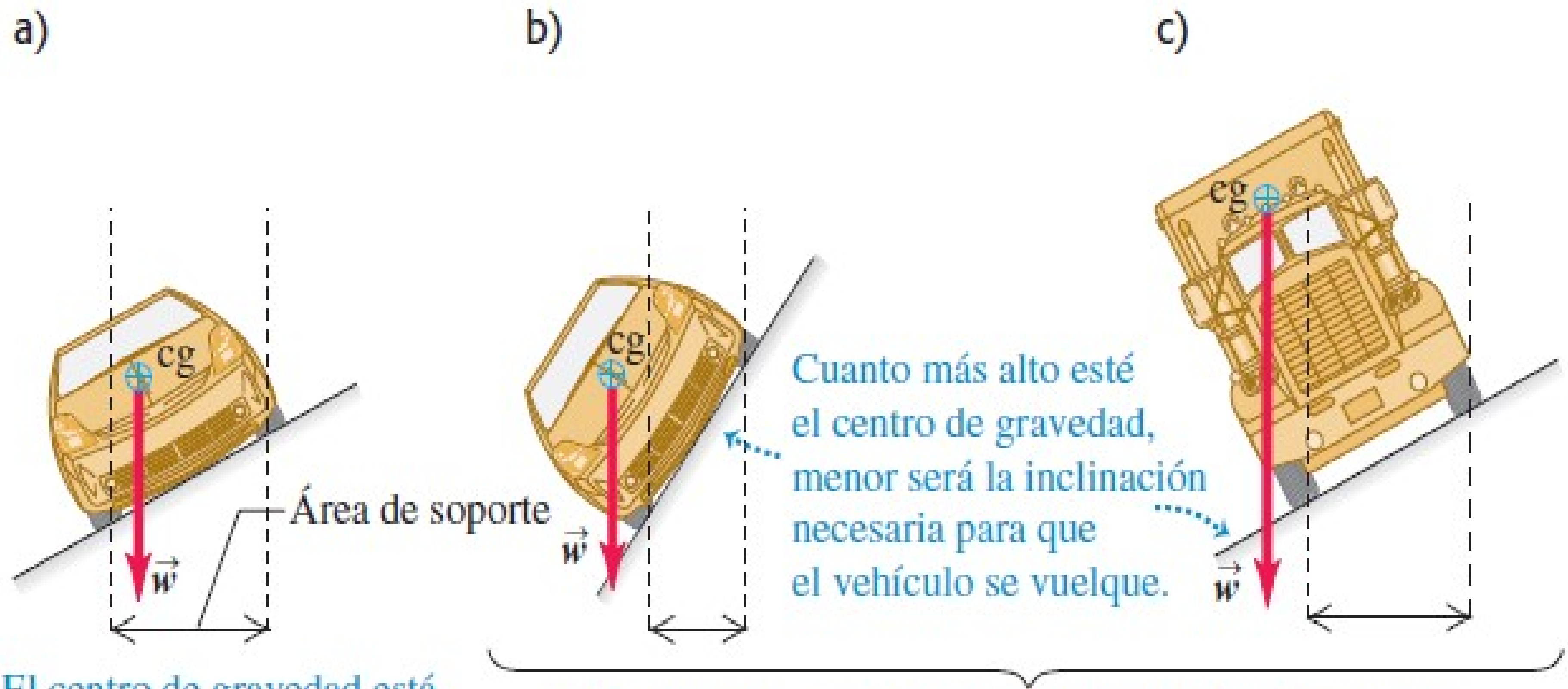


Cuerpos apoyados

Un cuerpo apoyado sobre un plano está en equilibrio estable cuando la vertical del centro de gravedad cae dentro de la base de sustentación (base de apoyo o polígono que circunscribe a los puntos de apoyo). El cuerpo de la izquierda retornará a su posición original, mientras que el del centro se caerá. El cuerpo de la derecha podrá caer hacia ambos lados.



En a), el centro de gravedad está dentro del área delimitada por los soportes y el automóvil está en equilibrio. El automóvil en b) y el camión en c) se volcarán porque sus centros de gravedad están fuera del área de soporte.



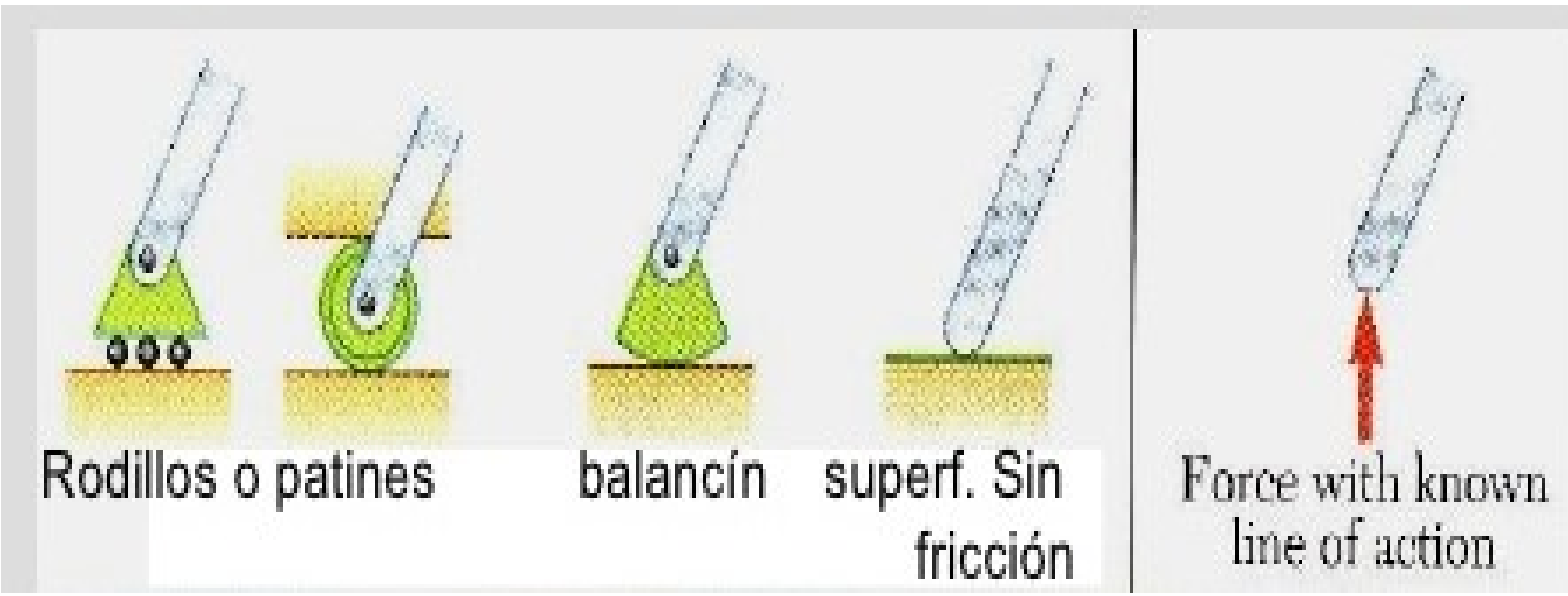
El centro de gravedad está
en el área de soporte:
el automóvil está en equilibrio.

