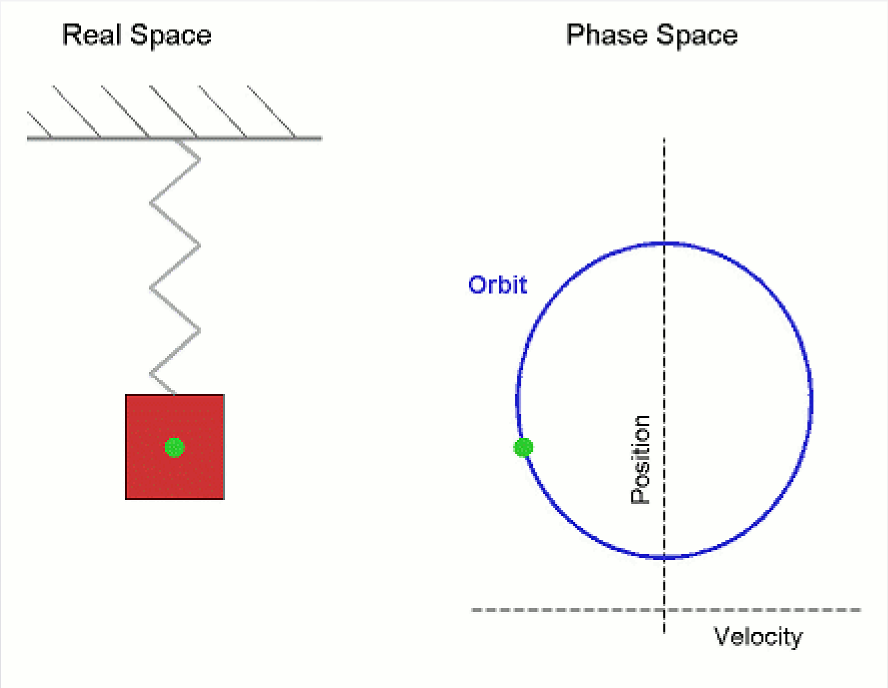
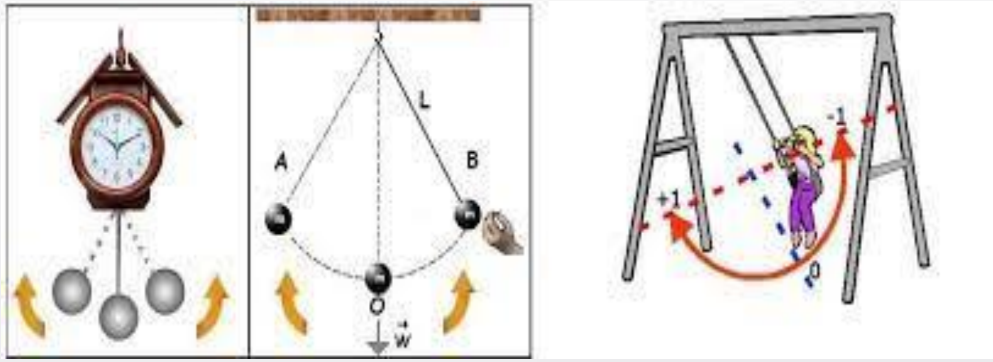
Movimiento oscilatorio



MOVIMIENTO OSCILATORIO



UN MOVIMIENTO ES PERIODICO, CUANDO A INTERVALOS REGULARES DE TIEMPO, SE VUELVEN A REPETIR LAS MISMAS CONDICIONES DE MOVIMIENTO

EL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE (MAS)

SISTEMA IDEAL:

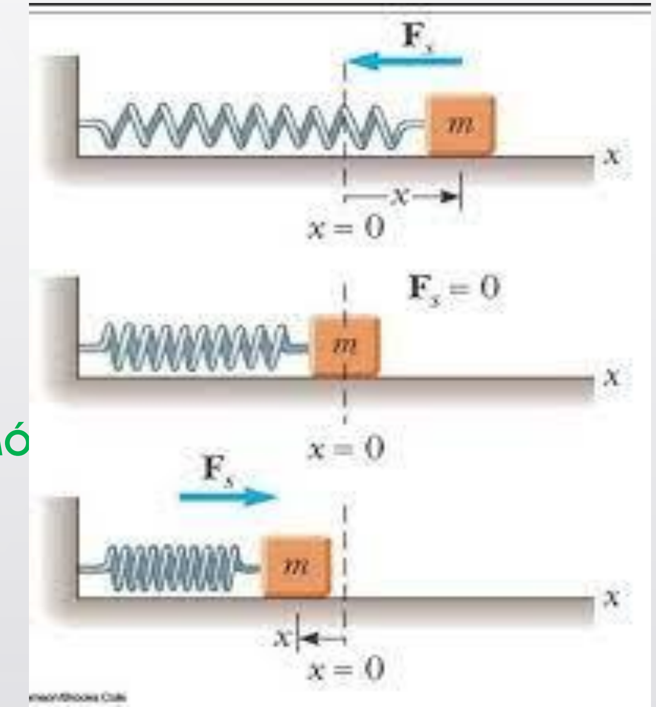
- CUERPO QUE SE DESPLAZA SOBRE UNA SUPERFICIE SIN FRICCIÓN
- RESORTE INEXTENSIBLE Y SIN PESO

F=-kx (fuerza restauradora)

$\sum F = ma \longrightarrow -kx = ma$

$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ ECUACIÓN DEL OSCILADOR ARMÓ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$ ***ECUACIÓN DIFERENCIAL***



EL MAS

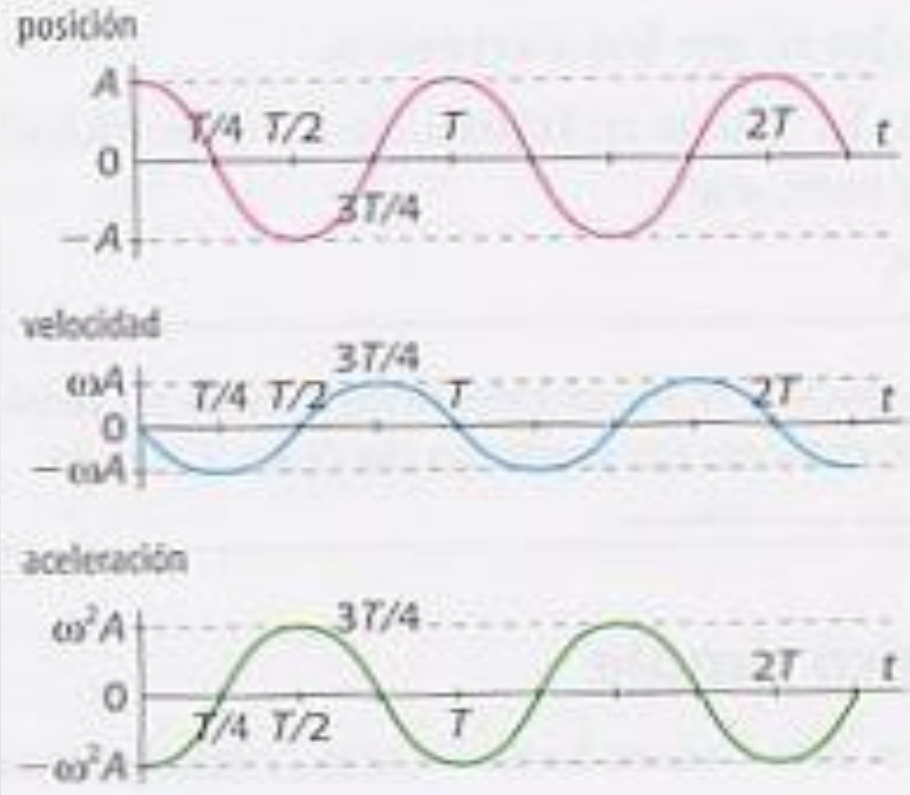
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}$**x= *0*** ecuación diferencial, la solución es ***x(t) (ecuación de movimiento)***
- $x=\cos\theta$
- $x(t)=\cos\omega t$
- $x(t)= A\cos\omega t$

$$x(t)= A\cos(\omega t+\varphi)$$ ***ecuación del MAS***

amplitud ***fase*** $(x_m = A)$

$v(t)= -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$ $v_{max}= -A\omega$

$a(t)= -A\,\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$ $a_{max}=-A\omega^2$



MAS: constantes que caracterizan el movimiento

Como $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, $= -\frac{k}{m}x$ $\qquad -A\,\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -\frac{k}{m}A\cos(\omega t+\varphi)$ $\qquad$ resulta $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **frecuencia del MAS** $\qquad$ **cuando** $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$ **(periodo)** $\quad f = 1/T$

