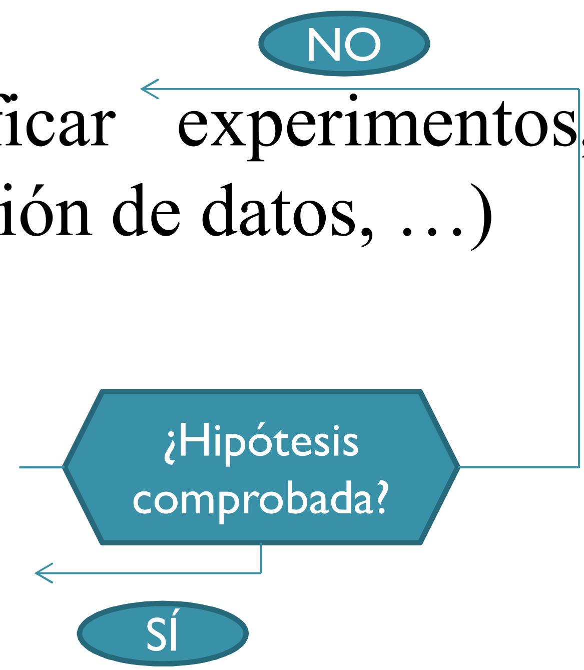
TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

EL MUNDO EN LA ANTIGÜEDAD

LOS DISTINTOS MODELOS DEL UNIVERSO PERMITEN ENTENDER LAS ETAPAS DEL MÉTODO CIENTÍFICO

1. Observación y planteamiento del problema.
2. Formulación de hipótesis verosímil.
3. Comprobación de hipótesis (planificar experimentos, control variables, recogida y organización de datos, …)
4. Interpretación de los resultados.
5. Establecimiento de leyes/teorías.



EL MUNDO EN LA ANTIGÜEDAD

GRIEGOS: Suponen que la Tierra es redonda.

RAZONES

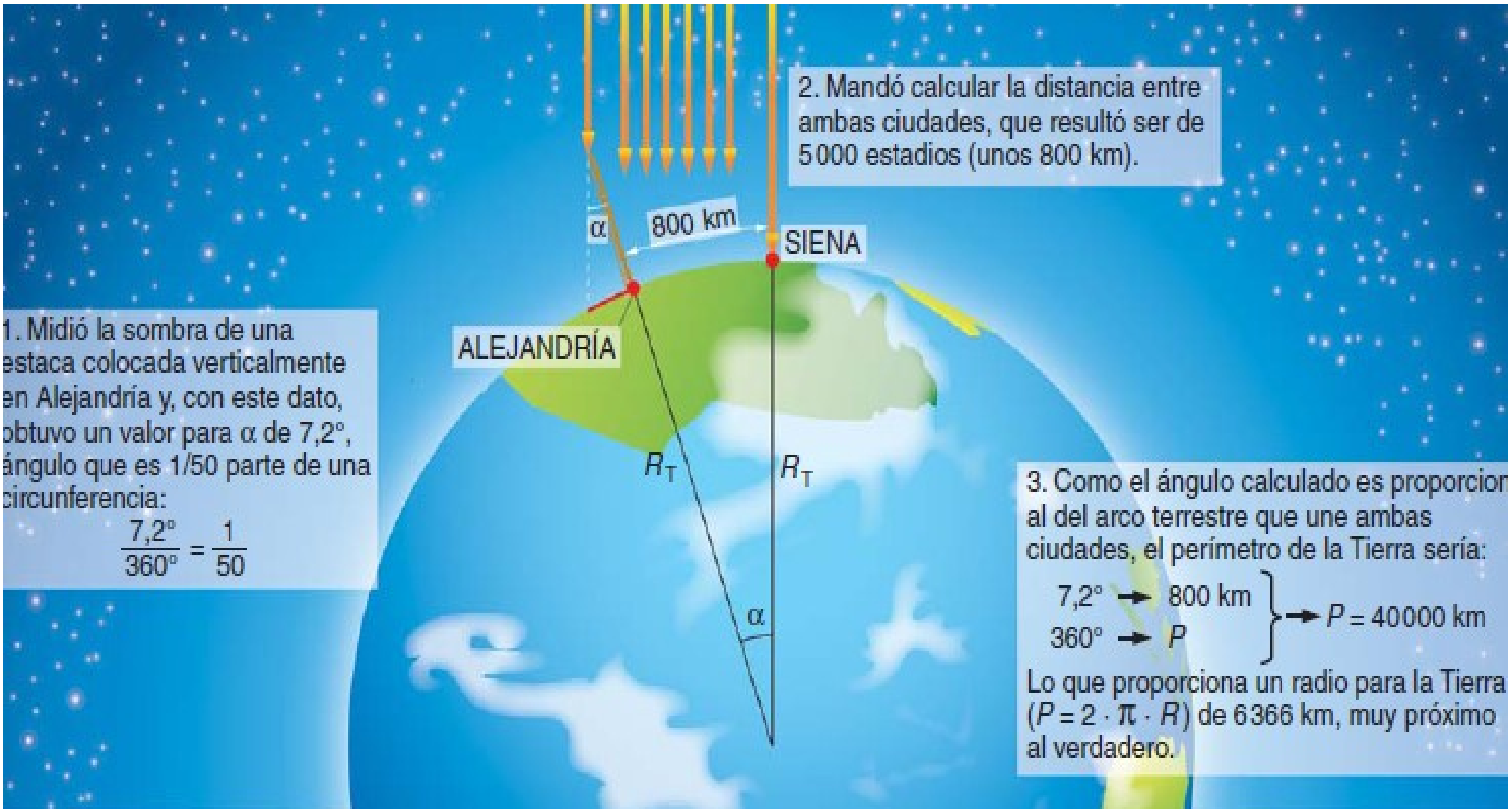
1) ESFERA = FORMA SÓLIDA MÁS PERFECTA.

2) ASPECTO ESFÉRICO DE LOS ASTROS CERCANOS.

3) SOMBRA PROYECTADA POR LA TIERRA SOBRE LA LUNA EN LOS ECLIPSES ERA REDONDA.

EL MUNDO EN LA ANTIGÜEDAD

ERASTÓTENES (276 a.C.): Realizó la primera medida válida del radio de la Tierra en ALEJANDRÍA.



EL MUNDO EN LA ANTIGÜEDAD

MODELOS DE LA ANTIGÜEDAD PARA EXPLICAR EL MOVIMIENTO DEL SOL, LA LUNA Y LOS ASTROS

1) SISTEMA GEOCÉNTRICO: Tierra inmóvil en el centro del universo y astros efectúan a su alrededor MCU. → ERRÓNEO !!!!!!!

2) SISTEMA HELIOCÉNTRICO: Sitúa al Sol en el centro del universo y, en este, la Tierra se mueve como un planeta más. → INSUFICIENTE !!!!!!!!

SISTEMAS DE PTOLOMEO Y COPÉRNICO

PTOLOMEO (100-170): Idea platónica de que los cielos se mueven con MCU.

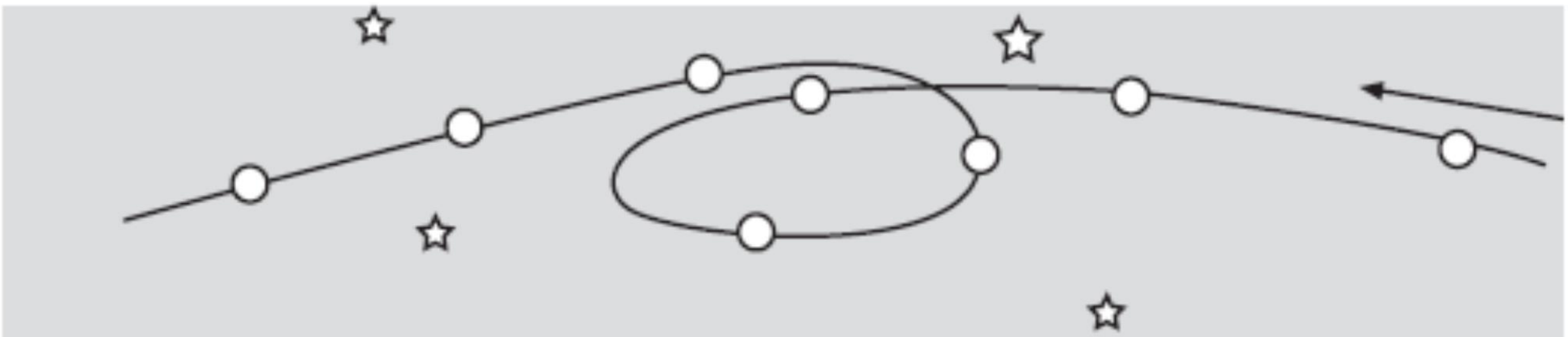
1) TIERRA INMÓVIL Y ASTROS EN MOVIMIENTO.

2) UNIVERSO COMPUESTO POR 2 REGIONES:

2.1) **MUNDO SUBLUNAR**: Sobre la superficie de la tierra y bajo la de la luna. movimiento natural es el RECTILÍNEO VERTICAL.

2.2) **MUNDO SUPRALUNAR**: En los cielos existe la perfección. el movimiento natural es MCU.

Pero en realidad las observaciones mostraban órbitas que no eran circulares perfectas.

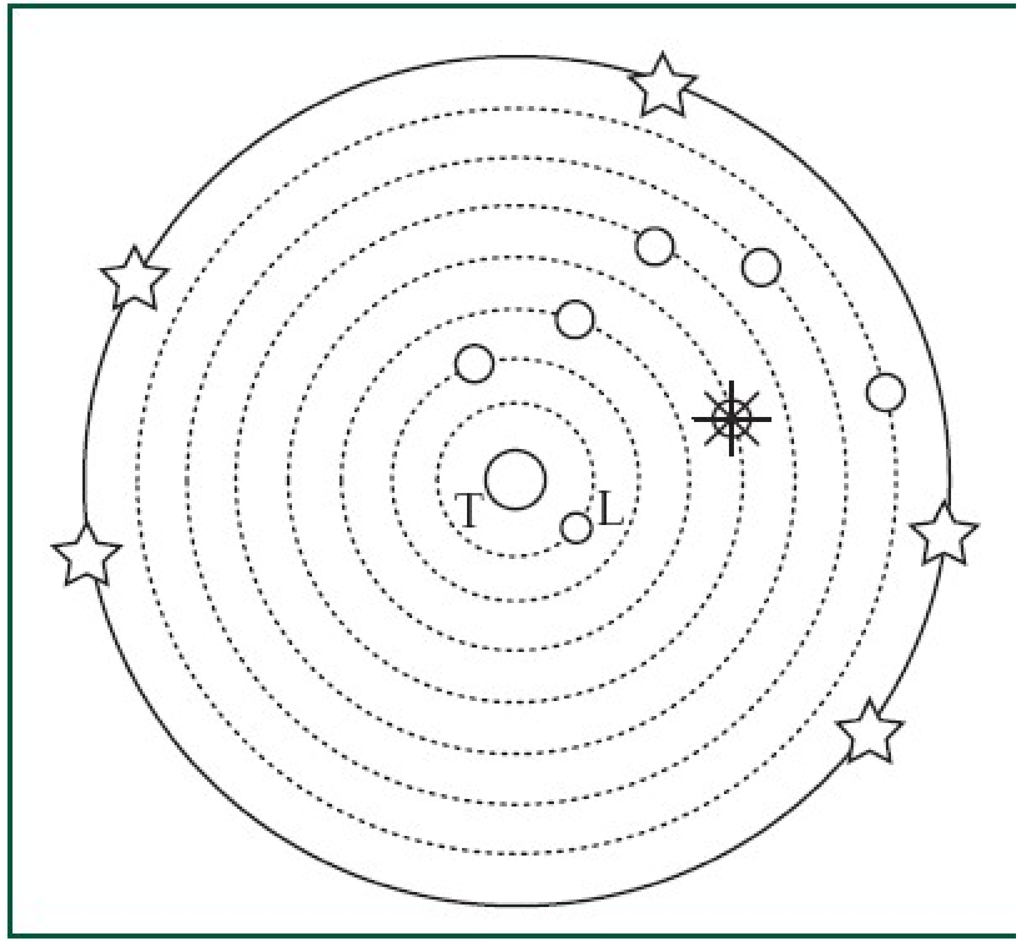


Movimiento de Marte en relación al fondo estrellado

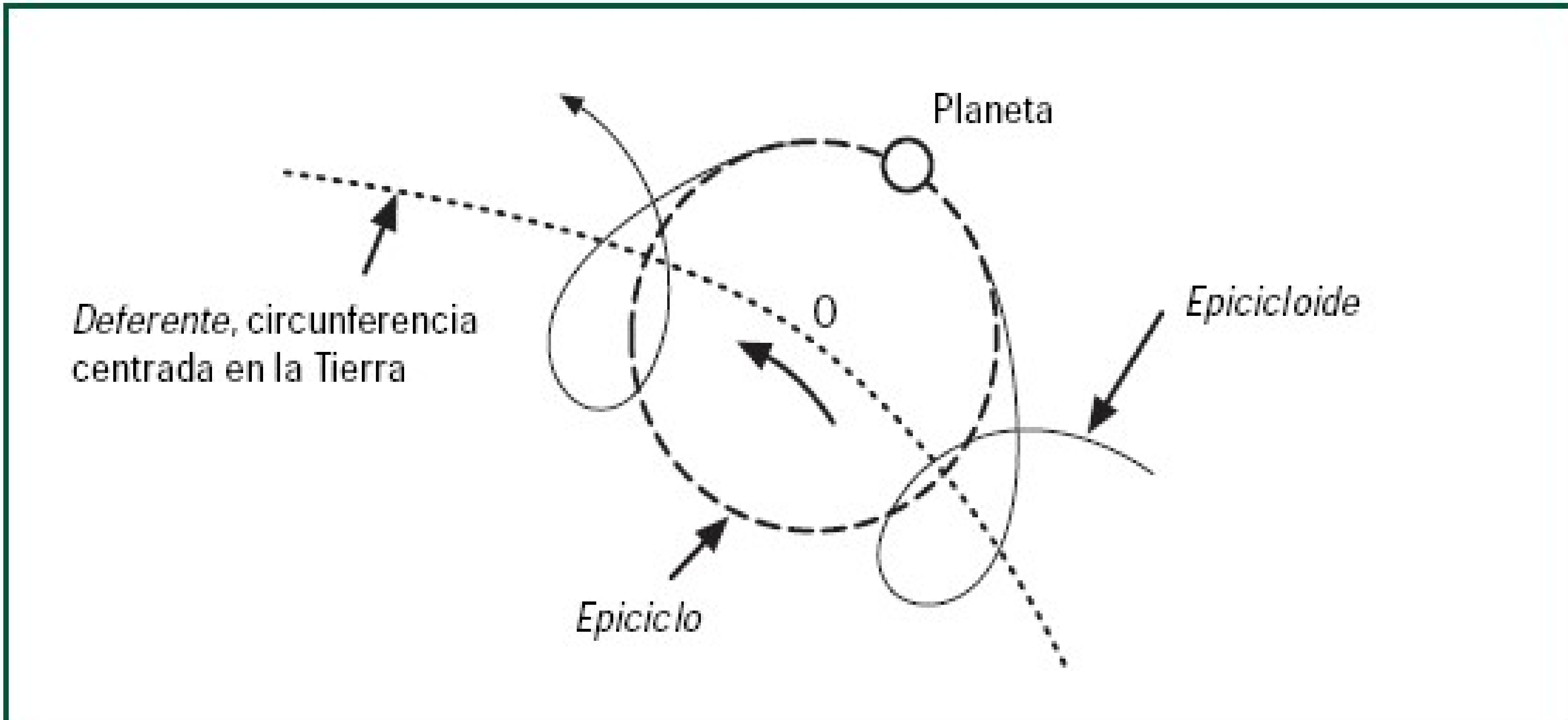
Ptolomeo corrigió la teoría aristotélica introduciendo conceptos que explicaban estas desviaciones.

En el modelo de Ptolomeo (también Geocéntrico) los planetas describían una pequeña circunferencia con centro en O denominada **epiciclo** (ver figura)

y a su vez el punto O recorría una gran circunferencia centrada en la Tierra y denominada **deferente**.



En el modelo de Ptolomeo: La combinación de ambos movimientos (epiciclo y deferente), que daba por resultado el movimiento verdadero de los planetas, se denominaba **epicicloide**.



REVOLUCIÓN DE COPÉRNICO (1473-1543)

1) El centro del universo es el Sol.
2) El giro de la tierra sobre su eje causa el movimiento aparente de rotación diaria del Sol y los Planetas.
3) Ciclo anual del Sol causado por movimiento de revolución de la Tierra a su alrededor.
4) Movimiento retrógrado de los planetas es aparente (Causa: Movimiento de la Tierra).
5) Distancia Tierra - Sol insignificante en comparación con la distancia a las estrellas fijas.

- Utiliza la misma mecánica que el sistema geocéntrico (Cuerpos celestes se mueven con MCU.).
- GRAVEDAD = Tendencia natural de los cuerpos a dirigirse al centro de la tierra. No guarda relación alguna con el movimiento celeste.

Surgieron muchas objeciones pero su trabajo sirvió de base a los estudios de GALILEO y KEPLER.

CONTRIBUCIONES MÁS IMPORTANTES DE GALILEO

1) Difundió el **sistema heliocéntrico** de Copérnico.
2) Construyó un telescopio con el que vio el relieve de la Luna.
3) Desarrolló el método científico y elaboró una nueva mecánica que sirvió de punto de partida a Newton.

KEPLER (1571-1630) intentó obtener la órbita circular de Marte y no encontró círculo que se ajustara a las medidas hechas por su mentor, TYCHO BRAHE (1546-1601).