El centro de gravedad está afuera del área de soporte:
el vehículo se vuelca.

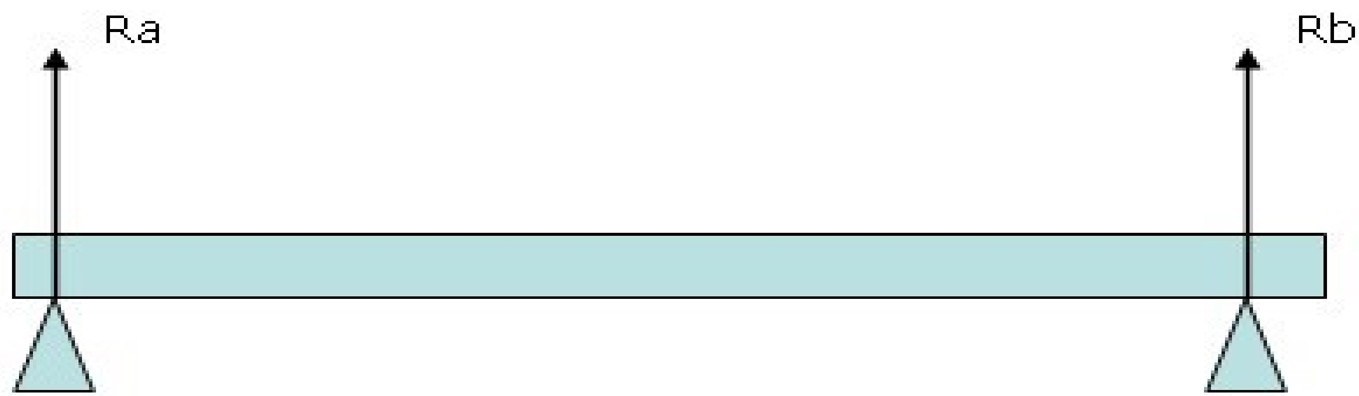
VINCULO: Es la condición impuesta a un punto de permanecer inmóvil o describir una determinada trayectoria.
APOYOS : La forma de realizar los vínculos en la práctica es mediante los apoyos (materialización física de los vínculos).

Clasificación
a) APOYOS DE PRIMER ORDEN o PRIMERA ESPECIE

Apoyos simples : Suprimen un grado de libertad (biela o rodillo). También llamados apoyos móviles.

