

FÍSICA

Vibraciones y Ondas

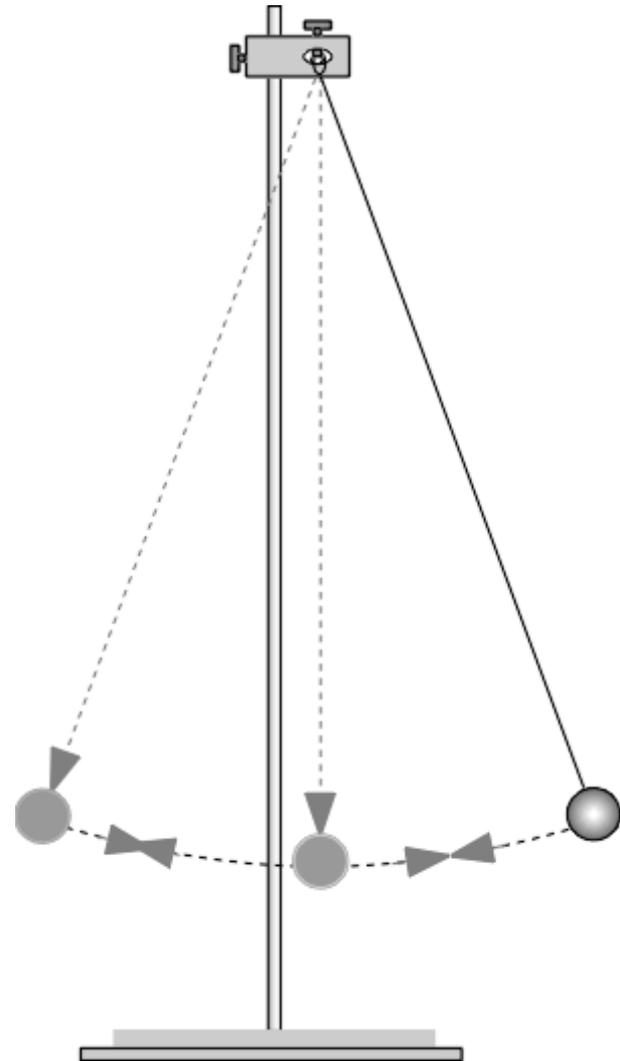
- 1. Movimiento armónico simple.**
- 2. Movimiento ondulatorio. Ondas armónicas.**
- 3. Propagación de ondas: absorción, refracción y reflexión.**
- 4. Superposición de ondas; interferencias.**
- 5. Difracción.**
- 6. Ondas estacionarias.**

1. Movimiento armónico simple (MAS)

Movimiento oscilatorio: Alrededor de una posición de equilibrio por la que se pasa alternativamente en un sentido y en el contrario.

Movimiento oscilatorio periódico: Si las oscilaciones se repiten en el mismo intervalo de tiempo, llamado período, T .

Movimiento armónico simple: Caso particular de movimiento oscilatorio periódico. Es el más sencillo, de modo que cualquier otro puede descomponerse en suma de ellos.



Movimiento armónico simple

El tipo de oscilación más sencillo sucede cuando la fuerza que actúa sobre el sistema siempre opera en una dirección que tiende a restablecer el sistema en su posición de equilibrio.

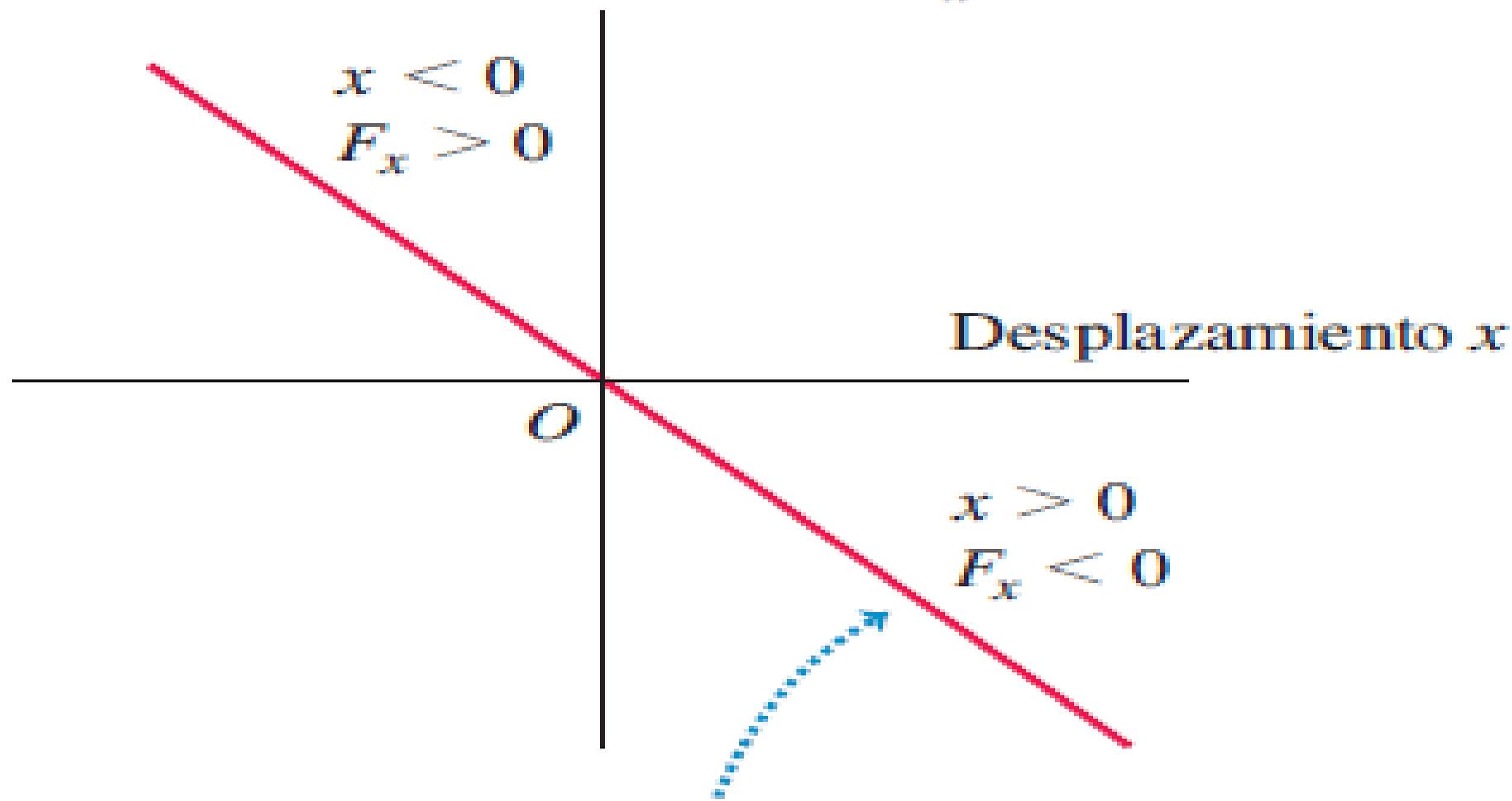
A esta fuerza se la denomina de restitución o restauradora, F_x , y tiene la característica de ser directamente proporcional al desplazamiento x con respecto a la posición de equilibrio.

La constante de proporcionalidad entre F_x y x es la constante de fuerza k . En ambos lados de la posición de equilibrio, F_x y x siempre tienen signos opuestos. Si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio la oscilación se denomina movimiento armónico simple, que se abrevia MAS.

La aceleración de un cuerpo en MAS está dada por la 2° ley de Newton:

$$F_x = -k x = m a_x$$

Fuerza de restitución F_x



La fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal es directamente proporcional al desplazamiento (la ley de Hooke, $F_x = -kx$): la gráfica de F_x contra x es una recta.

La aceleración de un cuerpo en MAS está dada por:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Solución:

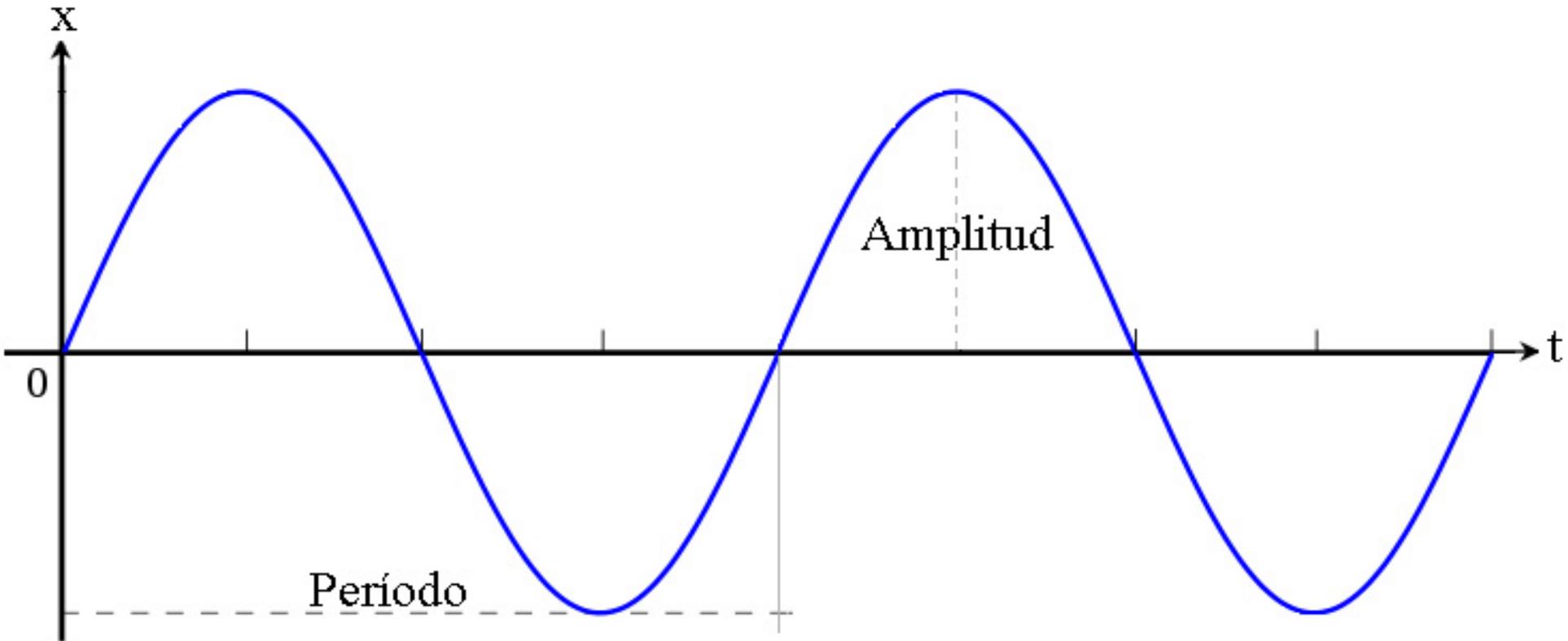
$$x(t) = A \operatorname{sen}(\theta)$$

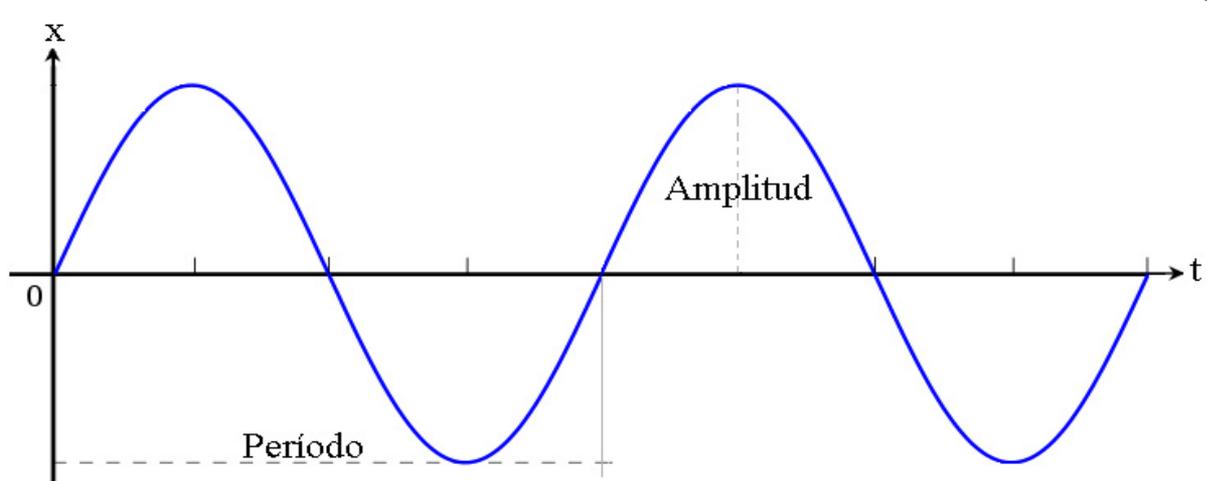
Llamando a: $\theta = \omega t \rightarrow x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$

O bien: $x(t) = A \operatorname{cos}(\omega t)$

Cinemática del M.A.S.

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$$





$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$$

Elongación (x): posición variable, distancia a la posición de equilibrio [m].

Amplitud (A): máxima elongación [m].

Frecuencia (f): cantidad de veces que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en la unidad de tiempo. $\left[\frac{1}{s} = Hz\right]$

Período (T): tiempo en el que se completa una oscilación. [s]

Frecuencia angular (ω): velocidad de la oscilación normalizada [rad/s].

Angulo de Fase: $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$: estado de la oscilación [rad].

Fase inicial (φ_0): estado inicial de la oscilación [rad].

