

## 1 Implementación de condiciones iniciales y de frontera en las ecuaciones discretas

### 1.1 Condiciones iniciales:

Hemos visto que el objetivo de la simulación de reservorios es predecir la distribución de presiones y caudales de producción a través del tiempo.

Mediante el uso de aproximaciones en diferencias finitas se avanza en la simulación desde un nivel de tiempo conocido (tiempo en que todas las variables dependientes son conocidas,  $n$ ) hasta un nivel desconocido (tiempo en el cual las variables serán predichas,  $n+1$ )

En las ecuaciones en diferencias finitas, el término  $p^n$  representa las presiones en los nodos al nivel de tiempo conocido. El proceso para avanzar en la simulación en el tiempo comienza asignando valores conocidos de presión al nivel de tiempo  $n$  en las ecuaciones en diferencias finitas. Las ecuaciones pueden ser entonces resueltas para las presiones  $p^{n+1}$ . Una vez determinados los valores de  $p^{n+1}$  se usan como las presiones conocidas para el próximo salto de tiempo.

### 1.2 Condiciones de frontera

#### 1.2.1 Condición de frontera externa

Está vinculada a los límites del reservorio. Se consideran dos tipos importantes de fronteras en simulación de reservorios: cuando se especifica el gradiente de presión (incluye los límites con condición no flujo) y cuando se especifica la presión.

La implementación de las condiciones de frontera depende del grillado usado, grilla centrada en el bloque o puntos distribuidos en la grilla usado en la discretización.

##### 1.2.1.1 Gradiente de presión especificado (Neumann)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C \quad (1)$$

Esta ecuación puede usarse para representar una condición de no flujo haciendo  $C=0$

La ecuación (1) debe discretizarse para incorporarse en el simulador. La discretización depende del grillado usado.

La figura 1 muestra un sistema centrado en el bloque 1D, donde se especifican las condiciones de borde en los límites de la primer y última celda.

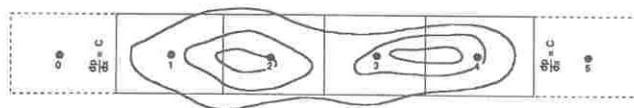


Figura 1

Las ecuaciones en diferencias finitas que representan el sistema de la figura son:

#### Celda 1

$$T_{l_{1+1/2}}^n (p_2^{n+1} - p_1^{n+1}) - T_{l_{1-1/2}}^n (p_1^{n+1} - p_0^{n+1}) + q_{lsc1} = \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_1 (p_1^{n+1} - p_1^n) \quad (2)$$

#### Celda 2

$$T_{l_{2+1/2}}^n (p_3^{n+1} - p_2^{n+1}) - T_{l_{2-1/2}}^n (p_2^{n+1} - p_1^{n+1}) + q_{lsc2} = \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_2 (p_2^{n+1} - p_2^n) \quad (3)$$

**Celda 3**

$$T_{i_{3+1/2}}^n (p_4^{n+1} - p_3^{n+1}) - T_{i_{3-1/2}}^n (p_3^{n+1} - p_2^{n+1}) + q_{lsc3} = \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_3 (p_3^{n+1} - p_3^n) \quad (4)$$

**Celda 4**

$$T_{i_{4+1/2}}^n (p_5^{n+1} - p_4^{n+1}) - T_{i_{4-1/2}}^n (p_4^{n+1} - p_3^{n+1}) + q_{lsc4} = \left( \frac{V_b \phi c_l}{\alpha_c B_l^o \Delta t} \right)_4 (p_4^{n+1} - p_4^n) \quad (5)$$

Existen más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto incorporaremos la ecuación (1) aplicando aproximación por diferencias centrales en la frontera izquierda ( $x=x_{1-1/2}$ ) y derecha ( $x=x_{4+1/2}$ )

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_1 - p_0}{x_1 - x_0} = C \quad (6a)$$

o

$$p_0 = p_1 - C(x_1 - x_0) \quad (6b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_5 - p_4}{x_5 - x_4} = C \quad (7a)$$

o

$$p_5 = p_4 + C(x_5 - x_4) \quad (7b)$$

Estas ecuaciones se usan para completar el sistema de ecuaciones en el simulador para el reservorio de la figura.