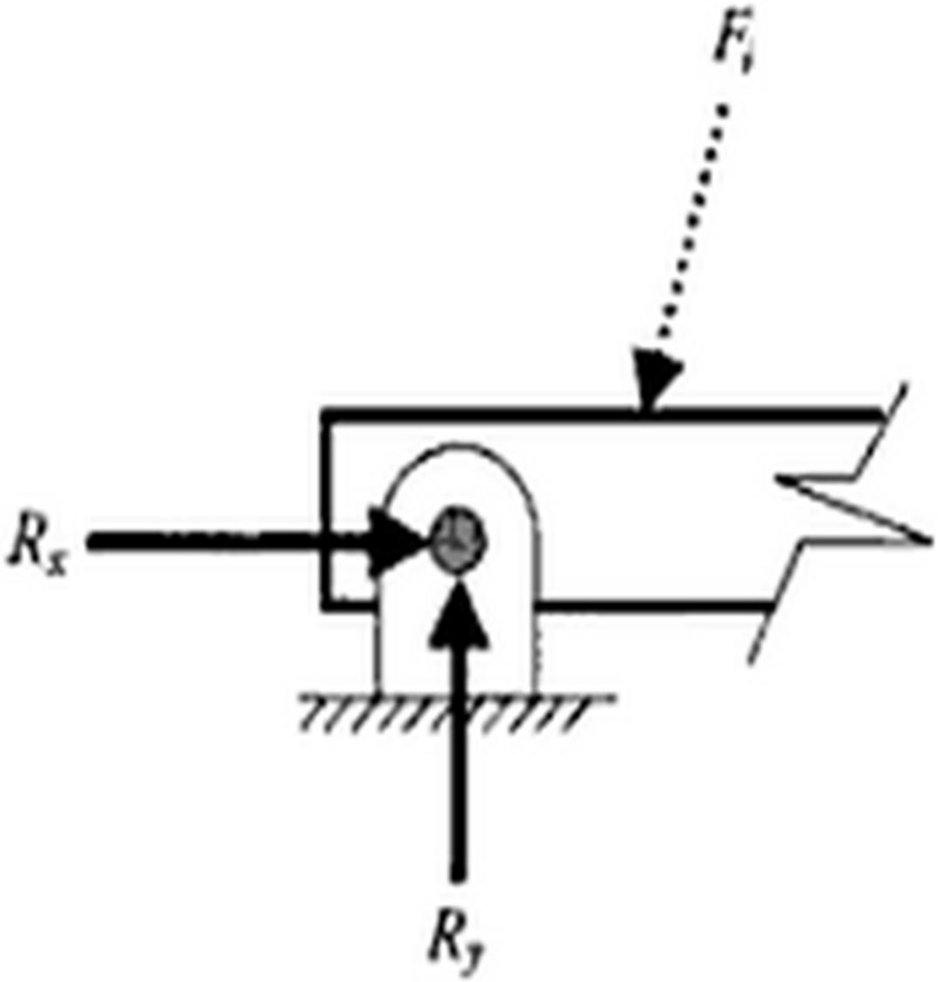


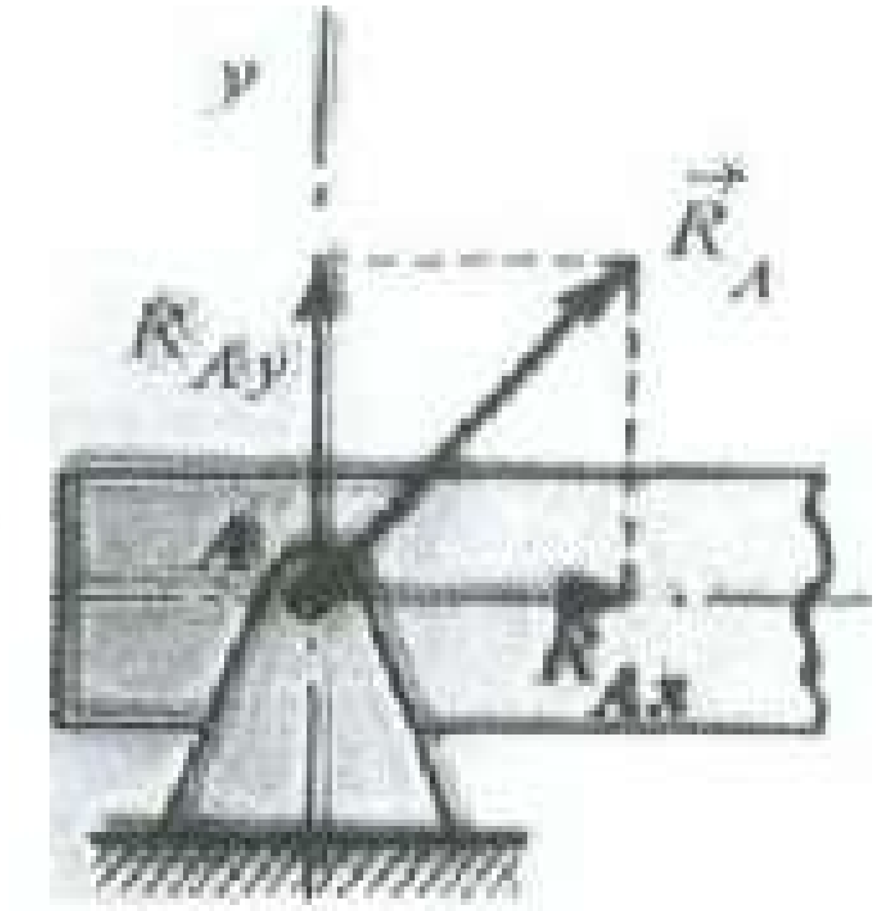
Ejemplo: Viga simplemente apoyada.



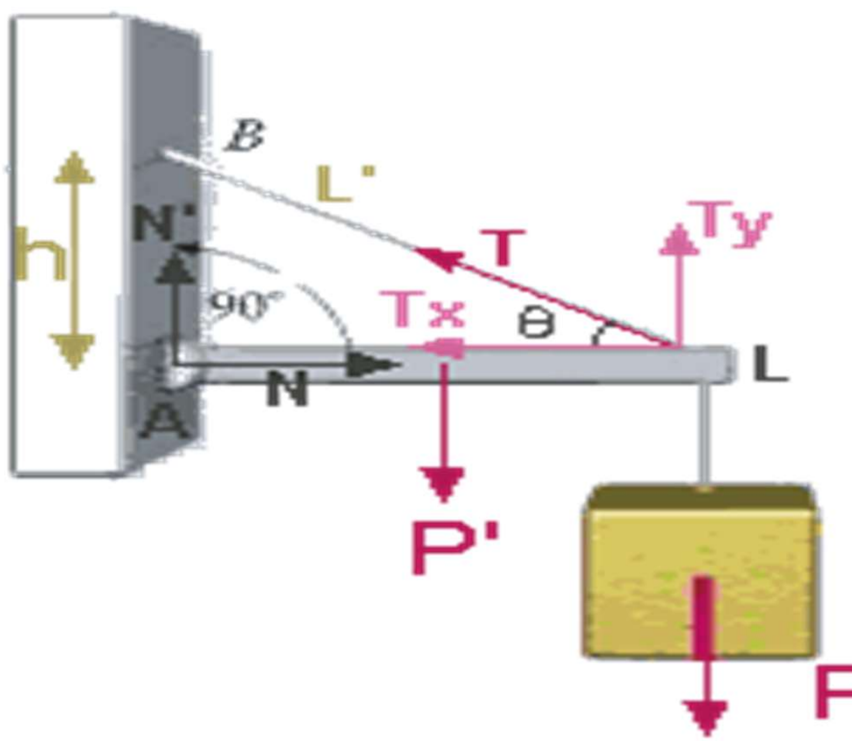
b) APOYOS DE SEGUNDO ORDEN o SEGUNDA ESPECIE

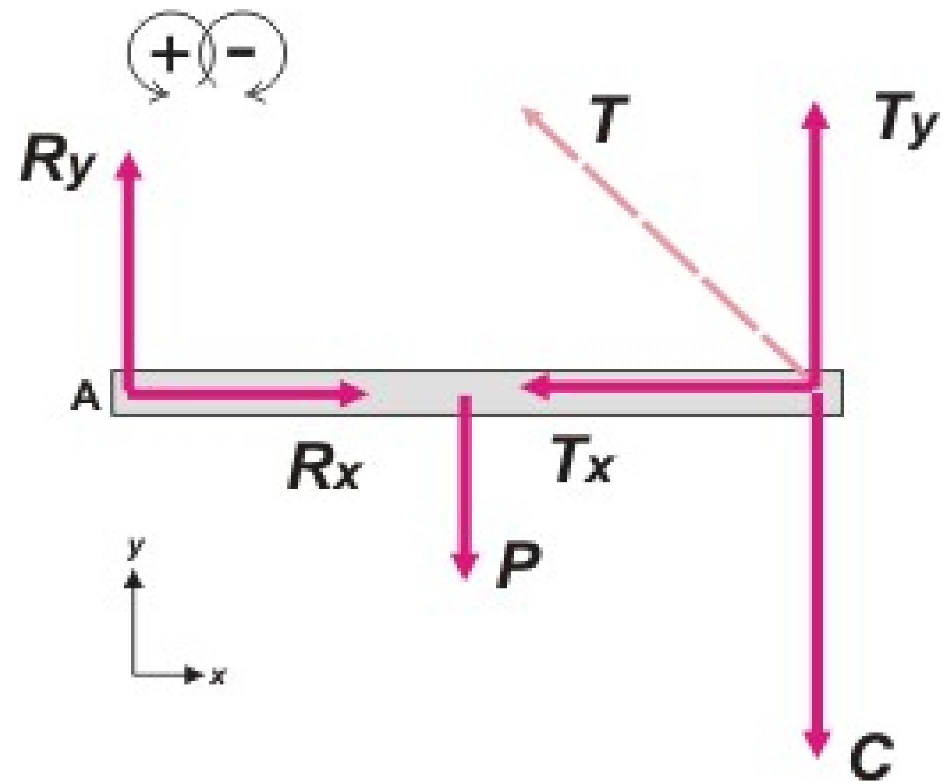
Articulaciones: Son apoyos de segundo orden porque suprimen dos grados de libertad.

