UNIDAD 1: Funciones de varias variables

Recorrido

Recorrido

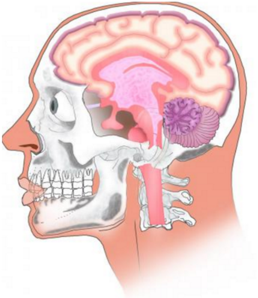
1. 1.1 Diferenciación
   - Definiciones
   - Gráficas y conjuntos de nivel

2. Límites y continuidad en dimensiones superiores
   - Límites
   - Continuidad

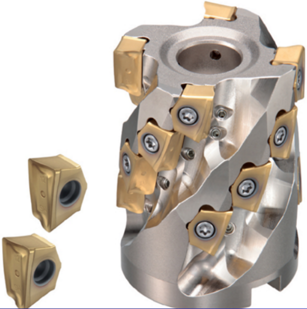
3. Derivadas parciales
   - Introducción

4. Diferenciabilidad
   - Aproximación lineal
   - Diferenciabilidad en dos variables
   - Plano tangente
   - Diferenciabilidad
   - Gradientes

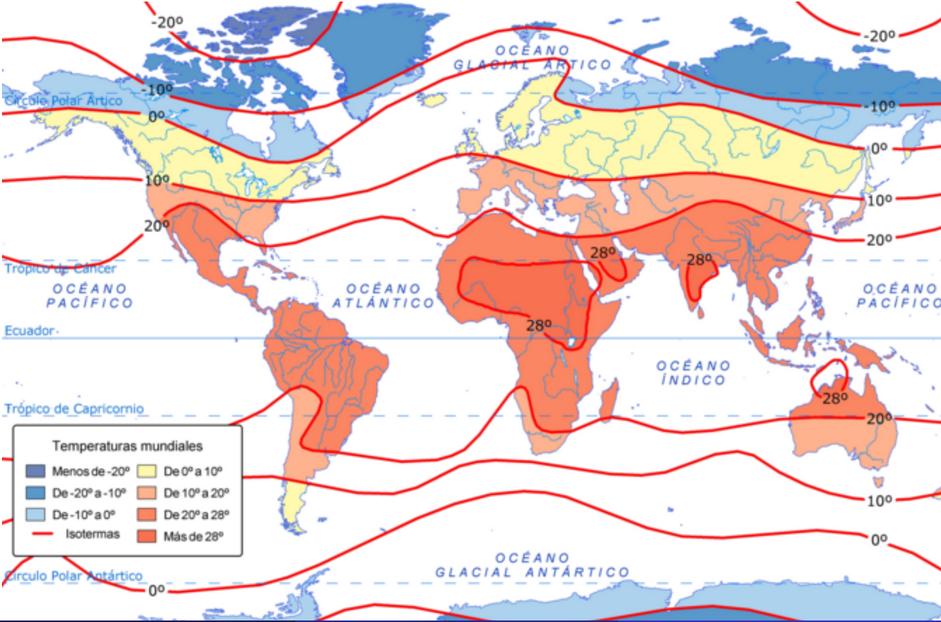
Ejemplos




Densidad
Escaso
Fuerte
Alcoholes
Agua
Zumo de frutas
Bebidas muy azucaradas



Ejemplos



-20º
-10º
0º
10º
20º
28º
OCÉANO GLACIAL ÁRTICO
Círculo Polar Ártico
Trópico de Cáncer
OCÉANO PACÍFICO
OCÉANO ATLÁNTICO
OCÉANO ÍNDICO
Ecuador
Trópico de Capricornio
Círculo Polar Antártico
OCÉANO GLACIAL ANTÁRTICO
Temperaturas mundiales
Menos de -20º
De -20º a -10º
De -10º a 0º
Isotermas
De 0º a 10º
De 10º a 20º
De 20º a 28º
Más de 28º

Recorrido

Algunas definiciones

Definición

Una función de varias variables es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Definición

Una función de varias variables es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Ocasionalmente escribimos $\mathbf{x}$ en lugar de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ o bien

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}).$$

Definición

Una función de varias variables es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Ocasionalmente escribimos $\mathbf{x}$ en lugar de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ o bien

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}).$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el rango o recorrido de la función.