Velocidad y Aceleración del M.A.S.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

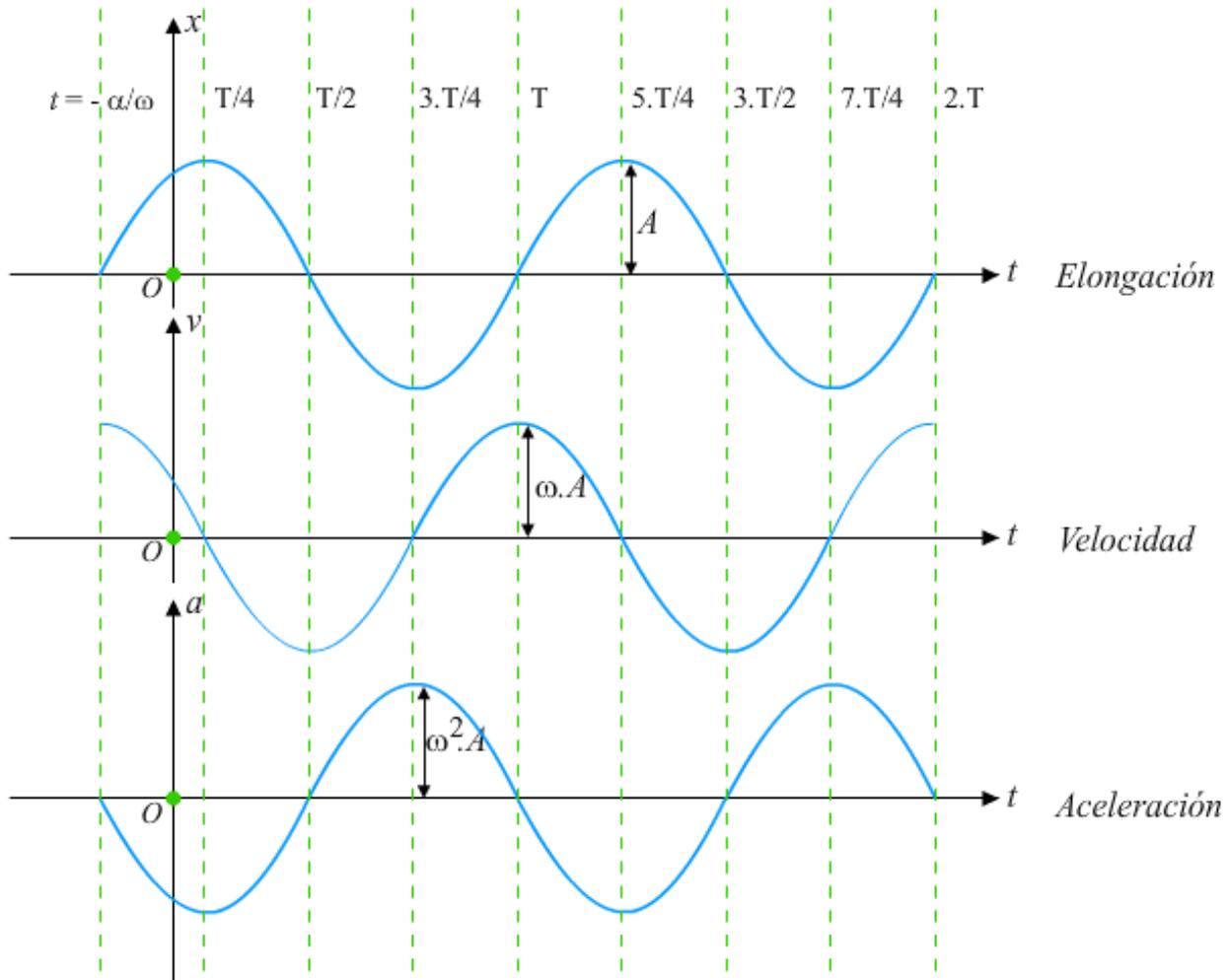
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_{max} = \pm A\omega$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

Condición de MAS

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$



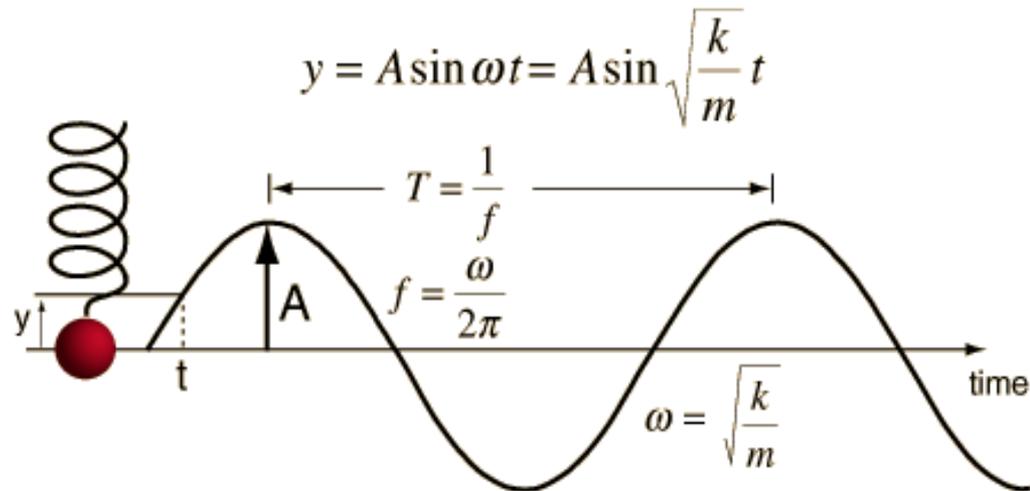
Dinámica del M.A.S.

$$\left. \begin{array}{l} a = -\omega^2 \cdot x \\ \sum F = m \cdot a \end{array} \right\} \boxed{\sum F = -m\omega^2 \cdot x}$$

La fuerza resultante debe ser proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y oponerse a éste.

Una fuerza que posee estas características es la **fuerza elástica**.

$$\left. \begin{array}{l} \sum F = -m\omega^2 \cdot x \\ \underbrace{F_e = -k \cdot x}_{\text{Ley de Hooke}} \end{array} \right\} \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$



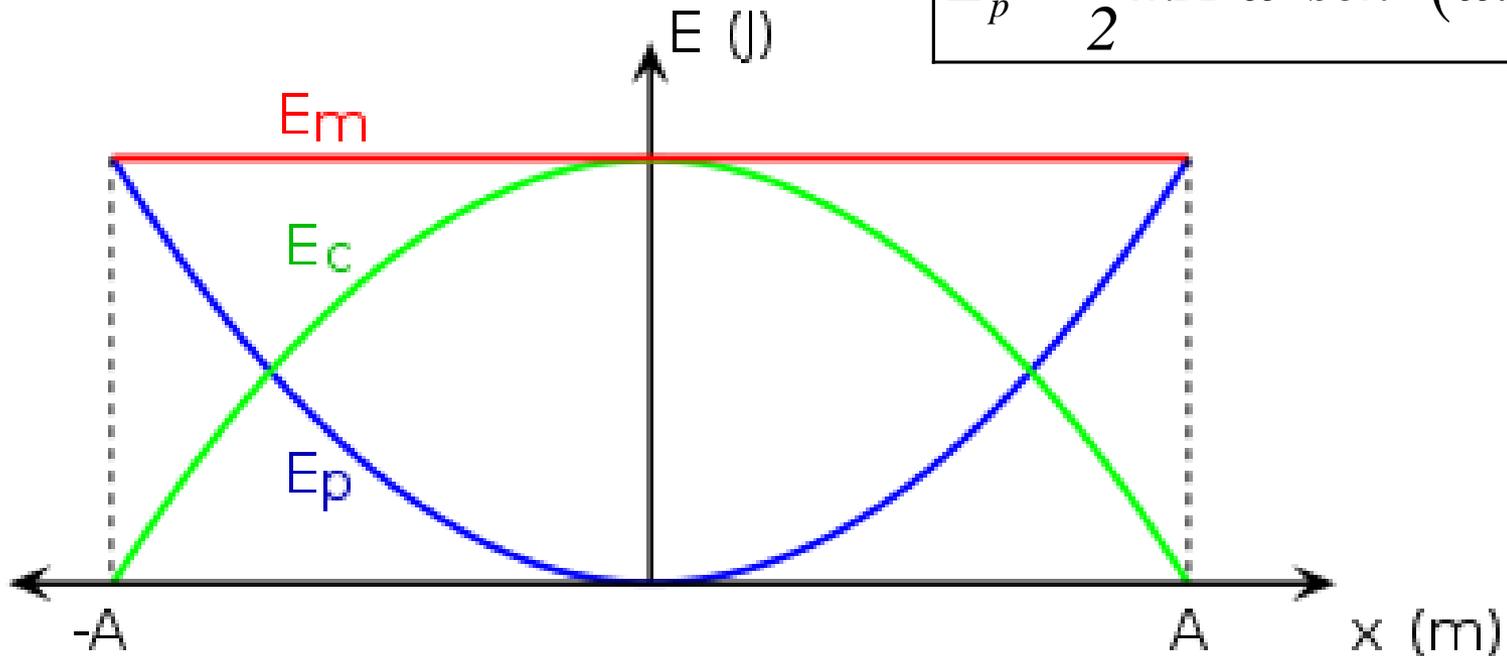
Energía en un MAS

$$W_{FNC} = 0 \rightarrow \Delta E_M = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

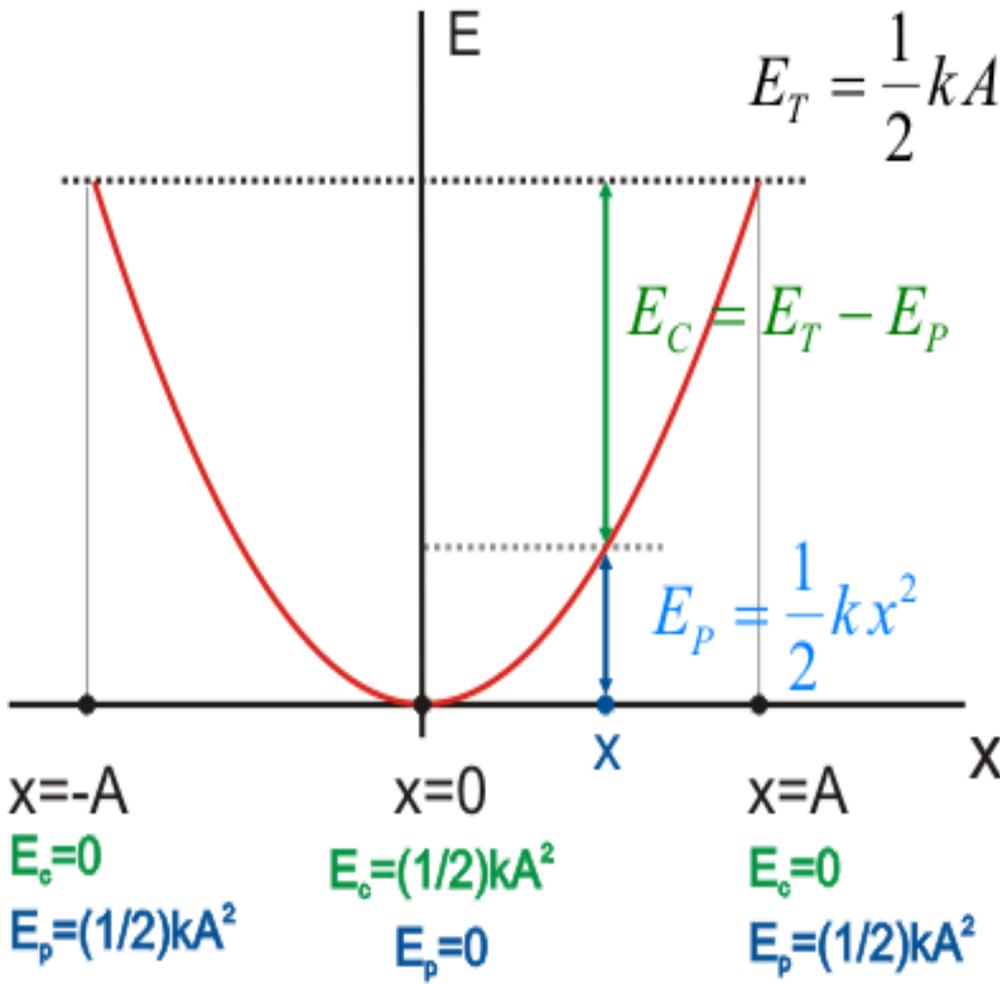
$$\left. \begin{aligned} E_{c,max} &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = E_M \\ E_M &= E_c + E_p \end{aligned} \right\} E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 - \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$



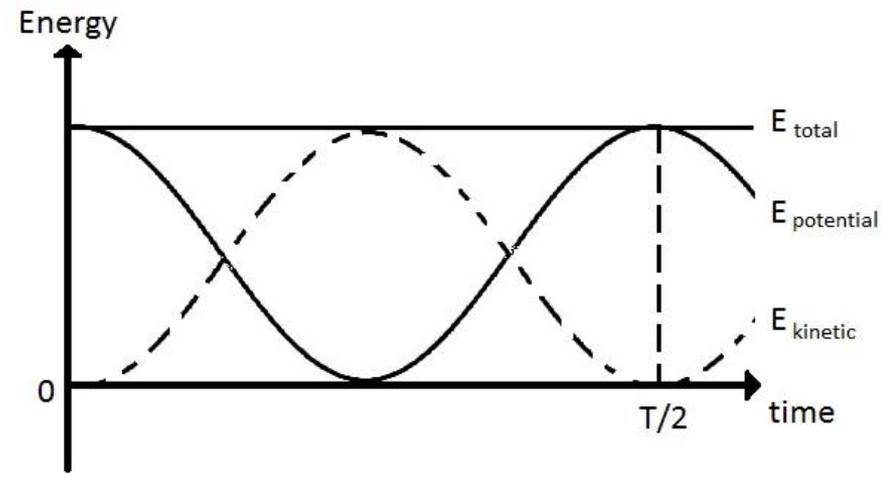
Energía de un MAS producido por un resorte

$$E_c = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} E_c = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$



$$E_p = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_M = \frac{1}{2} kA^2$$



MAS y Movimiento Circular

MAS puede ser entendido como el movimiento que realiza la proyección sobre el eje x de un punto que se mueve en movimiento circular a velocidad constante.

$$x = A \cos(\omega t + \delta) \quad 14-4$$

POSITION IN SIMPLE HARMONIC MOTION

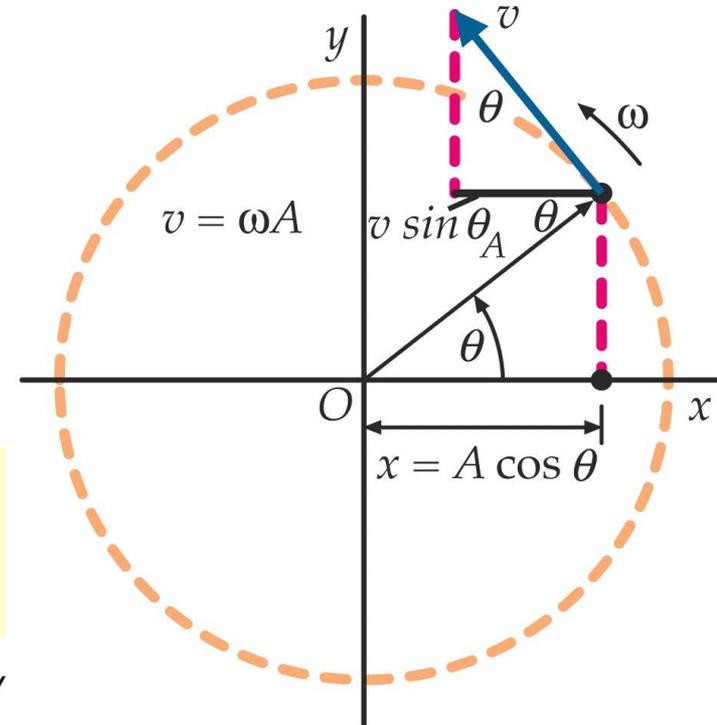
$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad 14-5$$

VELOCITY IN SIMPLE HARMONIC MOTION

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad 14-11$$

DEFINITION—FREQUENCY, PERIOD, AND ANGULAR FREQUENCY

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



Movimiento Armónico Simple. Energía

Energía potencial

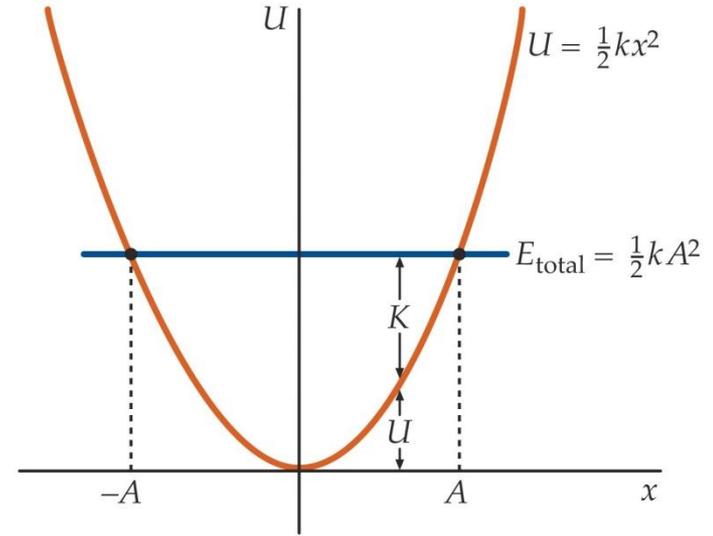
$$U = - \int_{x=0}^x (-k x) dx = \frac{1}{2} k x^2$$