Encontró un ajuste perfecto con una **ELIPSE.**

Así nació **la primera ley de Kepler**

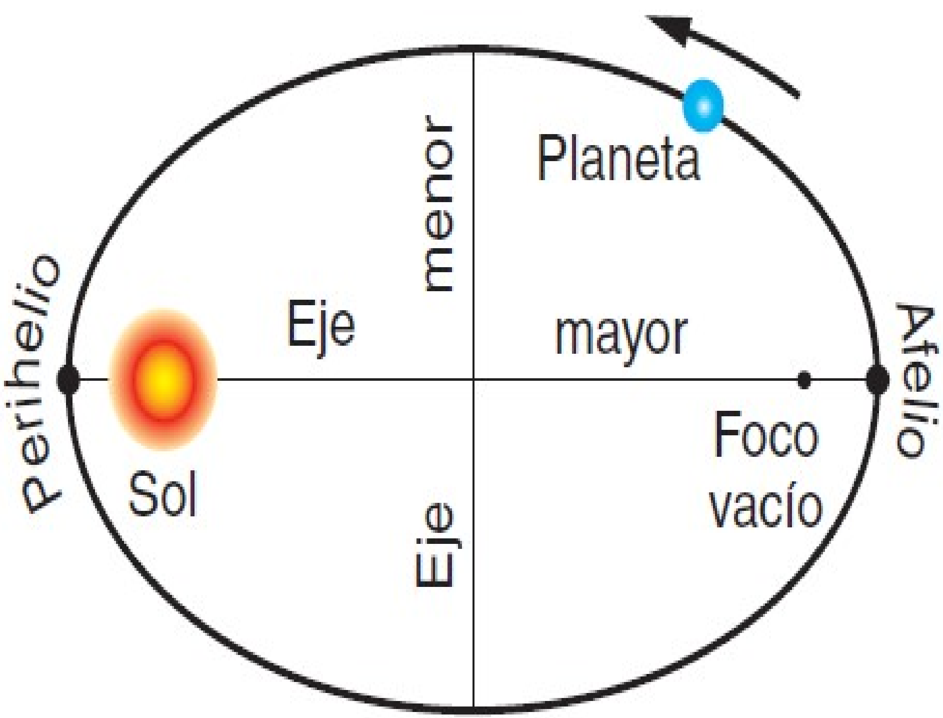
LEYES DE KEPLER

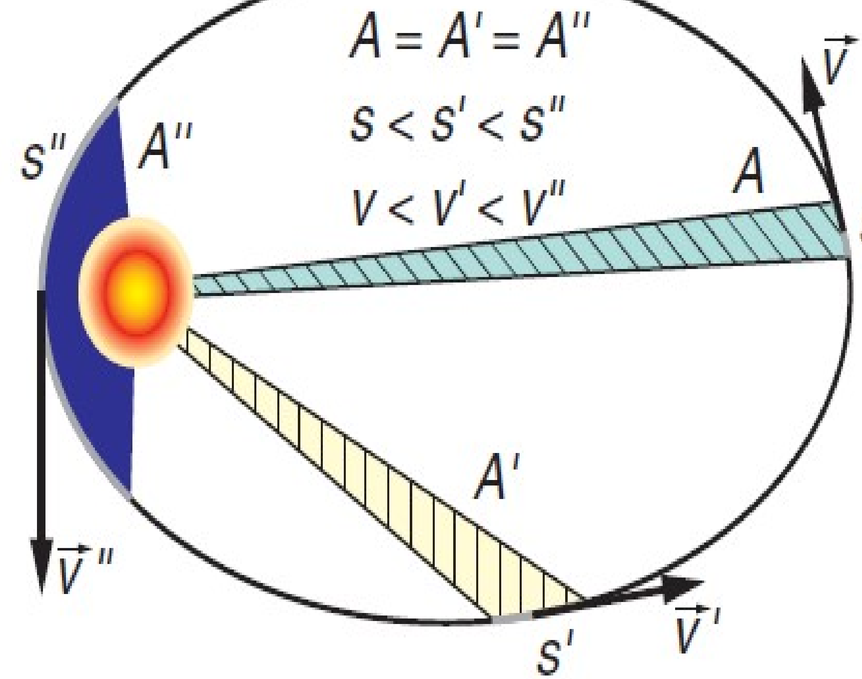
Las dos primeras las obtuvo estudiando la órbita de Marte.

La tercera comparando las órbitas de distintos planetas.

1ª LEY: LEY DE LAS ÓRBITAS

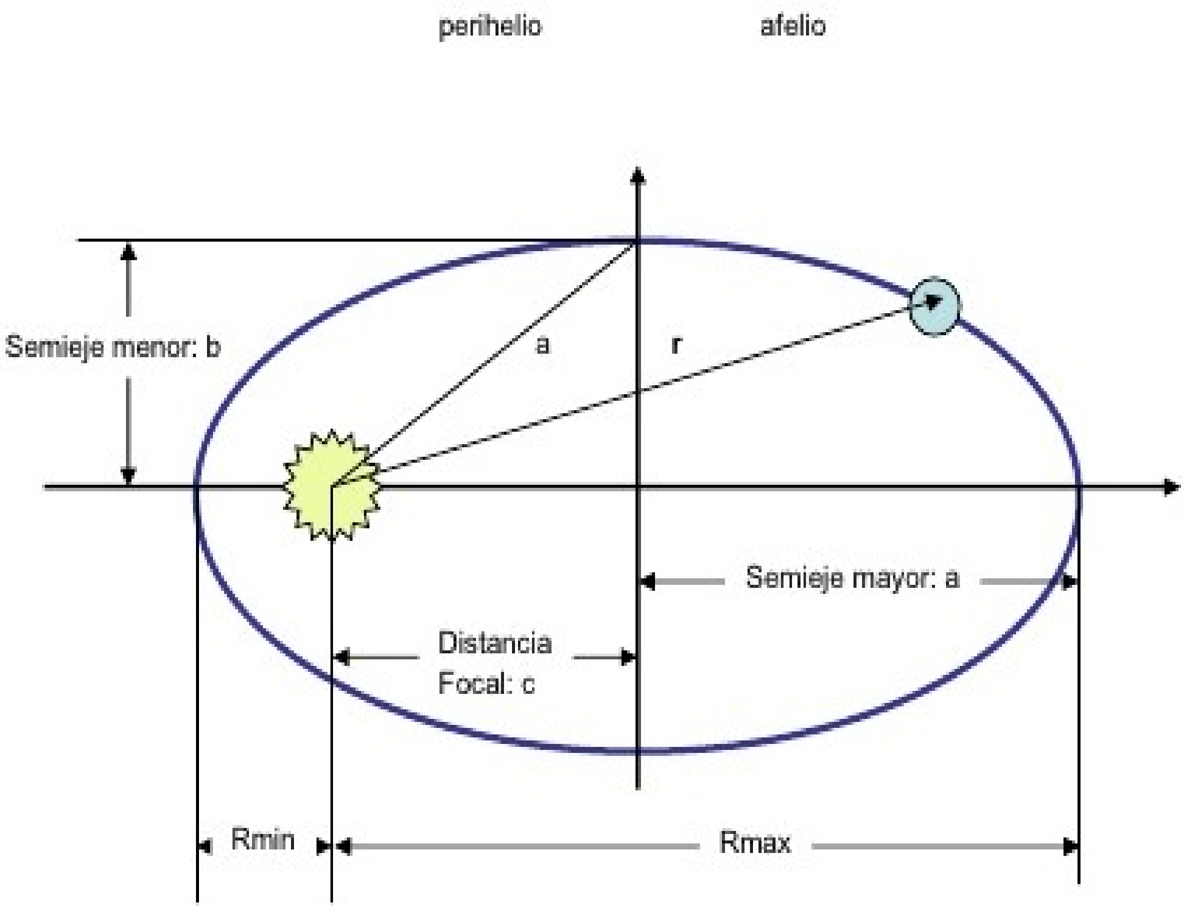
Los planetas giran en torno al Sol en órbitas elípticas. El Sol no está en el centro sino que ocupa uno de los foco.





1ª ley de Kepler

Las órbitas de los planetas son elípticas y el Sol se encuentra en uno de sus focos.



Relaciones geométricas

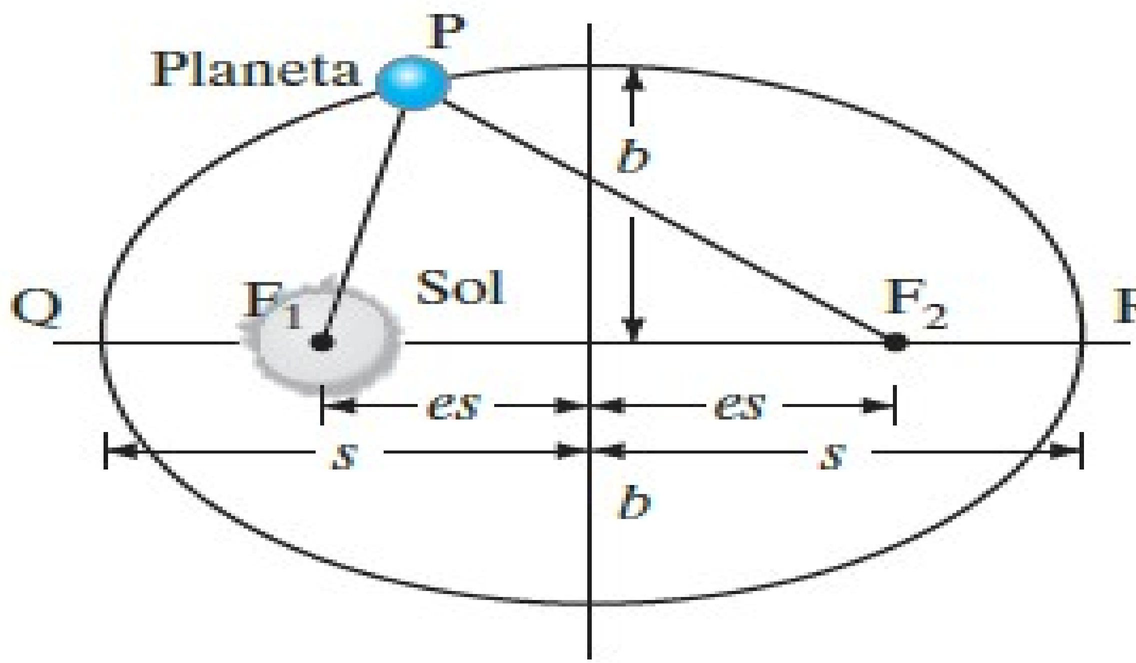
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

$$r_{max} + r_{min} = 2a$$

$$r_{max} - r_{min} = 2c$$

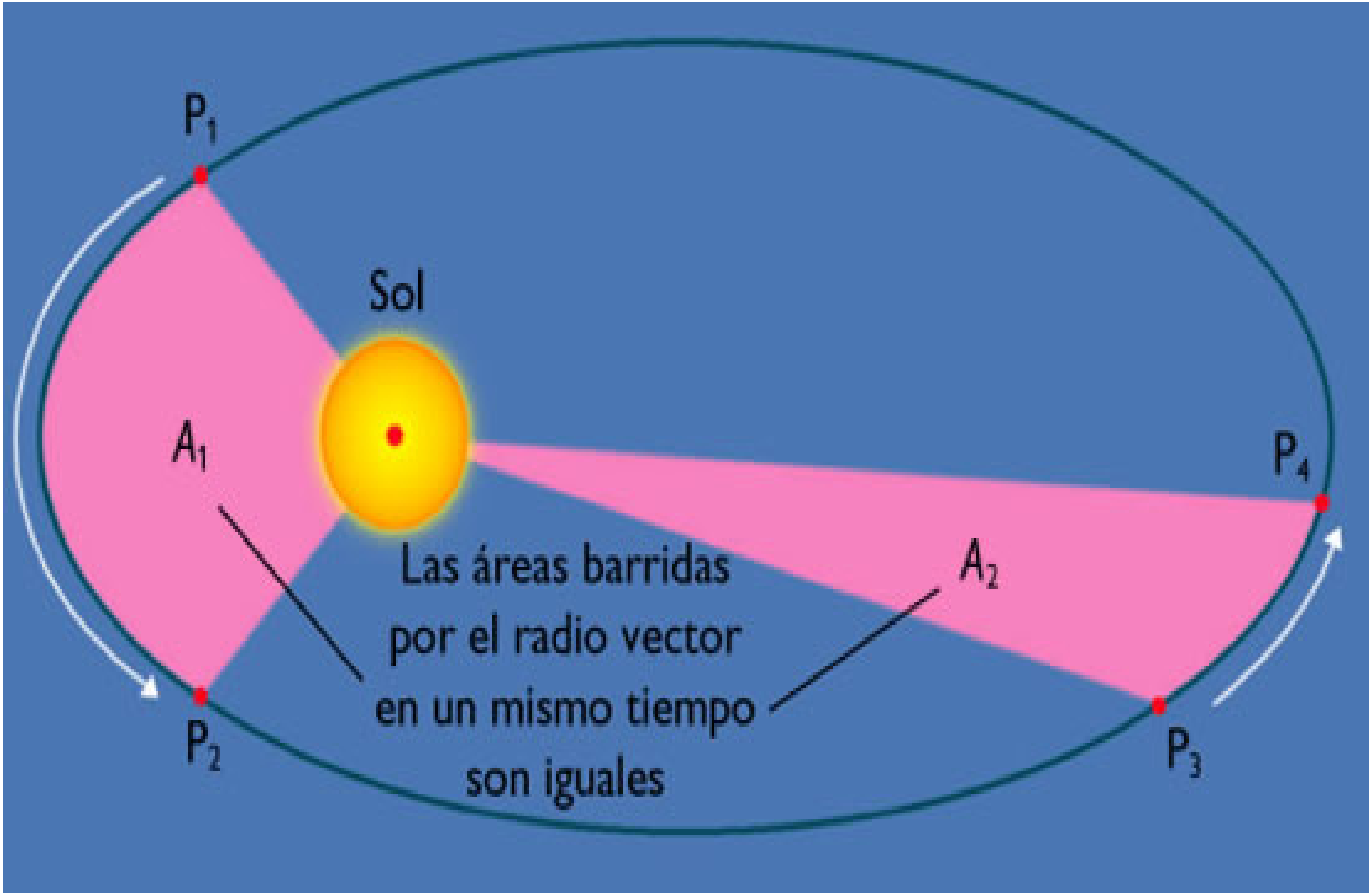
Primera ley de Kepler. Una elipse es una curva cerrada tal que la suma de las distancias desde cualquier punto P sobre la curva a dos puntos fijos (llamados focos F_1 y F_2) permanece constante. Es decir, la suma de las distancias $F_1P + F_2P$ es la misma para todos los puntos sobre la curva. Un círculo es un caso especial de una elipse, en la cual los dos focos coinciden en el centro del círculo. El semieje mayor es s (es decir, el eje largo mide $2s$) y el semieje menor es b, como se muestra. La *excentricidad e* se define como el cociente de la distancia del centro a cualquier foco, dividida entre el semieje mayor a. De manera que "es" es la distancia del centro a cualquier foco, como se muestra. La Tierra y la mayoría de los otros planetas tienen órbitas casi circulares. Para la Tierra, $e = 0.017$.

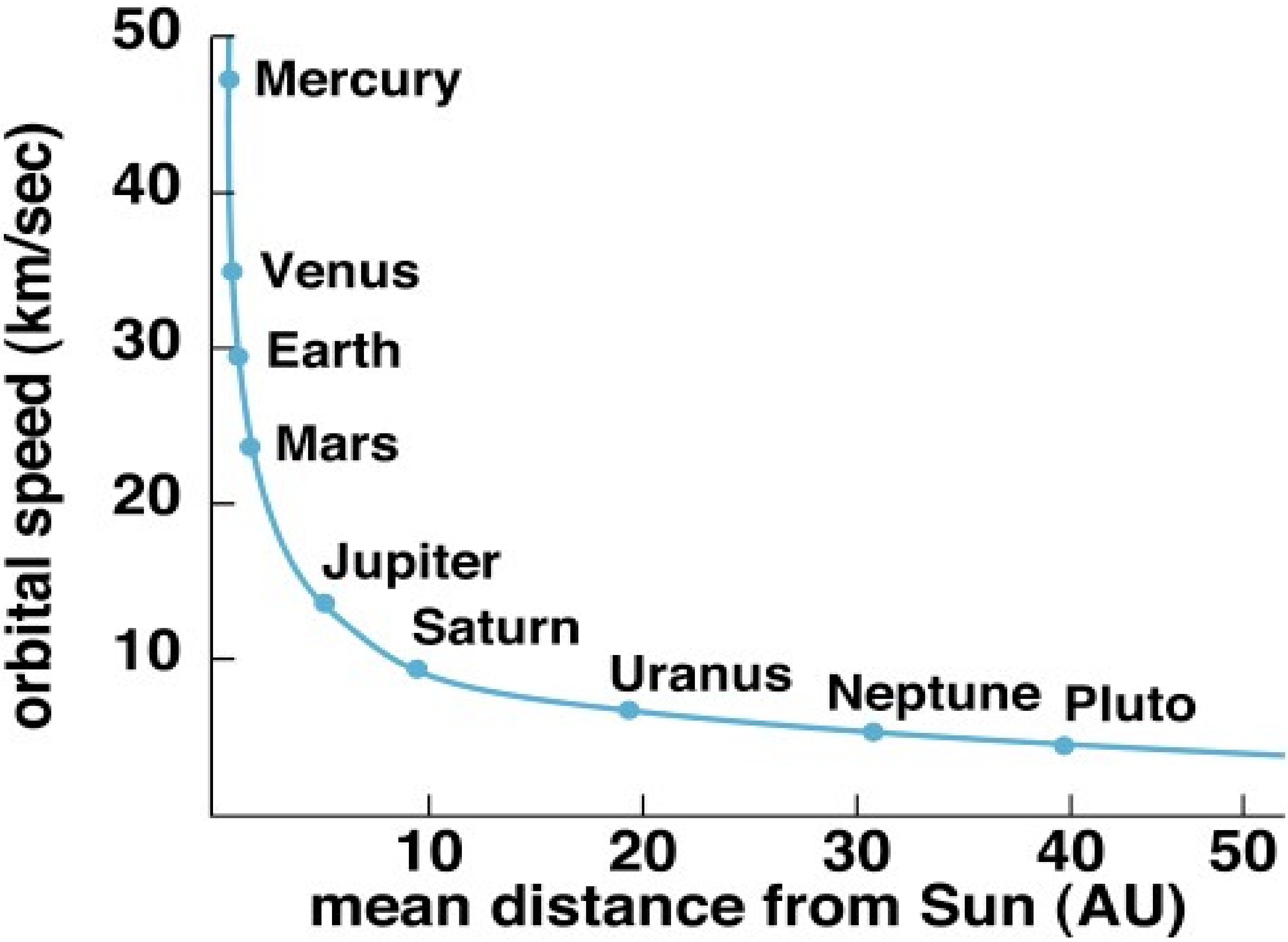


2ª LEY: LEY DE LAS ÁREAS

La velocidad de los planetas en su órbita es tal, que la línea que une el planeta con el sol barre áreas iguales en tiempos iguales. (velocidad areolar constante)

Esto supone que el movimiento **NO** es uniforme: cuanto más cerca del Sol está el planeta, más rápido se mueve en su órbita.


