

UNIDAD 1: Funciones de varias variables

1.1 Diferenciación

- 1 2.4: Introducción a trayectorias y curvas
- 2 2.5: Propiedades de la derivada
- 3 2.6 Gradientes y derivadas direccionales

- 1 2.4: Introducción a trayectorias y curvas
- 2 2.5: Propiedades de la derivada
- 3 2.6 Gradientes y derivadas direccionales

Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en \mathbb{R}^n es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$;

Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en \mathbb{R}^n es una aplicación $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$.

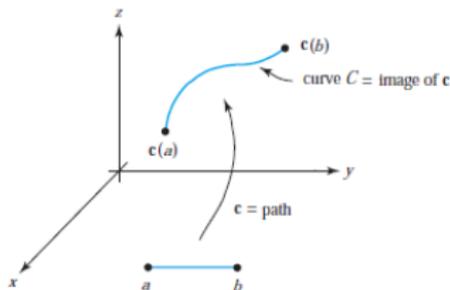
Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en \mathbb{R}^n es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama **curva** y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**.

Trayectorias y curvas

Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en \mathbb{R}^n es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama **curva** y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**. Se dice que la trayectoria o camino \mathbf{c} **parametriza** la curva C . Decimos también que $\mathbf{c}(t)$ traza C al variar t . Si \mathbf{c} es un camino en \mathbb{R}^3 , podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ **funciones componentes** de \mathbf{c} . Las funciones componentes en \mathbb{R}^2 o, en general, en \mathbb{R}^n , se definen de forma similar.



① $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}.$

- ① $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?

- 1 $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
- 2 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

- 1 $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
- 2 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 3 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

- 1 $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
- 2 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 3 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 4 $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- 1 $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
- 2 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 3 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 4 $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
- 5 $\mathbf{c}(t) = (t, f(t))$, $t \in D(f) \subset \mathbb{R}$.

- 1 $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
- 2 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- 3 $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 4 $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
- 5 $\mathbf{c}(t) = (t, f(t))$, $t \in D(f) \subset \mathbb{R}$.

Velocidad y tangente a una trayectoria

Si $\mathbf{c}(t)$ es la curva trazada por una partícula y t es el tiempo, se define:

Definición (Vector velocidad)

Si \mathbf{c} es una trayectoria y es diferenciable, decimos que \mathbf{c} es una trayectoria diferenciable. La velocidad de \mathbf{c} en el instante t se define como

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}.$$

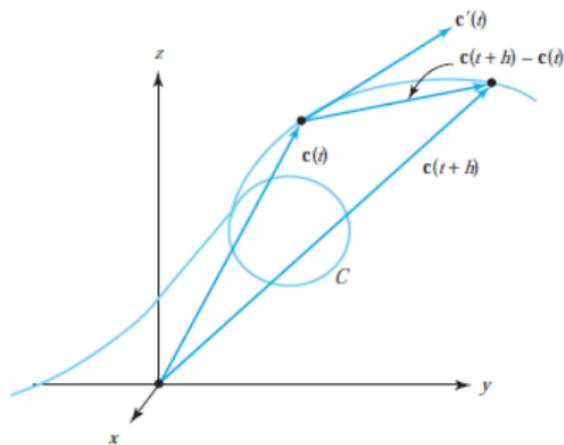
Normalmente trazamos el vector $\mathbf{c}'(t)$ con origen en el punto $\mathbf{c}(t)$. La *rapidez* de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, la longitud del vector velocidad. Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ está en \mathbb{R}^2 , se tiene

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

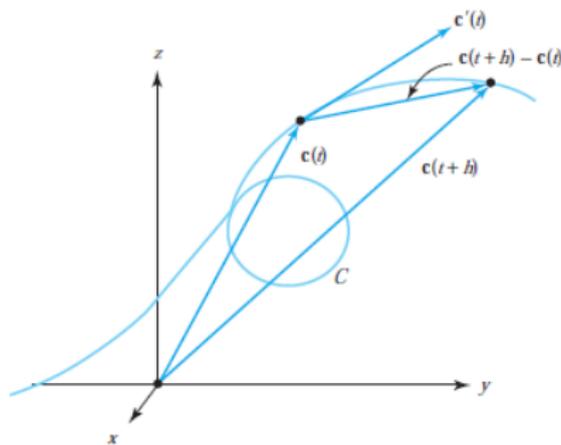
y, si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Interpretación gráfica