- *Si elevamos al cuadrado x(t) y v(t) y sumamos:*

$$\left.\begin{array}{l} x^2(t) = A^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ v^2(t) = A^2\omega^2\,sen^2(\omega t+\varphi) \end{array}\right\} \qquad x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega^2} = A^2$$

amplitud del MAS

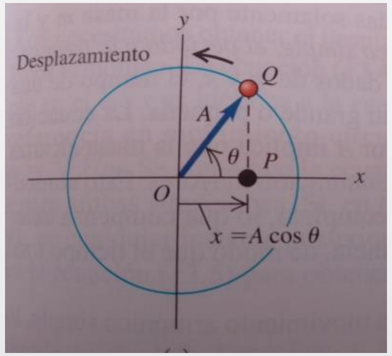
- Si consideramos condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -A\,\omega sen\varphi \end{array}\right\}$$

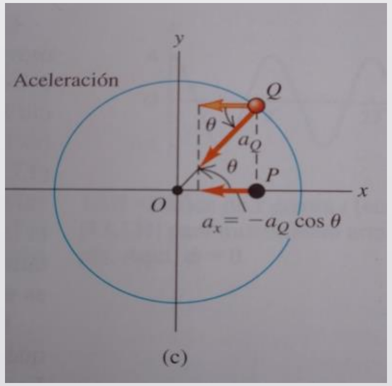
dividimos miembro a miembro: $\qquad tg\,\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega}$ **constante de fase**

EL MAS: relación con el MCU

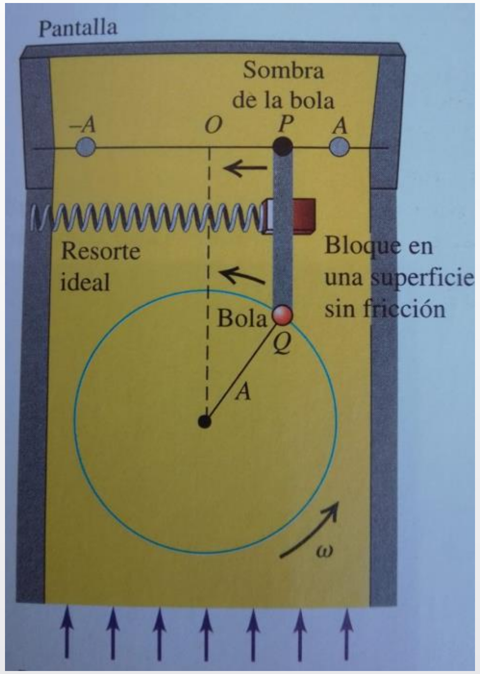
- MAS como proyección del movimiento circular sobre un diámetro



- Circulo de referencia
- La componente en x del fasor es: $x = A\cos\theta$



- La aceleración $a_Q = \omega^2 A$ y la aceleración en P es $a_x = -a_Q\cos\theta$, entonces $a_x = -\omega^2 A\cos\theta \Longrightarrow a_x = -\omega^2 x$ característica del oscilador armónico



Energía en el MAS

- E=K+U

$$K=\frac{1}{2}mv2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\, sen^2(\omega t+\varphi)$$

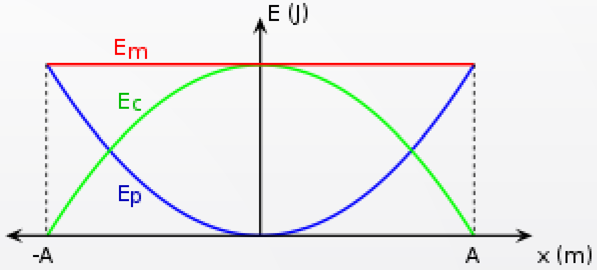
$$U= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t+\varphi)$$