Algunas definiciones

Definición

Una función de varias variables es una función f que tiene su dominio A contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Ocasionalmente escribimos $\mathbf{x}$ en lugar de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ o bien

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad / \quad \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}).$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el rango o recorrido de la función.
Cada x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, es una variable independiente, mientras que w es variable dependiente.
Ejemplo: $f : (x, y) \to x^2 + y^2$.

Algunas definiciones

Algunos ejemplos:

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

$$I(f) = [0, +\infty)$$

Algunas definiciones

Algunos ejemplos:

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

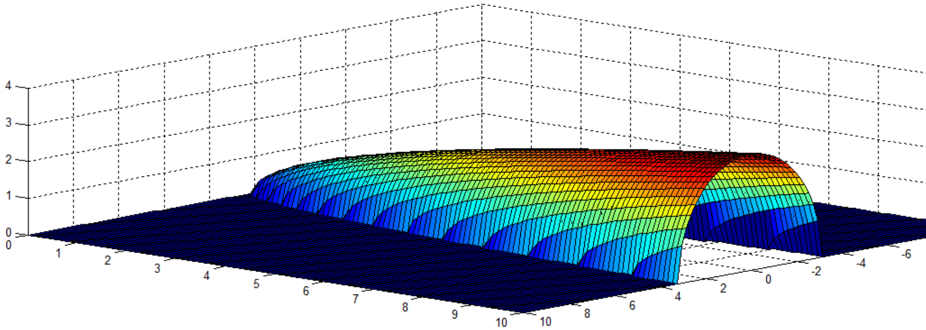
$$I(f) = [0, +\infty)$$

$$g(x,y,z) = z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$D(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x \neq y\}$$

Ejemplo

$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$



Recorrido

Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama **gráfico o gráfica de** f

al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$
$G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

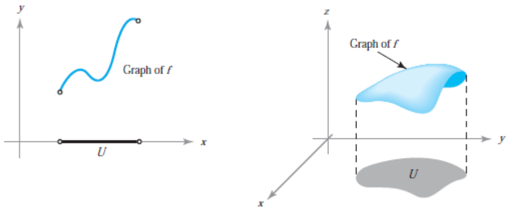
Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama **gráfico o gráfica de** f al subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$

$G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

Observación: si $n = 1$, la gráfica de f es una curva en $\mathbb{R}^2$; si $n = 2$, la gráfica de f es una superficie en $\mathbb{R}^3$. Si $n = 3$, la gráfica de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ y no podemos representarla.



Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Conjunto de nivel (k) de f es el conjunto
$\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Conjunto de nivel (k) de f es el conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Casos especiales:

$n = 2$**:**

Curva de nivel de f es el conjunto $\{(x, y) \in\in D : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Curva de contorno de f es el conjunto $\{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

Definición

Conjunto de nivel (k) de f es el conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Casos especiales:

$n = 2$**:**

Curva de nivel de f es el conjunto $\{(x, y) \in\in D : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Curva de contorno de f es el conjunto $\{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

$n = 3$**:**

Superficie de nivel de f es el conjunto $\{(x, y, z) \in\in D : f(x, y, z) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Definiciones de gráfica y conjunto de nivel

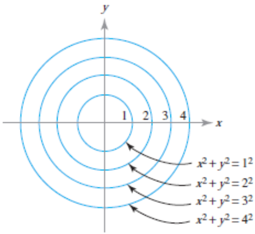


figure 2.1.6 Some level curves for the function $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Curvas de nivel

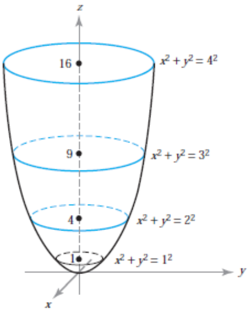


figure 2.1.7 Level curves in Figure 2.1.6 raised to the graph.

