Apuntes complementarios

Definición alternativa de la divergencia y del rotor

En el cálculo vectorial se encuentra definida la integral de un campo vectorial sobre una superficie cerrada o abierta. Esta integral tiene dos variantes:

1)

$$\oint_S \boldsymbol{A} . d\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{A}$ representa al campo vectorial que atraviesa a la superficie total S y $d\boldsymbol{S}$ es el vector asociado a la elemento diferencial de superficie dS.

Aquí se ve que la integral es sobre el producto escalar entre los vectores $\boldsymbol{A}$ y $d\boldsymbol{S}$.

2)

En este caso la integral se hace sobre el producto vectorial entre $\boldsymbol{A}$ y $d\boldsymbol{S}$, esto es:

$$\oint_S \boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{S}$$

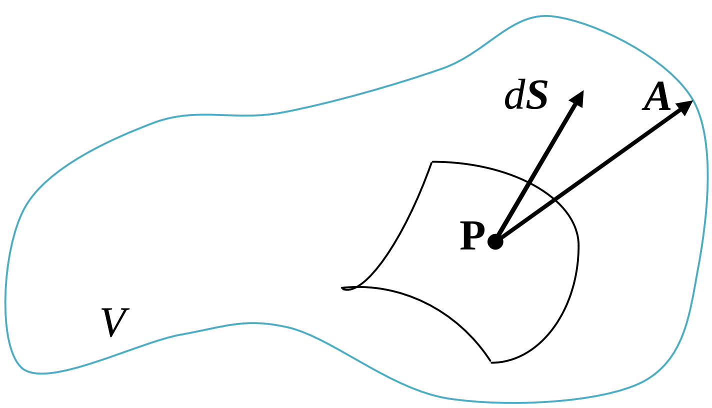
Cada uno de ellos tiene importantes aplicaciones físicas.

Divergencia

Sea S una superficie cerrada, que limita un volumen V ubicado en el espacio tridimensional U. Si dicho espacio se encuentra definido un campo vectorial $\boldsymbol{A}$ diferenciable, denominamos flujo ϕ del campo vectorial, a través de la superficie S, al escalar obtenido de la siguiente forma:

$$\emptyset = \oint_S \boldsymbol{A} . d\boldsymbol{S}$$

El vector $d\boldsymbol{S}$ tiene módulo igual al área del elemento de superficie dS, dirección normal al mismo y sentido saliente del volumen V.



Cuando el volumen V encerrado por la superficie S tiende a cero, el flujo por unidad de volumen se denomina *divergencia* del campo vectorial $\boldsymbol{A}$.

Es decir:

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = \lim_{\boldsymbol{V}\to \boldsymbol{0}} \frac{1}{\boldsymbol{V}} \oint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S}$$

Notación vectorial

Se puede escribir la divergencia de un campo vectorial a través de una notación vectorial, más compacta y conveniente. Se define para ello el operador vectorial "nabla" de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e_1}} + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e_2}} + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e_3}}$$

Escrito en forma general, donde:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e_1}} = \frac{\partial}{\partial e_1} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e_2}} = \frac{\partial}{\partial e_2} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e_3}} = \frac{\partial}{\partial e_3}$$

representa las derivadas parciales respecto de las variables del sistema de coordenadas en el que se está trabajando.

Para el sistema de coordenadas rectangulares será:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{z}} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Por lo que la expresión del operador $\boldsymbol{\nabla}$ en coordenadas rectangulares es:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}}\,\boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}}\,\boldsymbol{k}$$

Escribiendo al campo vectorial $\boldsymbol{A}$ como vector, esto es:

$$\mathbf{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

Multiplicando ambos "vectores" escalarmente llegamos a la forma vectorial para la divergencia, esto es:

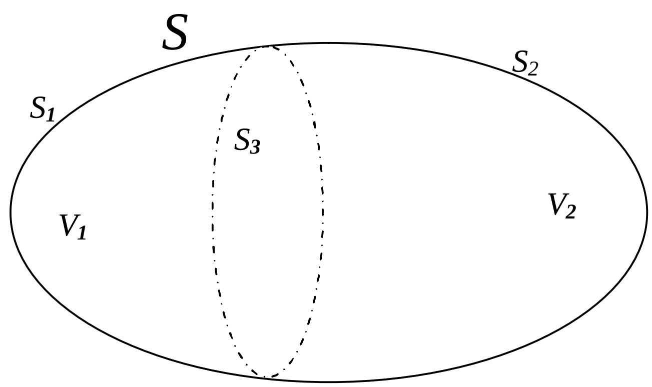
$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