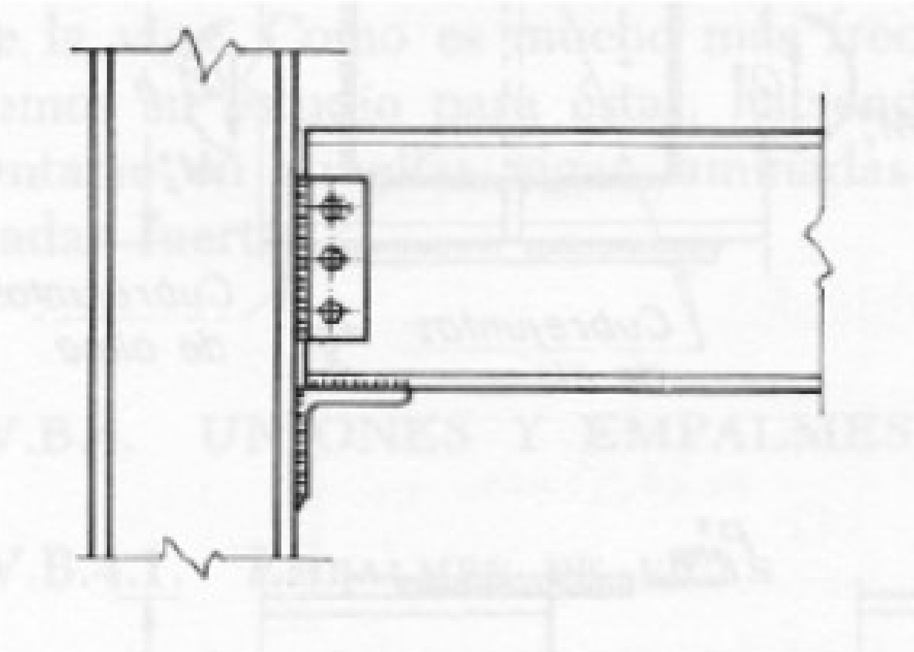


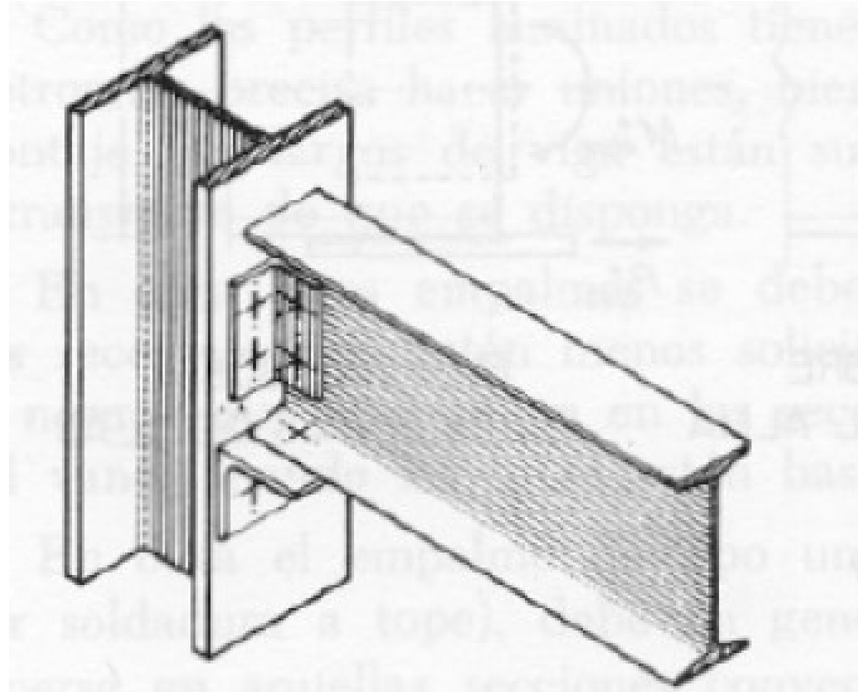


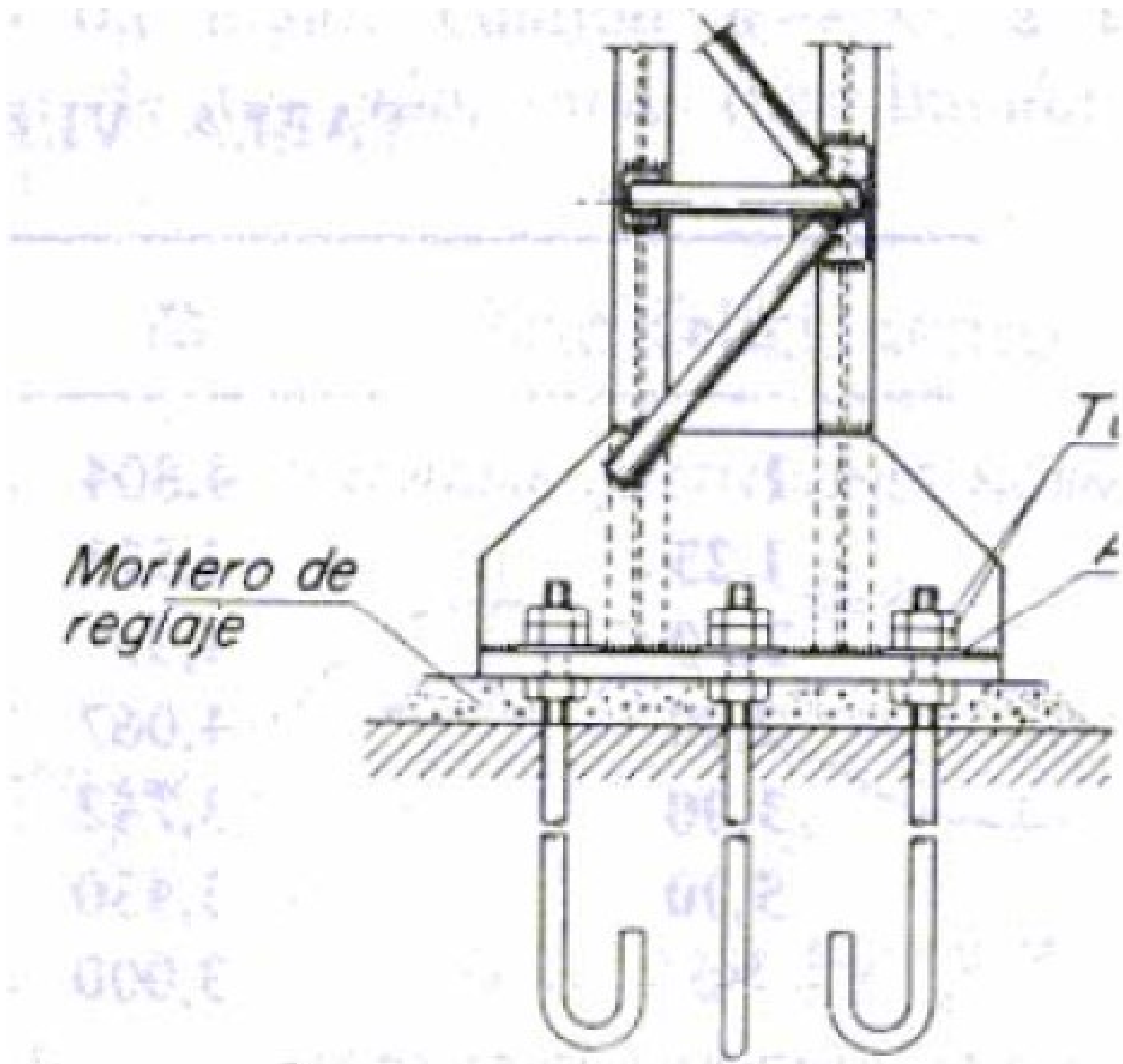
c) **APOYOS DE TERCER ORDEN o TERCERA ESPECIE**
Empotramientos: Son apoyos de tercer orden porque restringen 3 grados de libertad.