Curvas de contorno

$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

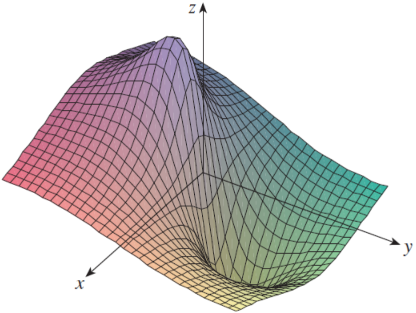
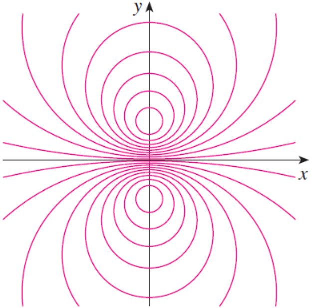


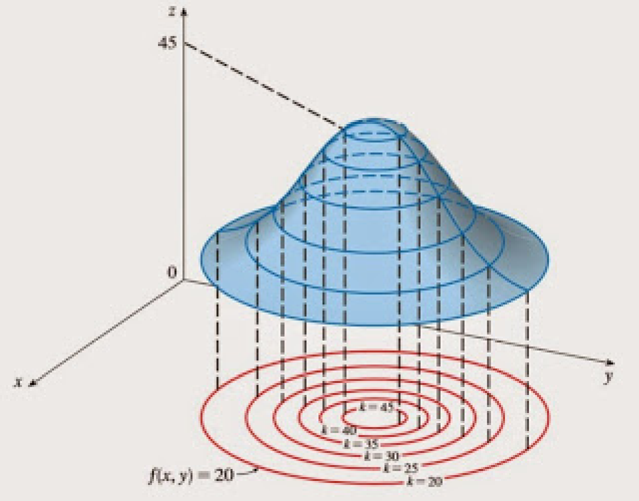
Gráfico de f



Curvas de nivel de f

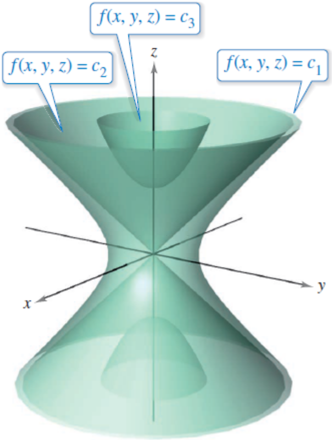
(Ejemplo de Stewart)

Curvas de contorno y curvas de nivel



Representación de funciones de tres variables: superficies de nivel

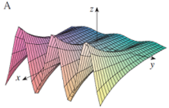
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

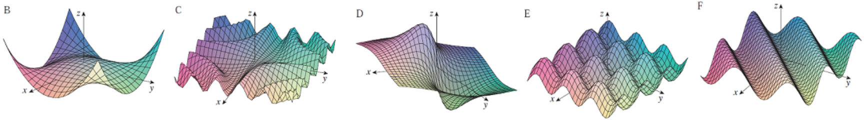


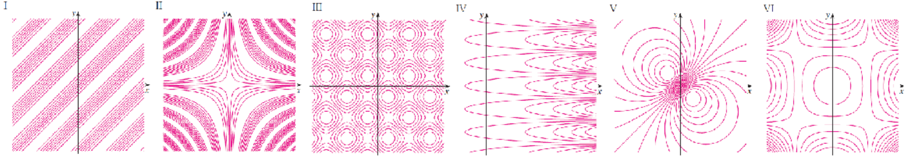
Ejercicio

59. $z = \sin(xy)$ **60.** $z = e^x \cos y$ **61.** $z = \sin(x - y)$

62. $z = \sin x - \sin y$ **63.** $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ **64.** $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

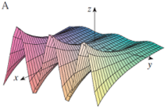


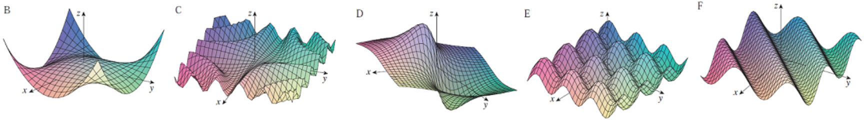


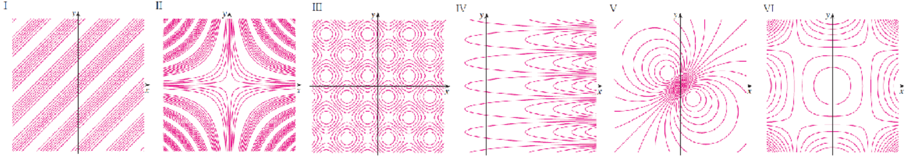


59. $z = \sin(xy)$ **60.** $z = e^{x} \cos y$ **61.** $z = \sin(x - y)$

62. $z = \sin x - \sin y$ **63.** $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$ **64.** $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$