Interpretación

Para entender mejor el concepto y la utilidad de la divergencia en física supongamos que en el punto P: $div\,\boldsymbol{A} \neq 0$. Esto quiere decir que el flujo a través de una superficie pequeña que encierra a P es distinto de cero. Esto quiere decir que en P hay *una fuente* de ese campo vectorial, independientemente de lo que el campo $\boldsymbol{A}$ represente, si el valor de $div\,\boldsymbol{A} > 0$, esto quiere decir que en ese punto el campo $\boldsymbol{A}$ se genera; y habrá *un sumidero* si $div\,\boldsymbol{A} < 0$, queriendo significar que en ese punto el campo $\boldsymbol{A}$ se pierde.

Teorema de Gauss

Supongamos tener una superficie *S* contorno de un volumen *V*, como muestra la figura, y ubicada en una zona del espacio donde está definido un campo vectorial ***A***.



El flujo del campo ***A*** a través de la superficie S se puede calcular de la siguiente manera:

$$\oint_S \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S} = \int_{S_1+S_3} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S} + \int_{S_2+S_3} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S}$$

Debe notarse que el flujo a través de S_3 tendrá un cierto valor cuando a S_3 se la considere como parte del contorno de V_1 y tendrá el mismo valor pero con signo cambiado cuando se la considere parte del contorno de V_2. Es decir, la presencia de S_3 no modifica el flujo a través de *S*.

Se puede deducir que si se divide mentalmente el volumen total *V* en pequeños volúmenes yuxtapuestos y se calcula el flujo a través de cada una de ellas, la suma total de éstos será igual al flujo total a través de *S*. Entonces:

$$\oint_S \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S} = \sum_i \int_{\Delta S_i} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S_i}$$

Pero por la definición dada de *div **A***es:

$$\sum_i \int_{\Delta S_i} \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S_i} = \sum \nabla.\boldsymbol{A_i}\,\Delta V_i$$

donde ΔS_i es el contorno del volumen ΔV_i

En el límite cuando $\Delta V_i \rightarrow 0$, la sumatoria se convierte en la integra, es decir:

$$\sum \nabla.\boldsymbol{A_i}\,\Delta V_i = \int_V \nabla.\boldsymbol{A}\ .d\boldsymbol{V}$$

Entonces:

$$\int_V \nabla.\boldsymbol{A}\ .d\boldsymbol{V} = \oint_S \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S}$$

Expresión que se conoce con el nombre de "**Teorema de Gauss o de la Divergencia**".

Rotor

Dado un campo vectorial $\boldsymbol{A}$ se define al rotor de dicho campo vectorial como:

$$rot\ \boldsymbol{A} = \lim_{V\to 0} \oint_S d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}$$

Notación vectorial

Al igual que en el caso de la divergencia se puede expresar al rotor de un campo vectorial en notación vectorial. Así, usando las mismas definiciones dadas para la divergencia y a través del producto vectorial tenemos:

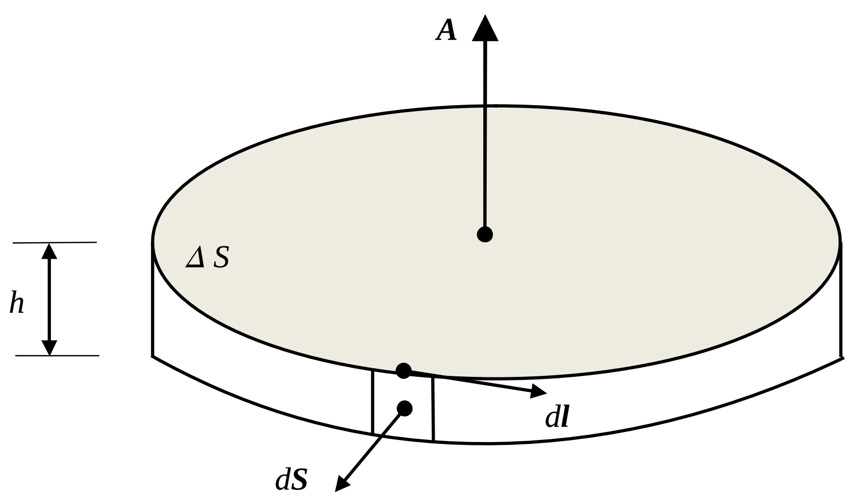
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial e_1} & \dfrac{\partial}{\partial e_2} & \dfrac{\partial}{\partial e_3} \\ A_{e_1} & A_{e_2} & A_{e_3} \end{bmatrix}$$

Que en coordenadas rectangulares será:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Teorema de Stokes

Consideremos un volumen *V*. En mérito a la simplicidad, pero sin pérdida de generalidad en la demostración, supongamos que dicho volumen tiene la forma de un disco en donde la altura *h* es despreciable frente a las otras dos dimensiones, tal y como muestra la figura.