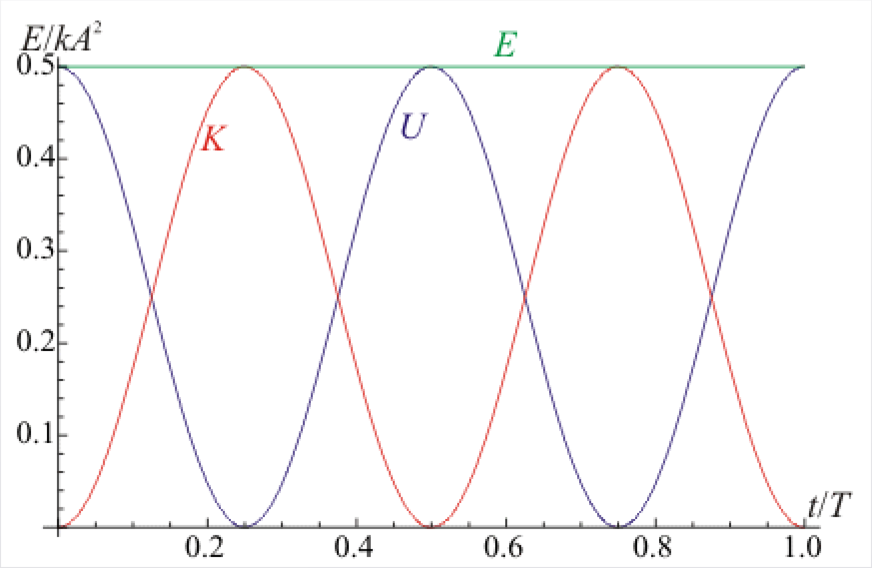
entonces:

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\, sen^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t+\varphi)$$

como k= mω^2

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$





Aplicaciones del MAS: péndulo simple

- La fuerza de restitución es la componente del peso: $\sum F_T = ma_T = -mg\ \text{sen}\theta$

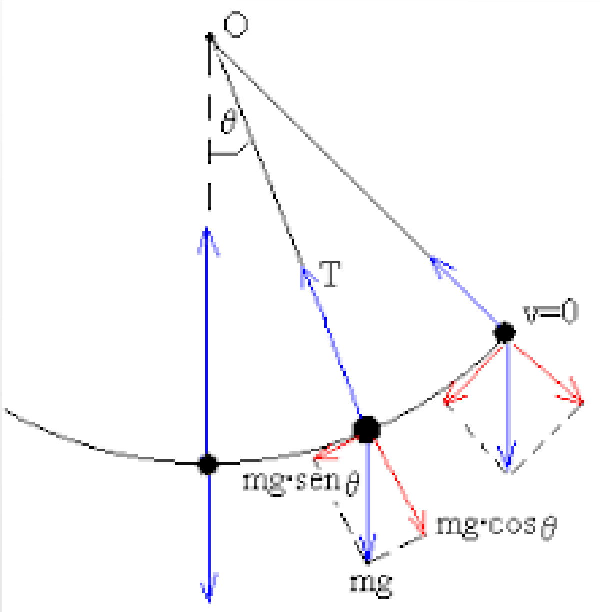
  $\sum F_N = ma_N = -mg\cos\theta + T = 0???$

$a_T = -g\ \text{sen}\theta$ **(no cumple con la ec. del osc. armonico)**

Si **θ** es pequeño (**θ<14°**) ⟶ $a = -g\,\theta = -g\,\frac{x}{l}$

$a = -\frac{g}{l}x$, comparando con $a = \omega^2 x$, significa que

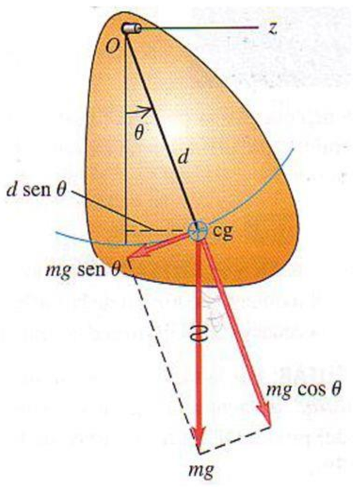
$\omega^2 = \frac{g}{l}$, el periodo será: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$



Leyes del péndulo simple

Aplicaciones del MAS: péndulo físico

Péndulo físico:



$$\tau = -mgd\sin(\theta)$$

$$\theta \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) \to \theta$$

$$\tau = -mgd\theta$$

$$-mgd\theta = I\alpha$$

$$0 = I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgd\theta$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}}$$