59 c II; 60 a IV; 61 f I; 62 e III; 63 b VI; 64 d V

Recorrido

Conceptos topológicos

Llamamos bola abierta o disco abierto de centro $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

Llamamos bola abierta o disco abierto de centro $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$D_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

En $\mathbb{R}^2$:

$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

En $\mathbb{R}^3$:

$$D_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}.$$

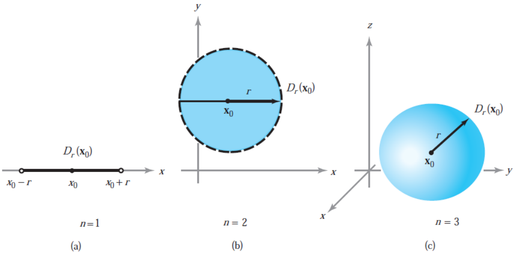


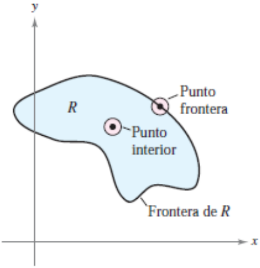
figure 2.2.1 What disks $D_r(\mathbf{x}_0)$ look like in (a) one, (b) two, and (c) three dimensions.

Conceptos topológicos

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

P_0 es un punto interior de U si existe un entorno abierto (bola) de P_0 incluido en U.

P_0 es un punto frontera de U si para todo entorno abierto (bola) de P_0 hay puntos del entorno que pertenecen a U y hay puntos del entorno que no pertenecen a U.



La frontera y los puntos interiores de una región R

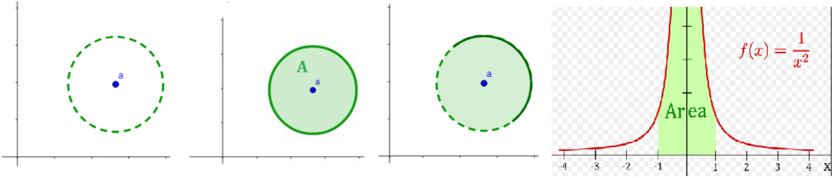
Conceptos topológicos

U es un conjunto abierto si para todo punto $\mathbf{x} \in U$ existe un entorno $D_r(\mathbf{x}) \subset U$. Es decir, si todo punto de U es un punto interior de U.

U es un conjunto cerrado si todos los puntos frontera de U pertenecen a U.

U es un conjunto acotado si existe una bola B tal que $U \subset B$.

U es un conjunto no acotado si ninguna bola lo incluye.



Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Un disco abierto de $\mathbb{R}^2$ es abierto, no es cerrado y es acotado.

Un disco abierto en el plano xy como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ no es abierto, no es cerrado y es acotado.

Recorrido

Definición de límite

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, y escribimos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L,$$

si $f(\mathbf{x})$ puede hacerse arbitrariamente próximo a L, haciendo que $\mathbf{x}$ sea suficientemente próximo a $\mathbf{x}_0$.

Observación: Se escribe equivalentemente

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}{\longrightarrow} L.$$

Definición de límite

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, y escribimos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L,$$

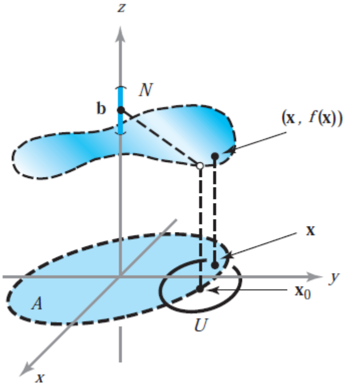
si $f(\mathbf{x})$ puede hacerse arbitrariamente próximo a L, haciendo que $\mathbf{x}$ sea suficientemente próximo a $\mathbf{x}_0$.

Observación: Se escribe equivalentemente

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}{\longrightarrow} L.$$

Propiedad de unicidad del límite: si $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_1$ y $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_2$, $L_1 = L_2$.