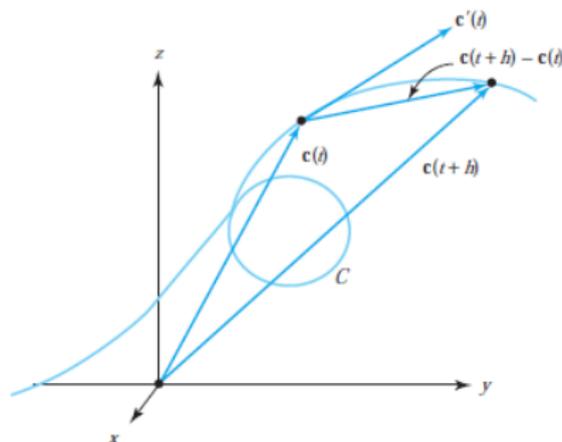


Interpretación gráfica



Definición (Vector tangente)

La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t . Si C es una curva trazada por \mathbf{c} y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual al vector nulo, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.



Definición (Vector tangente)

La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t . Si C es una curva trazada por \mathbf{c} y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual al vector nulo, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

La derivada $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ es un vector columna, de componentes $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$.

EJEMPLO 2.36 Calcular el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, e^t)$ en el punto $t = 0$.

Solución

Resulta que $\dot{\mathbf{c}}(t) = (1, 2t, e^t)$ y en $t = 0$ obtenemos el vector tangente $(1, 0, 1)$.

EJEMPLO 2.37 Describir la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Hallar el vector velocidad en el punto de la curva imagen cuando $t = \pi/2$.

Solución

Para un t dado, el punto $(\cos t, \sin t, 0)$ está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy . Por tanto, el punto $(\cos t, \sin t, t)$ está t unidades sobre el punto $(\cos t, \sin t, 0)$ si t es positivo y $-t$ unidades por debajo de $(\cos t, \sin t, 0)$ si t es negativo. Cuando t crece $(\cos t, \sin t, t)$ se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la coordenada z creciente. La curva que traza se llama *hélice* y aparece dibujada en la Figura 2.4.9. En $t = \pi/2$, $\mathbf{c}'(\pi/2) = (-\sin \pi/2, \cos \pi/2, 1) = (-1, 0, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

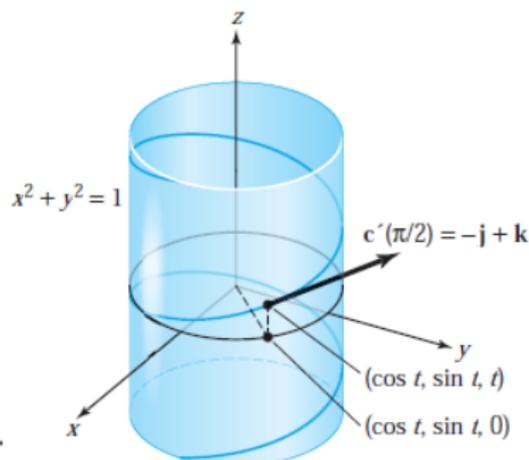


Figura 2.4.9. La hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ se enrolla sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Definición

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza \mathbf{c} , entonces la recta que traza \mathbf{l} es la **recta tangente a la curva C** en $\mathbf{c}(t_0)$.

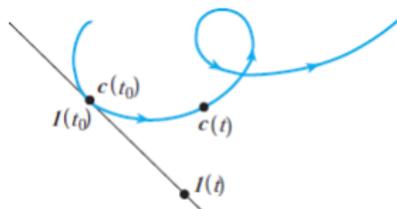
Recta tangente a una trayectoria y a una curva

Definición

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza \mathbf{c} , entonces la recta que traza \mathbf{l} es la **recta tangente a la curva C** en $\mathbf{c}(t_0)$.



Observación: \mathbf{l} pasa por $\mathbf{c}(t_0)$ en $t = t_0$ (y no en $t = 0$).