P1
Sol
A1
P4
Las áreas barridas
por el radio vector
en un mismo tiempo
son iguales
A2
P2
P3

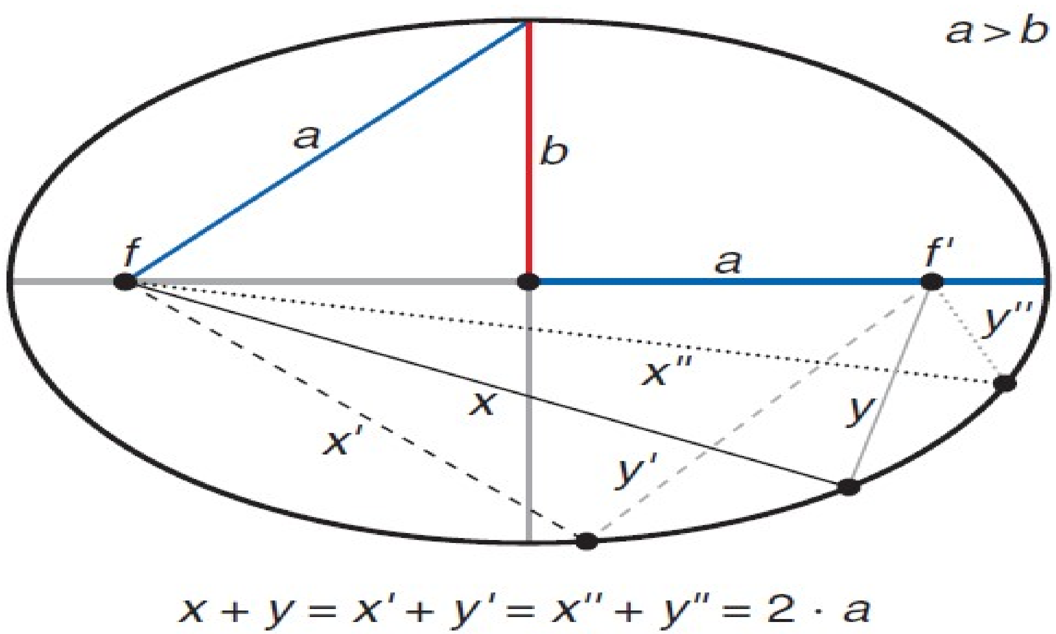


orbital speed (km/sec)
50
40
30
20
10
Mercury
Venus
Earth
Mars
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptune
Pluto
10
20
30
40
50
mean distance from Sun (AU)

3ª LEY: LEY ARMÓNICA O DE LOS PERÍODOS

Los planetas giran en torno al Sol con una relación armónica: los cuadrados de los períodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores (a) de sus respectivas órbitas.

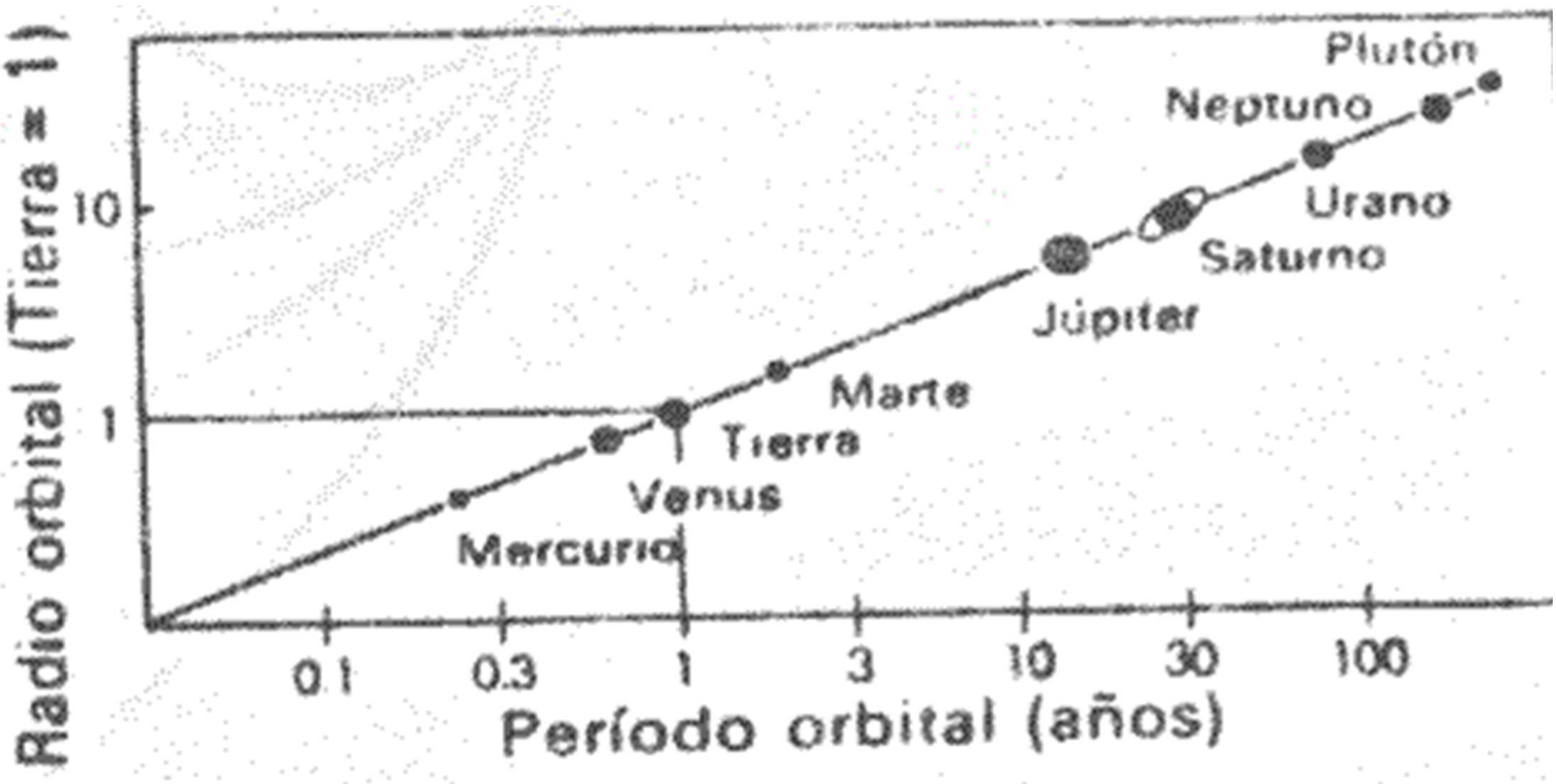
Los planetas se mueven más despacio cuanto mayor es su órbita

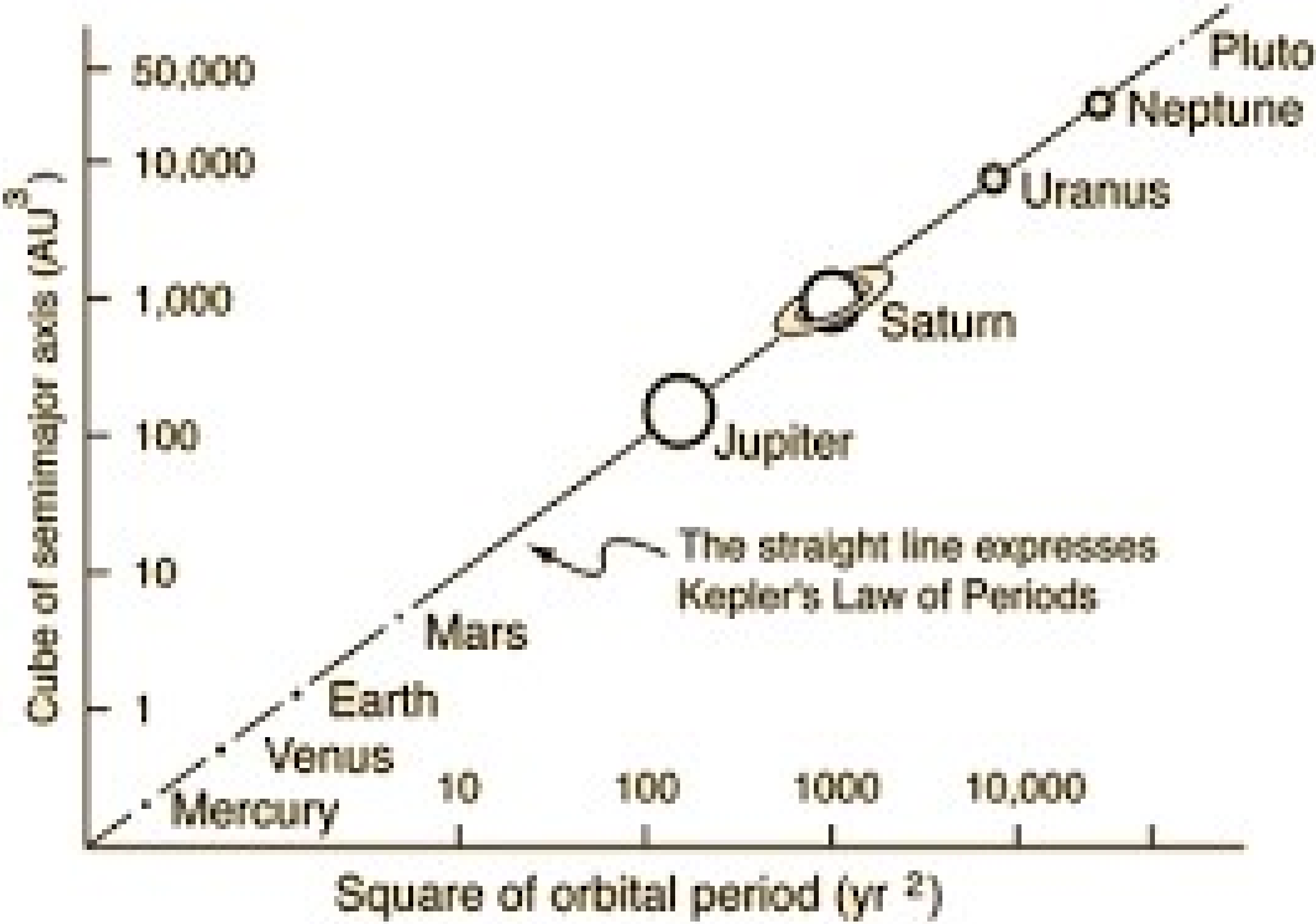


$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

3ª LEY: LEY ARMÓNICA O DE LOS PERÍODOS

Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.




Pluto
Neptune
Uranus
Saturn
Jupiter
Mars
Earth
Venus
Mercury
The straight line expresses
Kepler's Law of Periods
50,000
10,000
1,000
100
10
1
10
100
1000
10,000
Cube of semimajor axis (AU^3)
Square of orbital period (yr ^{2})

3ª Ley de Kepler $T^2 = a^3$ *Las discrepancias son debidas a la limitada precisión*	T : Período de Órbita, en años	a : Distancia media del Planeta al Sol, en UA (unidades astronómicas)	T^2 : Cuadrado del Período	a^3 : Cubo del Radio Medio
Planeta	T	a	T^2	a^3
Mercurio	0.241	0.387	0.05808	0.05796
Venus	0.616	0.723	0.37946	0.37793
Tierra	1	1	1	1
Marte	1.88	1.524	3.5344	3.5396
Júpiter	11.9	5.203	141.61	140.85
Saturno	29.5	9.539	870.25	867.98
Urano	84.0	19.191	7056	7068
Neptuno	165.0	30.071	27225	27192
Plutón	248.0	39.457	61504	61429

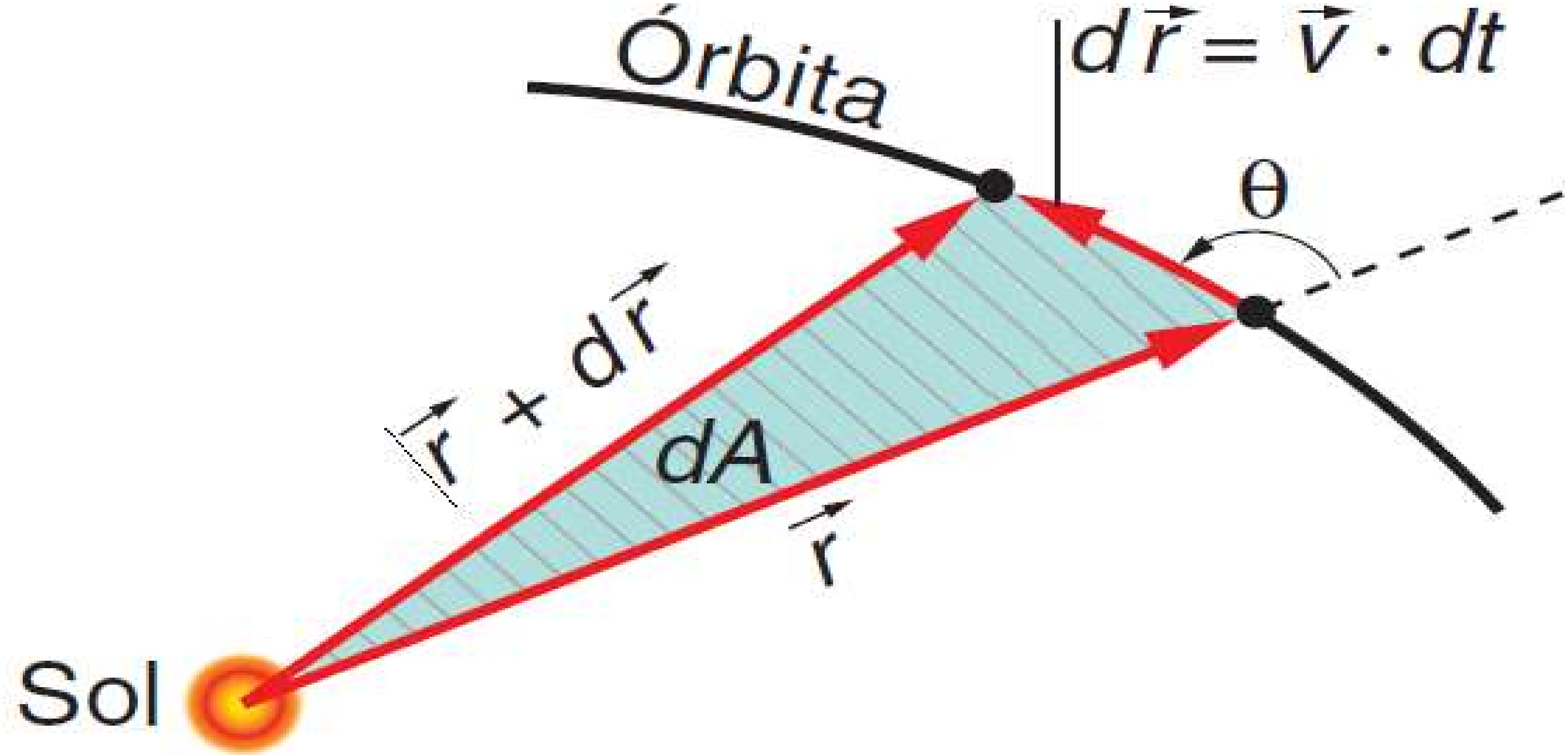

1. Mercurio
2. Venus
3. Tierra
4. Marte
5. Júpiter
6. Saturno
7. Urano
8. Neptuno

PLANETA	TIEMPO QUE TARDA EN DAR UNA VUELTA SOBRE SÍ MISMO	TIEMPO QUE TARDA EN DAR UNA VUELTA ALREDEDOR DEL SOL
MERCURIO	58 días	88 días
VENUS	243 días	224 días
TIERRA	24 horas	365 días
MARTE	24 horas	779 días
JÚPITER	9 horas	11.8 años
SATURNO	10 horas	29.4 años
URANO	17 horas	84 años
NEPTUNO	16 horas	164.7 años

Planetas	Radio ecuatorial	Distancia al Sol (km.)	Lunas	Periodo de Rotación	Órbita	Inclinación del eje	Inclinación orbital
Mercurio	2.440 km.	57.910.000	0	58,6 días	87,97 días	0,00 °	7,00 °
Venus	6.052 km.	108.200.000	0	-243 días	224,7 días	177,36 °	3,39 °
La Tierra	6.378 km.	149.600.000	1	23,93 horas	365,256 días	23,45 °	0,00 °
Marte	3.397 km.	227.940.000	2	24,62 horas	686,98 días	25,19 °	1,85 °
Júpiter	71.492 km.	778.330.000	16	9,84 horas	11,86 años	3,13 °	1,31 °
Saturno	60.268 km.	1.429.400.000	18 *	10,23 horas	29,46 años	25,33 °	2,49 °
Urano	25.559 km.	2.870.990.000	15	17,9 horas	84,01 años	97,86 °	0,77 °
Neptuno	24.746 km.	4.504.300.000	8	16,11 horas	164,8 años	28,31 °	1,77 °
Plutón	1.160 km.	5.913.520.000	1	-6,39 días	248,54 años	122,72 °	17,15 °