En $\mathbb{R}^2$:



Propiedades de límites de funciones de dos variables

Propiedad

Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$, *donde* L *y* M *son números reales, entonces:*

Propiedades de límites de funciones de dos variables

Propiedad

Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$, *donde* L *y* M *son números reales, entonces:*

1.Suma y resta	$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f \pm g)(\mathbf{x}) = L \pm M$
2.Producto	$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = LM$
3.Cociente	$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{L}{M}$, *si* $M \neq 0$
4.Potencia	$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}))^n = L^n$, *si* $n \in \mathbb{N}$
5.Raíz	$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \sqrt[n]{f(\mathbf{x})} = \sqrt[n]{L}$, *si* $n \in \mathbb{N}$; *si* n *es par,* $L > 0$.
6.	*en la siguiente diapositiva!*

SIN DEMOSTRAR

Propiedad

6.Componentes: Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$*, donde* $f_i : A \to \mathbb{R}$*,* $i = 1, \cdots, m$*, son las funciones componentes de* f*, entonces* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)$ *sii* $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$*, para cada* $i = 1, \cdots, m$*.*

SIN DEMOSTRAR

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = 0\end{aligned}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

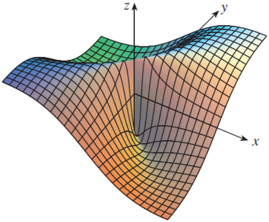
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \textbf{ no existe}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



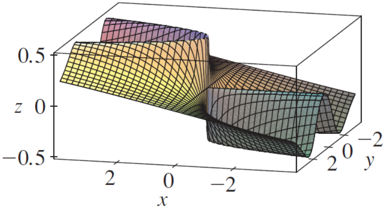
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4};\; f(x,0)=0;\; f(0,y)=0;$$

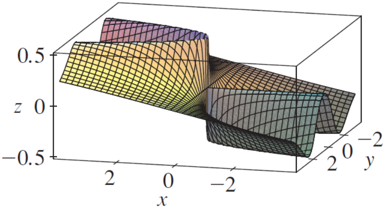


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0;$$



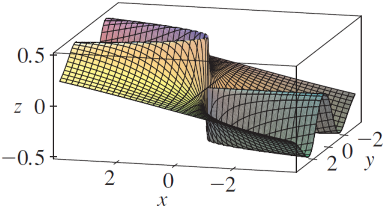
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow} 0;$$

$$f(x^2,x) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$



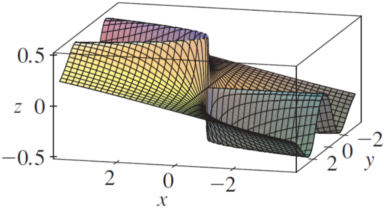
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ **no existe**}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0;$$

$$f(x^2,x) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$



Continuidad

DEFINICIÓN: Continuidad Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es ***continua*** en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos solamente que f es ***continua***, queremos decir que f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A. Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es ***discontinua*** en $\mathbf{x}_0$. Si f es discontinua en algún punto de su dominio decimos que f es ***discontinua***.

Recorrido

Definición

Una función f es continua en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0;
- existe $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ y
- $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

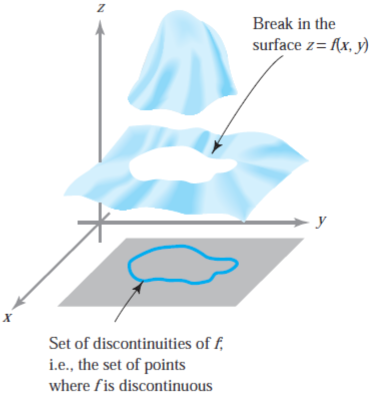
Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D.

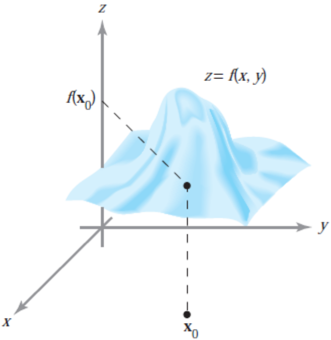
Observación

Los polinomios y las funciones racionales son continuos en los puntos de sus respectivos dominios.

Analizar ejemplos.