Energía cinética

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (A \omega \sin(\omega t + \delta))^2$$

Energía mecánica total

$$E_{total} = U + K = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

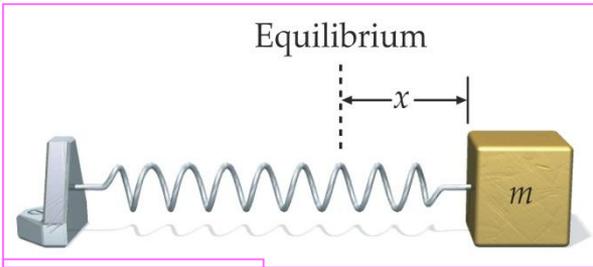


La energía mecánica total en un MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud

Ejemplo de sistemas físicos que se mueven con un MAS

Algunos sistemas oscilantes

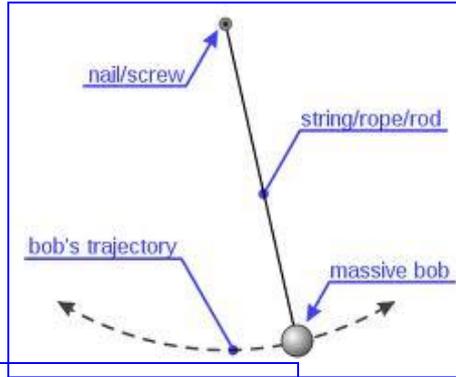
Muelle



$$\omega = \sqrt{k/m};$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Péndulo simple



Péndulo físico

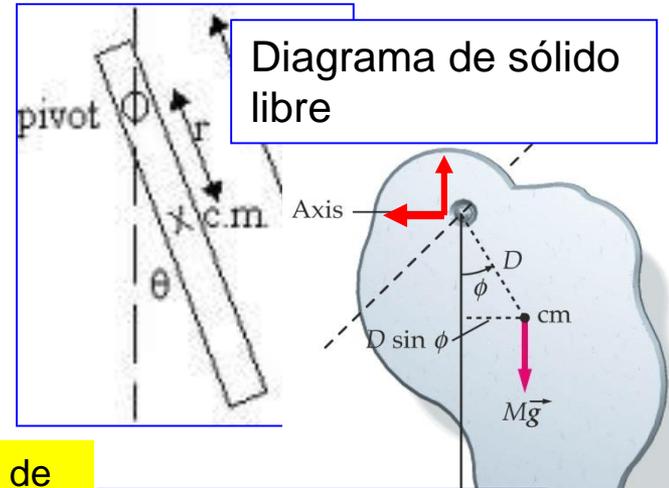


Diagrama de sólido libre



$$\sum F_T = m a_T$$

$$mg \sin \phi = m \alpha L$$

$$mg \sin \phi = mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi \approx -\frac{g}{L} \phi$$

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

El movimiento de un péndulo se aproxima a un MAS para pequeños desplazamientos angulares

$$\tau = I\alpha$$

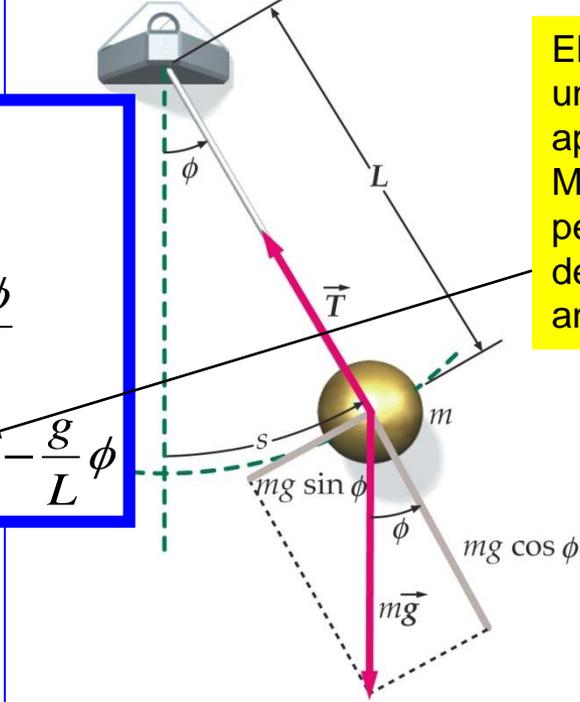
$$MgD \sin \phi = I \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I} \sin \phi$$

$$\approx -\frac{MgD}{I} \phi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$



Aplicaciones del MAS

MAS vertical

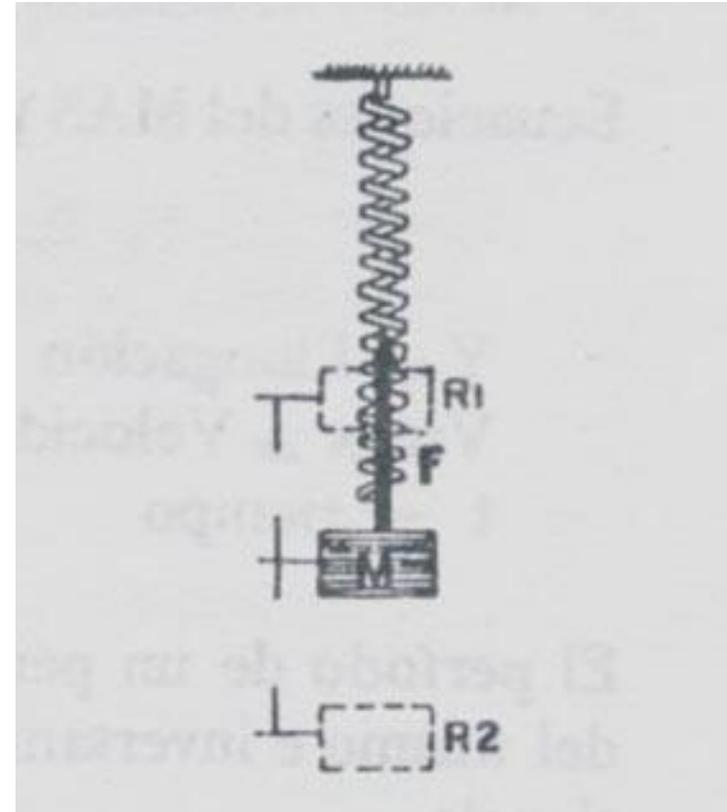
Colgamos una masa del extremo libre de un resorte vertical y se deja descender suavemente; comienza a oscilar de forma vertical, hasta que el sistema alcanza el equilibrio.

Fuerza recuperadora: $F = k l$

En el equilibrio se cumple: $m g = k \Delta l$

$$k = \frac{m g}{l} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



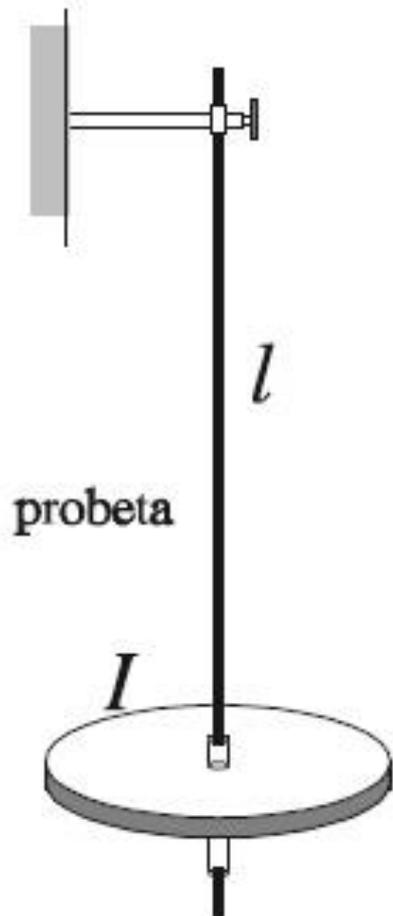
M.A.S. angular

Un resorte espiral ejerce un momento de torsión de restitución proporcional al desplazamiento angular respecto de la posición de equilibrio.

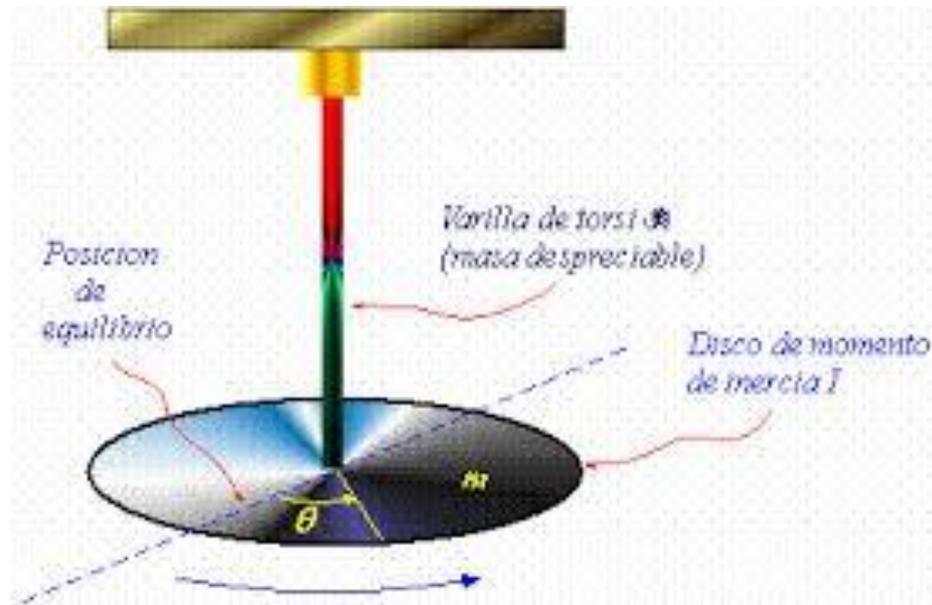
Péndulo de Torsión

$$\tau = -K \Theta$$

El momento esta descrito por: $\Theta = \Theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$



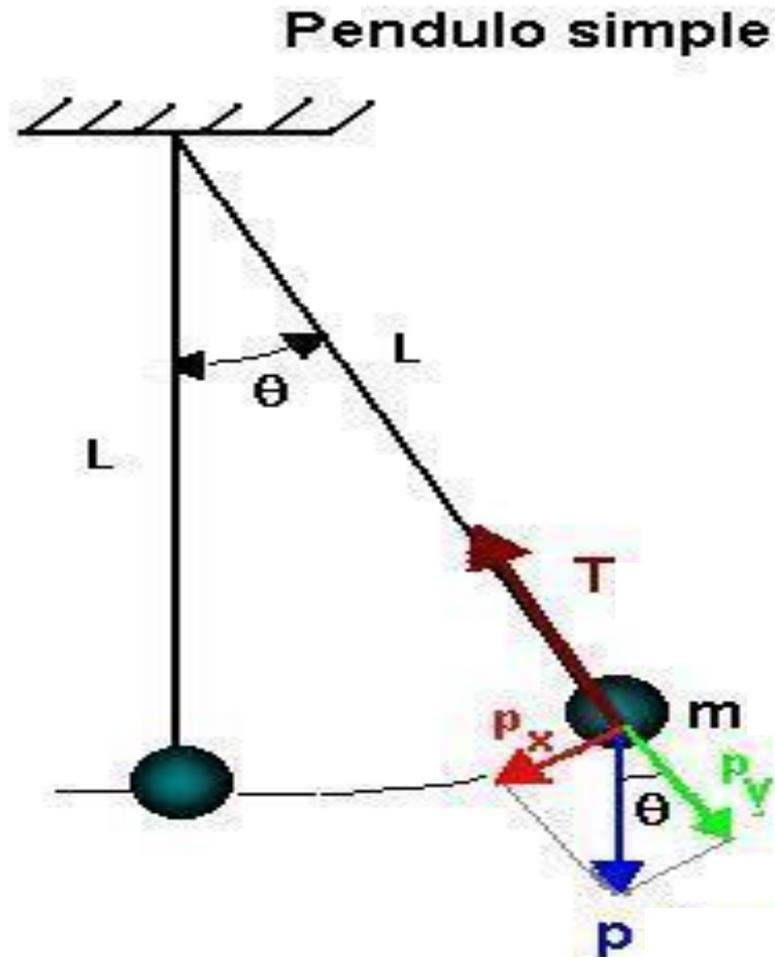
La frecuencia angular y frecuencia vienen dadas por:



$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{I}}$$

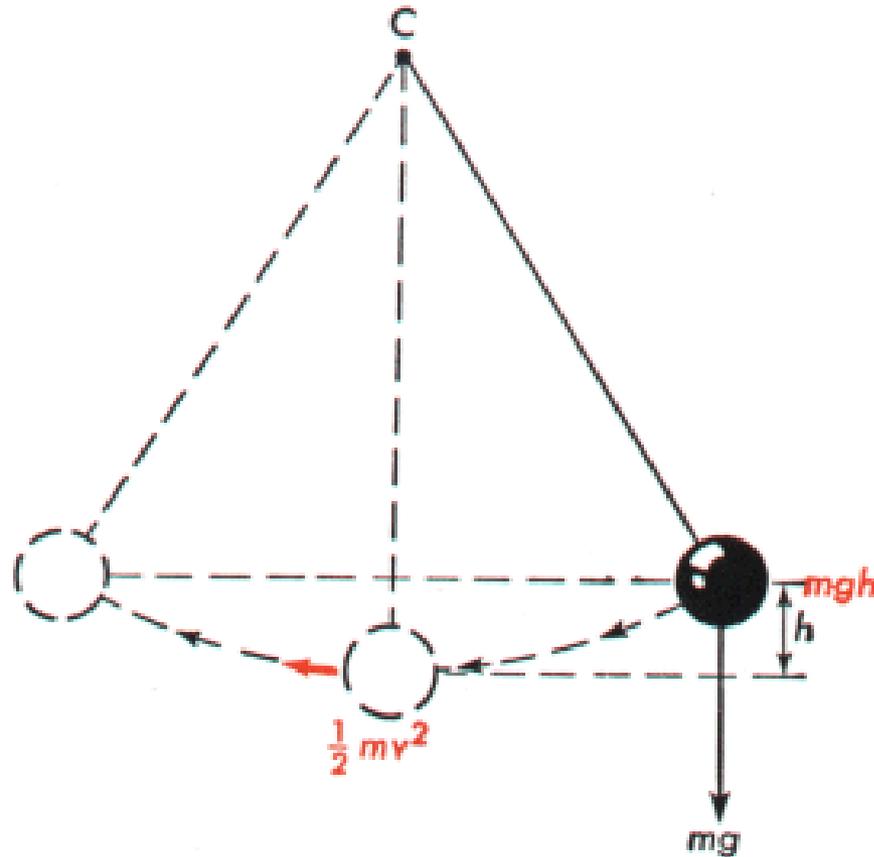
PÉNDULO SIMPLE



$$p_x = mg \sin \theta$$
$$p_y = mg \cos \theta$$

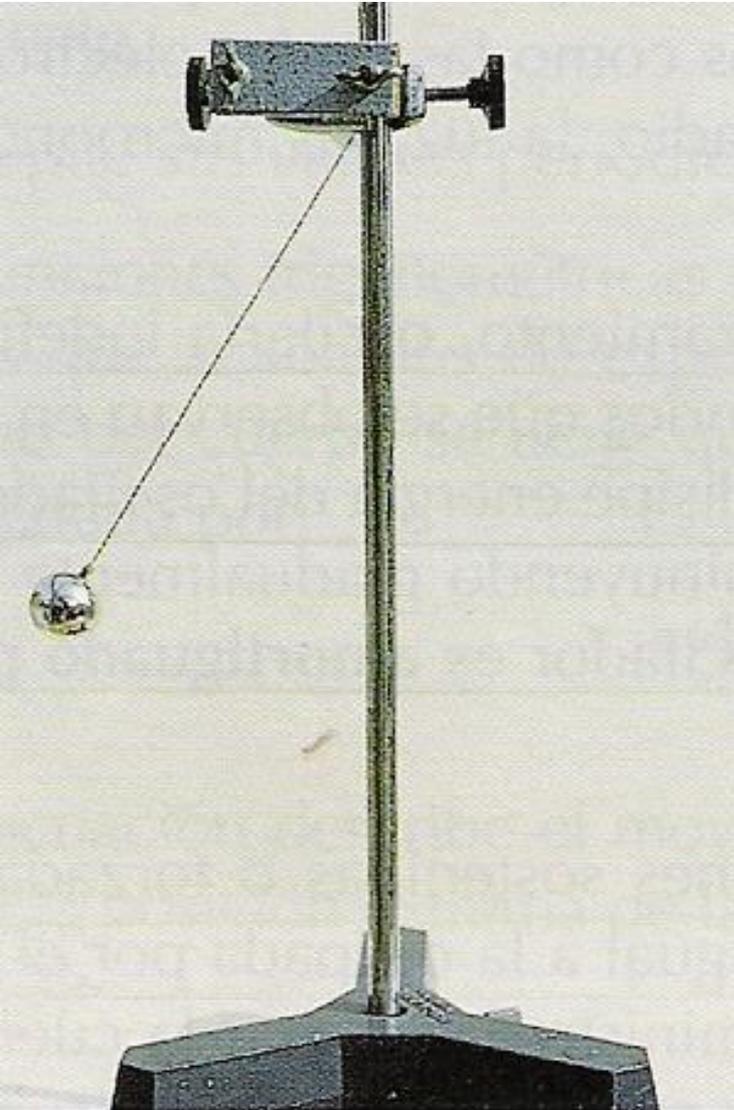
Constituido por una masa puntual suspendida de un punto fijo mediante un hilo inextensible cuya masa es despreciable.

ENERGÍA ASOCIADA AL PÉNDULO SIMPLE



Por haber ganado altura, decimos que adquiere energía potencial gravitatoria. Es decir, en el centro no tiene energía potencial y en los extremos sí. Podemos entonces, aplicar el principio de conservación de la energía y afirmar que la energía cinética del centro se ha transformado en potencial en los puntos de máxima amplitud.

ECUACIONES DEL PÉNDULO SIMPLE



$$x = A \cos (wt + \varphi) = A \cos (2pft + \varphi)$$
$$x = A \operatorname{sen}(wt + \beta) = A \operatorname{sen} (2pft + \beta)$$

Periodo del péndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{L / |g|} \rightarrow$$

PÉNDULO FÍSICO

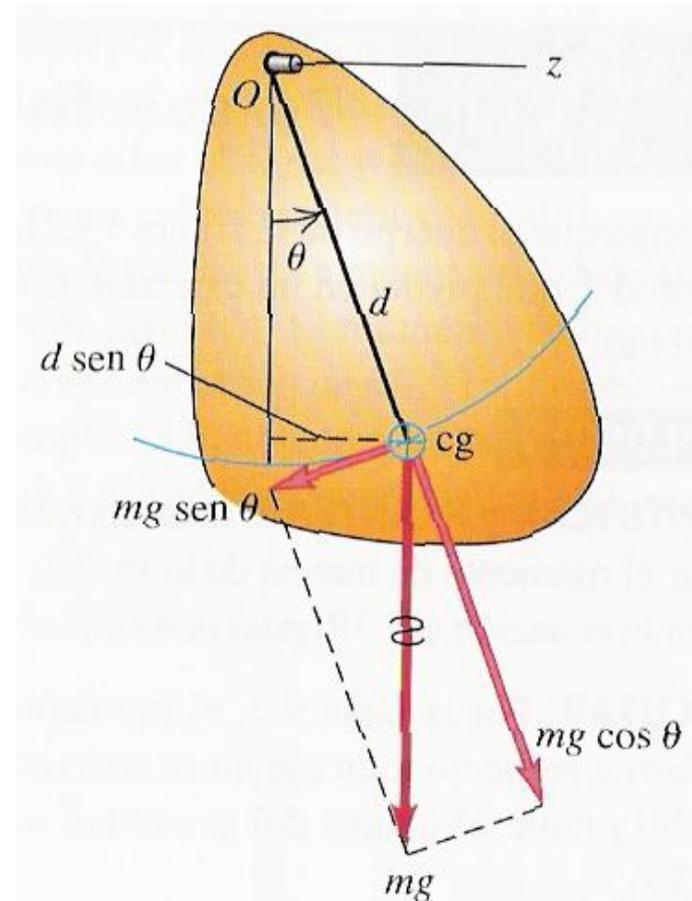
El péndulo físico oscila solamente por acción de su peso

El período del péndulo físico para pequeñas amplitudes de oscilación:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{K}} = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Al desplazarse el cuerpo, el peso (mg), causa un momento de torsión de restitución:

$$\tau = - (mg) d \text{ sen}(\theta)$$



Si se suelta el cuerpo, oscila:

→ Para ángulos pequeños, el movimiento será armónico simple. (al aproximar $\sin \theta$ con θ). Entonces:

$$\tau = - (mg d) \theta$$

Frecuencia:

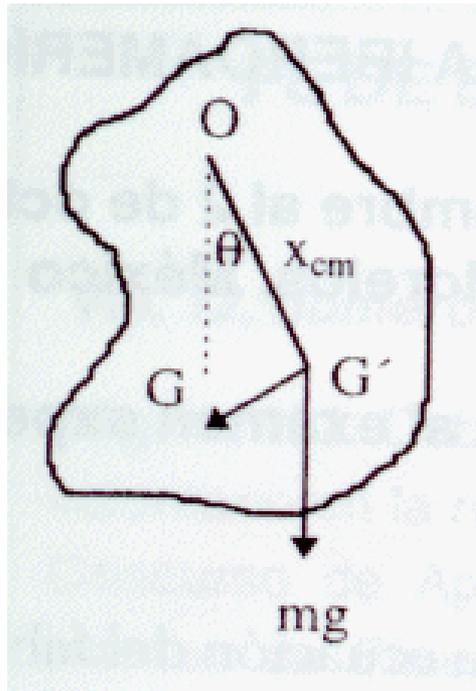
$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Momento
de inercia:

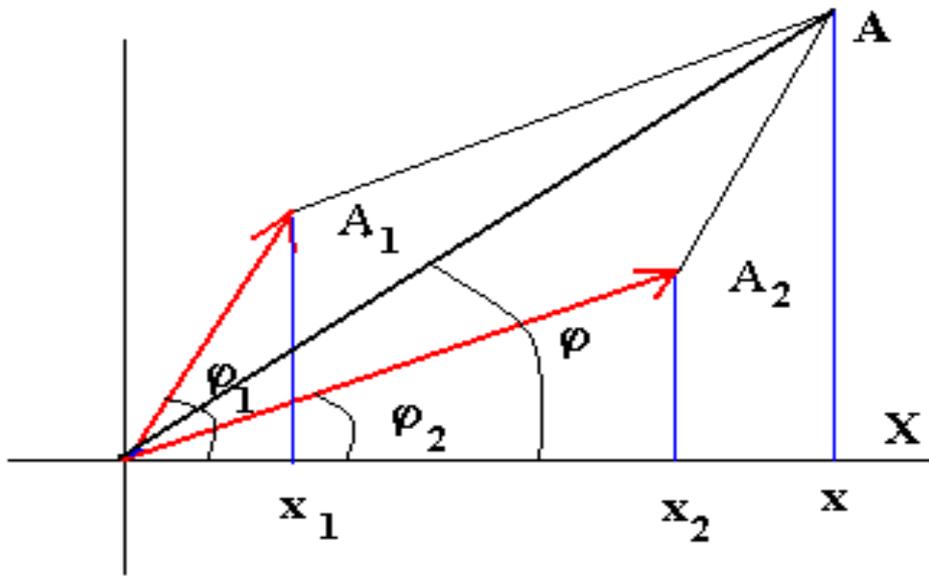
$$I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}$$



Para amplitudes mayores, el movimiento es armónico, pero no simple.

SUPERPOSICIÓN DEL MAS

La superposición tiene lugar cuando dos fuerzas perturbadoras actúan simultáneamente siendo el movimiento resultante la suma de los distintos MAS..



$$x_1(t) = A_1 \text{ sen } (\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= A_1 \text{ sen } (\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \varphi_2)$$

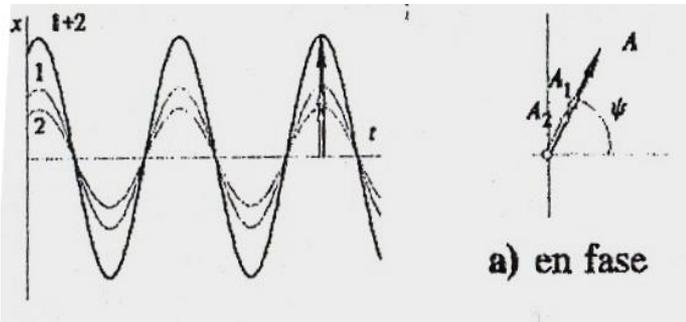
En una dimensión

FRECUENCIAS IGUALES

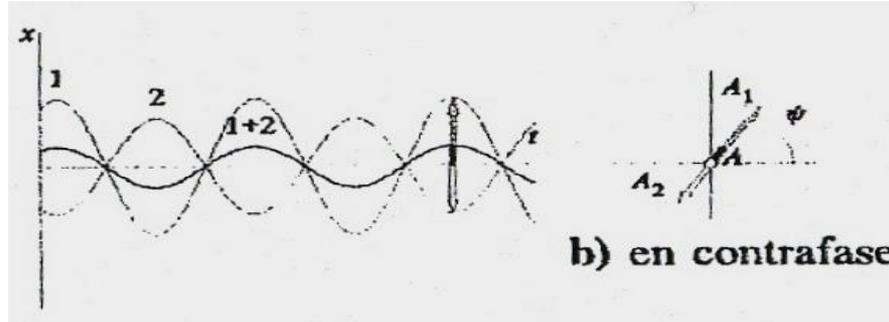
Resulta un M.A.S. de la misma frecuencia, donde:

Casos particulares

A) $y_1 = y_2 \rightarrow$ interferencia constructiva



B) $Y_1 = Y_2 \pm p \rightarrow$ interferencia destructiva



C) $Y_1 = Y_2 \pm p/2 \rightarrow$ m.a.s. en cuadratura



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos|Y_1 - Y_2|$$

$$\text{tg} Y = \frac{A_1 \text{ sen } Y_1 + A_2 \text{ sen } Y_2}{A_1 \text{ cos } Y_1 + A_2 \text{ cos } Y_2}$$

- **Superposición de dos MAS de la misma dirección y frecuencia.**

Cuando una partícula está sometida a más de una fuerza armónica se dice que existe una **interferencia o superposición** de movimientos armónicos simples. Se observan sobre la superficie del agua cuando se lanzan dos piedras, y son importantes en óptica y en acústica.

Sea una partícula sometida a dos MAS que actúan en la **misma dirección** y que tienen la **misma frecuencia**. El **desplazamiento** producido por cada MAS es

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \quad \text{La fase de } x_1 \text{ es cero}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \delta) \quad \text{La fase de } x_2 \text{ es } \delta \text{ (diferencia de fase)}$$

El **desplazamiento resultante** de la partícula viene dado por

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

y como se verá es un MAS con periodo

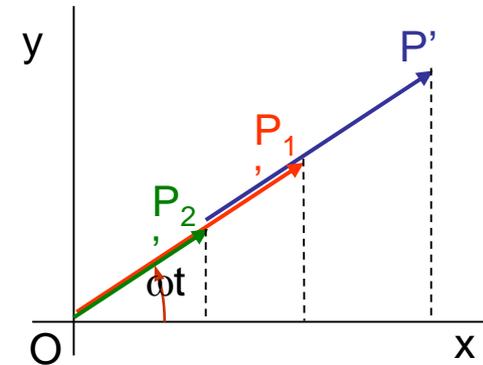
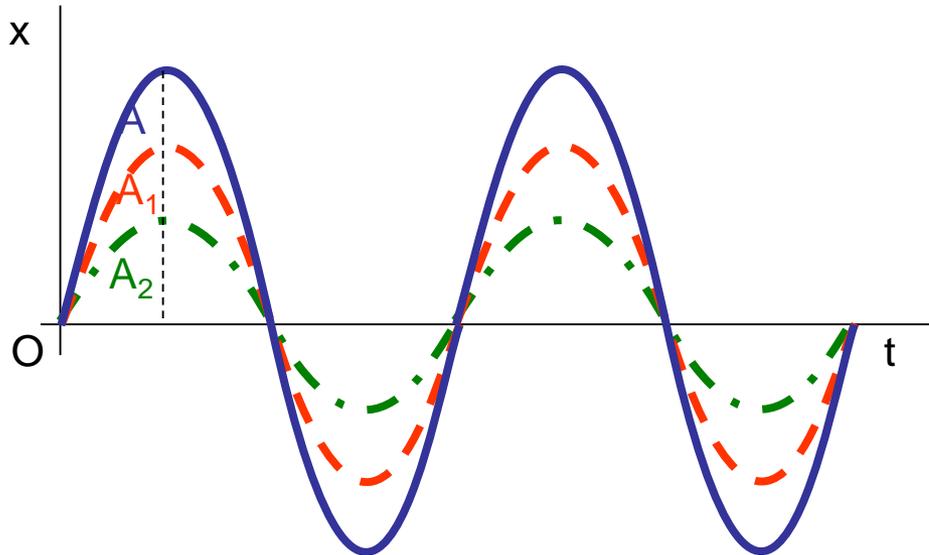
$$P = 2\pi/\omega$$

- Primer caso especial. Si $\delta = 0 \Rightarrow$ los dos movimientos están en fase. El movimiento resultante es

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos \omega t = (A_1 + A_2) \cos \omega t$$

y se trata de un MAS de la misma frecuencia angular, que tiene una amplitud que es igual a

$$A = A_1 + A_2$$



- Segundo caso especial. Si $\delta = \pi \text{ rad} \Rightarrow$ los dos movimientos están en oposición. En este caso el desplazamiento x_2 es