- ◦ La 2ª Ley de KEPLER permite relacionar

$$\vec{r}_{\text{ Planeta-Sol}} \leftrightarrow \mathbf{v}_{\text{orbital}}$$

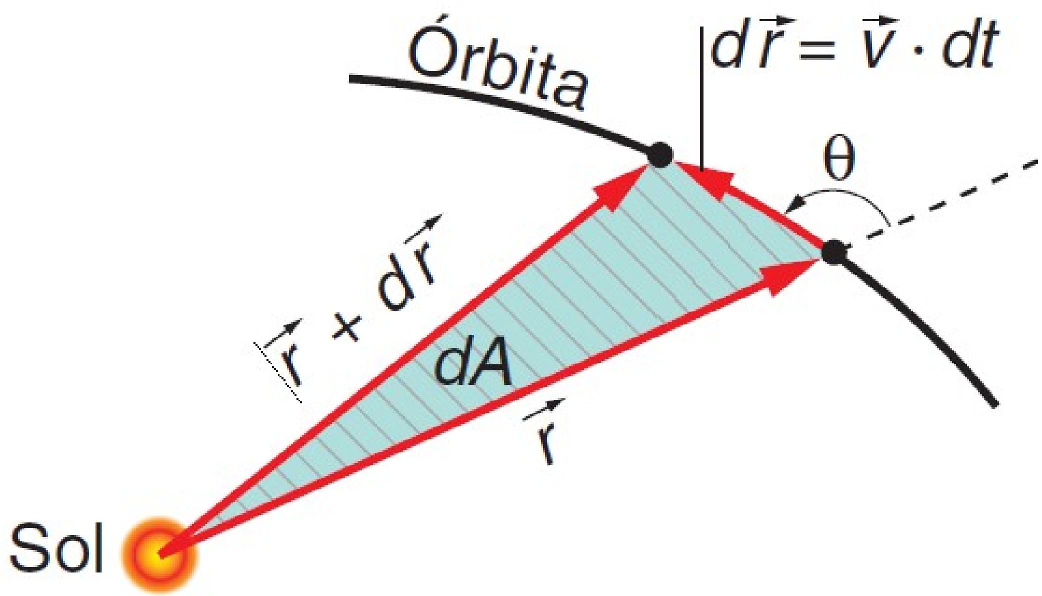


Aplicación de la ley de las áreas:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = cte \quad \text{y} \quad dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\, x d\,\vec{r}\,\right|$$

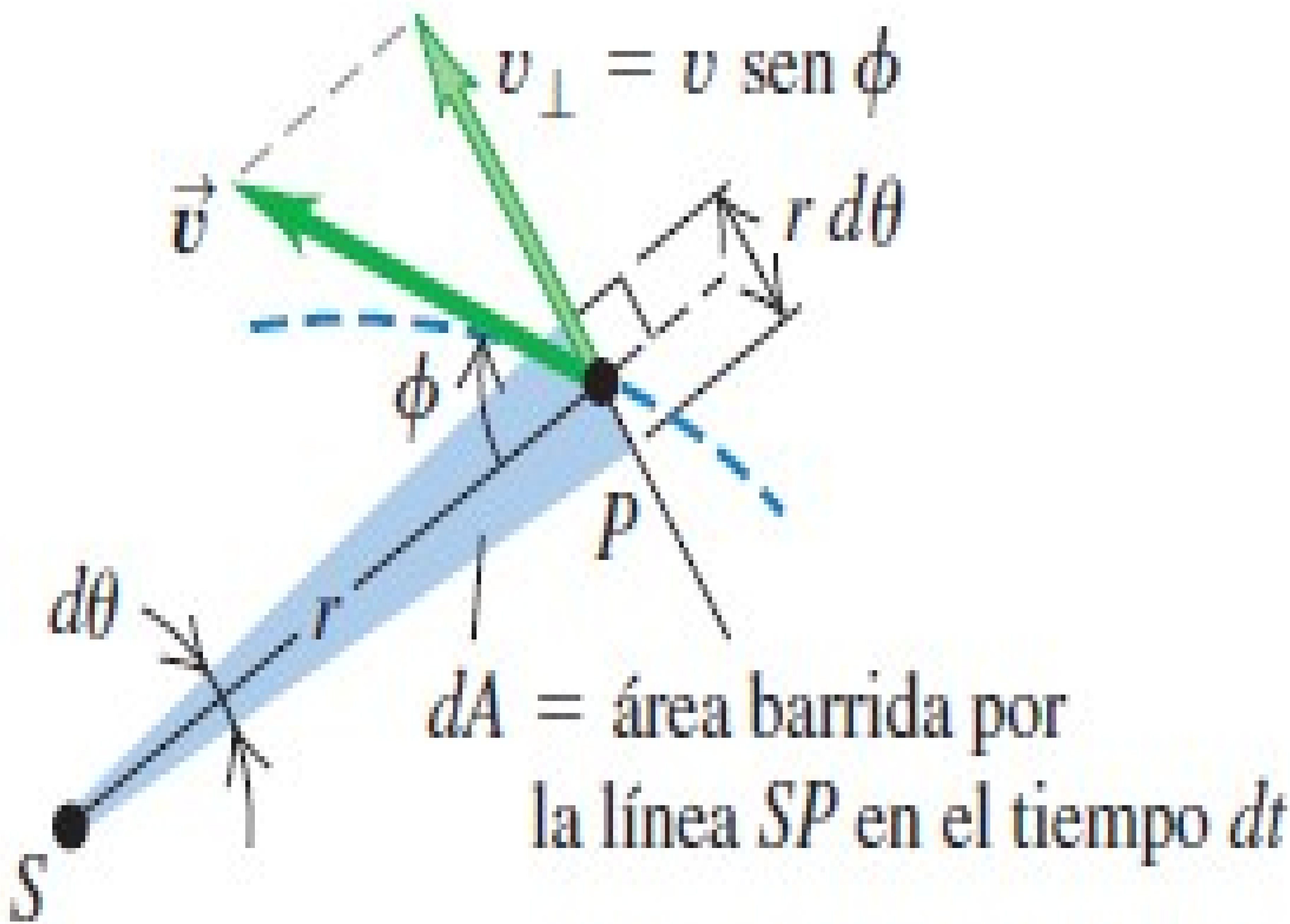
$$v_A = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\,\mathrm{x}\,\vec{v}\,\right| = \frac{1}{2} r\ v\ sen\ \theta = \mathrm{cte}$$

$$\mathrm{r}_1\ v_1\ \mathrm{sen}\ \theta_1 = \mathrm{r}_2\ v_2\ \mathrm{sen}\ \theta_2$$



dA : Área del triángulo diferencial generado por el planeta en su desplazamiento.

v_A : Velocidad areolar (área barrida por el vector velocidad en la unidad de tiempo).



$v_\perp = v \operatorname{sen} \phi$
$\vec{v}$
$r\,d\theta$
ϕ
P
$d\theta$
r
S
dA = área barrida por
la línea SP en el tiempo dt

APLICACIÓN DE LA LEY DE LAS ÁREAS

Si excentricidad, $e = 0 \rightarrow$ ÓRBITA CIRCULAR.

En general, excentricidad, $e \neq 0$ → PLANETA ACELERA CUANDO SE ACERCA AL SOL.

En el caso del **perihelio** (punto más cercano al Sol) y el **afelio** (punto más lejano al Sol) → $\theta = 90º$, por lo que se cumple:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

La segunda ley de Kepler indica que el planeta es atraído por el Sol con una fuerza que aumenta al acercarse a él.

Kepler sabía que la causa del movimiento planetario era la fuerza de atracción del Sol, pero murió sin alcanzar conclusiones definitivas.

Borelli y **Hooke** afirmaron que la fuerza debía disminuir con el cuadrado de la distancia pero no supieron resolver el problema matemáticamente.

Newton resuelve el problema respondiendo a dos preguntas clave:

1) Si el movimiento planetario se debe a la atracción solar. ¿Cómo varia esa fuerza con la distancia?
2) ¿Cuál es la naturaleza de esa fuerza?

VARIACIÓN DE LA FUERZA CON LA DISTANCIA

1) Demostró que la fuerza disminuye con el cuadrado de la distancia cuando el cuerpo describe un movimiento elíptico.
2) Se cumple la ley de las áreas de Kepler.
3) Se cumple la tercera ley de Kepler:

Un cuerpo que se mueve libremente sigue un MRU.

Para que exista movimiento curvo, debe haber aceleración que se dirija hacia el centro de la curva.

$$a_c = v^2/R$$

Suponiendo que planetas ejecutan MCU:

$$F_c = m\,a_c = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\left[\frac{2\,\pi}{T}\right]^2 R$$

Asumiendo que $\boldsymbol{F_c}$ es proporcional al cuadrado de la distancia Planeta – Sol.

$$F_c = m\left[\frac{2\,\pi}{T}\right]^2 R = \frac{K}{R^2}$$

El cuadrado del período es proporcional al cubo del radio, lo que coincide con la tercera ley de Kepler.

¡¡¡ LA MASA DEL PLANETA NO INTERVIENE EN EL PERÍODO!!!

NATURALEZA DE LA FUERZA DE ATRACCIÓN

- En la 3ª ley de Kepler no aparece la masa; sin embargo, sí aparece en la constante "**g**" de Newton, ya que interviene en la ecuación fundamental de la dinámica: $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$
- Si interviene la masa del planeta, también debe intervenir la del Sol, por el principio de acción-reacción.

(El Sol atrae al Planeta y el Planeta atrae al Sol con idéntico valor)

NATURALEZA DE LA FUERZA DE ATRACCIÓN

Así, la fuerza de atracción mutua entre el Sol y un Planeta depende de ambas masas y de la distancia al cuadrado:

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

$$F = G\frac{M\,m}{R^2}$$

- "Todos los cuerpos se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia de separación"
- $\vec{\boldsymbol{F}}$: Fuerza gravitatoria.
- G : Constante de gravitación universal.
- La masa es el origen de la atracción gravitatoria.

$$\boxed{F = G\frac{M \cdot m}{R^2}}$$

$$G = 6.67384 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

PTOLOMEO Y COPÉRNICO: Mecánica distinta para los astros y para los objetos de la Tierra

KEPLER Y HOOKE: Sospecharon que los planetas se movían por acción de una fuerza procedente del sol que se debilitaba con la distancia.

NEWTON DESCUBRIÓ QUE ESA FUERZA PROCEDENTE DEL SOL ERA LA MANIFESTACIÓN DE OTRA MUY CONOCIDA:

LA GRAVEDAD

Unificó mecánica de Tierra y Astros y demostró que:

1) Leyes de la Dinámica válidas para todos los cuerpos.
2) Existe una Ley Universal: Todos los cuerpos se atraen con una fuerza que depende de m y R.
3) Leyes de Kepler no se cumplen con exactitud por las interacciones entre planetas.

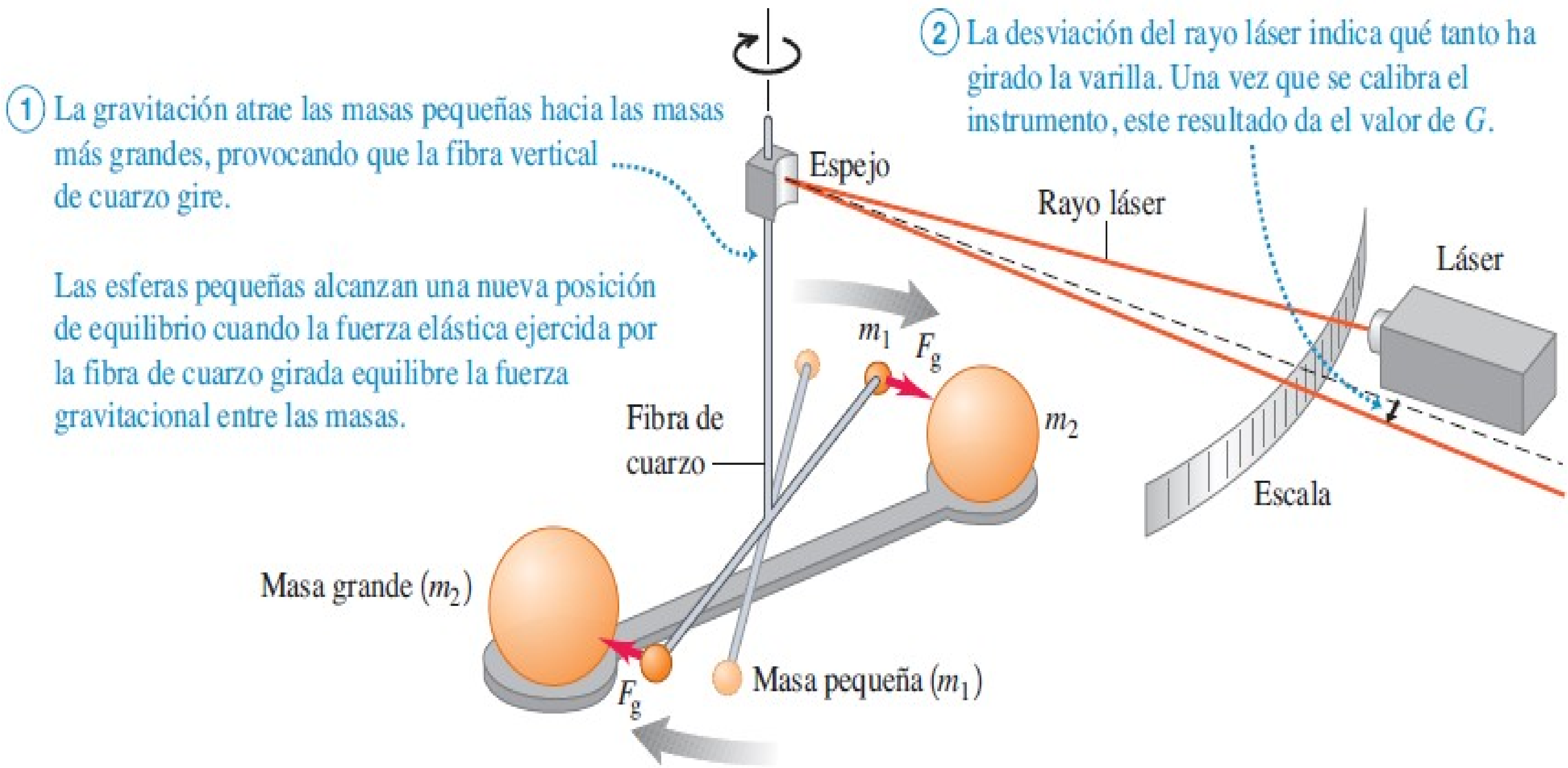
Mareas: Atracción de la Luna sobre la Tierra.

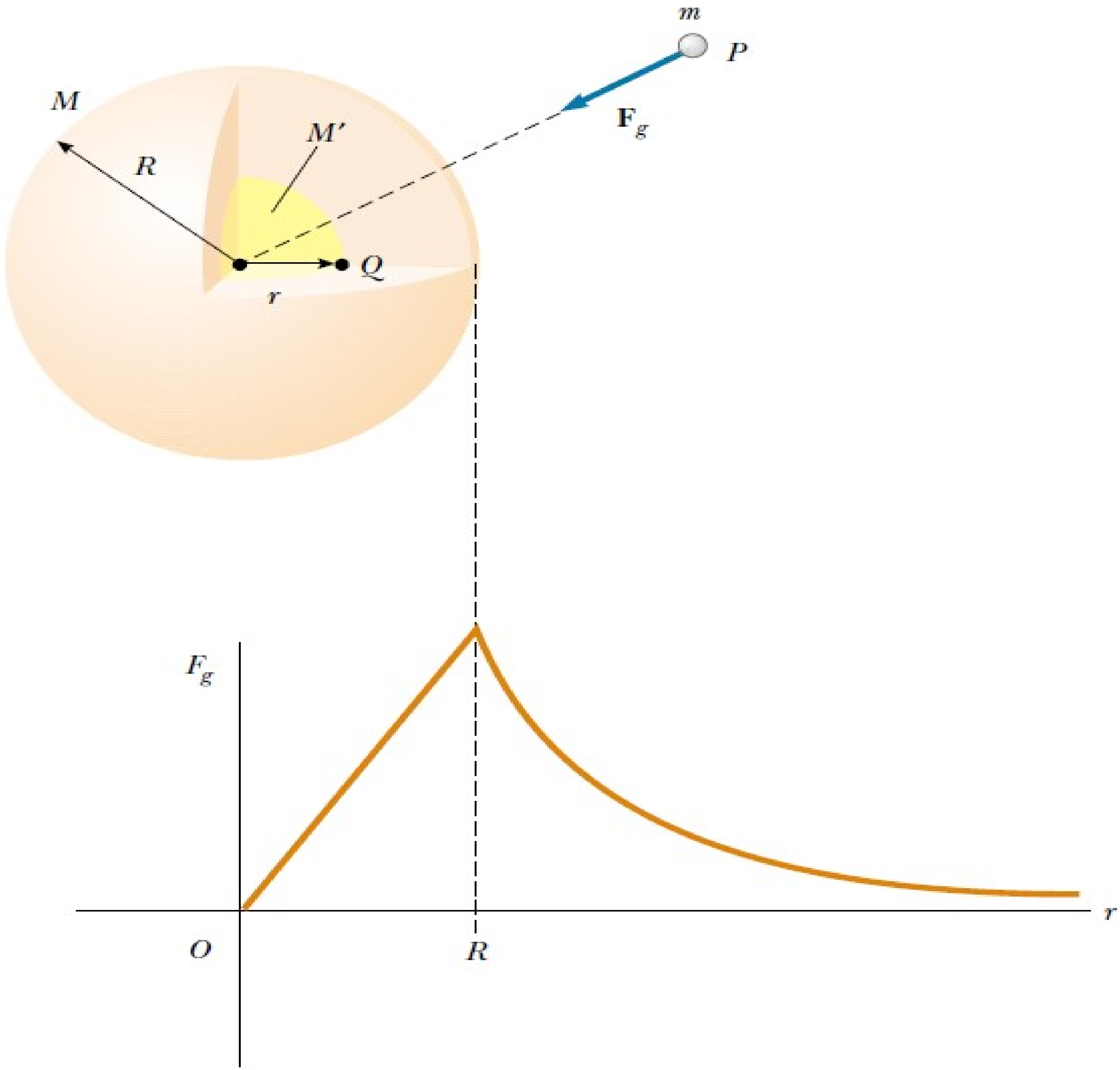
Valor de la constante G

$$G = 6{,}67384 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

- Se conoce como constante de gravitación universal.
- No depende del medio que exista entre las partículas que se atraen.
- Fue determinado por Cavendish casi cien años después del establecimiento de la ley por Newton.
- Su valor implica que la fuerza gravitatoria sólo es apreciable si alguno de los cuerpos es de gran masa.