Continuidad





Continuidad de la composición

Composición

A continuación estudiemos la *composición*, otra operación básica que se puede realizar con funciones. Si g aplica A en B y f aplica B en C, la ***composición de*** g ***con*** f, o de f sobre g, que se denota por $f \circ g$, aplica A en C y lleva $\mathbf{x} \to f(g(\mathbf{x}))$ (*véase* la Figura 2.2.15). Por ejemplo, $\operatorname{sen}(x^2)$ es la composición de $x \to x^2$ con $y \to \operatorname{sen} y$.

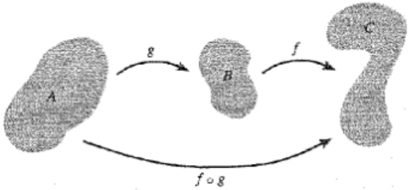


Figura 2.2.15. La composición de f sobre g.

Teorema

Sea $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y sea* $f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. *Supongamos que* $g(A) \subset B$, *de forma que* $f \circ g$ *esté definida en* A. *Si* g *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in A$ *y* f *es continua en* $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, *entonces* $f \circ g$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

Continuidad: ejemplos

EJEMPLO 2.17 Sea $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{30} + \operatorname{sen} z^3$. Probar que f es continua.

Solución

Podemos escribir f como suma de dos funciones $(x^2 + y^2 + z^2)^{30}$ y $\operatorname{sen} z^3$, por tanto es suficiente demostrar que cada una de ellas es continua. La primera es la composición de $(x, y, z) \to (x^2 + y^2 + z^2)$ con $u \to u^{30}$ y la segunda, la composición de $(x, y, z) \to z^3$ con $u \to \operatorname{sen} u$, y por tanto obtenemos la continuidad por el Teorema 5.

Continuidad: ejemplos

EJEMPLO 2.21

a) ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2+y^2)$?

[*Véase* la Figura 2.2.18(a).]

b) Demostrar que [*véase* la Figura 2.2.18(b)]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

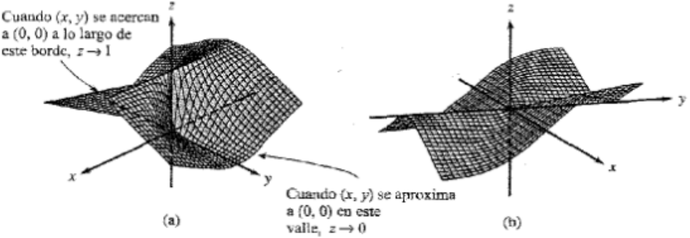


Figura 2.2.18. (a) La función $z = x^2/(x^2+y^2)$ no tiene límite en $(0, 0)$. (b) La función $z = (2x^2y)/(x^2+y^2)$ tiene límite 0 en $(0, 0)$.

Continuidad: ejemplos

a) Probar que el límite no exite.
b) Se prueba usando la definición FORMAL de límite. Usamos un gráfico, en su lugar.

Recorrido

Recorrido

Definición de derivada parcial

DEFINICIÓN: Derivadas parciales Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y supóngase que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$, las ***derivadas parciales*** de f respecto de la primera, segunda, ..., n-ésima variable, son las funciones con valores reales de n variables que, en el punto $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$, se definen como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

si los límites existen, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ y $\mathbf{e}_j$ es el vector j-ésimo de la base canónica definido por $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en la posición j-ésima (*véase* la Sección 1.5). El dominio de la función $\partial f/\partial x_j$ es el conjunto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ para los que el límite existe.

Definición de derivada parcial ($D(f) \subset \mathbb{R}^2$)

Definición

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial ($D(f) \subset \mathbb{R}^2$)