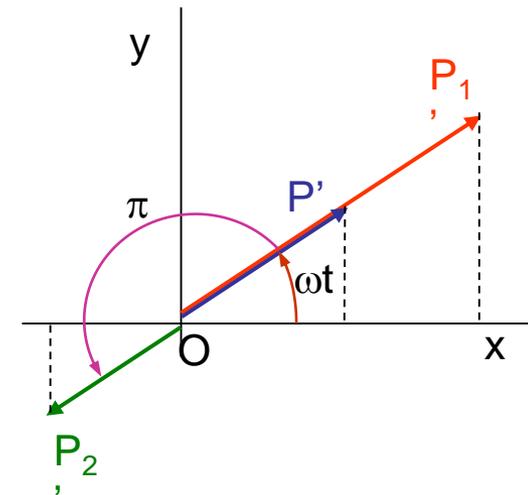
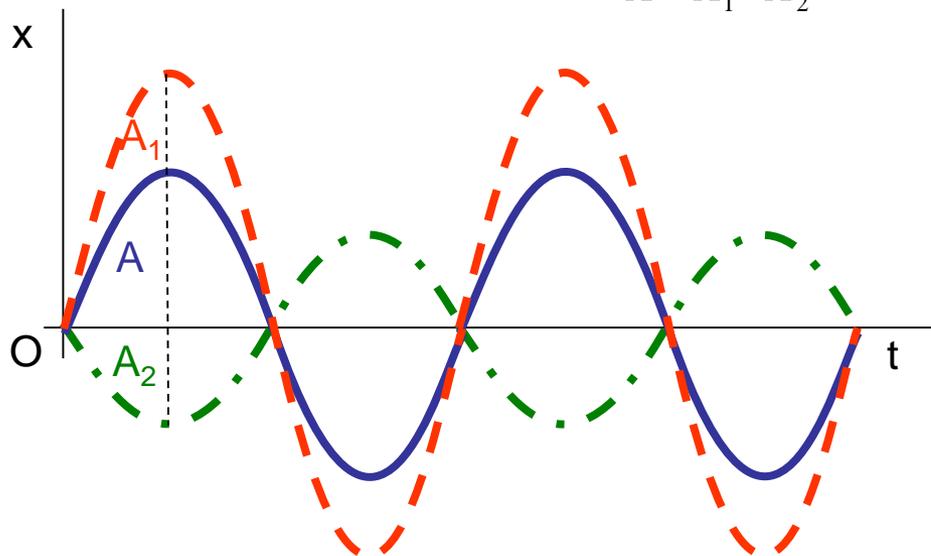
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos \omega t$$

y el movimiento resultante es

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos \omega t - A_2 \cos \omega t = (A_1 - A_2) \cos \omega t$$

y se trata de un MAS de la misma frecuencia angular, que tiene una amplitud que es igual a

$$A = A_1 - A_2$$



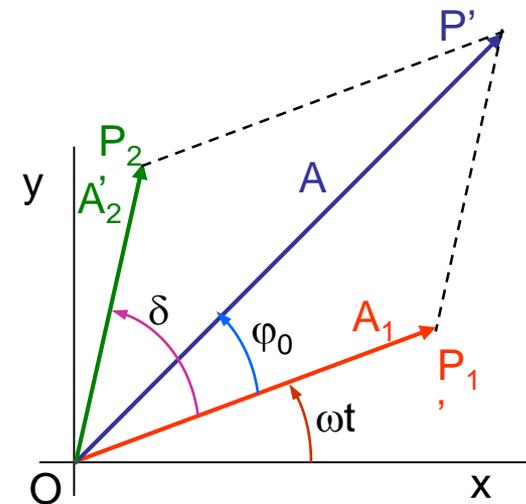
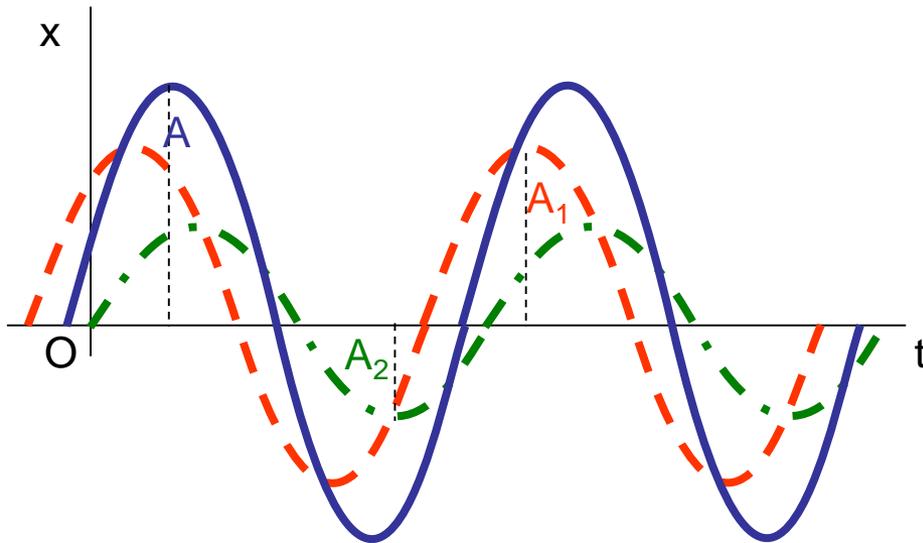
- **Caso general.** Si δ toma un valor arbitrario.

De la representación como vectores rotantes se observa que el movimiento resultante es un **MAS** de la **misma frecuencia** y una **amplitud** dada por

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$$

y cuyo **desplazamiento resultante** es

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos\omega t + A_2\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

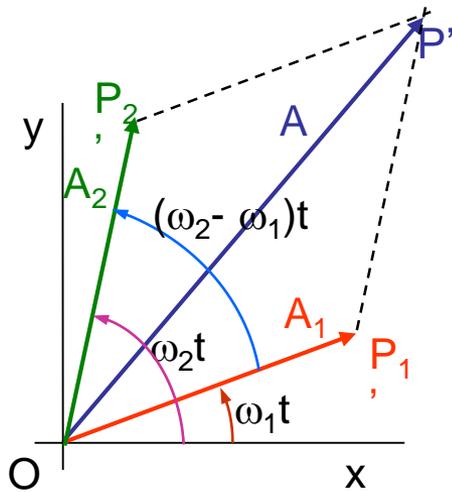


- **Superposición de dos MAS de la misma dirección pero distinta frecuencia.**

Es el tipo de interferencia que resulta cuando dos señales de radio son transmitidas con frecuencias cercanas pero no iguales.

Consideremos que los MAS que se superponen vienen dados por las ecuaciones

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t \quad \text{La fase inicial de ambos es cero por simplicidad}$$



El **ángulo** entre los vectores de rotación OP_1' y OP_2' es

$$\omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t \quad \text{No es constante}$$

Por lo que el vector OP' no tiene longitud constante y la **amplitud del movimiento resultante es**

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$

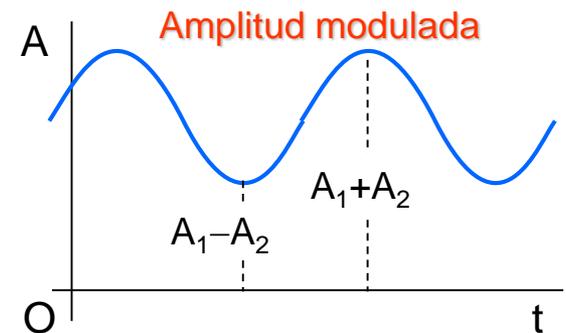
Esta **amplitud varía u oscila** entre los valores

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{si } (\omega_2 - \omega_1)t = 2n\pi$$

$$A = A_1 - A_2 \quad \text{si } (\omega_2 - \omega_1)t = 2n\pi + \pi$$

Por tanto el movimiento resultante en este caso

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{No es un MAS}$$



- **Caso especial** \Rightarrow cuando $A_1=A_2$

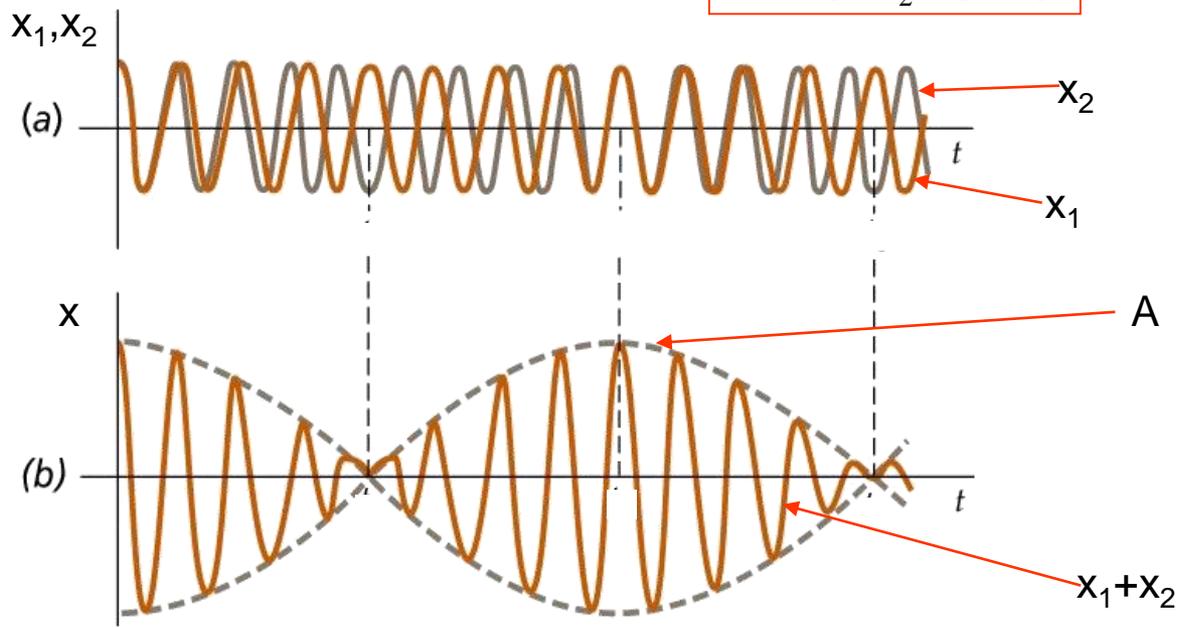
Entonces la amplitud del movimiento resultante es

$$A = \sqrt{2A_1^2 + 2A_1^2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t} = A_1 \sqrt{2[1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]}$$

Como $1 + \cos\theta = 2\cos^2 \frac{1}{2}\theta$

$$A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$$

Que oscila entre 0 y $2A_1$



- En un **MAS** la **amplitud** y la **energía** de la partícula que oscila **se mantienen constante**.



- Sin embargo en un **sistema real**, como un péndulo o resorte, se observa que la **amplitud de la vibración disminuye con el tiempo**, ya que hay una **pérdida de energía**. Se dice que la **oscilación está amortiguada**.
- Para el análisis dinámico del oscilador dinámico, se puede suponer que además de la fuerza elástica, también actúa una **fuerza disipativa que se opone a la velocidad**, de la forma

$$F_d = -bv \implies \mathbf{b}$$
 es una constante que indica la intensidad de la fuerza disipativa

- Aplicando la **segunda ley de Newton** se tiene entonces que

$$\underbrace{-kx}_{F_{el}} - \underbrace{bv}_{F_d} = ma \implies -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \implies m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

dividiendo por **m**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

donde $\gamma = b/2m$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Frecuencia natural

Ecuación básica de un oscilador amortiguado

- La **frecuencia natural** es aquella que tendría el oscilador si la fuerza disipativa no estuviera presente.

1.- Si la fuerza disipativa es relativamente pequeña (b pequeño y $\gamma < \omega_0$).

- El desplazamiento está descrito por

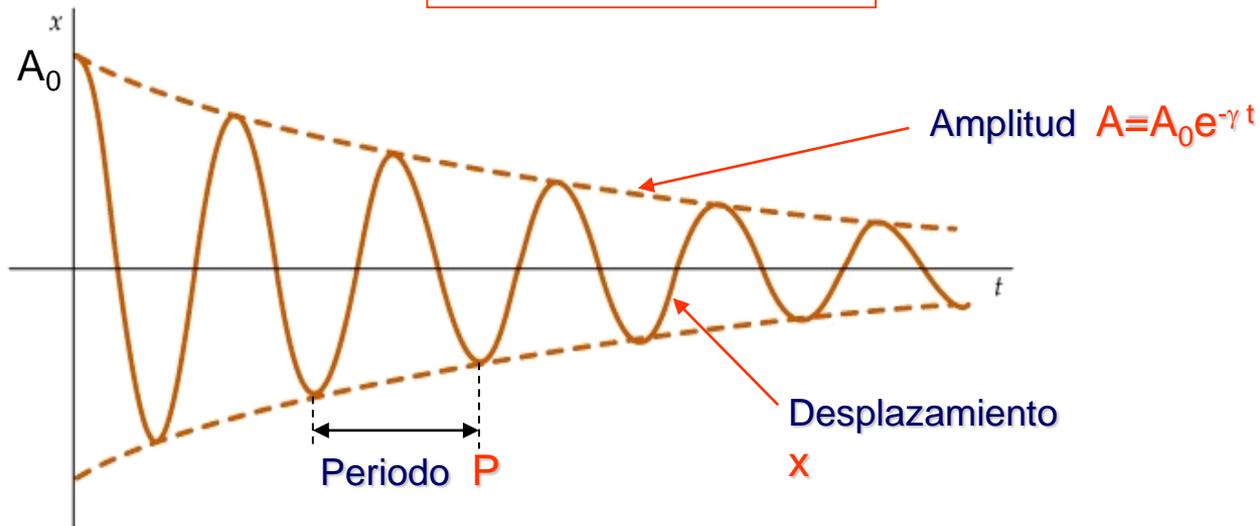
$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

observándose que la **amplitud no es constante** (disminuye exponencialmente con t)

- La **frecuencia** viene dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m}}$$

Se observa que $\omega < \omega_0$



- Al ser la energía proporcional a la amplitud al cuadrado, también disminuye con t exponencialmente

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A_0 e^{-\gamma t})^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} \quad \xrightarrow{\text{Llamand } E_0 = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2} \quad E = E_0 e^{-2\gamma t}$$

- Se define el tiempo de relajación como

$$\tau = \frac{1}{2\gamma} = \frac{m}{b}$$

Es el tiempo necesario para que la energía se reduzca un número e de veces su valor original

y la energía se puede expresar como $E = E_0 e^{-t/\tau}$

- Se define el factor de calidad como

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$

Está relacionado con la pérdida relativa de energía por ciclo.

se puede demostrar que el factor de calidad es igual a

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}}$$

Es inversamente proporcional a la pérdida de energía relativa por ciclo.

2.- Si la fuerza disipativa alcanza un valor crítico ($\gamma = \omega_0$ y $b = 2m \omega_0$).