Mortero de reglaje

Estrategia para resolver problemas 11.1 Equilibrio de un cuerpo rígido

DENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La primera y la segunda condiciones de equilibrio son útiles siempre que haya un cuerpo rígido que no gire ni tenga una aceleración en el espacio.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Dibuje un esquema de la situación física, incluyendo dimensiones, y seleccione el cuerpo en equilibrio que analizará.
2. Haga un diagrama de cuerpo libre que muestre sólo las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo elegido y no otras. *No* incluya fuerzas ejercidas *por* el cuerpo sobre otros cuerpos. Muestre correctamente el punto donde actúa cada fuerza; esto resulta esencial para calcular correctamente las torcas. No se puede representar un cuerpo rígido como un punto.
3. Elija ejes de coordenadas y especifique el sentido positivo de la rotación para las torcas. Represente las fuerzas en función de sus componentes con respecto a los ejes seleccionados, tachando la fuerza original para no incluirla dos veces.
4. Al elegir un punto para calcular torcas, recuerde que, si la línea de acción de una fuerza pasa *por* ese punto específico, la torca de la fuerza con respecto a ese punto es cero. En muchos casos, esto permite eliminar fuerzas o componentes desconocidas de la ecuación de torca, mejorando la elección del punto para el cálculo. El cuerpo no necesariamente tiene que pivotear alrededor de un eje que pase por el punto elegido.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

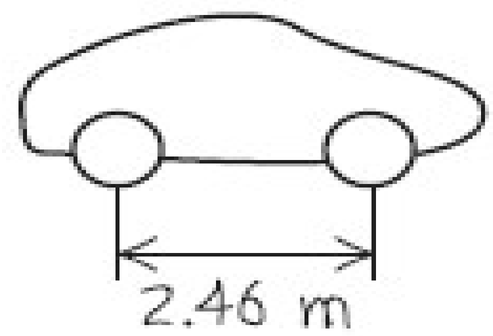
1. Escriba ecuaciones que expresen las condiciones de equilibrio. Recuerde que $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum \tau_z = 0$ siempre son ecuaciones individuales; *nunca* sume componentes x y y en una misma ecuación. Recuerde además que, si una fuerza se representa en términos de sus componentes, se puede calcular la torca de esa fuerza calculando por separado la torca de cada componente, cada una con su brazo de palanca y signo adecuados, y sumándolas. Esto suele ser más fácil que determinar el brazo de palanca de la fuerza original.
2. Siempre se necesitan tantas ecuaciones como incógnitas haya. Dependiendo del número de incógnitas, podría ser necesario calcular torcas con respecto a dos o más ejes para obtener suficientes ecuaciones. Es común que haya varios conjuntos igualmente buenos de ecuaciones de fuerza y torca para un problema dado; casi nunca hay una sola combinación "correcta" de ecuaciones.

EVALUAR *la respuesta:* Una forma útil de comprobar los resultados es replantear la segunda condición de equilibrio, $\sum \tau_z = 0$, eligiendo un origen distinto. Si todo se hizo correctamente, se obtendrán las mismas respuestas con el nuevo origen.