Definición

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

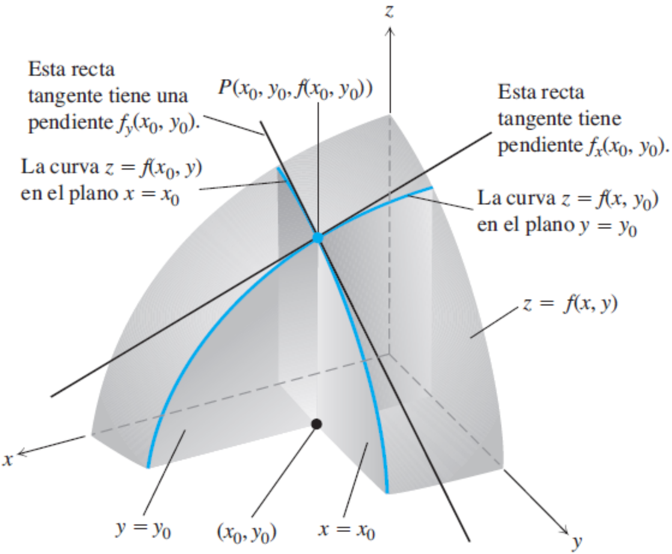
Definición

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es

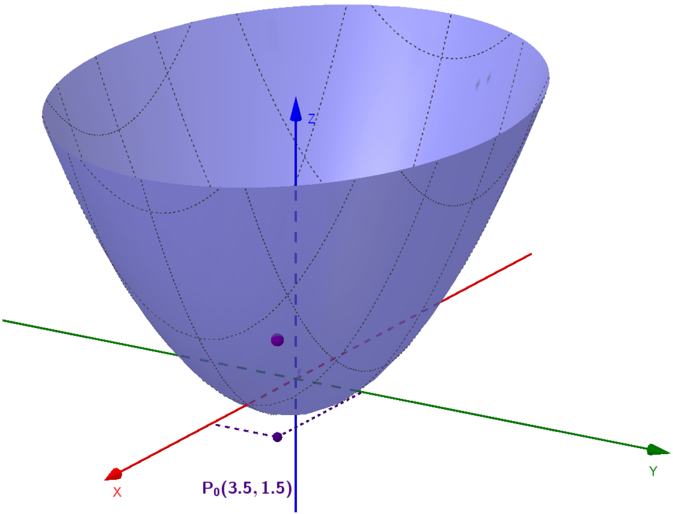
$$f_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

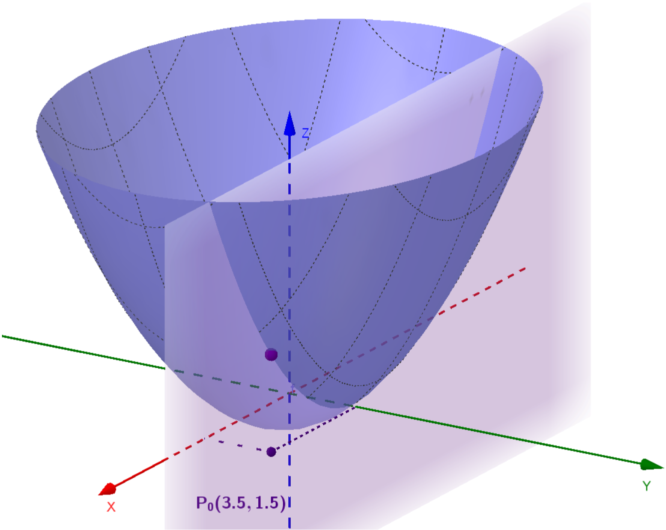
Interpretación geométrica derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^2$)



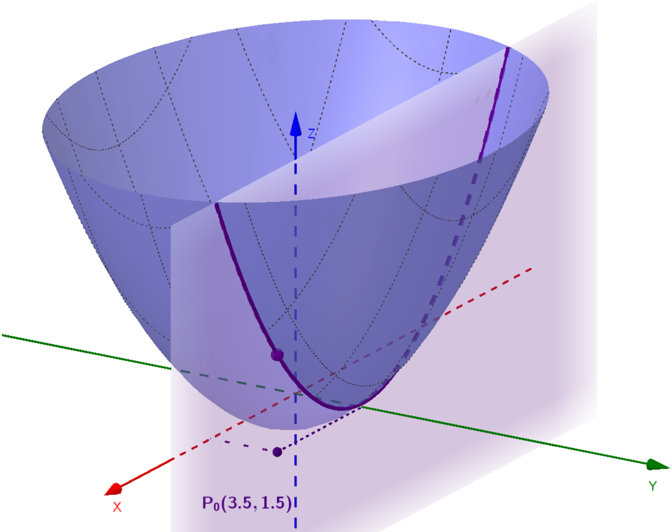
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