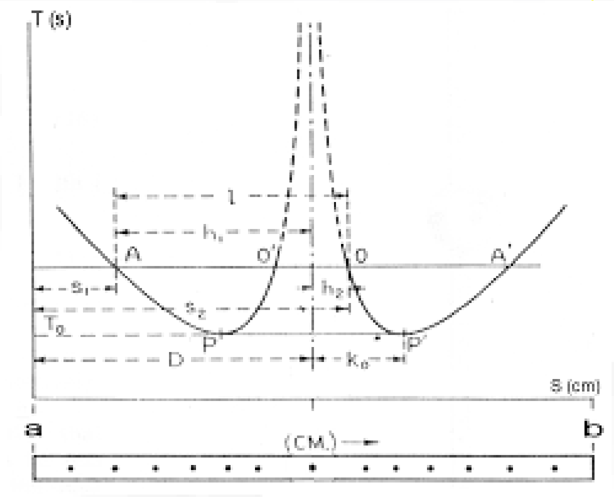
$$\theta(t) = \Phi\cos(\omega t + \theta_0)$$

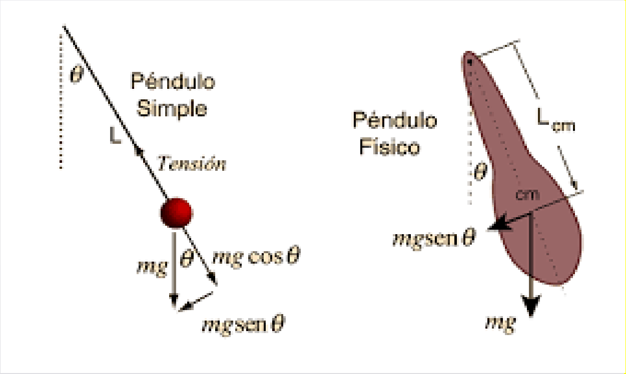
➡ torca restauradora debido al peso

el periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

grafica de T(d)

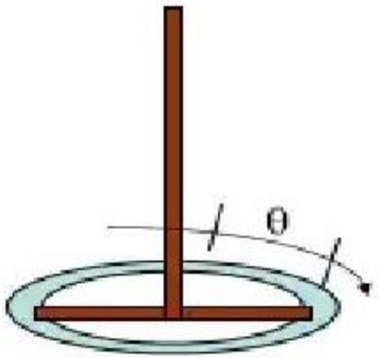




Si $T_s = T_f$ ➡ $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$ ➡ $l_r = \frac{I}{md}$

- Centro de oscilación y de percusión

Aplicaciones del MAS: péndulo de torsión



El cable tiene una constante de torsión k y ejerce un momento de torsión de restitución τ.

Ley de Newton para un cuerpo rígido

$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-k\theta = I\alpha \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta}$$

La torca restauradora es:

$\mathcal{T}$=- κ θ

Comparando con

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,\text{x}$$

como $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{\kappa}{I},$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

