SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DE FLUJO MONOFASICO

Introducción

Aún cuando las formas algebraicas de las aproximaciones en diferencias finitas de las ecuaciones de flujo incompresible, poco compresible y compresible son similares, los métodos de resolución requieren adoptar soluciones numéricas distintas.
Esto es porque el término de acumulación y los términos de transmisibilidad difieren en la magnitud de su respuesta causada por cambios de presión.
Para flujos incompresibles el término de acumulación se elimina de la ecuación de flujo y prevalece el estado estacionario.
Por el contrario, para flujos poco compresibles y compresibles, la acumulación de fluido cambia con la presión y prevalecen condiciones no estacionarias.
Existen dos dificultades al calcular los términos de transmisibilidad en las ecuaciones de flujo.
La primera dificultad es que las transmisibilidades están evaluadas en las fronteras de los bloques, mientras que las propiedades de la roca como k_H y h y las propiedades del fluido que son función de la presión como μ_l y B_l son conocidas sólo en el centro de los bloques.
Esto también es válido para flujo multifásico donde las permeabilidades relativas se requieren en las fronteras de los bloques y las saturaciones y por ende las permeabilidades relativas se conocen en el interior de las celdas.
La segunda dificultad con la evaluación de las transmisibilidades es la dependencia con la presión para flujo monofásico y con la presión y saturación para flujo multifásico.
La dependencia de la transmisibilidad con las incógnitas deriva en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales.
Estas ecuaciones no lineales deben ser linealizadas antes de ser resueltas.

Cálculo de las transmisibilidades para la ecuación de flujo incompresible

Como la figura 1 muestra, las dimensiones de los bloques pueden variar en las direcciones x e y al movernos desde un bloque a otro.
Igualmente, otras propiedades asignadas a los bloques pueden variar dependiendo del grado de heterogeneidad y anisotropía que exista en el sistema.

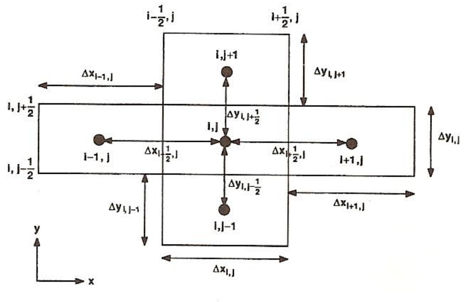

Figura 1

Por ejemplo, los cinco bloques de la figura pueden tener distintos espesores de formación, permeabilidades y porosidades.
Además, la permeabilidad según la dirección x puede variar de la permeabilidad según y. Las transmisibilidades se calculan en los límites de los bloques pero las propiedades de la roca y de los fluidos se conocen en los centros de las celdas.

Las siguientes ecuaciones muestran las técnicas disponibles para estimar propiedades promedio entre dos celdas adyacentes

Promedio aritmético

$$\overline{A} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \qquad (1.1)$$

Promedio Pesado

$$W = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3 + ... + w_n a_n}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad (1.2)$$

Promedio Geométrico

$$\overline{G} = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n} \qquad (1.3)$$

Promedio Armónico

$$\frac{1}{\overline{\overline{H}}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \qquad (1.4)$$

Donde

$$\overline{H} \leq \overline{G} \leq \overline{A}$$

Los promedios son iguales cuando $a_1=a_2=a_3=...a_n$

Las transmisibilidades tienen dos grupos distintos de términos:

$1/\mu_l B_l$ representa las propiedades del fluido y permanecen constantes para flujos incompresibles, por lo tanto el promedio sólo es aplicable a $(A_x k_x / \Delta x)$, que representa las propiedades de la celda.

Cuando se promedia $(A_x k_x / \Delta x)$ entre dos bloques adyacentes, se usa el promedio armónico ya que se presenta flujo serie entre los mismos.
Siguiendo la definición de promedio armónico dado por la ecuación (1.4) $(A_x k_x / \Delta x)_{i+1/2,j}$ puede ser calculado como:

$$\overline{H} = (A_x k_x / \Delta x)_{i\pm1/2,j}$$

Por ecuación (1.4)

$$\frac{1}{\overline{\overline{H}}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta x}{A_x k_x}\right)_{i,j} + \left(\frac{\Delta x}{A_x k_x}\right)_{i\pm1,j}\right] \qquad (1.5a)$$

o

$$\frac{1}{\overline{H}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta x_{i\pm1,j}\,(A_{x\,i,j}k_{x_{\,i,j}})+\Delta x_{i,j}\,(Ax_{i\pm1,j}kx_{i\pm1,j})}{A_{x\,i,j}Ax_{i\pm1,j}k_{x_{\,i,j}}kx_{i\pm1,j}}\right] \quad (1.5b)$$