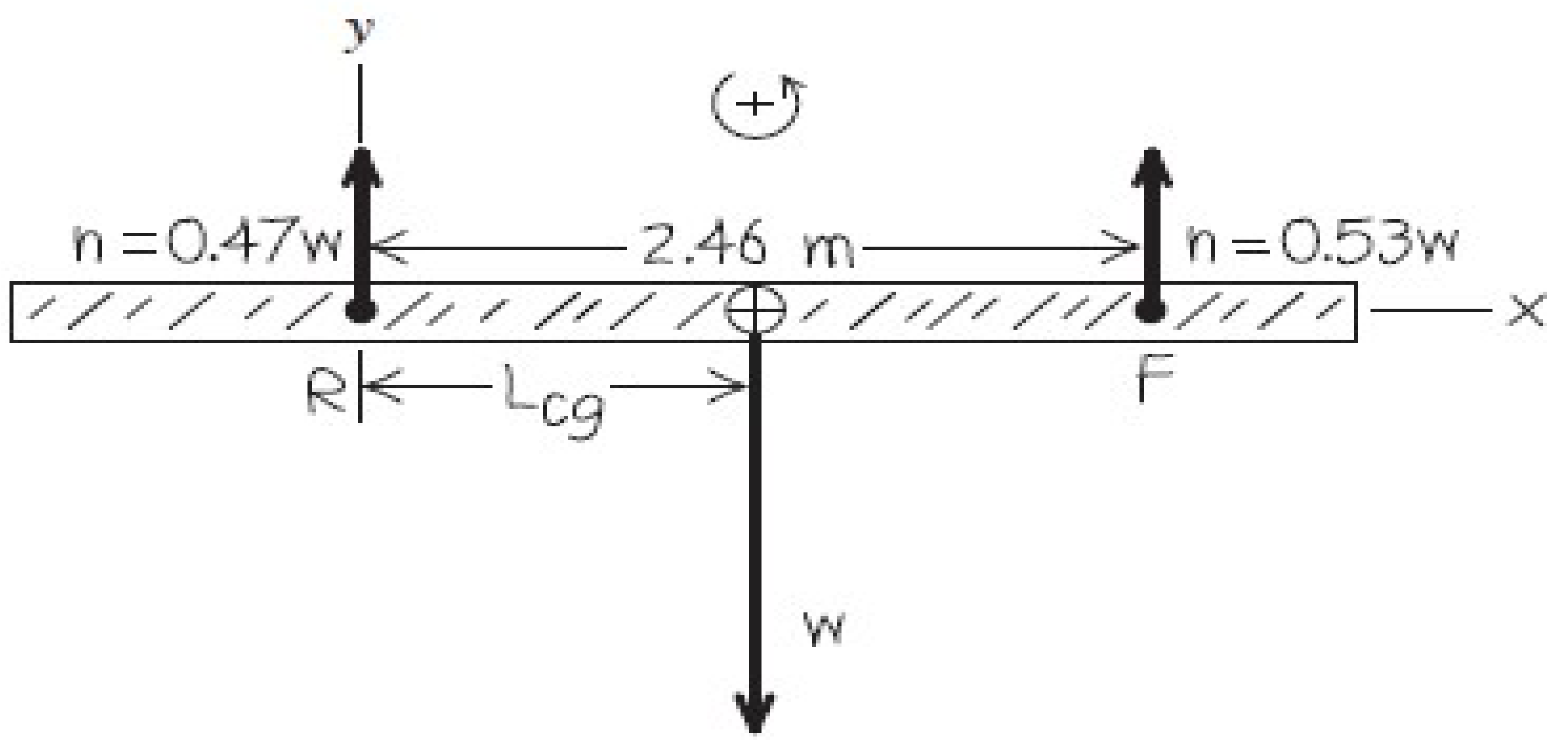
Distribución del peso de un automóvil

Una revista especializada informa que cierto automóvil deportivo tiene el 53% de su peso sobre las ruedas delanteras y el 47% sobre las traseras, con una distancia entre ejes de 2.46 m. Esto implica que la fuerza normal total sobre las ruedas delanteras es de $0.53w$, y sobre las traseras, de $0.47w$, donde w es el peso total. Al espacio entre el eje delantero y el eje trasero se llama distancia entre ejes. ¿Qué tan adelante del eje trasero está el centro de gravedad del automóvil?

a) **Esquema del problema**



b) **Diagrama de cuerpo libre**



Solución

EJECUTAR: Vemos por la figura 11.8b que se satisface la primera condición de equilibrio: $\sum F_x = 0$ porque no hay componentes de fuerza x, en tanto que $\sum F_y = 0$ porque $0.47w + 0.53w + (-w) = 0$. En la ecuación de fuerza no interviene la incógnita L_{cg}, así que deberemos despejar esta última de la ecuación de torca para el punto R:

$$\sum \tau_R = 0.47w(0) - wL_{cg} + 0.53w(2.46 \text{ m}) = 0$$

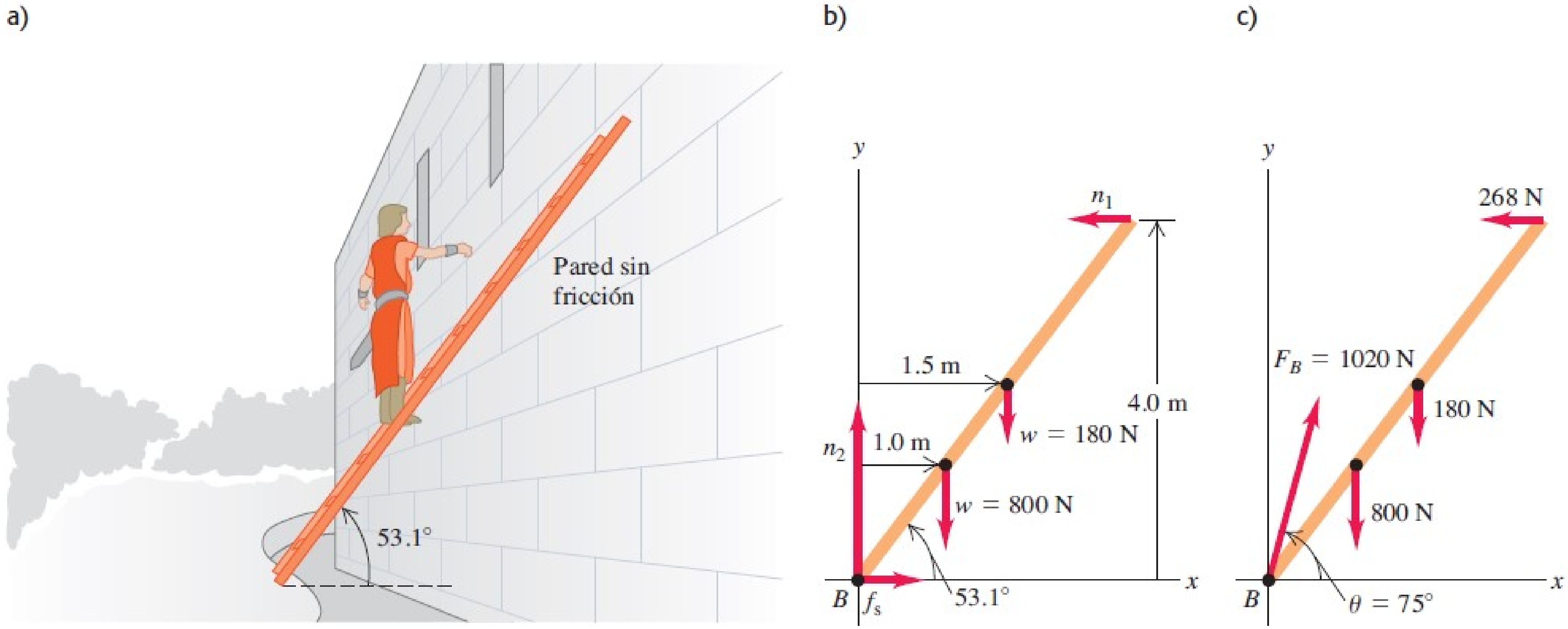
$$L_{cg} = 1.30 \text{ m}$$

Rescate heroico

Sir Lancelot está tratando de rescatar a Lady Elayne del Castillo von Doom subiendo por una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 180 N. Lancelot, quien pesa 800 N, se detiene después de subir un tercio de la escalera (figura 11.9a). La base de la escalera descansa en una cornisa de piedra horizontal y se recarga al otro lado del foso en equilibrio contra una pared vertical, que no tiene fricción a causa de una gruesa capa de musgo. La escalera forma un ángulo de 53.1° con la horizontal, siendo así la hipotenusa de un triángulo rectángulo 3-4-5. *a*) Calcule las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la base de la escalera. *b*) Obtenga el coeficiente de fricción estática mínimo que evita un deslizamiento en la base de la escalera. *c*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de contacto que actúa sobre la base de la escalera.