Balanza de Cavendish





m
P
$\mathbf{F}_g$
M
M′
R
Q
r
F_g
O
R
r

Peso

El peso de un cuerpo como la fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él. Ahora vamos a ampliar nuestra definición:

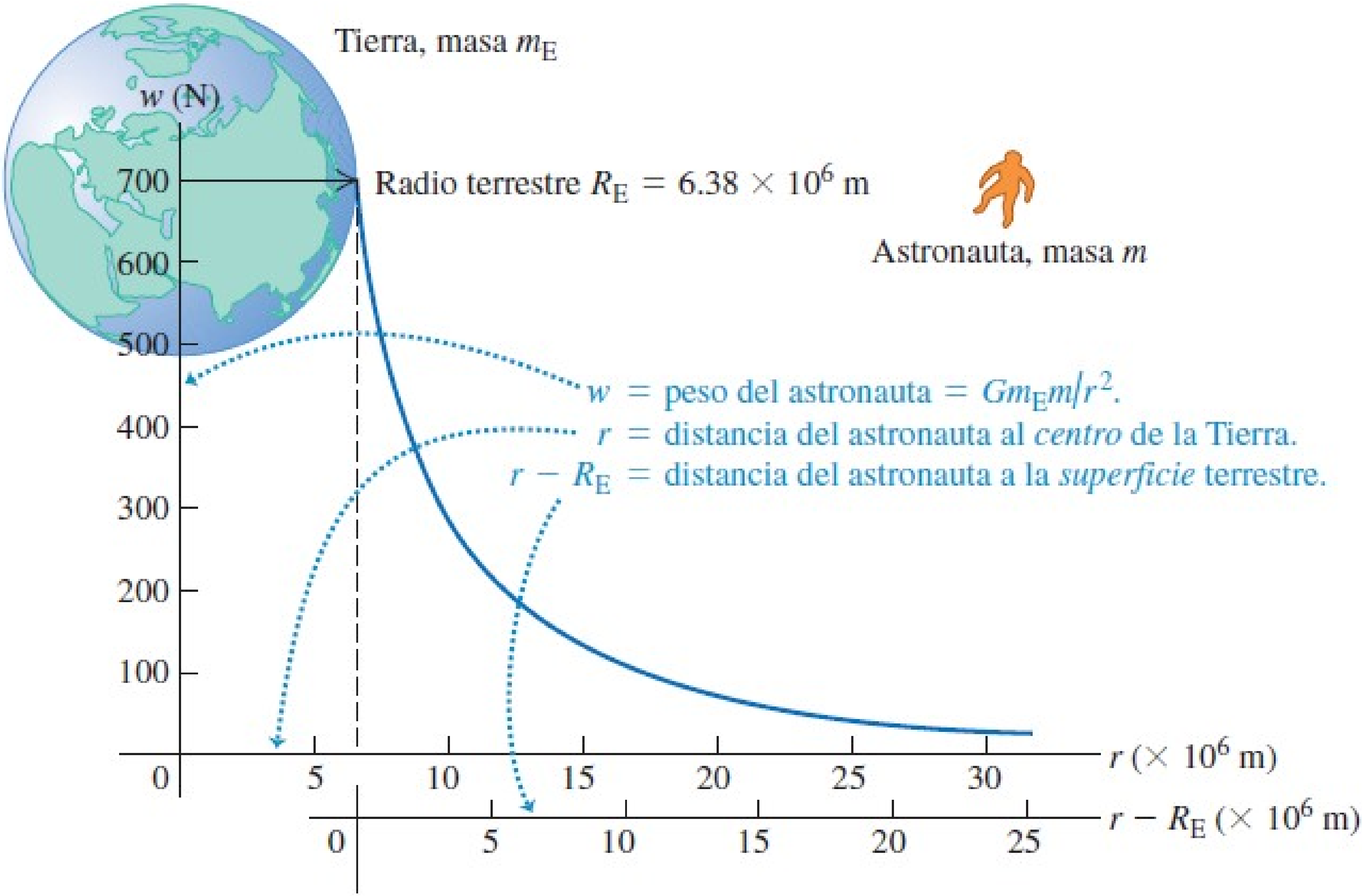
El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre él por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, podemos despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan sólo como la atracción de la Tierra. En la superficie de la Luna, tomaremos el peso de un cuerpo como la atracción gravitacional de la Luna, etcétera. Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio R y masa m, el peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre (a una distancia R del centro) es:

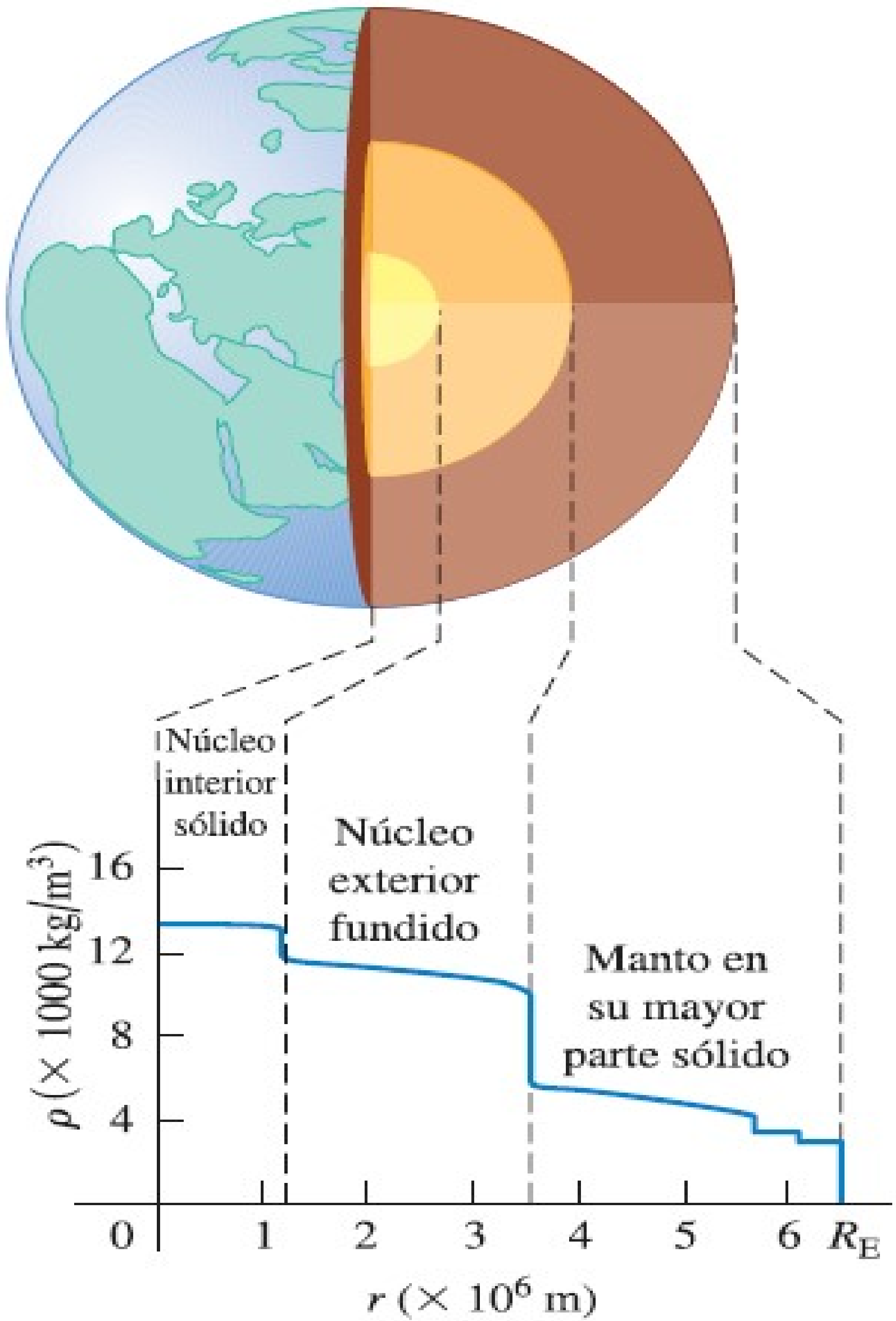
$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2} \qquad \text{(peso de un cuerpo de masa } m \text{ en la superficie terrestre)}$$

Sin embargo también vimos que el peso w de un cuerpo es la fuerza que causa la aceleración g de caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, $\boldsymbol{w} = m\,\boldsymbol{g}$.

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \qquad \text{(aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre)}$$



Tierra, masa m_E
w (N)
Radio terrestre $R_E = 6.38 \times 10^6$ m
Astronauta, masa m
w = peso del astronauta = $Gm_E m/r^2$.
r = distancia del astronauta al *centro* de la Tierra.
$r - R_E$ = distancia del astronauta a la *superficie* terrestre.
700
600
500
400
300
200
100
0
5
10
15
20
25
30
r ($\times 10^6$ m)
0
5
10
15
20
25
$r - R_E$ ($\times 10^6$ m)



Núcleo
interior
sólido
Núcleo
exterior
fundido
Manto en
su mayor
parte sólido
$\rho\ (\times\ 1000\ \mathrm{kg/m^3})$
16
12
8
4
0
1
2
3
4
5
6
R_E
$r\ (\times\ 10^6\ \mathrm{m})$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

1) Interacción gravitatoria entre 2 cuerpos: Pareja de fuerzas iguales en valor y dirección con sentido contrario. Cada una actúa sobre el otro cuerpo. La dirección es la línea recta que une las masas.

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\vec{u}_{1,2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}_{2,1} = -\,G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\vec{u}_{2,1}$$

2) El signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia las partículas (es de atracción): $\boldsymbol{F}_{1,2}$ y $\boldsymbol{u}_{1,2}$ tienen sentido opuesto.

3) Si interaccionan más de 2 masas, la fuerza total sobre cada una se calcula sumando vectorialmente las fuerzas con este principio:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \ldots + \vec{F}_{n,1}$$

FUERZAS CENTRALES Y MOMENTO ANGULAR

- Una fuerza es central cuando está continuamente dirigida hacia un mismo punto y su valor depende exclusivamente de la distancia del cuerpo a dicho punto.

LA FUERZA GRAVITATORIA ES CENTRAL

(Su valor depende de la distancia)

$$F_g = \frac{K}{r^2} \ \text{Siendo}: \ K = GM_T m$$

- MOMENTO DE UNA FUERZA F RESPECTO DE UN PUNTO FIJO O ES EL PRODUCTO VECTORIAL DE LOS VECTORES ***r*** y ***F.***
  - ***r*** = vector posición del punto de aplicación de ***F*** medido desde el origen O.
  - Permite estudiar la rotación creada por una fuerza sobre un cuerpo:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = r.\, F\, sen(\theta)$$

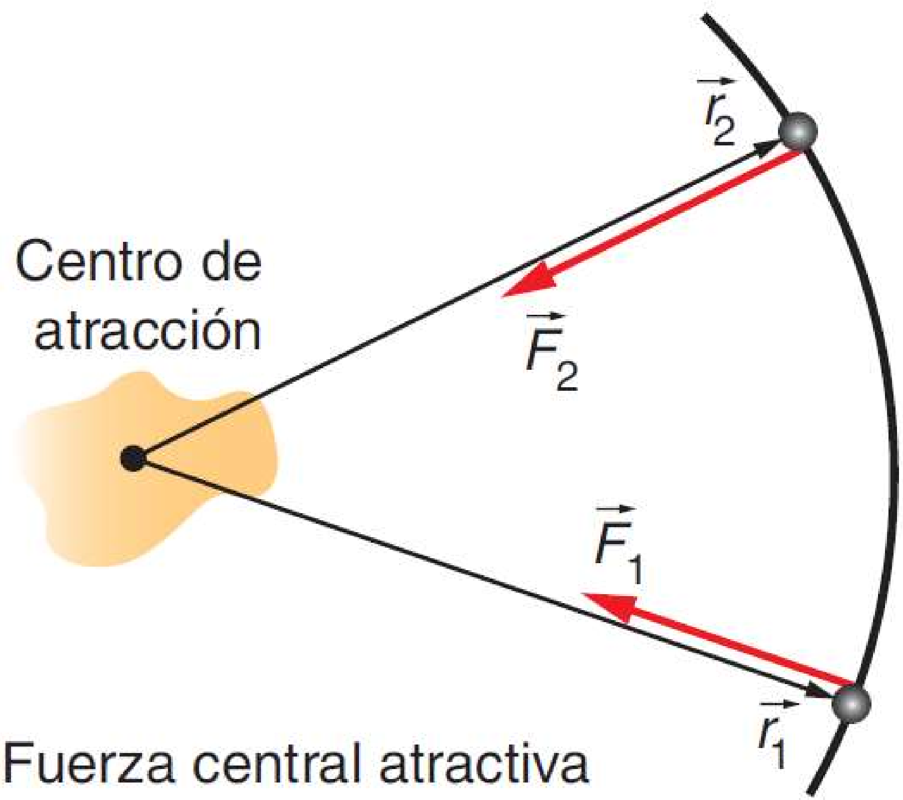
El momento $\boldsymbol{\tau}$ es perpendicular al plano formado por los vectores ***r*** y ***F***. Sentido de avance viene dado por la regla de la mano derecha.

- Momento de una fuerza ***F*** respecto de un punto fijo O es el producto vectorial de los vectores ***r*** y ***F***.

Para la fuerza gravitatoria, $\boldsymbol{\tau} = 0$. (θ =180 º)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$|\boldsymbol{\tau}| = r.Fsen(\theta)$$



- CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR
  - MOMENTO LINEAL DE UN PLANETA CAMBIA CONTINUAMENTE DE DIRECCIÓN: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
  - **MOMENTO ANGULAR** DE UNA PARTÍCULA ES EL MOMENTO DE SU CANTIDAD DE MOVIMIENTO RESPECTO DE UN PUNTO O.
    - Para un cuerpo rígido que rota respecto a un eje, es la resistencia que ofrece a variar su velocidad angular.
    - $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = m\,r\,v\,sen(\theta)$

MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\, r\, v\, sen\,\theta$$

$\boldsymbol{\theta}$ = ángulo que forma ***r*** con ***v***.

Si recordamos el **Principio de Conservación del Momento Angular**: $\boldsymbol{\tau}$ = d***L***/dt.

Así, si $\boldsymbol{\tau}$ = 0 → ***L*** = cte ; y por ello d***L***/dt = 0.

Este principio se cumple siempre en cuerpos sometidos a fuerzas centrales (ángulo entre ***r*** y ***F***, $\boldsymbol{\theta}$ =180)

EL MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO QUE SE MUEVE BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL SE MANTIENE CONSTANTE EN VALOR, DIRECCIÓN Y SENTIDO.

APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANETARIO

FUERZA GRAVITATORIA TIENE NATURALEZA CENTRAL: MOMENTO ANGULAR DE LOS PLANETAS SE CONSERVA.

Por lo tanto:

1) Órbitas planas para que ***L*** mantenga constante su dirección.