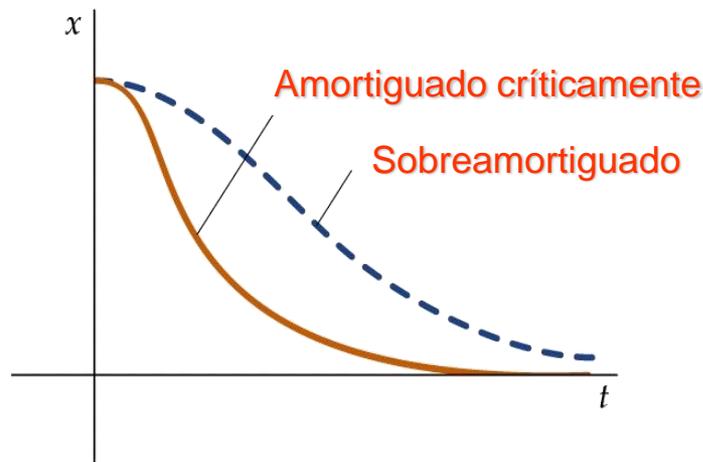
- En este caso la frecuencia del movimiento será

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 0 \quad \text{No es un movimiento oscilatorio.}$$

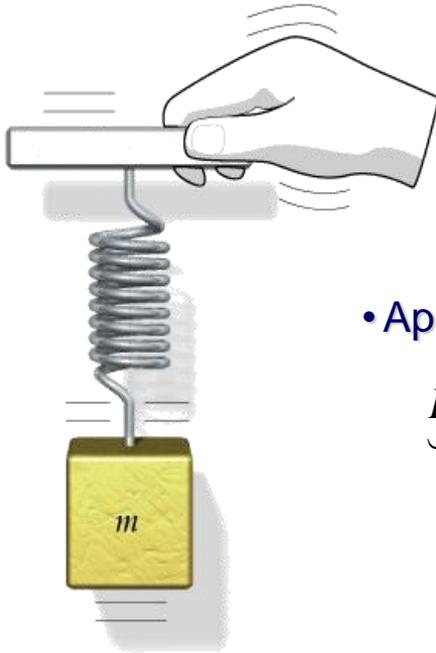
El sistema al ser desplazado de su posición de equilibrio vuelve a ésta **sin oscilar**. Se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**.

3.- Si la fuerza disipativa supera este valor crítico ($\gamma > \omega_0$ y $b > 2m \omega_0$).

- En este caso **tampoco hay oscilación**, y el sistema al desplazarse vuelve a la posición de equilibrio, pero **más lentamente que con amortiguación crítica**. Se dice que el sistema está **sobreamortiguado**.



- Un oscilador forzado dejará de moverse transcurrido un tiempo. Podemos mantener una partícula oscilando con amplitud constante aplicando una **fuerza externa** que varíe con el tiempo de forma periódica. En este caso el movimiento resultante se dice que es una **oscilación forzada**.



- Para el análisis dinámico del oscilador forzado, se puede suponer que además de la fuerza elástica y la fuerza disipativa, también actúa una **fuerza externa**, de la forma

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega_f t \implies \begin{matrix} F_0 & \text{Amplitud de la fuerza externa} \\ \omega_f & \text{Frecuencia de la fuerza externa} \end{matrix}$$

- Aplicando la **segunda ley de Newton** se tiene entonces que

$$\underbrace{F_0 \cos \omega_f t}_{F_{ext}} - \underbrace{kx}_{F_{el}} - \underbrace{bv}_{F_d} = ma \implies m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega_f t$$

dividiendo por m

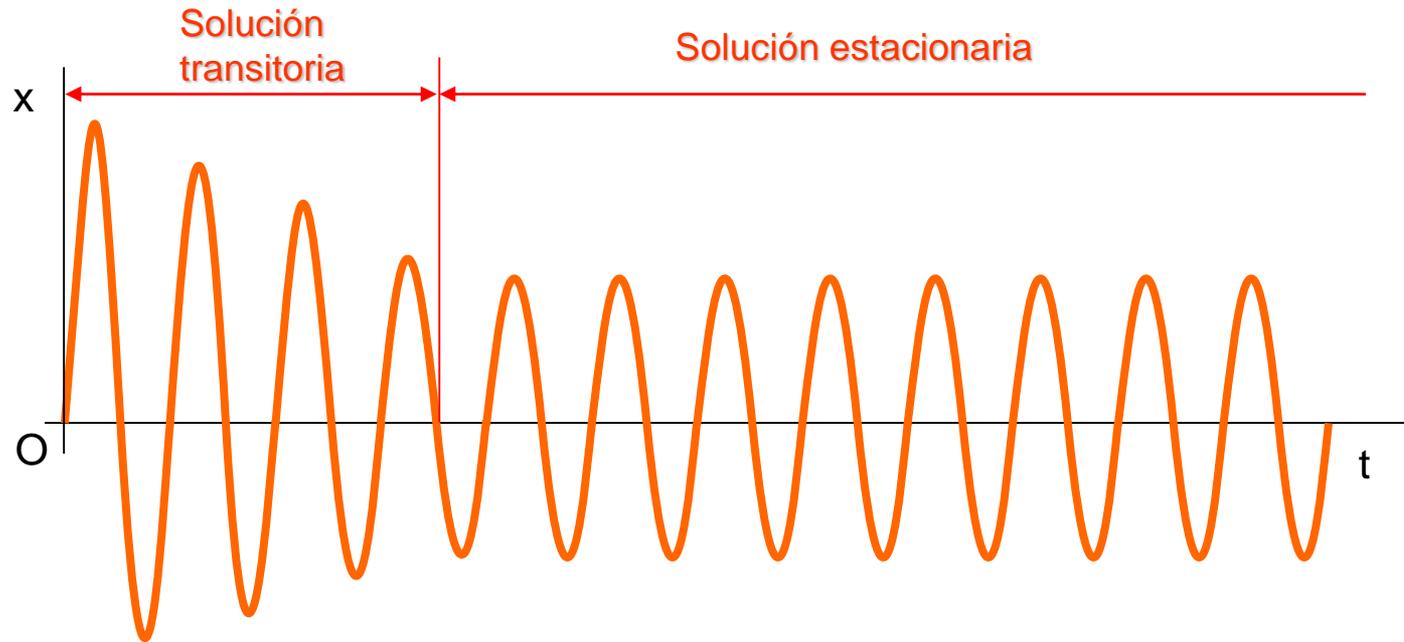
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

Ecuación básica de un oscilador forzado

donde $\gamma = b/2m$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Frecuencia natural



- La solución de esta ecuación consta de dos partes, la **solución transitoria** y la **solución estacionaria**. La **parte transitoria** es idéntica a la de un oscilador amortiguado y transcurrido cierto tiempo se hace despreciable (disminuye exponencialmente con el tiempo). Así solo queda la **parte estacionaria** que puede expresarse como

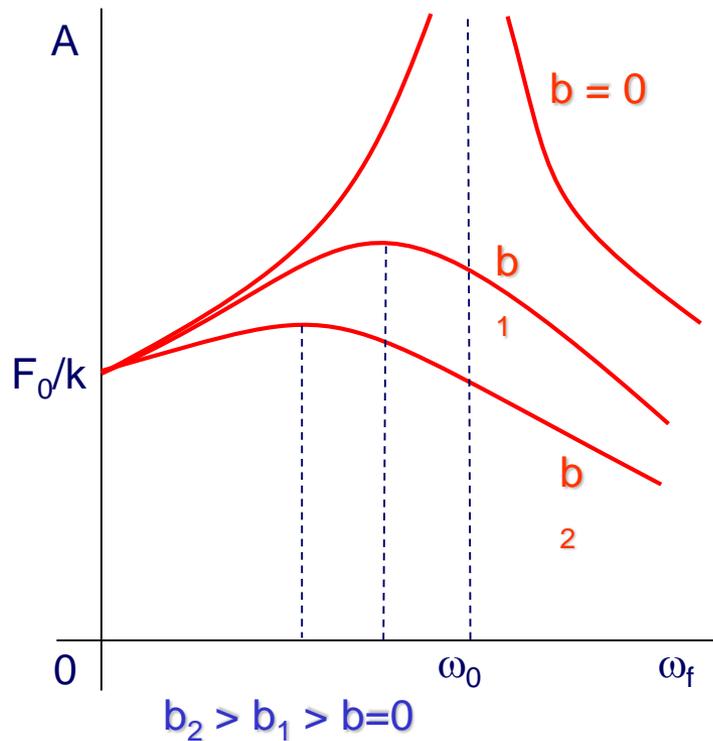
$$x = A \text{sen}(\omega_f t - \delta)$$

La partícula oscila con la frecuencia de la fuerza externa

donde la **amplitud** y la **fase inicial de la oscilación forzada** vienen dadas por

$$A = \frac{F_0/\omega_f}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + b^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f^2 - m\omega_0^2)^2 + b^2\omega_f^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{2\gamma\omega_f}$$



- La **amplitud es máxima** cuando

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Resonancia en amplitud

- La **velocidad** de un oscilador forzado es

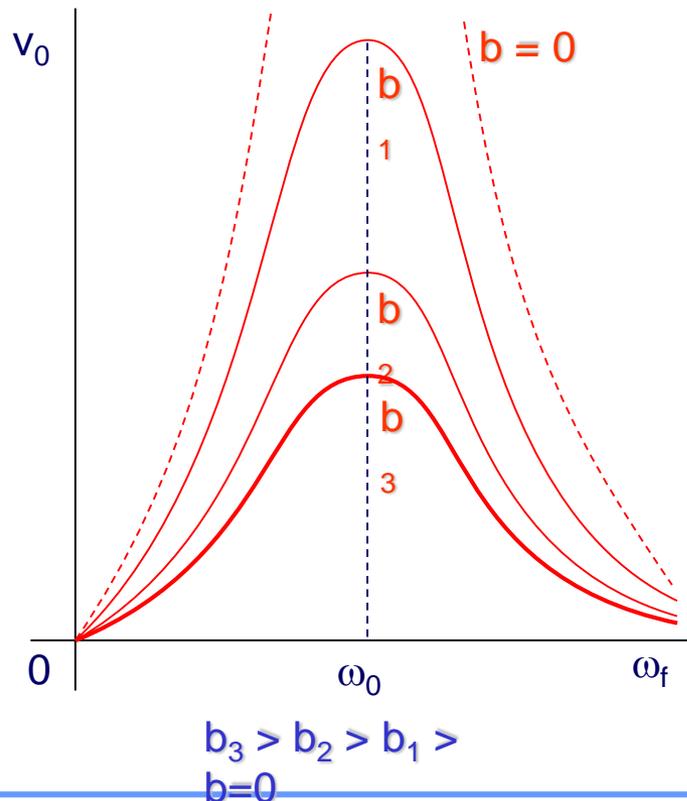
$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \delta)$$

- La **amplitud de la velocidad** es

$$v_0 = \omega_f A = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - k/\omega_f)^2 + b^2}}$$

- La **amplitud de la velocidad** es máxima, y por tanto la energía cinética del oscilador también es máxima, cuando

$$\omega_f = \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \text{Resonancia en energía}$$



- Cuando hay **resonancia en energía** se tiene que

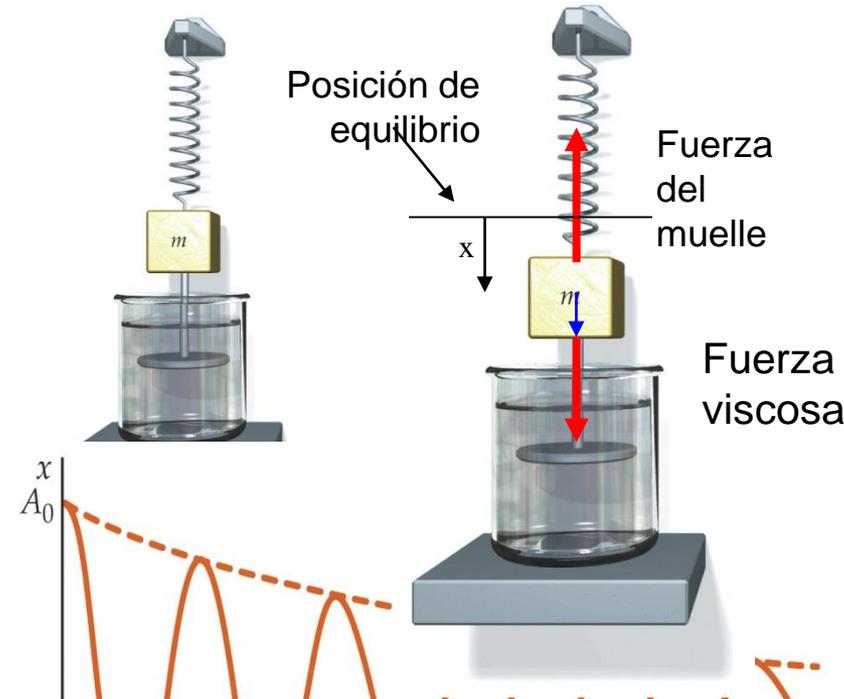
$$\tan \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{2\gamma\omega_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0$$

- En **resonancia**, la **velocidad** está en fase con la **fuerza aplicada**. Como la **potencia transmitida al oscilador** por la fuerza aplicada es

$$P = Fv$$

esta cantidad **siempre es positiva** cuando la **fuerza y la velocidad están en fase**, y es por tanto la condición más favorable para la transferencia de energía al oscilador.

Oscilaciones amortiguadas



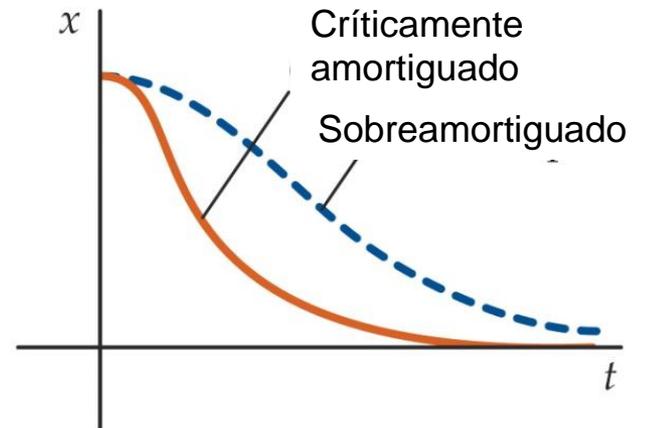
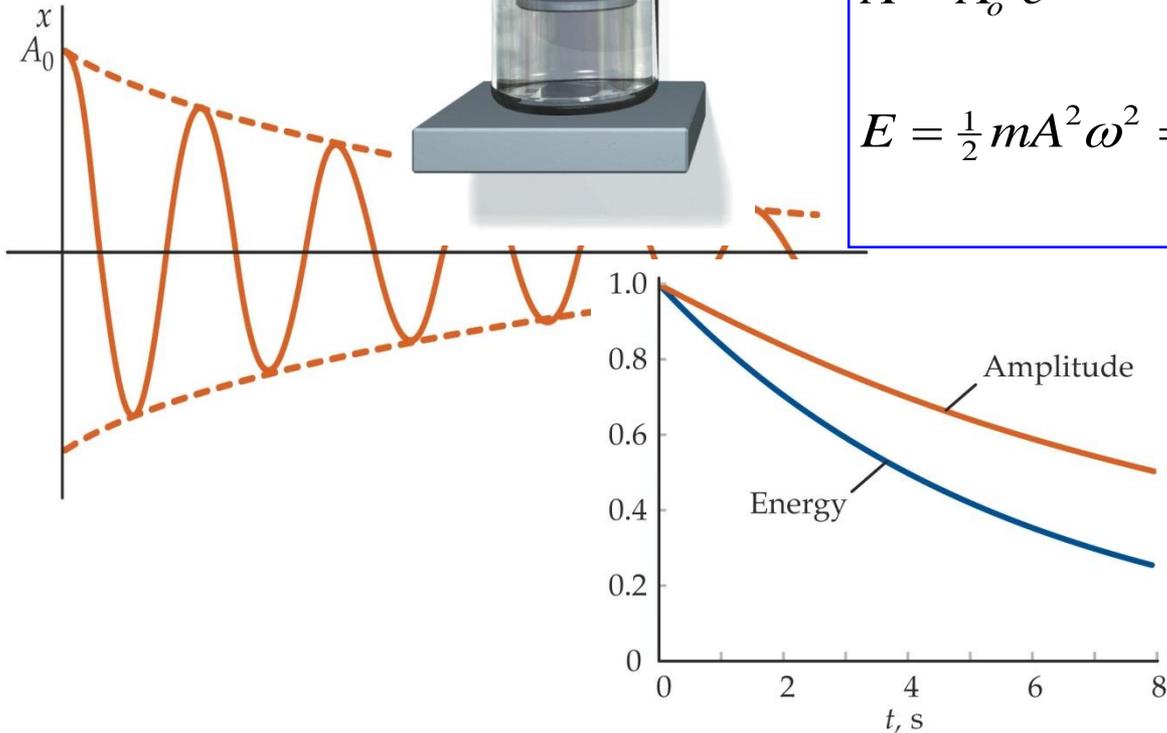
$$\sum F = -k x + b v = m a$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - b \frac{dx}{dt} + k x = 0$$

$$x = A_o e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \delta)$$

$$A = A_o e^{-(b/2m)t} \quad \text{and} \quad \omega' = \omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_o}\right)^2}$$