Así, la componente z del rotor es:

$$rot\,\boldsymbol{A}|_z = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}|_z = \boldsymbol{k}\,.rot\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{k}\,.\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{k}\,.(d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A})$$

$$= \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{A}\,.(\boldsymbol{k} \times d\boldsymbol{S})$$

Sobre las superficies planas se cumple que:

$$\boldsymbol{k} \times d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$$

ha bida cuenta de que $\boldsymbol{k}$ y $d\boldsymbol{S}$ son vectores paralelos.

Sobre el contorno lateral se tiene:

$$\boldsymbol{k} \times d\boldsymbol{S} = h\,d\boldsymbol{l}$$

ya que $\boldsymbol{k}$ y $d\boldsymbol{S}$ son perpendiculares y el valor del área correspondiente a la superficie $d\boldsymbol{S}$ es:

$$|d\boldsymbol{S}| = h\,dl$$

Es decir:

$$\boldsymbol{k}\,.\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \lim_{V \to 0} \frac{h}{V} \int_S \boldsymbol{A}\,.\,d\boldsymbol{l} = \lim_{V \to 0} \frac{h}{h\,\Delta S} \oint_S \boldsymbol{A}\,.\,d\boldsymbol{l}$$

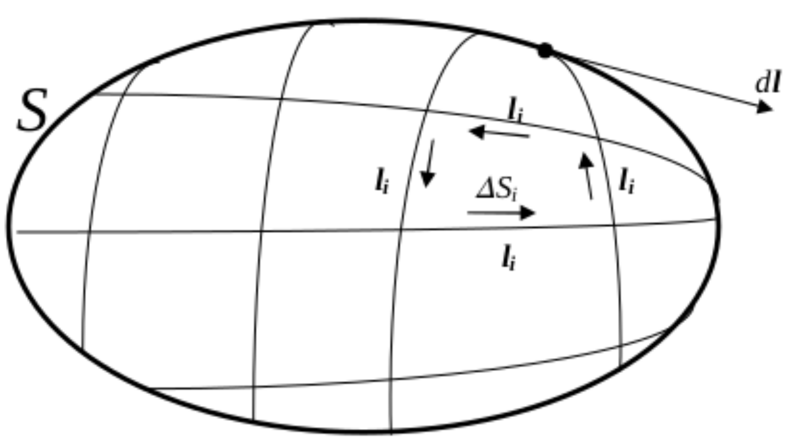
Donde l es el contorno que delimita a ΔS. Por lo tanto, se tiene:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}|_z).\Delta\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}\,.\,d\boldsymbol{l}$$

O bien:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}\,.\;\Delta\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}\,.\,d\boldsymbol{l}$$

Consideremos ahora una superficie S, diferenciable, abierta y de una forma cualquiera, como se muestra en la figura.



Si subdividimos en pequeños elementos ΔS_i, podemos aplicar la expresión anterior a cada uno de ellos quedando:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A_i} \,.\, \Delta \boldsymbol{S_i} = \oint_{l_i} \boldsymbol{A} \,.\, d\boldsymbol{l}$$

Donde $\Delta \boldsymbol{S_i}$ es el vector asociado a la superficie elemental ΔS_i.

Sumando sobre todos los elementos, se tiene:

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A_i} \,.\, \Delta \boldsymbol{S_i} = \sum_{\boldsymbol{i}} \oint_{l_i} \boldsymbol{A} \,.\, d\boldsymbol{l}$$

El primer miembro resulta, en el límite para $\Delta \boldsymbol{S_i} \rightarrow 0$:

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \,.\, \Delta \boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \,.\, d\boldsymbol{l}$$

Expresión que se conoce con el nombre de "**Teorema de Stokes o del Rotor**".

Este teorema revela un nuevo concepto. En efecto, "Dada una superficie diferenciable abierta cualquiera, el flujo de $rot\ \boldsymbol{A}$ a través de la misma es igual a la integral de línea a lo largo del borde que la contiene".

Es importante señalar el sentido de circulación sobre l. Este surge por convención y se toma como sentido positivo de recorrido al sentido anti horario (en la figura indicado).