2) Si la órbita es circular, ***v*** del planeta es uniforme.

$$sen\theta = sen90^{\circ} = 1 \rightarrow r = cte \rightarrow v_{\text{órbita circular}} = \frac{\left|\vec{\mathrm{L}}\right|}{\mathrm{m \cdot r}} = cte$$

3) Si la órbita es elíptica, ***v*** varía según la ley de las áreas de Kepler.

$$\vec{L} = cte \rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow m\ (\vec{r}_1 \text{ x } \vec{v}_1) = m\ (\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2)$$

$$r_1 v_1\ sen\ \theta_1 = r_2 v_2\ sen\ \theta_2$$

APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANETARIO

1) El área diferencial (dA) barrida por el planeta:

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \text{ x } d\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \text{ x } \vec{v}dt\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \text{ x } \vec{v}\right|dt \quad pero: dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

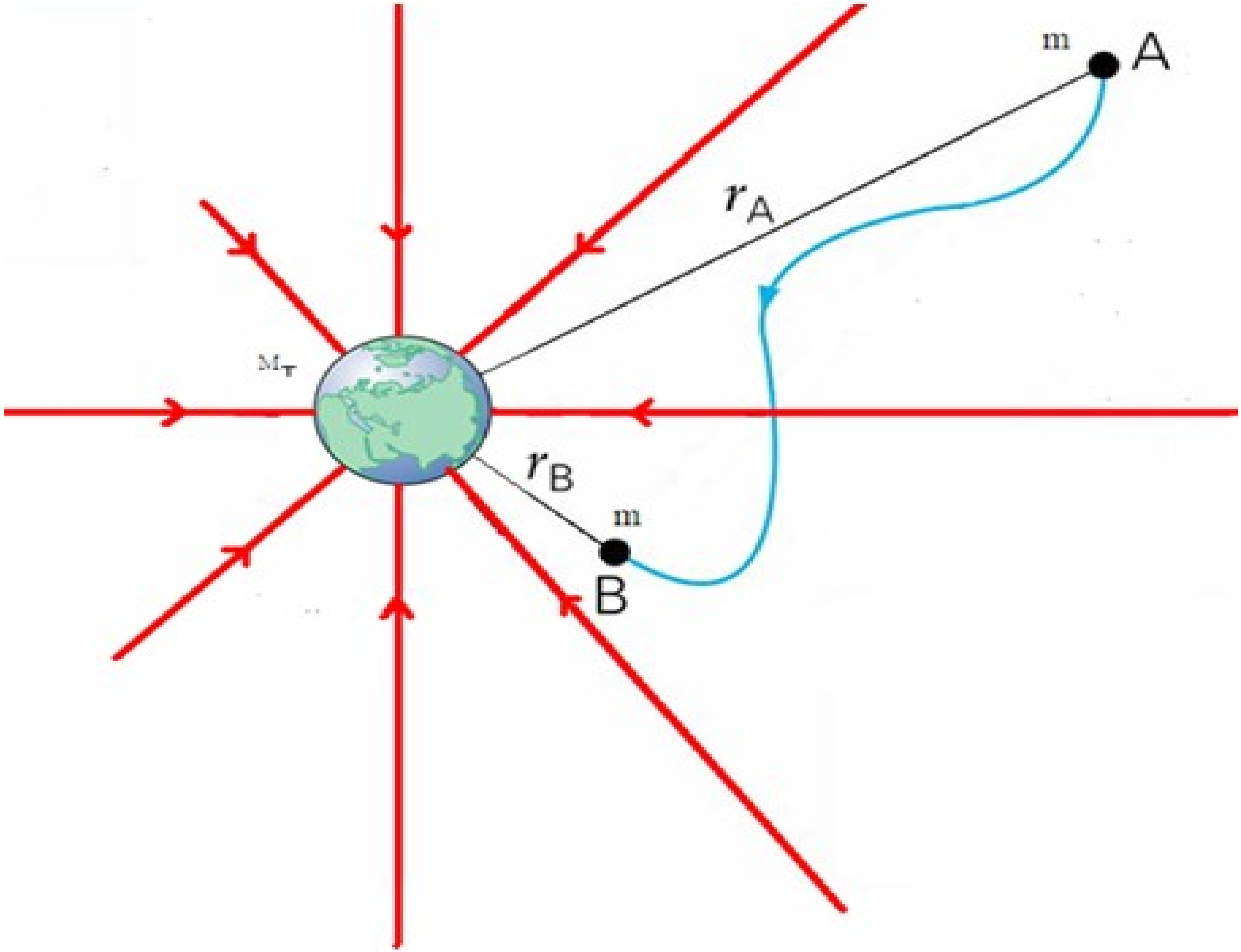
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \quad pero: v_a = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r\, v\, sen(\theta)$$

2) Así, la velocidad areolar ($\boldsymbol{v_A}$) es constante:

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \text{ x } \vec{v}\right| = \frac{L}{2m}$$

v_A se mide en [m^2/s]

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL (Ug)

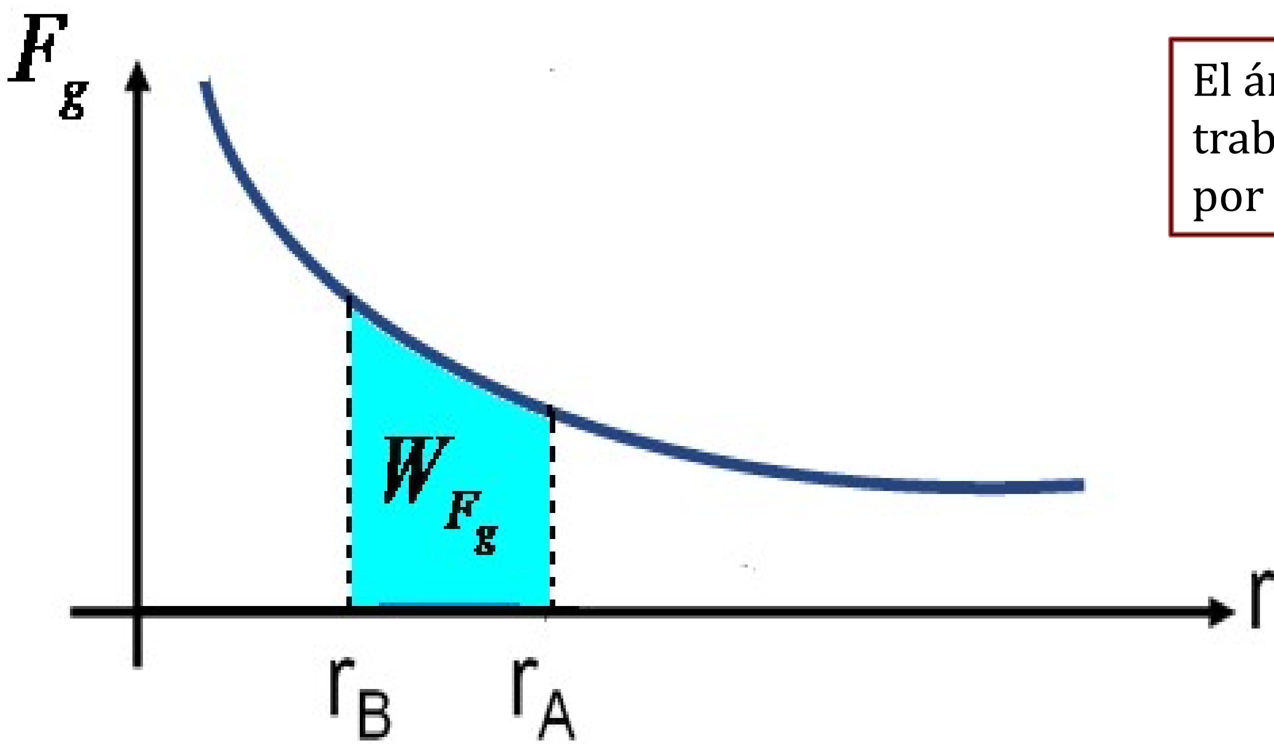


La fuerza gravitacional se encargará de mover la masa m del punto A al punto B.

La magnitud de la fuerza gravitacional entre la Tierra y la masa viene dada por la expresión:

$$F_g = \frac{G\,M_T\,m}{r^2} \quad y \quad g = \frac{G\,M_T}{R_T^2}$$

De esta expresión podemos observar que la fuerza gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a las dos masas.



El área bajo la curva nos da el trabajo de la fuerza gravitacional, por lo tanto tenemos:

$$W_{F_g} = \int_{r_1}^{r_2} F_G\,dr$$

Sustituyendo la componente radial e la fuerza gravitacional, tenemos:

$$W_{F_g} = -GM_T m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

Imaginemos que tenemos una masa m que se mueve desde el punto A que está en el infinito al punto P, por lo tanto:

$$r_2 = \infty$$

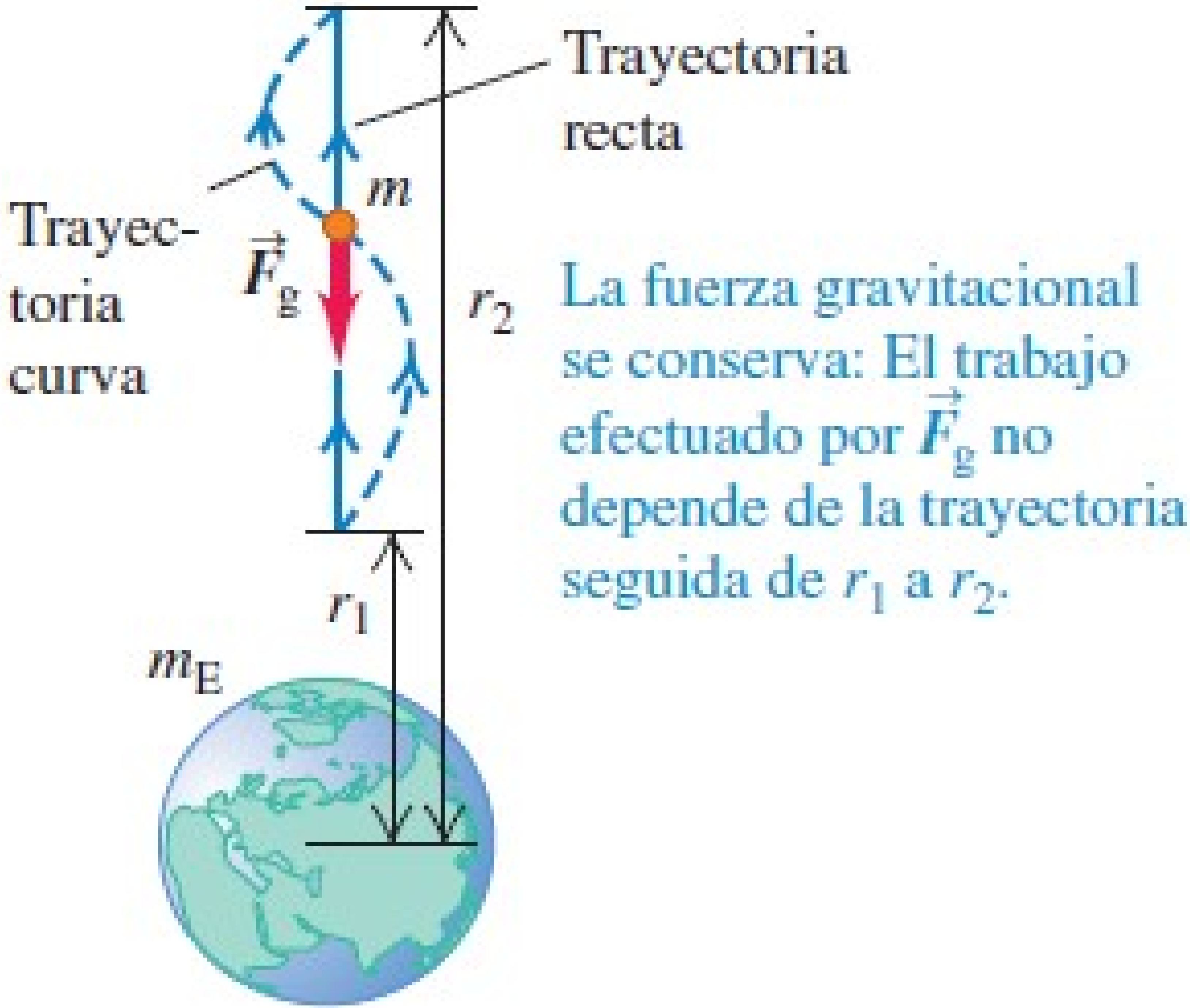
$$r_1 = r$$

Reemplazando en la siguiente ecuación tenemos:

$$W_{F_g} = \cancelto{0}{\frac{GM_T m}{r_2}} - \frac{GM_T m}{r_1}$$

Por lo tanto:

$$U_g = -G \frac{M_T m}{r}$$


Trayectoria recta
Trayec-toria curva
m
$\vec{F}_g$
r_2
r_1
m_E
La fuerza gravitacional se conserva: El trabajo efectuado por $\vec{F}_g$ no depende de la trayectoria seguida de r_1 a r_2.

Entonces podemos decir que la energía potencial gravitacional entre 2 masas es:

$$U_g = -G\frac{M_T m}{r}$$

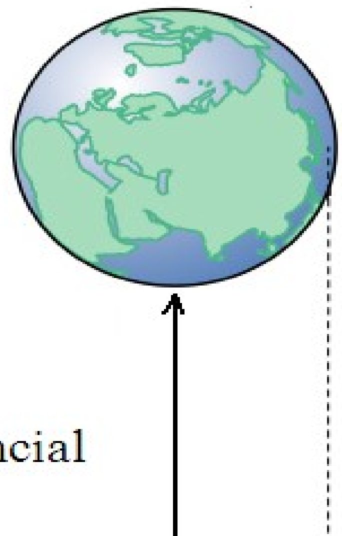
Definición:

La energía potencial gravitacional de un cuerpo de masa m, en un punto P de una región del espacio en donde hay un campo gravitacional, se define como el trabajo que realiza la fuerza gravitacional cuando la masa m se traslada desde el infinito hasta ese punto.

GRÁFICO DE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL EN FUNCIÓN DE LA DISTANCIA

Energía potencial gravitacional: $Ug = -\dfrac{GM_T m}{r}$

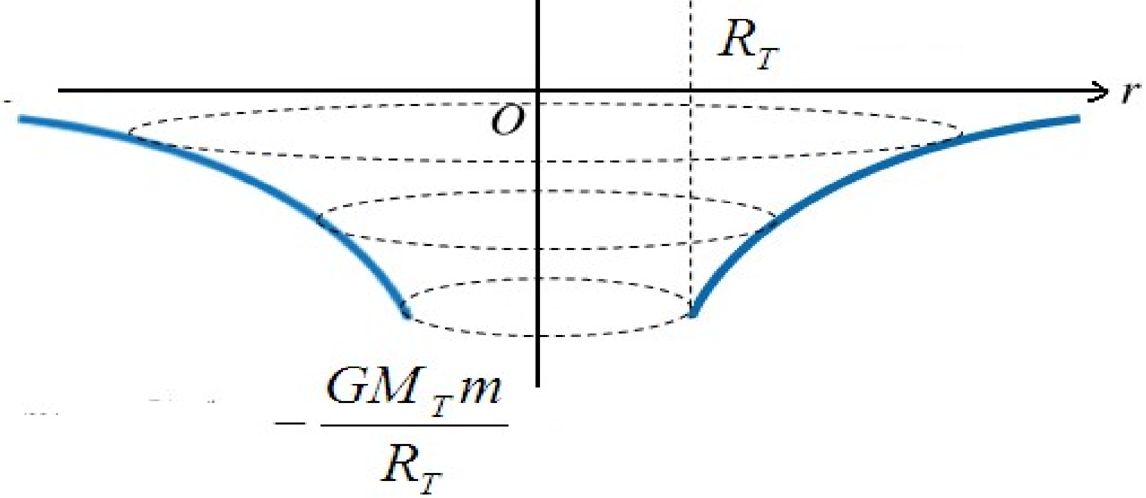
Masa de la Tierra M_T y su radio R_T



Masa del astronauta m

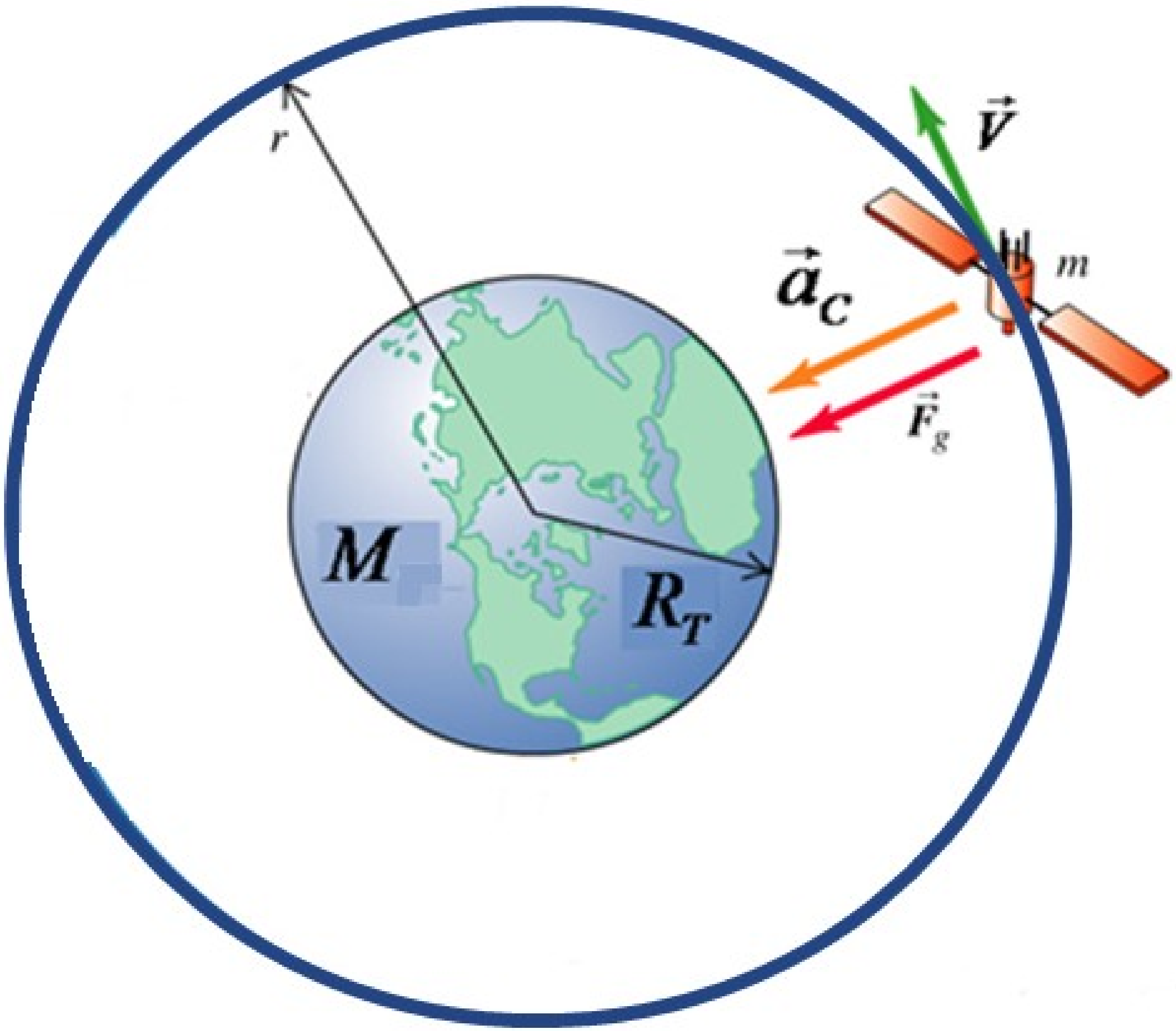
El astronauta al alejarse de la Tierra aumenta su energía potencial gravitacional

Pozo de energía potencial gravitacional.



ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS

TRAYECTORIAS CIRCULARES



La energía potencial gravitacional del satélite es: $$U_g = -G\frac{M_T m}{r}$$

La energía cinética del satélite es: $$K = \frac{1}{2}mV^2$$

Recordemos que la rapidez orbital del satélite viene dada por la expresión: $$V = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Reemplazando la ecuación de la rapidez orbital en la de energía cinética tenemos:

$$K = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

La energía total del satélite viene dada por la expresión: $$E_{TOTAL} = K + U_g$$

Reemplazando las ecuaciones de energía cinética y energía potencial gravitacional del satélite en la ecuación anterior, tenemos:

$$E_{TOTAL} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

Para una distancia fija r las ecuaciones de energía potencial gravitacional, energía cinética y energía total del satélite permanecen constantes.