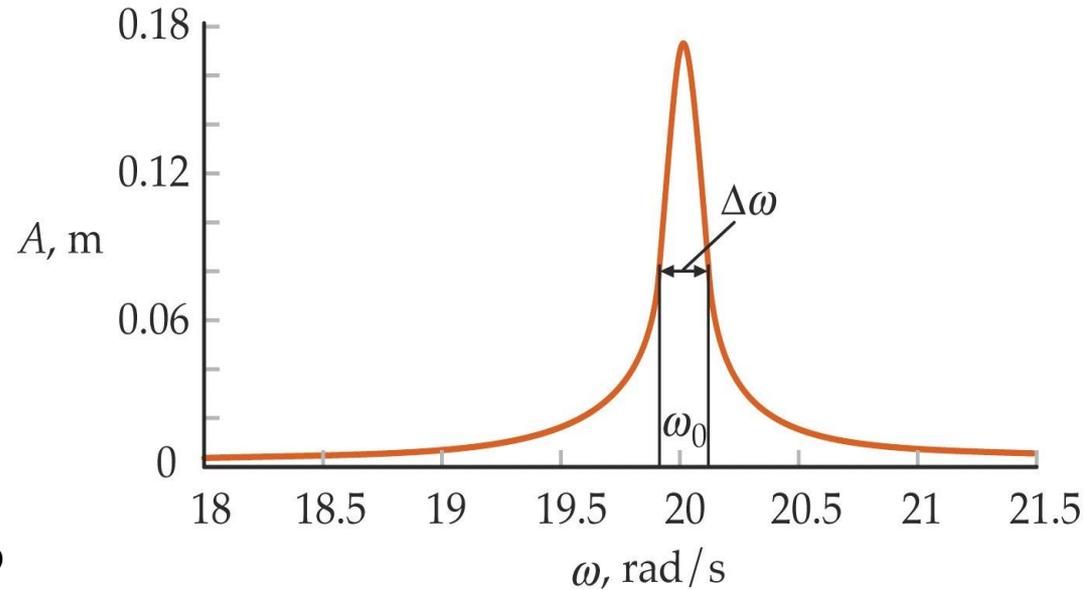
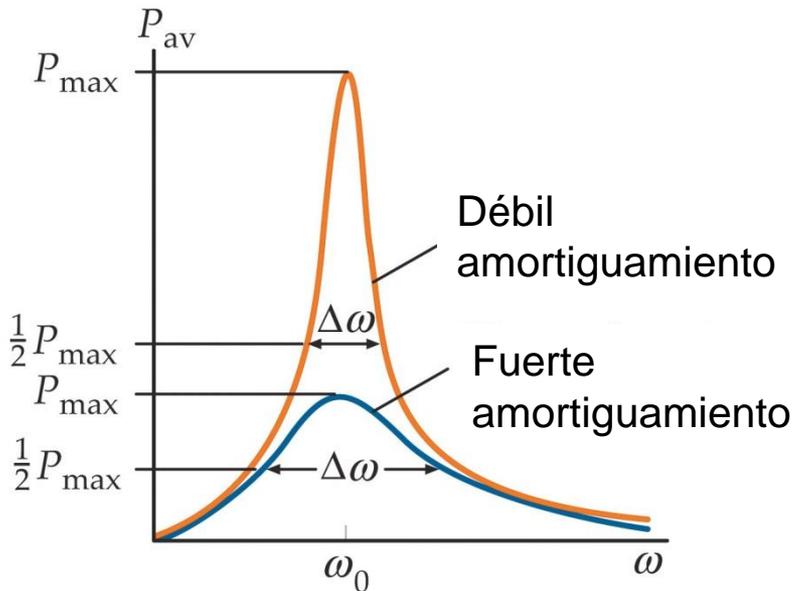
$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m A_o^2 e^{-(b/m)t} \omega^2 = E_o e^{-(b/m)t}$$



Oscilaciones forzadas y resonancia



Cuando actúan fuerzas externas periódicas, adicionales a fuerzas restauradoras y amortiguación



ONDAS

2. Movimiento ondulatorio

Onda: propagación de una perturbación a través de un medio determinado.

Perturbación: cambio o magnitud nueva que se introduce en el medio.

Tipos de ondas

- **Mecánicas:** Necesitan un medio material para propagarse. No se pueden propagar por el vacío (sonido, ondas sísmicas, ondas en cuerdas y muelles).
- **Electromagnéticas:** No necesitan de un medio material para propagarse, pueden hacerlo por el vacío, aunque también pueden propagarse por medios materiales (luz, ondas de radio, microondas, UV, RX).

Magnitudes de una onda

Dependientes de la fuente	Símbolo	Unidad S.I.
Amplitud	A	m
Frecuencia angular	ω	rad/s
Fase	φ	rad
Fase inicial	φ_0	rad
Periodo	T	s
Frecuencia	ν	Hz
Dependientes del medio	Símbolo	Unidad S.I.
Velocidad de propagación	v	m/s
Longitud de onda	λ	m
Número de ondas	k	rad/m

Ondas armónicas

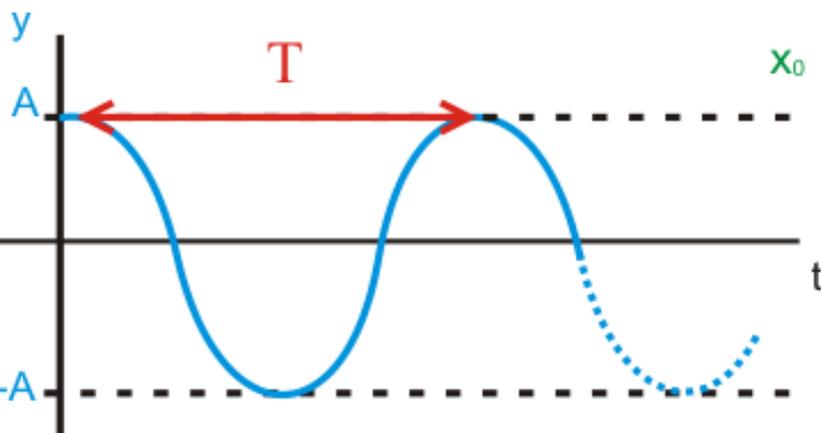
Su perturbación puede estudiarse como un movimiento armónico simple. Cualquier onda puede estudiarse como suma de ondas armónicas.

Elongación

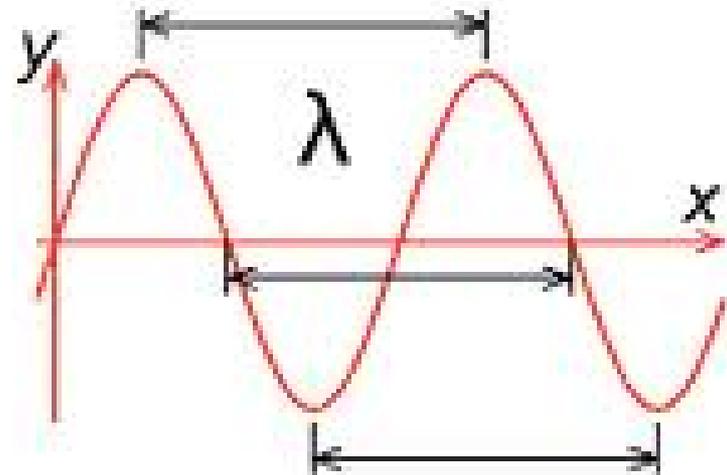
$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

$\omega t - kx$: avanza en el sentido positivo de x .

$\omega t + kx$: avanza en el sentido negativo de x .



T = periodo



Relación entre magnitudes de una onda armónica

Frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Frecuencia

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

Velocidad de propagación

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$v = \lambda\nu$$

Número de ondas

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Velocidad y aceleración de los puntos de la onda

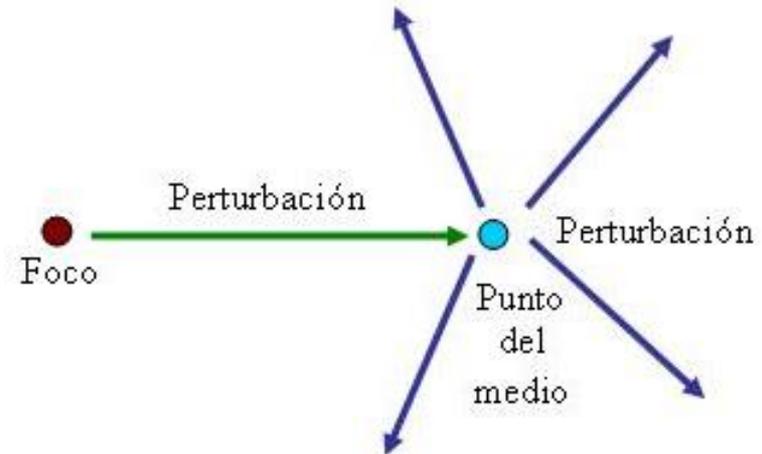
$$v_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t \pm kx + \varphi_0) \rightarrow v_{y,max} = \pm A\omega$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t \pm kx + \varphi_0) \rightarrow a_{y,max} = \pm A\omega^2$$

3. Propagación de ondas

Principio de HUYGENS

“Al propagarse una onda por un medio determinado, cada punto del medio se comporta como un foco puntual de nuevas ondas, idénticas a la que se propaga. El frente de onda es la línea envolvente (superposición) de todos los frentes de onda secundarios”



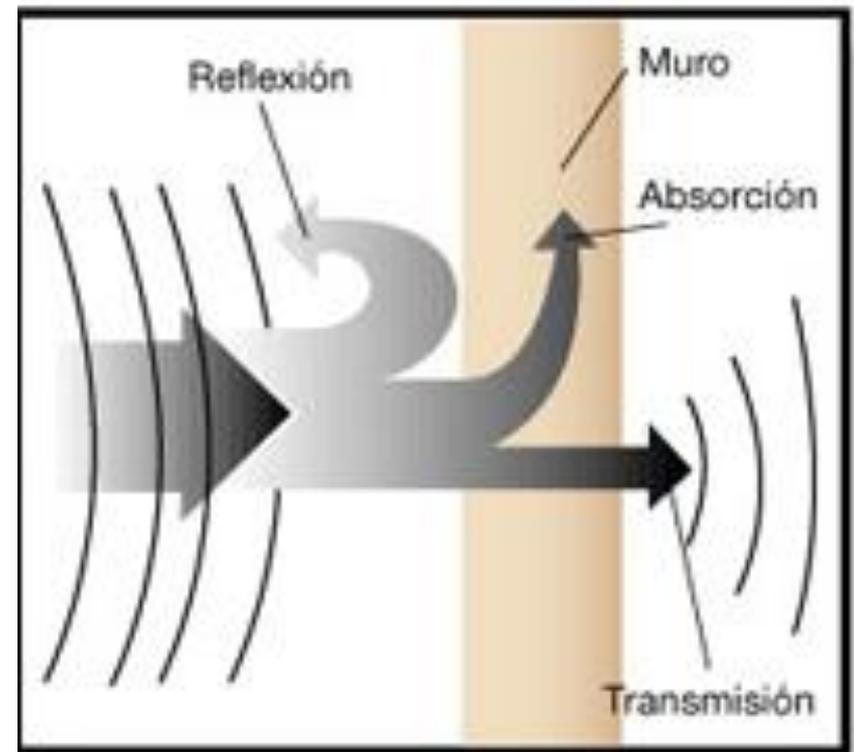
Frente de onda: Línea o superficie formada por todos los puntos del medio que tienen la misma fase (el mismo valor de la perturbación) en un instante determinado.

Fenómenos ondulatorios en la frontera entre 2 medios

Al llegar a la superficie que separa ambos medios, pueden ocurrir tres fenómenos distintos, incluso simultáneamente.

Absorción

Las partículas del medio de separación absorben parte de la energía que transporta la onda. Se puede dar el caso de que se absorba toda la energía, desapareciendo totalmente la onda.

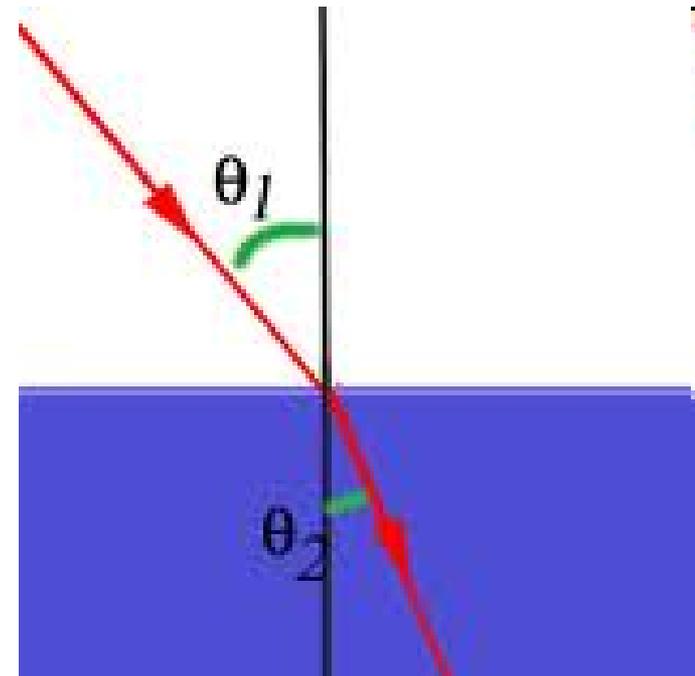


Refracción

- Los puntos de la frontera transmiten la vibración y dan lugar a la **onda refractada** que se propaga por el nuevo medio.
- La **frecuencia** de la onda es la misma, pero v , k y λ varían por tratarse de un nuevo medio.
- La **amplitud** es menor ya que la energía debe repartirse entre los tres procesos que pueden ocurrir.
- La **dirección** en la que se propaga la nueva onda refractada también es diferente.