Diagrama de cuerpo libre

Esquema del problema **Diagrama de cuerpo libre**



$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$

$$\sum F_y = n_2 + (-800\ \text{N}) + (-180\ \text{N}) = 0$$

$$\sum \tau_B = n_1\,(4.0\ \text{m}) - (180\ \text{N})(1.5\ \text{m}) - (800\ \text{N})(1.0\ \text{m}) + n_2(0) + f_s(0) = 0$$

b) La fuerza de fricción estática f_s no puede exceder $\mu_s n_2$, así que el coeficiente *mínimo* de fricción estática para evitar el deslizamiento es

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{f_s}{n_2} = \frac{268\ \text{N}}{980\ \text{N}} = 0.27$$

c) Las componentes de la fuerza de contacto $\vec{F}_B$ en la base son la fuerza de fricción estática f_s y la fuerza normal n_2, así que

$$\vec{F}_B = f_s\hat{\imath} + n_2\hat{\jmath} = (268\ \text{N})\hat{\imath} + (980\ \text{N})\hat{\jmath}$$

La magnitud y la dirección de $\vec{F}_B$ (figura 11.9c) es entonces

$$F_B = \sqrt{(268\ \text{N})^2 + (980\ \text{N})^2} = 1020\ \text{N}$$

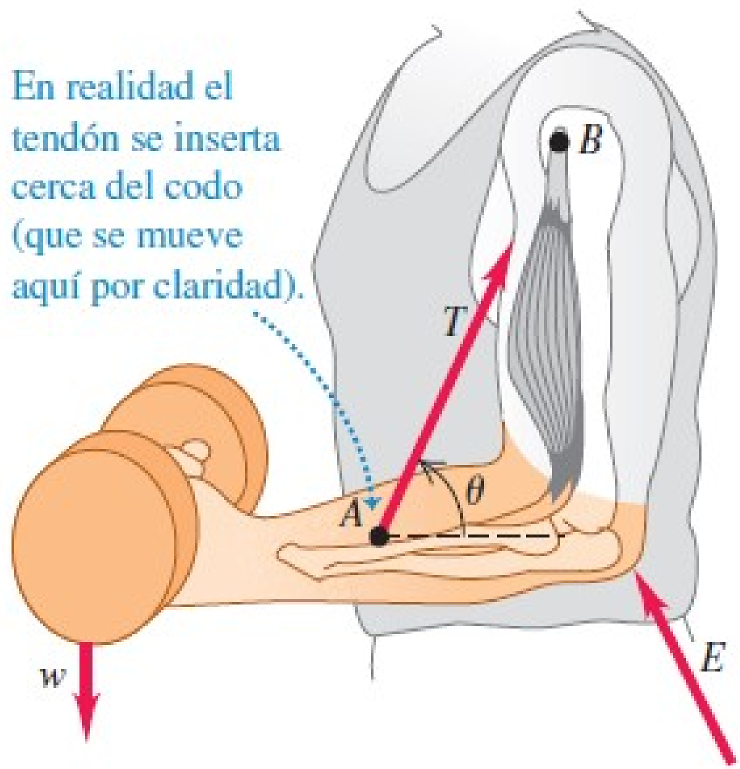
$$\theta = \arctan\frac{980\ \text{N}}{268\ \text{N}} = 75^\circ$$

Equilibrio y ejercicio

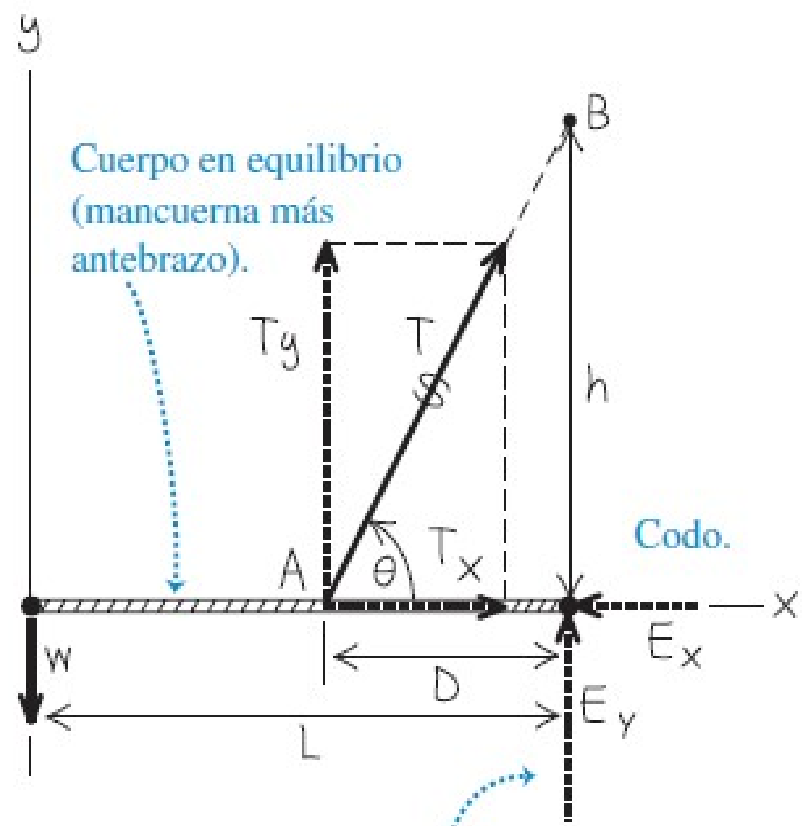
La figura 11.10a muestra un brazo humano horizontal levantando una mancuerna. El antebrazo está en equilibrio bajo la acción del peso w de la mancuerna, la tensión T del tendón conectado al músculo bíceps y la fuerza E ejercida sobre el antebrazo por el brazo en el codo. Por claridad, el punto A de adhesión del tendón se dibujó más lejos del codo que en la realidad. Se dan el peso w y el ángulo θ entre la fuerza de tensión y la horizontal; queremos calcular la tensión en el tendón y las dos componentes de fuerza en el codo (tres incógnitas escalares en total). Despreciamos el peso del antebrazo.

11.10 a) La situación. b) Diagrama de cuerpo libre del antebrazo. Se desprecia el peso del antebrazo y se exagera mucho la distancia D por claridad.

a)



b)



Esquema del problema

Diagrama de cuerpo libre

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El sistema está en reposo, así que de nuevo usamos las condiciones de equilibrio.

PLANTEAR: Como se muestra en la figura 11.10b, representamos la fuerza del tendón en términos de sus componentes T_x y T_y, usando el ángulo dado θ y la magnitud desconocida T:

$$T_x = T\cos\theta \qquad T_y = T\operatorname{sen}\theta$$

También representamos la fuerza en el codo en términos de sus componentes E_x y E_y; supondremos que sus direcciones son las indicadas en la figura 11.10b; no necesitamos ser exactos porque los resultados de E_x y E_y nos indicarán las direcciones reales. Las incógnitas son la magnitud T de la tensión en el tendón y las componentes E_x y E_y de la fuerza en el codo.