EJEMPLO 2.39 Una trayectoria en \mathbb{R}^3 pasa por el punto $(3, 6, 5)$ en el instante $t = 0$ con vector tangente $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar la ecuación de la recta tangente.

Solución

La ecuación de la recta tangente es

$$l(t) = (3, 6, 5) + t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0) = (3 + t, 6 - t, 5).$$

En coordenadas (x, y, z) , la recta tangente es $x = 3 + t$, $y = 6 - t$, $z = 5$.

EJEMPLO 2.40 Supóngase que una partícula sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 1$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución

El vector velocidad es $(e^t, -e^{-t}, -\sin t)$, que en instante $t = 1$ es el vector $(e, -1/e, -\sin 1)$. La partícula está en $(e, 1/e, \cos 1)$ en el instante $t = 1$. La ecuación de la recta tangente es $\mathbf{l}(t) = (e, 1/e, \cos 1) + (t - 1)(e, -1/e, -\sin 1)$. En el instante $t = 3$ la posición sobre esta recta es:

$$\mathbf{l}(3) = \left(e, \frac{1}{e}, \cos 1 \right) + 2 \left(e, -\frac{1}{e}, -\sin 1 \right) = \left(3e, -\frac{1}{e}, \cos 1 - 2 \sin 1 \right)$$

$$\cong (8,155, -0,368, -1,143).$$

- 1 2.4: Introducción a trayectorias y curvas
- 2 2.5: Propiedades de la derivada
- 3 2.6 Gradientes y derivadas direccionales

Teorema

1. **Multiplicación por una constante.** Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en \mathbf{x}_0 y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \quad (\text{igualdad de matrices}).$$

2. **Suma.** Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en \mathbf{x}_0 . Entonces $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \quad (\text{suma de matrices}).$$

3. **Producto.** Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en \mathbf{x}_0 y sea $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Entonces $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(cada miembro es una matriz $1 \times n$).

Teorema

4. **Cociente.** Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en \mathbf{x}_0 y sea $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ y supóngase que g nunca se anula en U . Entonces $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

(cada miembro es una matriz $1 \times n$).

Sumas, productos y cocientes

Dem 1: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en \mathbf{x}_0 y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \quad (\text{igualdad de matrices}).$$

Sumas, productos y cocientes

Dem 1: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en \mathbf{x}_0 y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \quad (\text{igualdad de matrices}).$$

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|c| \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= |c| \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= 0 \quad \text{por ser } f \text{ diferenciable en } \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Sean $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ funciones tales que $g(U) \subset V$, de tal forma que $f \circ g$ esté definida. Supóngase que g es diferenciable en \mathbf{x}_0 y que f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en \mathbf{x}_0 y

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

El segundo miembro es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ y $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ es matriz fila y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ es matriz columna.

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

y definimos $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por medio de

$$h(x, y, z) = (f \circ g)(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

En este caso la regla de la cadena dice:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

y definimos $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por medio de

$$h(x, y, z) = (f \circ g)(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

En este caso la regla de la cadena dice:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Hemos escrito explícitamente el producto de matrices $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)] [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$, y no se han escrito los puntos \mathbf{x}_0 ni \mathbf{y}_0 en las matrices.

EJEMPLO 2.42

Verificar la regla de la cadena en la forma dada por la Fórmula (3') para

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$$

donde

$$u(x, y, z) = x^2y, \quad v(x, y, z) = y^2, \quad w(x, y, z) = e^{-xz}.$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(-ze^{-xz}) \\ &= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz}, \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación precedente.

EJEMPLO 2.43 Dadas $g(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ y $f(u, v) = (u + v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en el punto $(x, y) = (1, 1)$ usando la regla de la cadena.

Solución

Las matrices de derivadas parciales son:

$$Df(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad y \quad Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

Nótese que, cuando $(x, y) = (1, 1)$, $g(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. Por tanto

$$D(f \circ g)(1, 1) = Df(2, 1)Dg(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es la derivada pedida.

EJEMPLO 2.44 Dados $f(x, y)$ y el cambio de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$ (coordenadas polares), dar una fórmula para $\partial f / \partial \theta$.

Solución

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen} \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ejemplo

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$.

- Dar una fórmula para $f \circ g$.
- Calcular $D(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$.