Mas sobre la fuerza gravitacional y la energia potencial

La componente de la fuerza dada en una dirección, es igual al negativo de la derivada *U* respecto a la coordenada correspondiente. Para movimiento en el eje *x*:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

La fuerza gravitacional tiene componente solo en la dirección radial, así que:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM_T m}{r}\right) = -\frac{GM_T m}{r^2}$$

Si estamos cerca de la superficie terrestre la ecuación de *Ug*, se reduce a: *Ug = m g y.*

$$W_{grav} = G\,M_T m\left[\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right]$$

Mas sobre la fuerza gravitacional y la energía potencial

Si el cuerpo se mantiene cerca de la superficie de la tierra, en el denominador podemos sustituir de la siguiente manera:

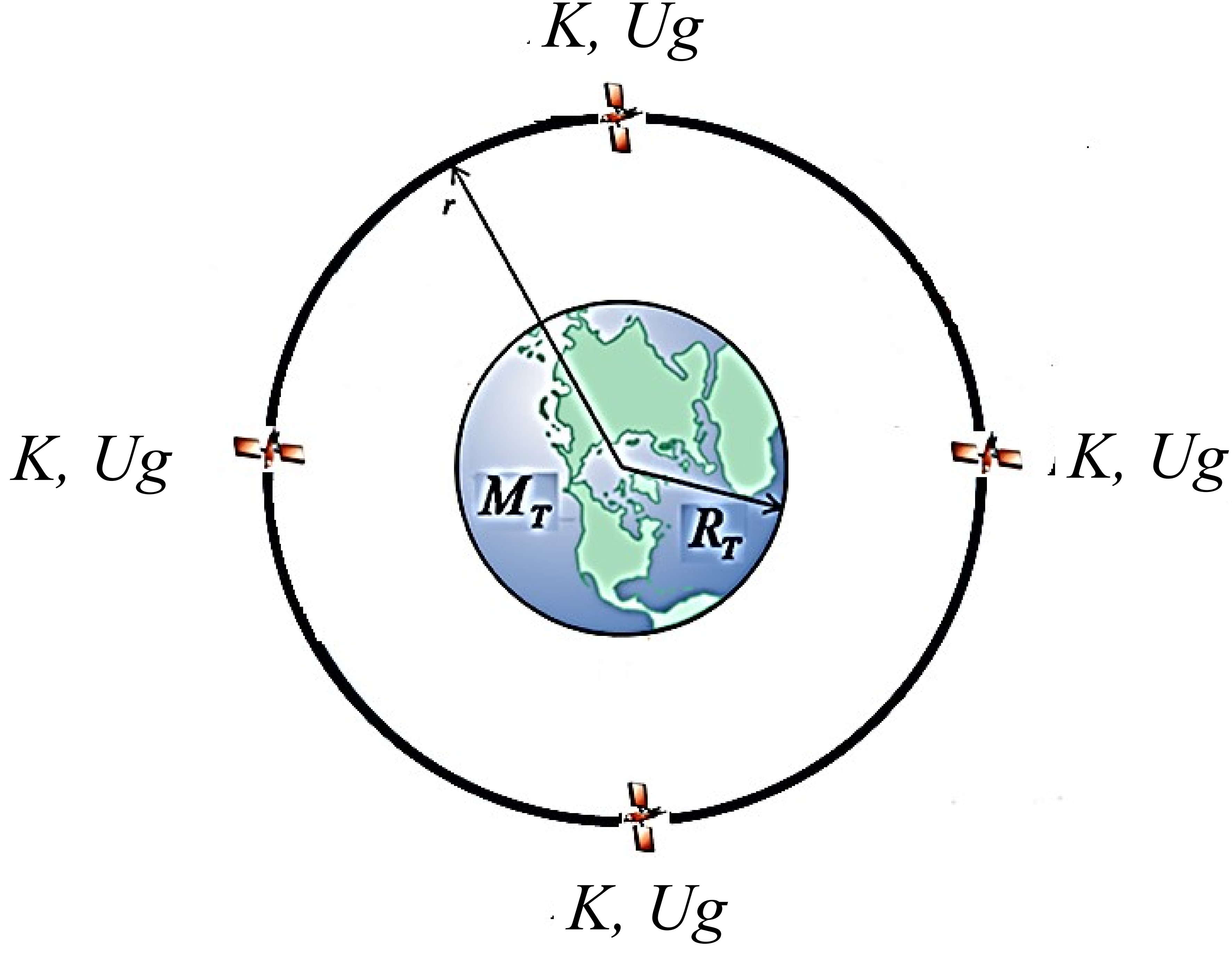
$$W_{grav} = GM_T m \frac{r_1 - r_2}{R_T{}^2}$$

Según la ecuación:

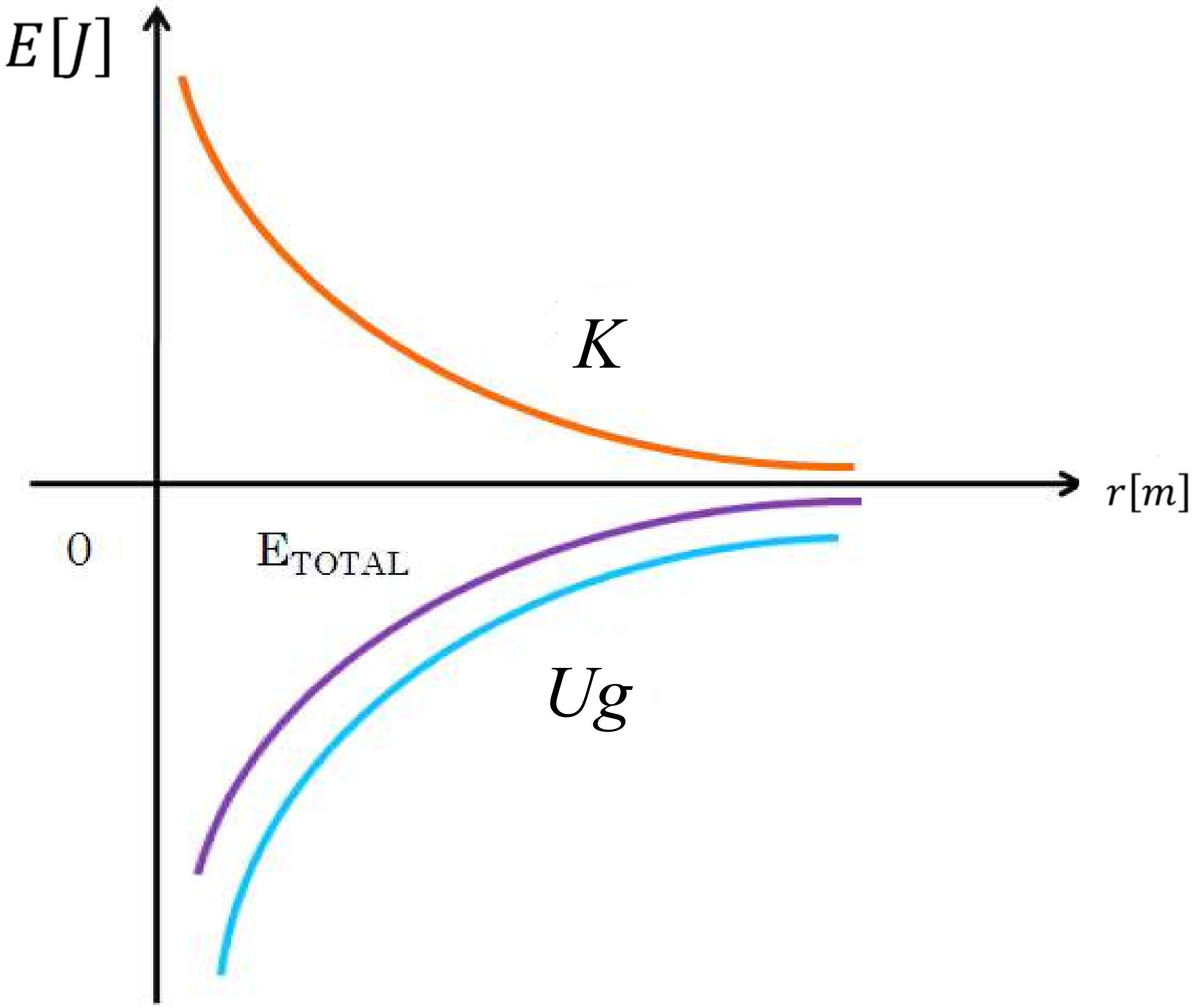
$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Tenemos:

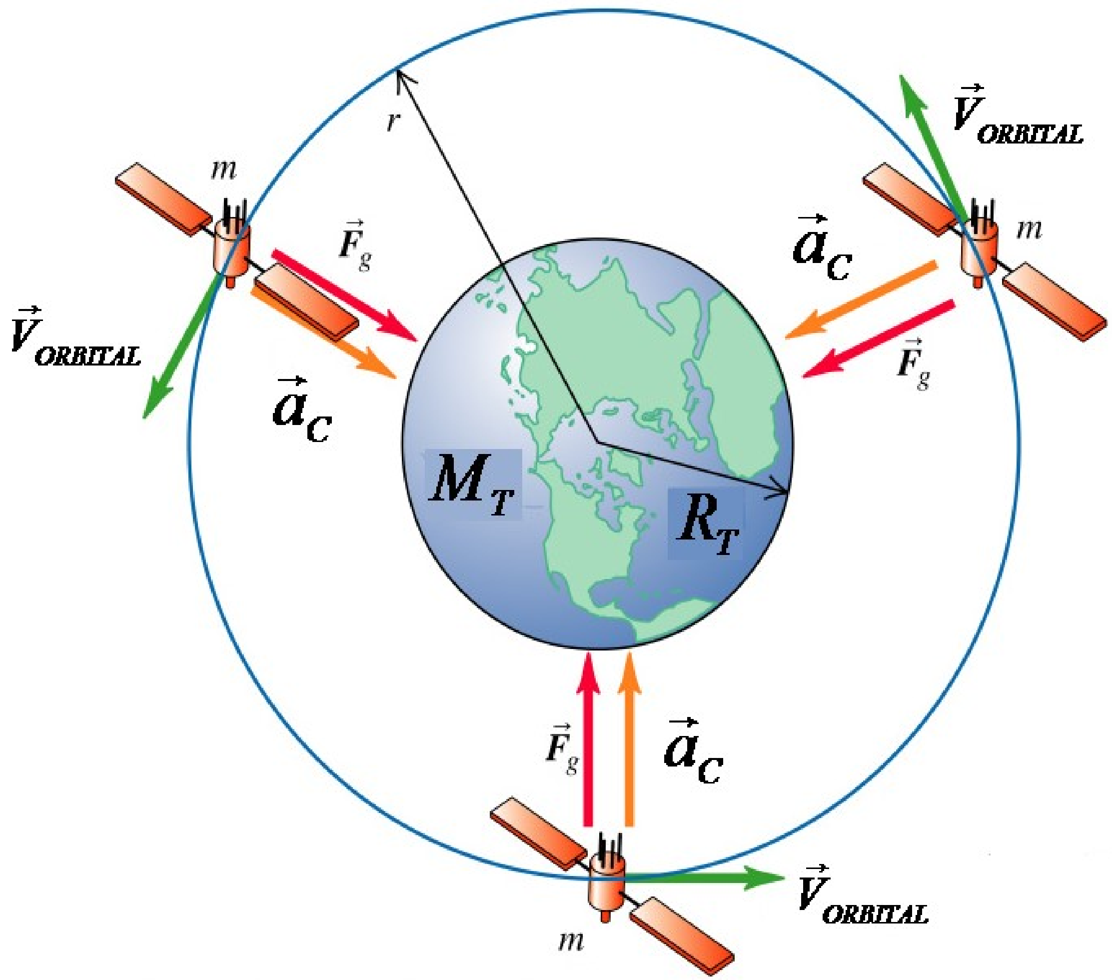
$$W_{grav} = mg(r_1 - r_2)$$


K, Ug
r
K, Ug
M_T
R_T
K, Ug
K, Ug

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL, ENERGÍA CINÉTICA Y ENERGÍA TOTAL EN FUNCIÓN DE LA DISTANCIA



Rapidez y período orbital de un satélite orbitando alrededor de la Tierra



$\vec{V}_{ORBITAL}$: *velocidad orbital del satélite.*

r : *radio orbital del satélite.*

$\vec{F}_g$: *fuerza gravitacional de la Tierra sobre el satélite.*

m : *masa del satélite.*

$\vec{a}_C$: *aceleración centrípeta del satélite.*

R_T : *radio de la Tierra.*

M_T : *masa de la Tierra.*

Aplicando la Segunda Ley de la Mecánica de Newton para el satélite, tenemos:

$$\vec{F}_C = m\vec{a}_C$$

La fuerza centrípeta es suministrada por la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el satélite y recordando la ecuación de la aceleración centrípeta, entonces tenemos que:

$$F_g = m\frac{\left(V_{ORBITAL}\right)^2}{r}$$

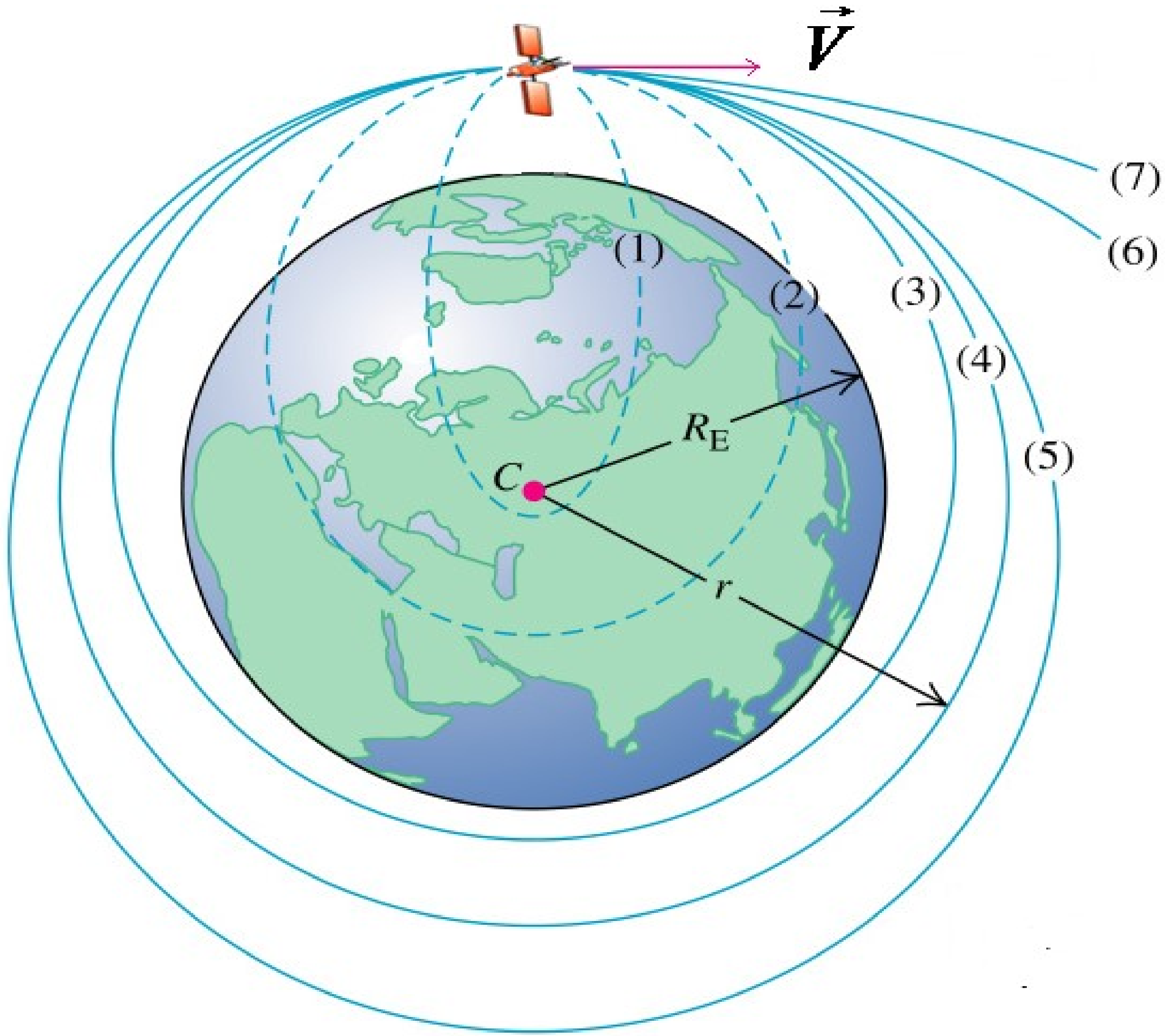
Recordando la expresión de la fuerza gravitacional y reemplazando en la ecuación anterior, tenemos:

$$\frac{GmM_T}{r^2} = m\frac{\left(V_{ORBITAL}\right)^2}{r} \rightarrow \frac{GM_T}{r} = \left(V_{ORBITAL}\right)^2$$

De la ecuación anterior, despejemos la rapidez orbital, entonces tenemos:

La rapidez orbital del satélite es independiente de la masa del satélite. Solo depende de la masa de la Tierra, el radio orbital y la constante de Gravitación Universal.

$$V_{ORBITAL} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$



$V \langle V_{ORBITAL}$: Trayectorias posibles 1, 2 y 3.

$V = V_{ORBITAL}$: Trayectoria 4.

$V \rangle V_{ORBITAL}$: Trayectorias posibles 5, 6 y 7.

Recordemos la ecuación de la rapidez orbital en función del periodo orbital y el radio orbital (ecuación del M.C.U.) , entonces tenemos:

$$V_{orbital} = \frac{2\pi r}{T}$$

T : Periodo orbital del satélite.