EJECUTAR: La forma más sencilla de obtener la tensión T es tomando torcas con respecto al codo. La ecuación de torca resultante no contiene E_x, E_y ni T_x porque las líneas de acción de todas estas fuerzas pasan por este punto. La ecuación de torca se reduce entonces a

$$\sum \tau_E = Lw - DT_y = 0$$

De esto obtenemos

$$T_y = \frac{Lw}{D} \qquad \text{y} \qquad T = \frac{Lw}{D\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Para calcular E_x y E_y, usamos la primera condición de equilibrio, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$:

$$\sum F_x = T_x + (-E_x) = 0$$

$$E_x = T_x = T\cos\theta = \frac{Lw}{D\,\mathrm{sen}\,\theta}\cos\theta = \frac{Lw}{D}\cot\theta$$

$$= \frac{Lw}{D}\frac{D}{h} = \frac{Lw}{h}$$

$$\sum F_y = T_y + E_y + (-w) = 0$$

$$E_y = w - \frac{Lw}{D} = -\frac{(L - D)w}{D}$$

El signo negativo indica que nuestra estimación de la dirección de E_y (figura 11.10b) es incorrecta; en realidad es vertical *hacia abajo.*

EVALUAR: Podemos comprobar nuestros resultados obteniendo E_x y E_y de una manera distinta que usa otras dos ecuaciones de torcas. Tomamos torcas con respecto al punto de sujeción del tendón, A:

$$\sum \tau_A = (L - D)w + DE_y = 0 \qquad \text{y} \qquad E_y = -\frac{(L - D)w}{D}$$

Por último, tomamos torcas con respecto al punto B de la figura:

$$\sum \tau_B = Lw - hE_x = 0 \qquad \text{y} \qquad E_x = \frac{Lw}{h}$$

Elegimos los puntos A y B porque la tensión del tendón T tiene torca cero en torno a esos puntos. (¿Entiende por qué, viendo la figura 11.10b?) Observe lo mucho que simplificamos los cálculos eligiendo el punto para calcular torcas a modo de eliminar una o más incógnitas.

En nuestra determinación alterna de E_x y E_y, no usamos explícitamente la primera condición de equilibrio (que la suma vectorial de las fuerzas sea cero). Como verificación, calcule $\sum F_x$ y $\sum F_y$ ¡para comprobar que realmente *sean* cero!

Como ejemplo específico, suponga $w = 200$ N, $D = 0.050$ m, $L = 0.30$ m y $\theta = 80°$. Dado que $\theta = h/D$, obtenemos

$$h = D\tan\theta = (0.050\ \mathrm{m})(5.67) = 0.28\ \mathrm{m}$$

Por los resultados generales anteriores vemos que

$$T = \frac{Lw}{D\operatorname{sen}\theta} = \frac{(0.30\ \mathrm{m})(200\ \mathrm{N})}{(0.050\ \mathrm{m})(0.98)} = 1220\ \mathrm{N}$$

$$E_y = -\frac{(L - D)w}{D} = -\frac{(0.30\ \mathrm{m} - 0.050\ \mathrm{m})(200\ \mathrm{N})}{0.050\ \mathrm{m}}$$

$$= -1000\ \mathrm{N}$$

$$E_x = \frac{Lw}{h} = \frac{(0.30\ \mathrm{m})(200\ \mathrm{N})}{0.28\ \mathrm{m}} = 210\ \mathrm{N}$$

La magnitud de la fuerza en el codo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1020\ \mathrm{N}$$

En vista de las magnitudes de los resultados, despreciar el peso del antebrazo (digamos de 20 N) sólo causa errores relativamente pequeños.

Problema para resolver

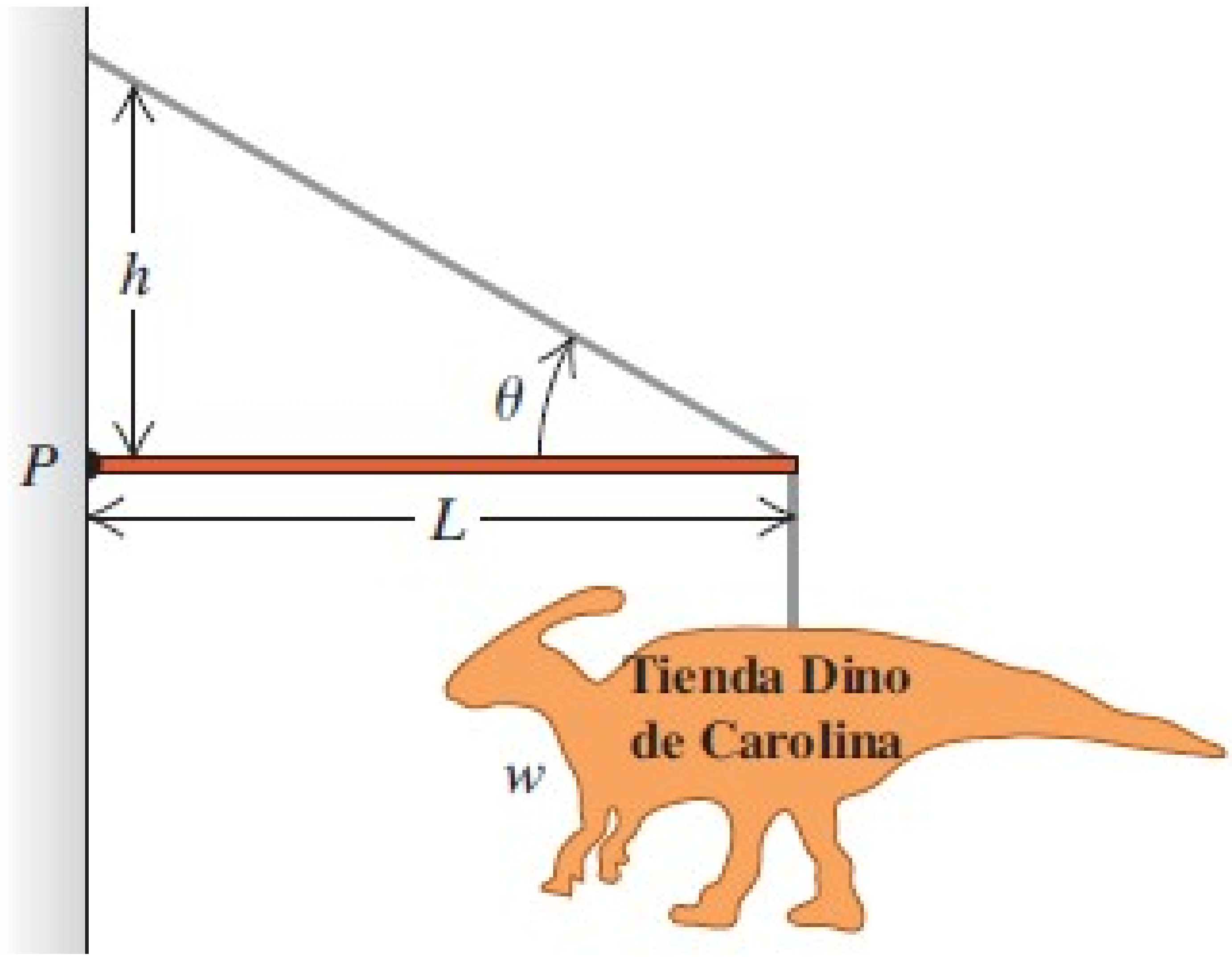


Diagrama de cuerpo libre