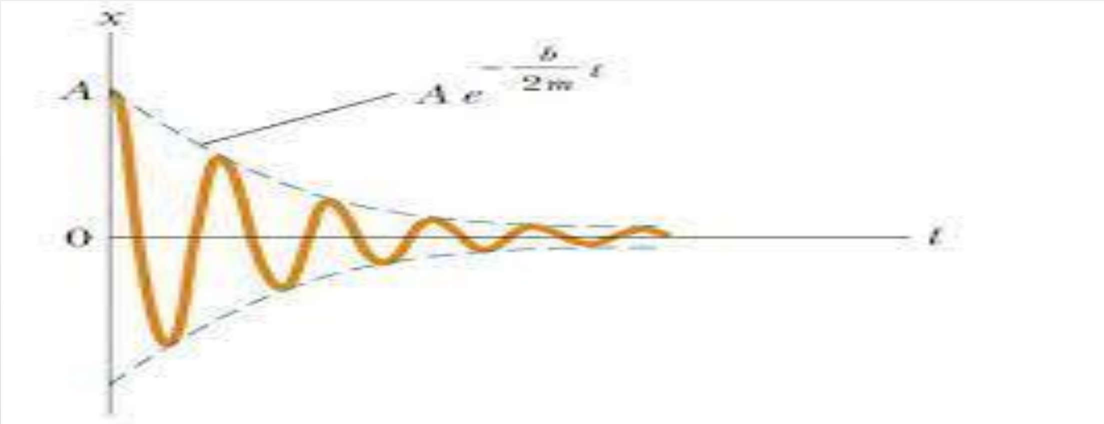
Movimiento amortiguado

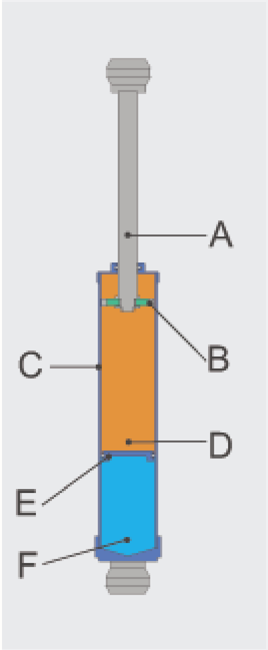
$\sum F = ma$ $\quad$ $-kx - bv = ma$

$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$

La solución es: $x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \varphi)$

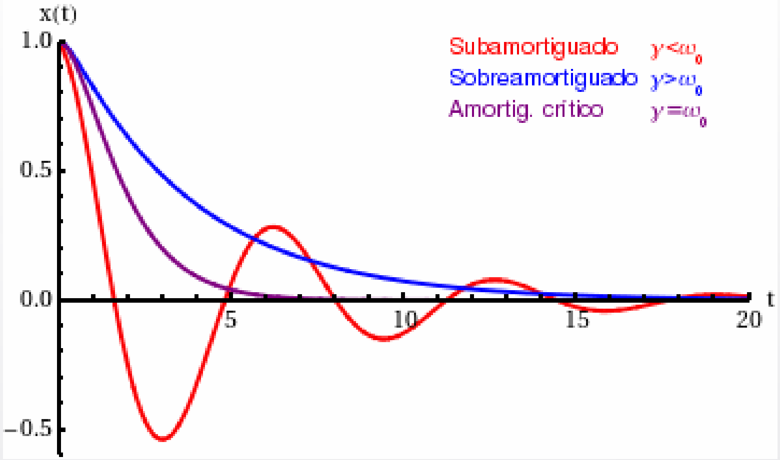
ω´ es la frecuencia de amortiguamiento





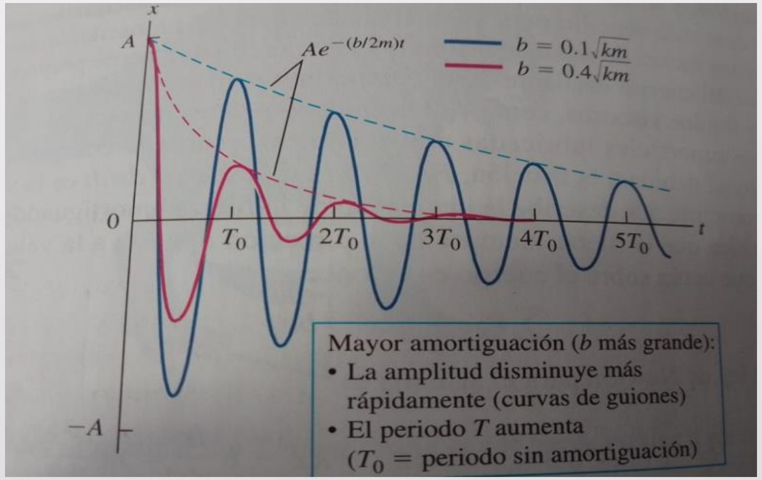
Movimiento amortiguado

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



Sistemas fuertemente amortiguados

- $b^2 >>> 4mk$ SOBREAMORTIGUADO
- $b^2 < 4mk$ SUBAMORTIGUADO
- $b^2 = 4mk$ AMORTIGUAMIENTO CRITICO



Movimiento forzado

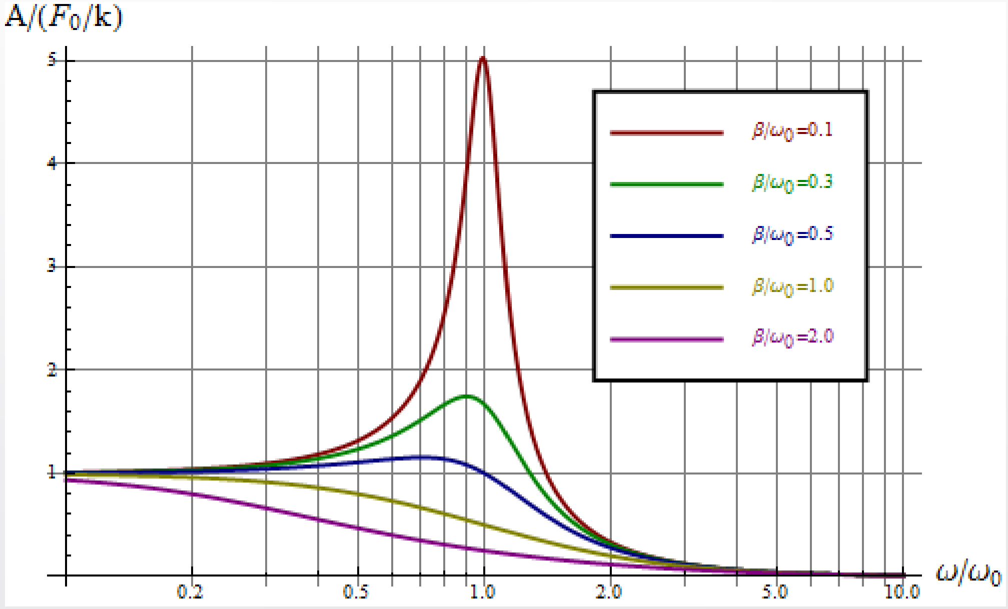
$\sum F = ma$ $\qquad$ $-kx - bv + F_{ext} = ma$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega''t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