- Dar una fórmula para $f \circ g$.
- Calcular $D(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

Solución

- a) Tenemos
- $$(f \circ g)(u, v) = f(e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$$
- $$= (\cos(u - \operatorname{sen} v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \operatorname{sen} v}).$$

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$.

- a) Dar una fórmula para $f \circ g$.
 b) Calcular $D(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

Solución

a) Tenemos
$$(f \circ g)(u, v) = f(e^{u^2}, u - \sin v)$$

$$= (\cos(u - \sin v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \sin v}).$$

- b) Por la regla de la cadena,

$$D(f \circ g)(0, 0) = [Df(g(0, 0))][Dg(0, 0)] = [Df(1, 0)][Dg(0, 0)].$$

Ahora bien,

$$Dg(0, 0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$Df(1, 0) = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}.$$

Recuérdese que Df se evalúa en $g(0, 0)$, ¡no en $(0, 0)$!. Por tanto,

$$D(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}.$$

- 1 2.4: Introducción a trayectorias y curvas
- 2 2.5: Propiedades de la derivada
- 3 2.6 Gradientes y derivadas direccionales

Definición

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Definición

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Ejemplo 2.48 Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) =$$

Definición

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Ejemplo 2.48 Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (y, x, 1).$$

Definición

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la **derivada direccional** de f en \mathbf{x} en la dirección del vector **unitario** \mathbf{v} es

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

siempre que exista.

Teorema (Fórmula de cálculo de la derivada direccional)

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en \mathbf{x} en la dirección \mathbf{v} es:

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Fórmula de cálculo de la derivada direccional

Teorema (Fórmula de cálculo de la derivada direccional)

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en \mathbf{x} en la dirección \mathbf{v} es:

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Dem: sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, de forma que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Aplicando la regla de la cadena, podemos derivar

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \mathbf{c})(t) \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f .

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f .

Dem: Si \mathbf{n} es un vector unitario, la variación de f en la dirección de \mathbf{n} es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_1 \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{n} y $\nabla f(\mathbf{x})$.

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f .

Dem: Si \mathbf{n} es un vector unitario, la variación de f en la dirección de \mathbf{n} es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_1 \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{n} y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando \mathbf{n} y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos.

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f .

Dem: Si \mathbf{n} es un vector unitario, la variación de f en la dirección de \mathbf{n} es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_1 \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{n} y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando \mathbf{n} y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos.

Observación: cuando $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, esta variación es 0 para todo \mathbf{n} .

Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

Ejemplo

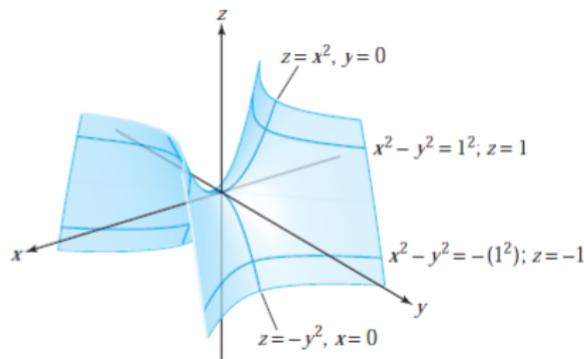
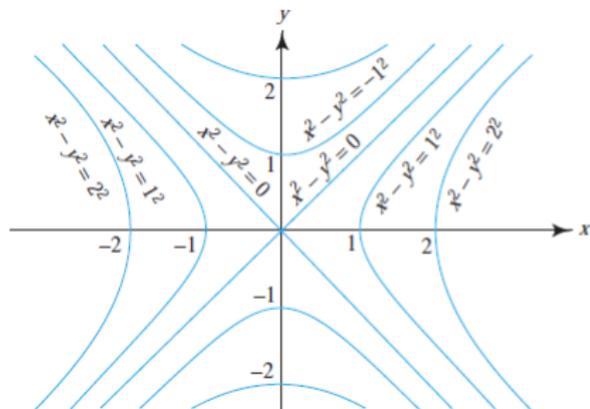
¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$

Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$



Teorema (El gradiente es normal a las superficies de nivel)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$ para una constante k . Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel. (Es decir que si \mathbf{v} es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$.)