Si existe una condición de no flujo ( $C=0$ )  $p_0=p_1$  y  $p_4=p_5$

Una alternativa para modelar una condición de no flujo es asignar el valor cero a las transmisibilidades en las fronteras

$$T_{i_{x1-1/2}}^n = 0 \quad (8)$$

y

$$T_{i_{x4+1/2}}^n = 0 \quad (9)$$

Si el grillado es de puntos distribuidos en la grilla como se ve la figura 2

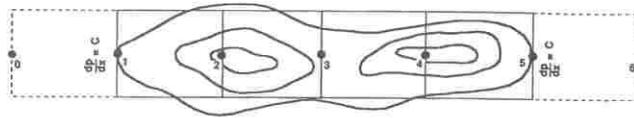


Figura 2

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_2 - p_0}{x_2 - x_0} = C \quad (10a)$$

o

$$p_0 = p_2 - C(x_2 - x_0) \quad (10b)$$

Similarmente

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_6 - p_4}{x_6 - x_4} = C \quad (11a)$$

o

$$p_6 = p_4 + C(x_6 - x_4) \quad (11b)$$

Si  $C=0$ ,  $p_2=p_0$  y  $p_6=p_4$

También podemos usar la trasmisibilidad para modelar la condición de no flujo.

$$T_{lx1-1/2}^n = 0 \quad (12)$$

y

$$T_{lx5+1/2}^n = 0 \quad (13)$$

### 1.2.1.2 Valor de presión especificado (Dirichlet)

$$p_1 = C \quad (14)$$

Si el grillado es centrado en el bloque los valores en el límite deben extrapolarse a partir del punto más próximo.

Para la figura 3 una aproximación escrita para la frontera izquierda sería

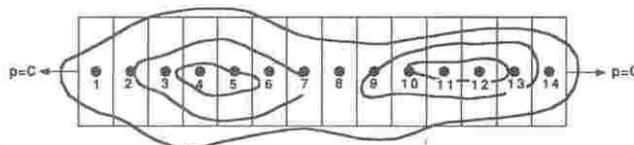


Figura 3

$$(1 + \Omega)p_1 - \Omega p_2 = C \quad (15a)$$

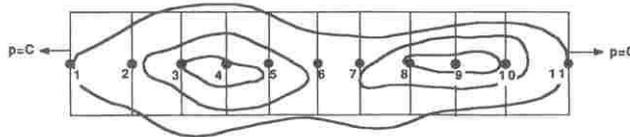
$$\text{donde } \Omega = \Delta x_1 / (\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$\text{Si } \Delta x_1 = \Delta x_2$$

$$\frac{3}{2}p_1 - \frac{1}{2}p_2 = C \quad (15b)$$

Esta ecuación es la forma más común de aproximación que aparece en la literatura.

Si el grillado es de puntos distribuidos, figura 4.7, no es necesario hacer ninguna extrapolación

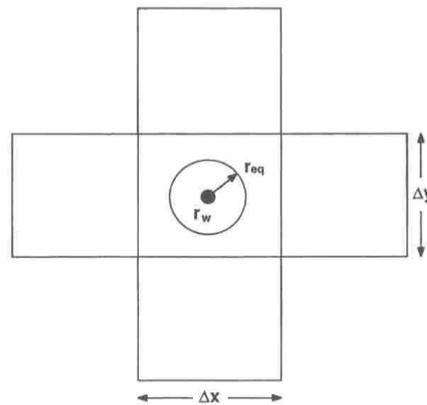


**Figura 4**

### 1.2.2 Condición de frontera interna

Están vinculadas a la presencia de pozos, rocas impermeables y fallas.

La figura muestra una grilla que contiene un pozo. Generalmente las dimensiones del wellbore son pequeñas comparadas con las dimensiones de las celdas.



**Figura 5**

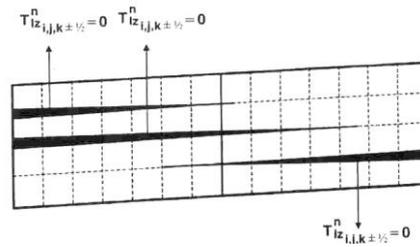
El flujo en el wellbore puede estimarse como:

$$q_{lsc\ i,j,k} = \frac{-2\pi\beta_c k_H h}{\left[\log_e(r_{eq}/r_w) + s\right] \mu_l B_l} (p_{i,j,k} - p_{wf}) \quad (16)$$

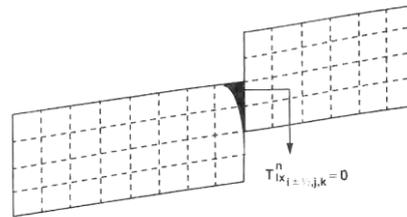
donde

$$r_{eq} = 0.28 \frac{\left[ \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{1/2} (\Delta x)^2 + \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{1/2} (\Delta y)^2 \right]^{1/2}}{\left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{1/4} + \left( \frac{k_x}{k_y} \right)^{1/4}} \quad (17)$$

$$y \quad k_H = \sqrt{k_x k_y} \quad (18)$$



**Figura 6 Sección transversal mostrando barreras al flujo vertical**



**Figura 7 Sección transversal mostrando una falla**

### Bibliografía

- Basic Applied Reservoir Simulation. Ertekin, Abou Kassem, King. SPE TEXTBOOK SERIES VOL 7(2001)
- Petroleum Reservoir Simulation. Aziz y Settari Applied Science Publishers (1979)
- “Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation” . Peaceman Elsevier (1977)