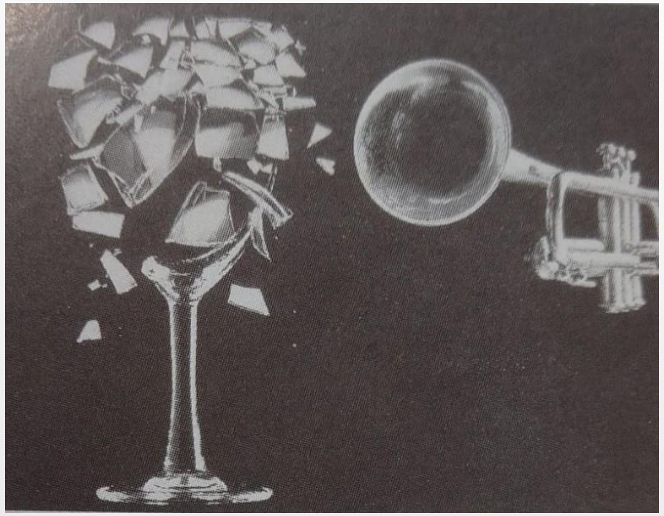
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega''t)$$

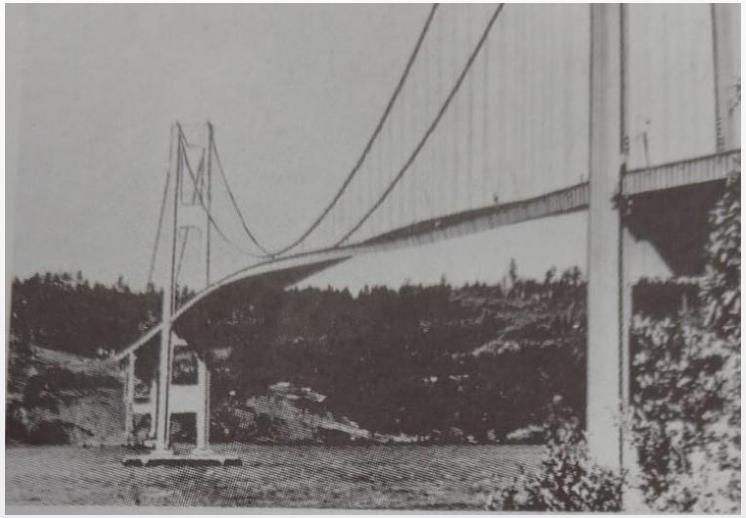
- $x(t) = A_0 \cos(\omega''t + \varphi_0)$

- $A_0 = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega''^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}}$

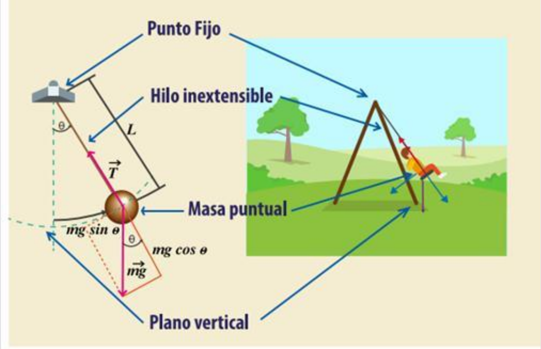


Resonancia






1 - Do
2 - Re


Punto Fijo
Hilo inextensible
Masa puntual
Plano vertical
L
$\vec{T}$
$mg \sin \theta$
$mg \cos \theta$
$\vec{mg}$