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

Teorema (El gradiente es normal a las superficies de nivel)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$ para una constante k . Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel. (Es decir que si \mathbf{v} es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$.)

Dem: Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria en S , con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0 \in S$. Entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$ y, si \mathbf{v} es el vector tangente en $t = 0$ de $\mathbf{c}(t)$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Como $f(\mathbf{c}(t))$ es constante en t , $\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \right|_{t=0} = 0$ y, por la regla de la cadena,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}.$$

Planos tangentes a superficies de nivel

Definición

Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para $k = cte$. El **plano tangente** a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \quad (1)$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (1).

Planos tangentes a superficies de nivel

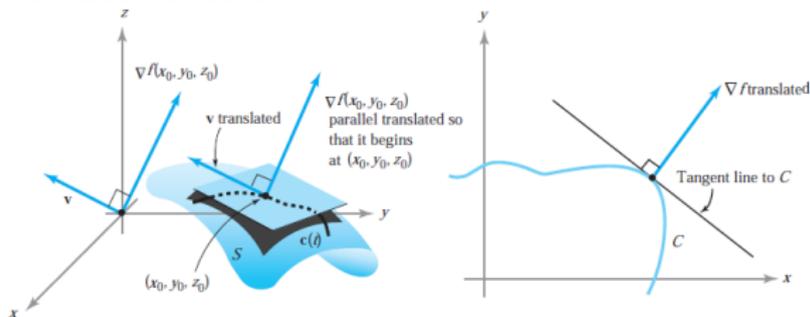
Definición

Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para $k = cte$. El **plano tangente** a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \quad (1)$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (1).

Observación: de forma similar se define recta tangente a una curva de nivel de una función de dos variables.



El campo vectorial gradiente

A menudo nos referimos a ∇f como un *campo vectorial gradiente*. La palabra «campo» significa que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f . En la Figura 2.6.4 describimos el gradiente ∇f no por medio de su gráfica que, si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sería un subconjunto de \mathbb{R}^6 , es decir, el conjunto de pares $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$, sino representando $\nabla f(P)$, para cada punto P como un vector que parte del punto P , no del origen. Como en una gráfica, este método de representación de ∇f contiene el punto P y el valor $\nabla f(P)$ en la misma figura.

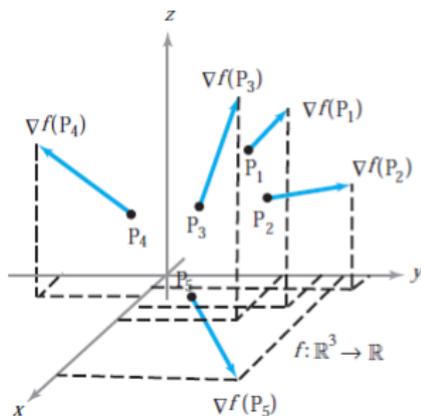


figure 2.6.4 The gradient ∇f of a function $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is a vector field on \mathbb{R}^3 ; at each point P_i , $\nabla f(P_i)$ is a vector emanating from P_i .

Ejemplo

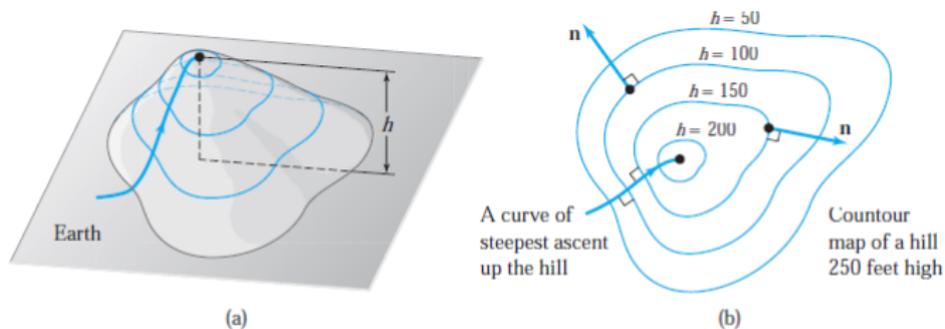


figure 2.6.5 A physical illustration of the two facts (a) ∇f is the direction of fastest increase of f , and (b) ∇f is orthogonal to the level curves.