Resolviendo para $\overline{H}$

$$\overline{H}=\left(A_x k_x/\Delta x\right)_{i\pm1/2,j}=\frac{2A_{x\,i,j}Ax_{i\pm1,j}k_{x_{\,i,j}}kx_{i\pm1,j}}{\Delta x_{i\pm1,j}A_{x\,i,j}k_{x_{\,i,j}}+\Delta x_{i,j}Ax_{i\pm1,j}kx_{i\pm1,j}} \quad (1.5c)$$

Finalmente, el término de transmisibilidad puede ser escrito como

$$\left(\beta_c\frac{A_x k_x}{\mu_l B_l \Delta x}\right)_{i\pm1/2,j}=\beta_c\frac{2A_{x\,i,j}Ax_{i\pm1,j}k_{x_{\,i,j}}kx_{i\pm1,j}}{\Delta x_{i\pm1,j}A_{x\,i,j}k_{x_{\,i,j}}+\Delta x_{i,j}Ax_{i\pm1,j}kx_{i\pm1,j}}\times\frac{1}{\mu_l B_l} \quad (1.6)$$

Se debe resaltar que el término $1/\mu_l B_l$ está excluído del proceso de promedio porque es constante bajo la suposición de flujo incompresible.
Para flujos poco compresibles y compresibles debe ser incluido en el proceso de promedio.
La transmisibilidad en la dirección y puede escribirse como

$$\left(\beta_c\frac{A_y k_y}{\mu_l B_l \Delta y}\right)_{i,j\pm1/2}=\beta_c\frac{2A_{y_{i,j}}Ay_{i,j\pm1}k_{y_{\,i,j}}kx_{i,j\pm1}}{\Delta x_{i,j\pm1}A_{y_{i,j}}k_{y_{\,i,j}}+\Delta y_{i,j}Ay_{i,j\pm1}ky_{i,j\pm1}}\times\frac{1}{\mu_l B_l} \quad (1.7)$$

La elección del promedio armónico para flujo serie se obtiene a través de la ley de Darcy.

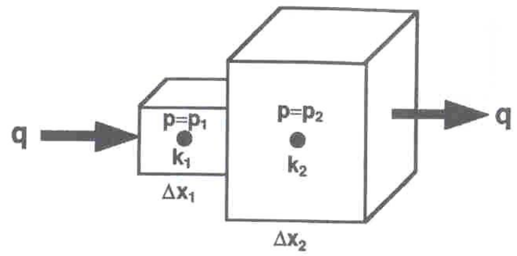

Figura 2 Uso de promedio armónico en la interfase entre dos bloques adyacentes

El valor de presión en la interfase de los dos bloques es $p_{1+1/2}$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (p_1 - p_{1+1/2}) + (p_{1+1/2} - p_2) \quad (1.8)$$

$$q_l = \frac{\beta_c A_{x1} k_{x1}}{\mu_l(\Delta x_1/2)}\left(p_1 - p_{1+1/2}\right) \quad (1.9)$$

$$ql = \frac{\beta_c A_{x2} k_{x2}}{\mu_l (\Delta x_2 / 2)} \left(p_{1+1/2} - p_2\right) \quad (1.10)$$

$$ql = \frac{\beta_c}{\mu_l} \left(\frac{A_x k_x}{\Delta x}\right)_{avg} \left(p_1 - p_2\right) \quad (1.11)$$

Sustituyendo en ecuación (1.8)

$$\Delta p = \frac{q_l \mu_l}{\beta_c} \left(\frac{\Delta x}{A_x k_x}\right)_{avg} = \frac{q_l (\Delta x_1 / 2) \mu_l}{\beta_c A_{x1} k_{x1}} + \frac{q_l (\Delta x_2 / 2) \mu_l}{\beta_c A_{x2} k_{x2}} \quad (1.12)$$

o

$$\left(\frac{\Delta x}{A_x k_x}\right)_{avg} = \frac{\Delta x_1 / 2}{A_{x1} k_{x1}} + \frac{\Delta x_2 / 2}{A_{x2} k_{x2}} \quad (1.13)$$

que es la definición de promedio armónico.