Igualando las ecuaciones:

$$V_{orbital} = \frac{2\pi r}{T} \quad ; \quad V_{orbital} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Tenemos:

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Ahora elevemos al cuadrado ambos lados de la ecuación:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{GM_T}{r}}\right)^2$$

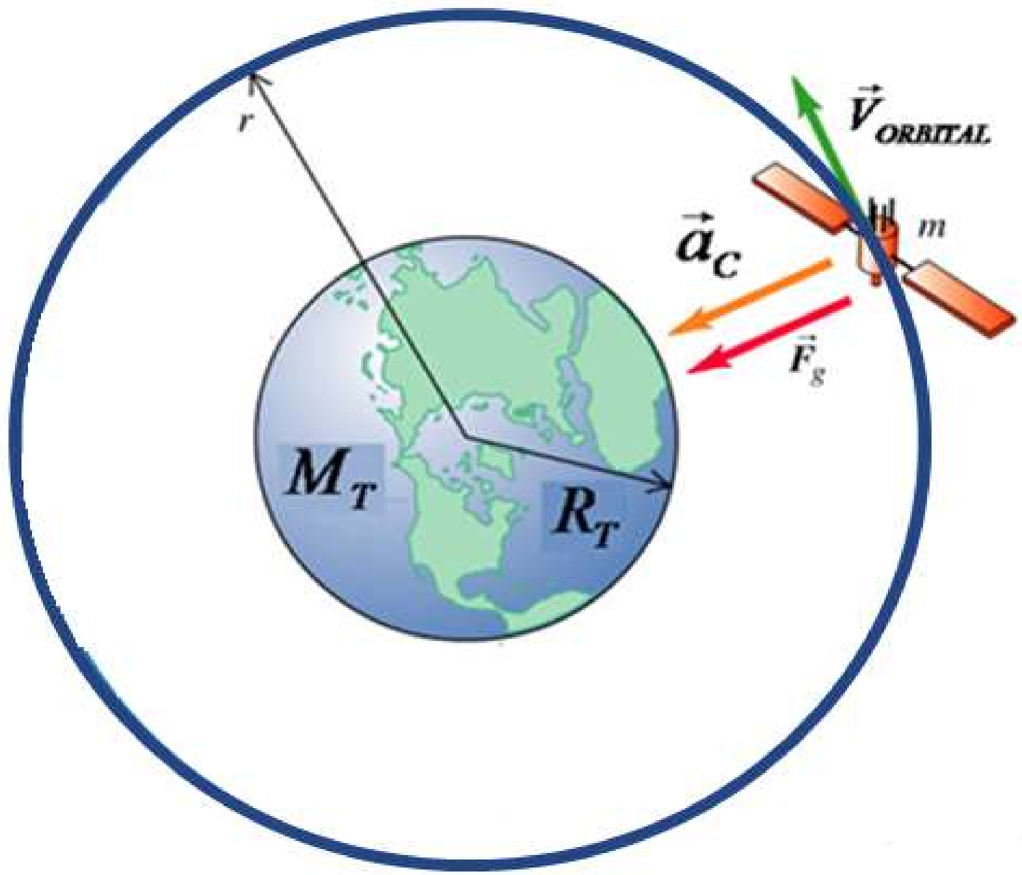
Entonces tenemos:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r}$$

De la ecuación anterior despejando T, tenemos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}}$$

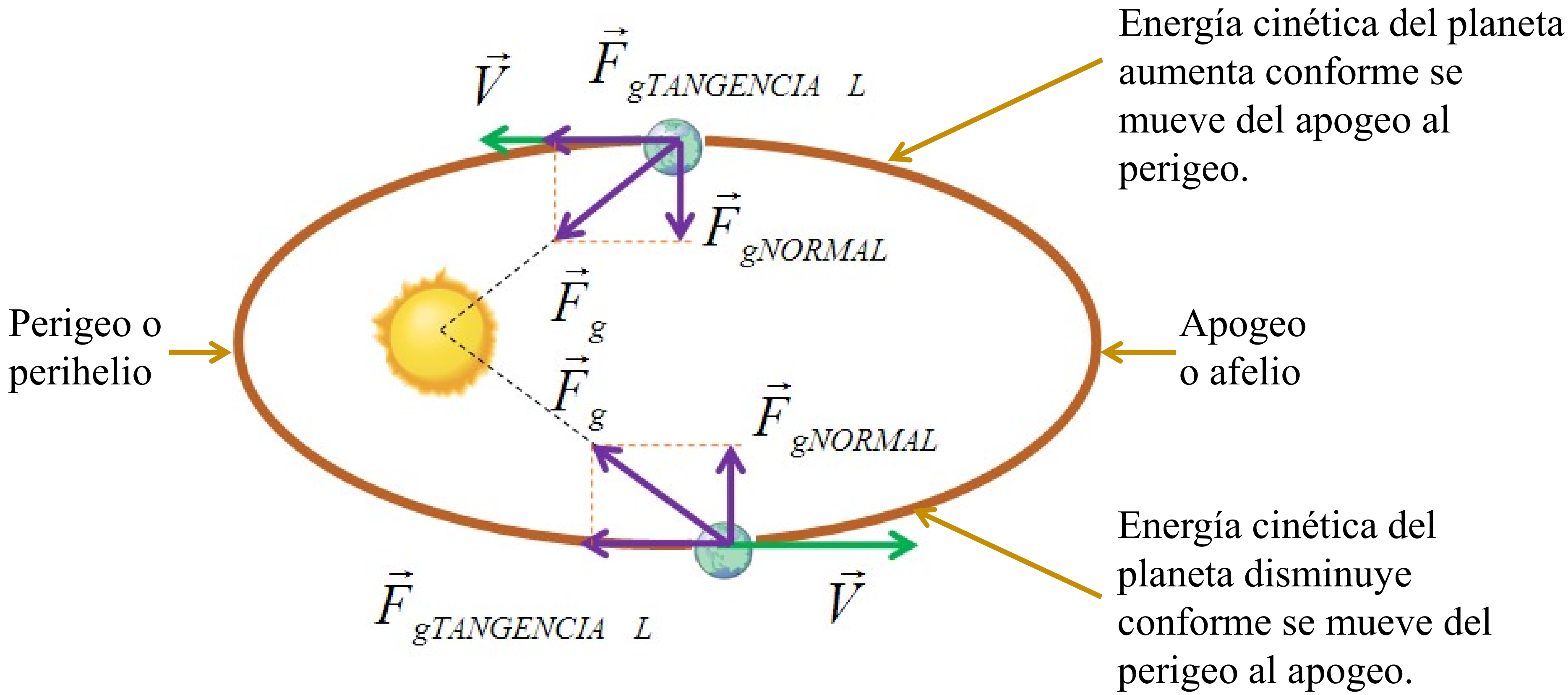
Definición: Un satélite tiene una órbita geoestacionaria (geosincrónica) cuando su periodo de rotación es igual al periodo de rotación de la Tierra alrededor de su propio eje.



De la ecuación del periodo orbital despejemos r, entonces tenemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi}}$$

TRAYECTORIAS ELÍPTICAS



La componente tangencial de la fuerza gravitacional es la que produce trabajo sobre el planeta haciendo que su energía cinética cambie.
¿Por qué la energía cinética del planeta cambia conforma órbita alrededor del sol?
Recordemos el teorema del trabajo y la energía cinética, entonces tenemos que:

$$W_{NETO} = \Delta K$$

La única fuerza que produce trabajo sobre el planeta es la componente tangencial de la fuerza gravitacional, por lo tanto:

$$W_{F_{gTANGENCIAL}} = \Delta K$$

Velocidad de escape: Es la velocidad para escapar de la atracción gravitatoria del planeta con masa M.

Cualquier objeto que quiera escapar de la atracción gravitatoria debe ir desde la superficie de la tierra (r_E) hasta el infinito donde U_E =0.

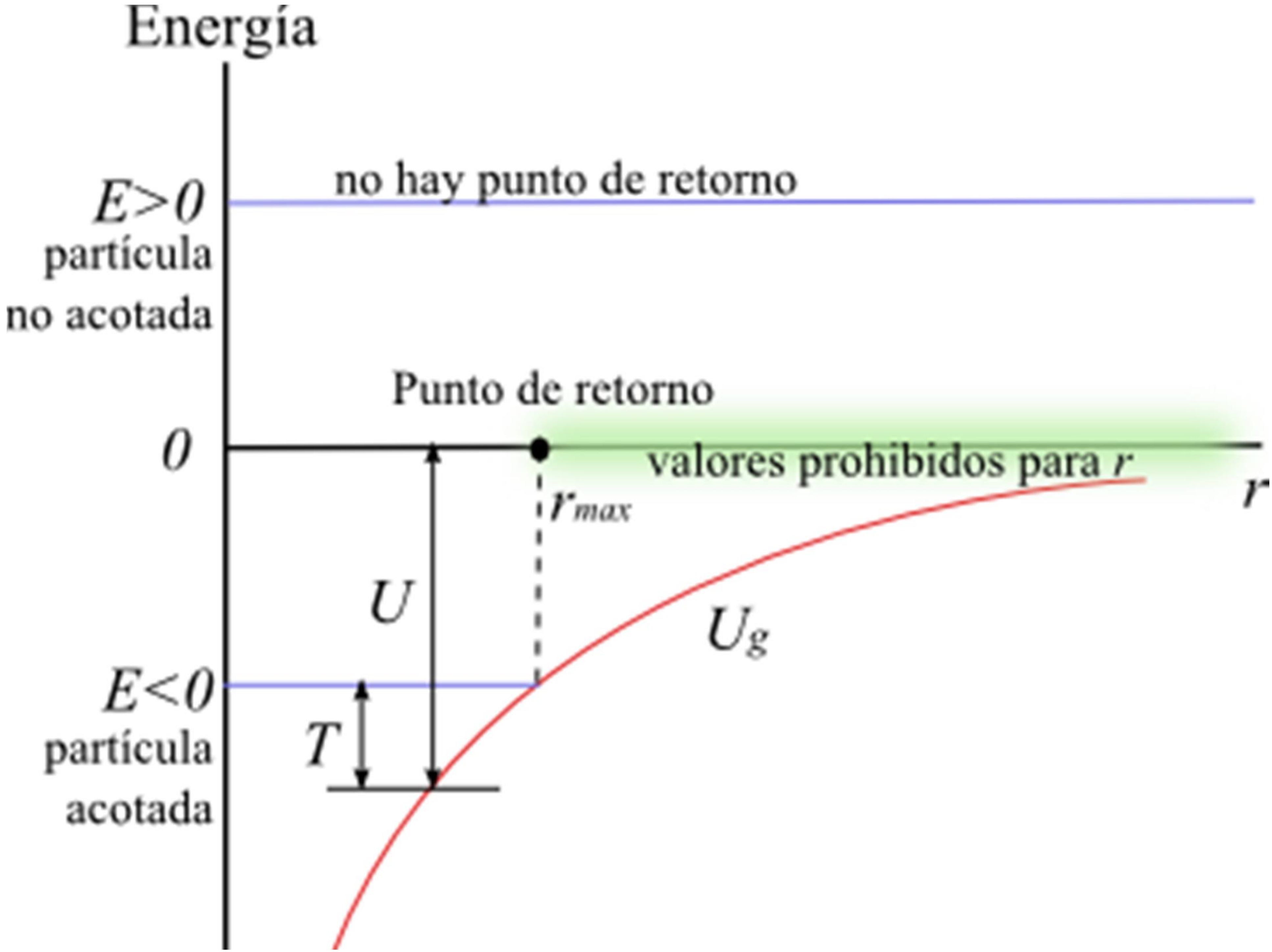
$$\text{Loss of } K_E \quad = \quad \text{Gain in } U_E$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 - 0}_{\text{Loss of KE}} \quad = \quad \underbrace{0}_{\text{PE at }\infty} \quad - \quad \underbrace{-G\frac{Mm}{r_E}}_{\text{PE at Surface}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{r_E}} \Rightarrow \boxed{v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r_E}}}$$

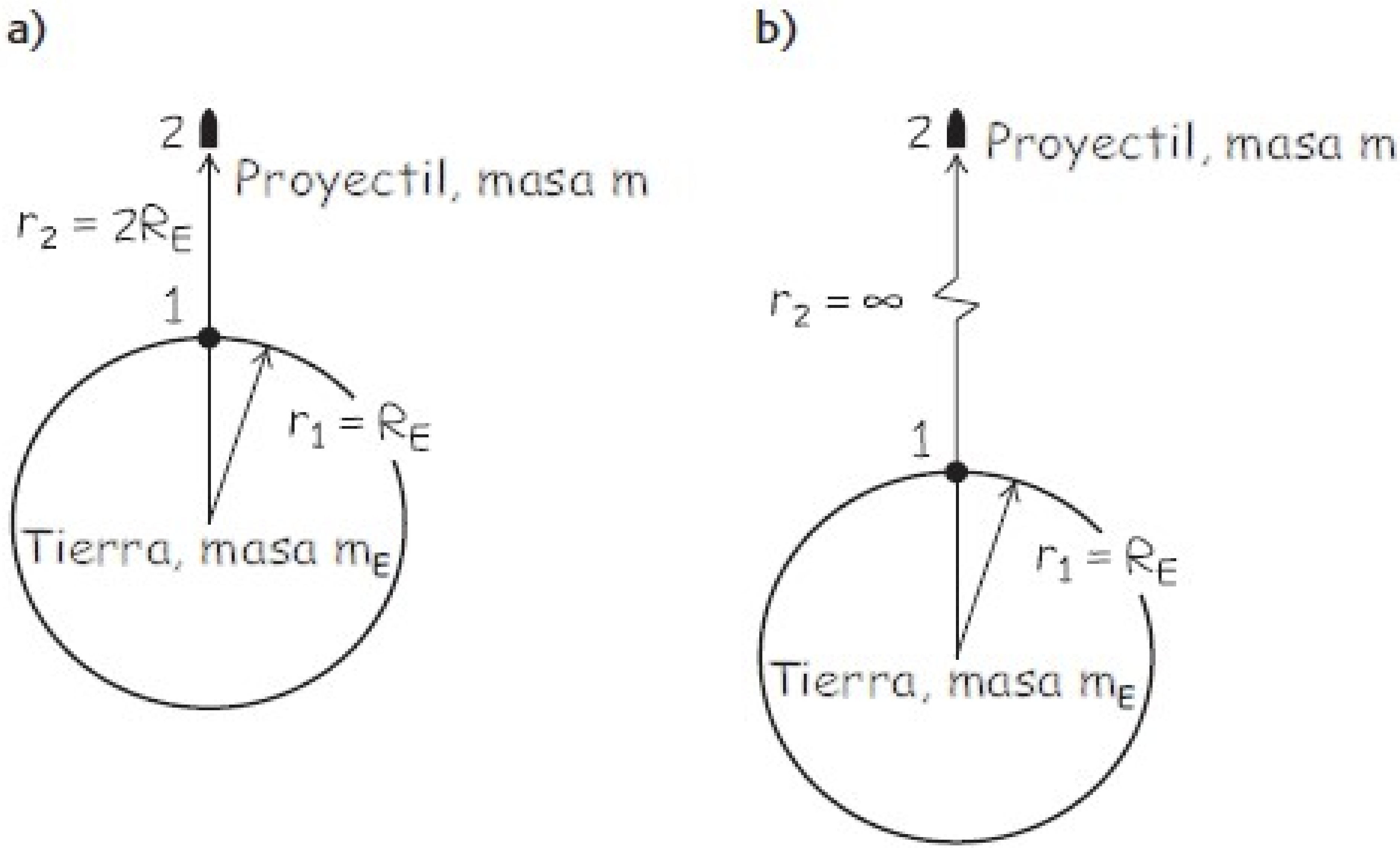
On Earth this is 11 kms^{-1}

Esta es la razón de porque en la luna hay menos atmósfera. La velocidad de escape para las moléculas de gas de la atmósfera lunar es mucho menor que para las de la tierra y, por lo tanto, pueden escapar más fácilmente de la atracción gravitatoria lunar, perdiéndose en el espacio.


Energía
no hay punto de retorno
E>0
partícula
no acotada
Punto de retorno
0
valores prohibidos para r
r
r max
U
U g
E<0
partícula
acotada
T

Problema

En la novela de Julio Verne de 1865 con ese título, tres hombres viajaron a la Luna en un cascarón disparado desde un cañón gigante hundido en el suelo de Florida. *a*) Calcule la rapidez inicial necesaria para disparar el cascarón verticalmente hasta una altura sobre la Tierra igual al radio de ésta. *b*) Calcule la *rapidez de escape*, es decir, la rapidez inicial que permitiría al cascarón escapar de la Tierra. Desprecie la resistencia del aire, la rotación de la Tierra y la atracción gravitacional de la Luna. El radio de la Tierra es $R_E = 6380\ \text{km} = 6.38 \times 10^6\ \text{m}$ y su masa es $m_E = 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$ (véase el Apéndice F).


a)
2
Proyectil, masa m
$r_2 = 2R_E$
1
$r_1 = R_E$
Tierra, masa m_E
b)
2
Proyectil, masa m
$r_2 = \infty$
1
$r_1 = R_E$
Tierra, masa m_E

EJECUTAR: *a*) Podemos determinar v_1 con la ecuación de conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}}\right) = 0 + \left(-\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{2R_{\mathrm{E}}}\right)$$

Reacomodando, obtenemos

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}}} \\ &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6.38 \times 10^{6}\ \mathrm{m}}} \\ &= 7900\ \mathrm{m/s}(= 28{,}400\ \mathrm{km/h} = 17{,}700\ \mathrm{mi/h}) \end{aligned}$$

b) Queremos que el cascarón apenas "llegue" al punto 2 en $r_2 = \infty$, sin energía cinética sobrante, así que $K_2 = 0$ y $U_2 = 0$ (la energía potencial es cero en el infinito; véase la figura 12.11). La energía mecánica total es entonces cero; por lo tanto, al dispararse el cascarón, su energía cinética positiva K_1 y su energía potencial negativa U_1 también deben sumar cero:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{Gm_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}}\right) = 0 + 0$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6.38 \times 10^{6}\ \mathrm{m}}} \\ &= 1.12 \times 10^{4}\ \mathrm{m/s}(= 40{,}200\ \mathrm{km/h} = 25{,}000\ \mathrm{mi/h}) \end{aligned}$$