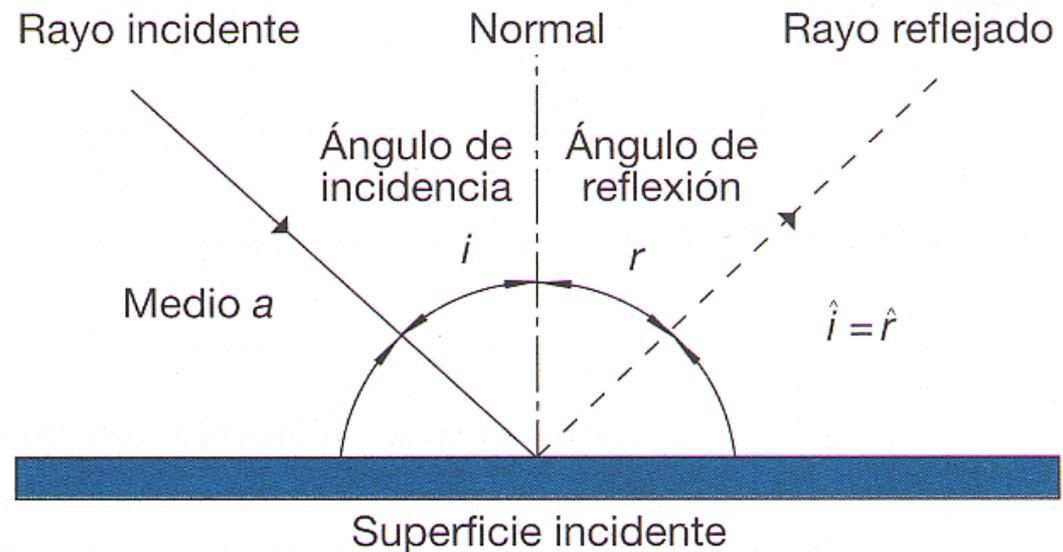
Ley de SNELL

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \text{cte}$$



Reflexión

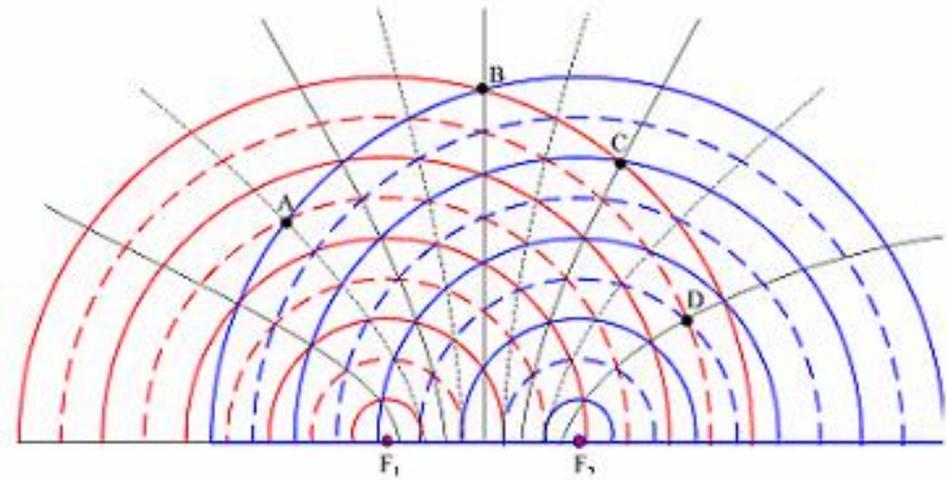
- Los puntos de la frontera también generan una onda que se vuelve a propagar por el medio inicial (**onda reflejada**).
- La onda reflejada tiene **idénticas características** que la onda incidente, salvo menor amplitud y distinta dirección.
- La dirección de la onda reflejada forma el **mismo ángulo** con la normal que la onda incidente.



Superposición de ondas: Interferencias

Dos o más ondas procedentes de focos diferentes se propagan por una misma región del espacio. Los puntos del medio se ven afectados por las perturbaciones de ambas ondas, sumándose los efectos (**principio de superposición**).

Los efectos son apreciables cuando las ondas que se superponen tienen amplitudes parecidas y, sobre todo, cuando tienen la misma longitud de onda.

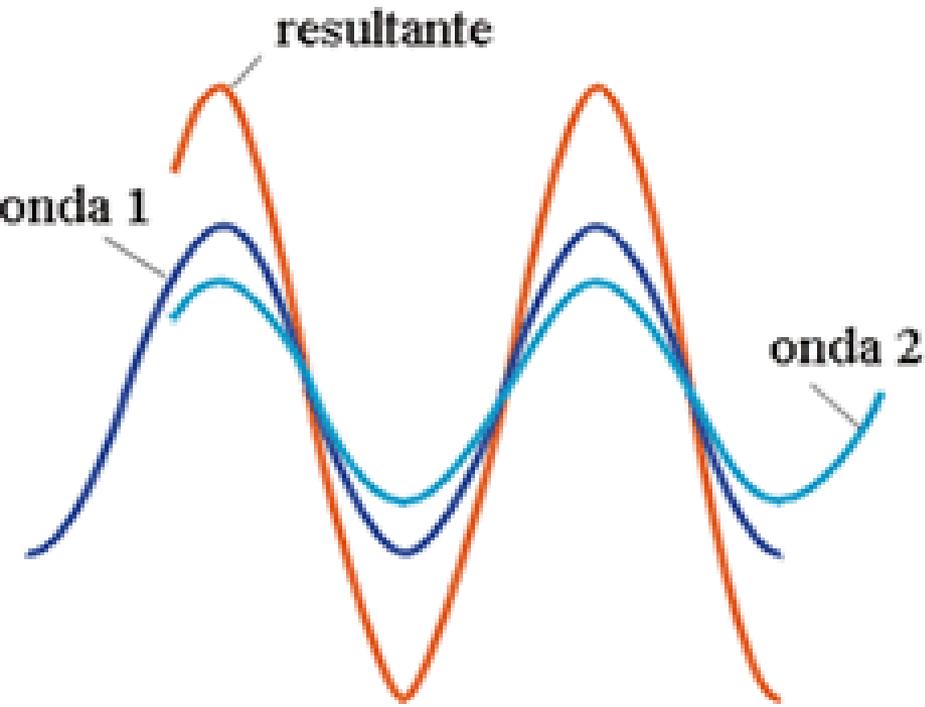


Interferencia constructiva

(Ondas en fase)

$$\Delta\varphi = 2n\pi \rightarrow \Delta x = n\lambda$$

$$A = A_1 + A_2$$

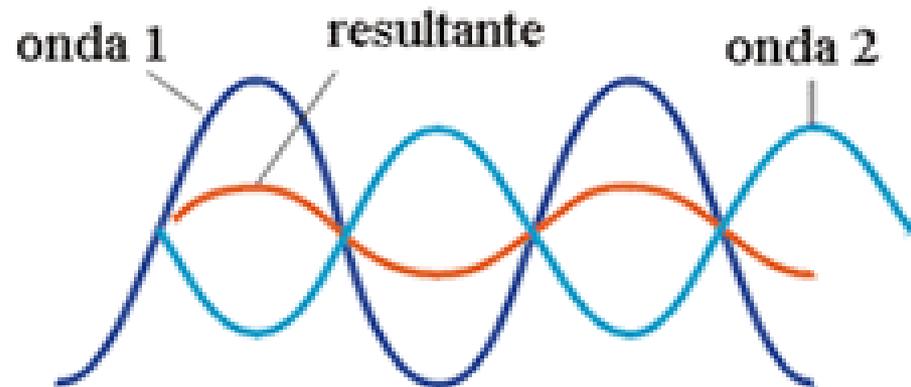


Interferencia destructiva

(Ondas en oposición de fase)

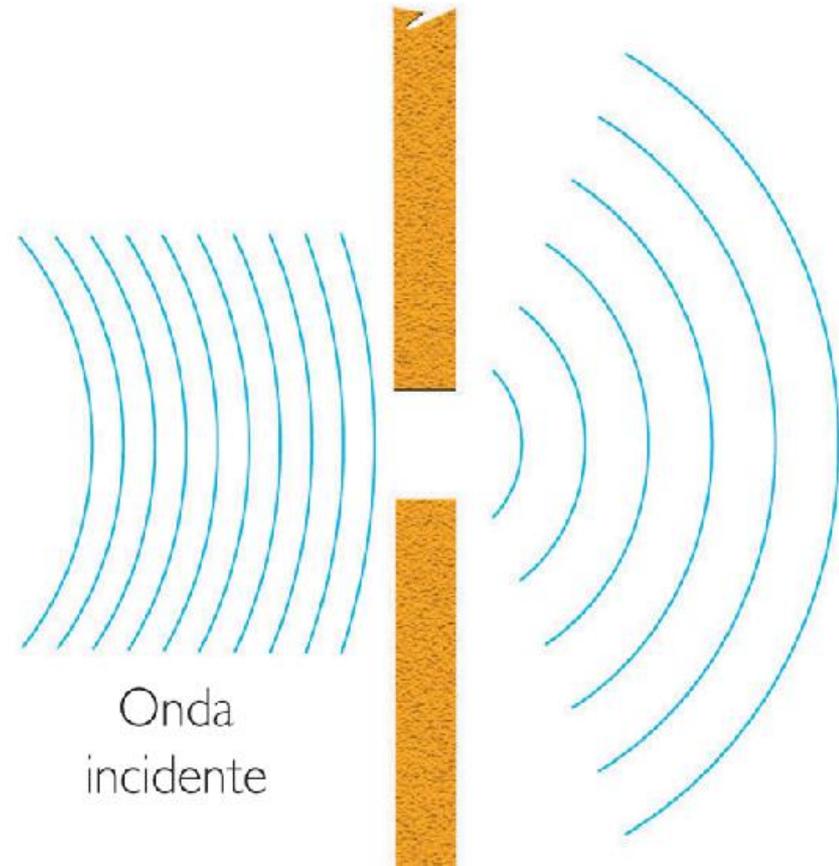
$$\Delta\varphi = (2n+1)\pi \rightarrow \Delta x = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$A = |A_1 - A_2|$$



Difracción

- Cambio de la dirección de propagación de la onda al encontrarse con un obstáculo (cuerpo sólido u orificio).
- Aunque ocurre siempre, sólo es apreciable cuando el obstáculo es de tamaño similar a la λ de la onda que se propaga.
- En el obstáculo el número de puntos que vibran es reducido, y puede considerarse prácticamente como un foco puntual (Principio de Huygens).



Ondas estacionarias

Superposición de dos ondas armónicas totalmente idénticas pero de sentido contrario.

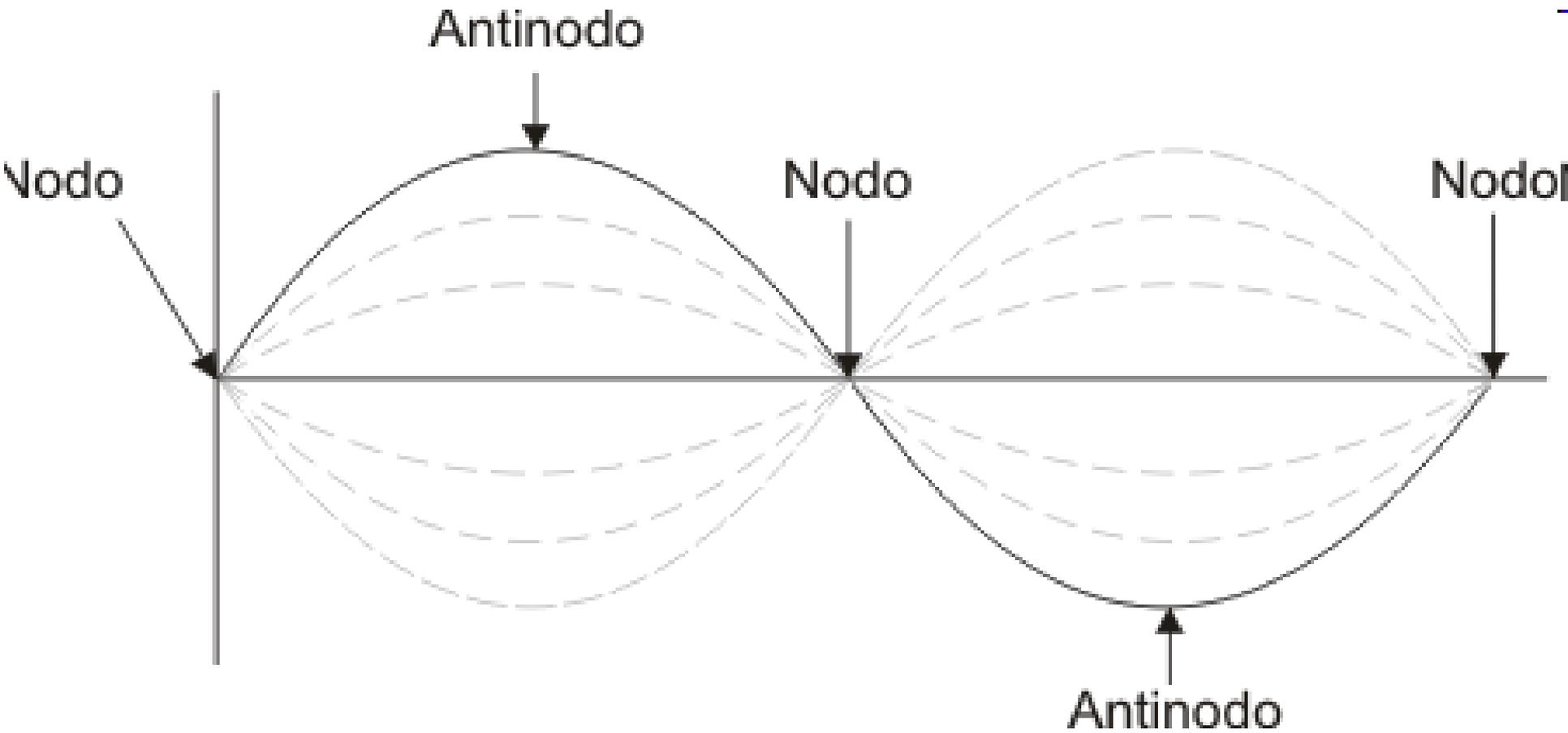
No es un movimiento ondulatorio pues no existe propagación de energía ya que la velocidad de propagación total es nula.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \cdot \text{sen}(\omega t - kx) \\ y_2 &= A \cdot \text{sen}(\omega t + kx) \end{aligned} \right\} \boxed{y = 2A \cdot \cos(kx) \text{sen}(\omega t)}$$

Las partículas describen M.A.S.

$$\boxed{y = A(x) \cdot \text{sen}(\omega t)} \rightarrow \boxed{A(x) = 2A \cdot \cos(kx)} \rightarrow \boxed{A_{max} = \pm 2A}$$

Puntos singulares de una onda estacionaria



Puntos singulares de una onda estacionaria

Nodos

$$\boxed{A(x) = 0} \rightarrow \cos(kx) = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{x = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}} \rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$$

Antinodos o vientres

$$\boxed{A(x) = \pm 2A} \rightarrow \cos(kx) = \pm 1 \rightarrow$$

$$\boxed{x = n \cdot \frac{\lambda}{2}} \rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$$

Armónicos de una onda estacionaria

Si los extremos de la onda estacionaria son fijos, no todos los valores para λ son válidos, sino que debe cumplir una condición que haga a L (longitud de la cuerda) un nodo.

La frecuencia de vibración está *cuantizada*.

$$x_{\text{nodos}} = n \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$$

$$\boxed{v = n \cdot \frac{v}{2L}}$$

Las diferentes frecuencias se denominan **armónicos**.

$$\boxed{n^{\circ} \text{ nodos} = n + 1}$$

$$\boxed{n^{\circ} \text{ vientres} = n}$$