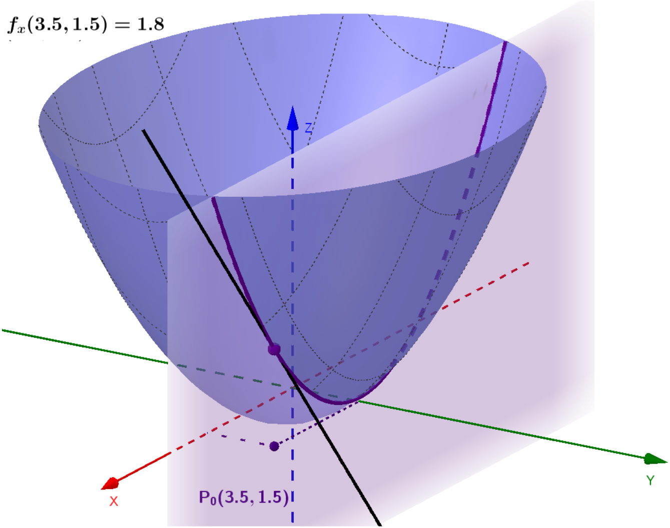
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z.

Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z.
En este caso la derivada se interpreta como la razón instantánea de cambio de la función en la dirección que corresponda (x, y o z).

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

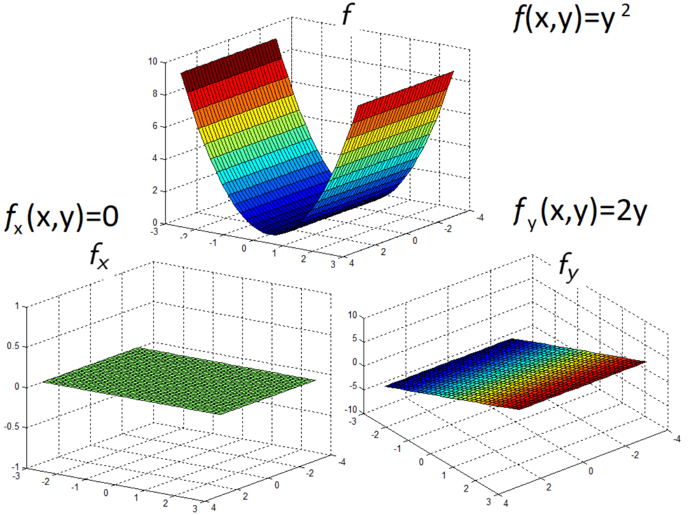
Ejemplo

Dada $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)y^2$, se tiene que

$$f_x(x,y) = \cos(x)y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = \operatorname{sen}(x)2y.$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = y^2$. Halle $f_x(0,1)$. Halle f_x y f_y como funciones. Interprete los gráficos.



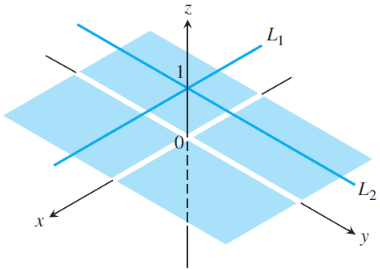
Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

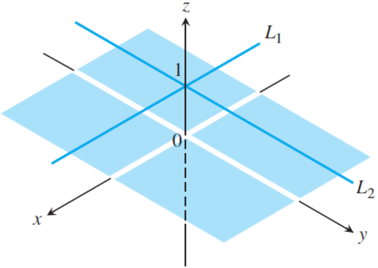
$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

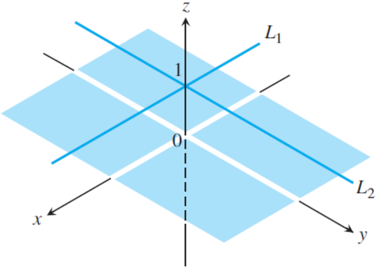
- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,



Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

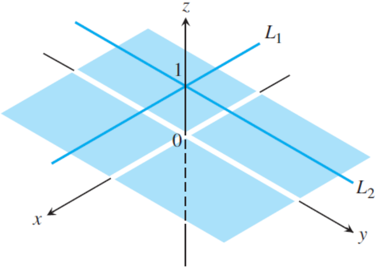
- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,



Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

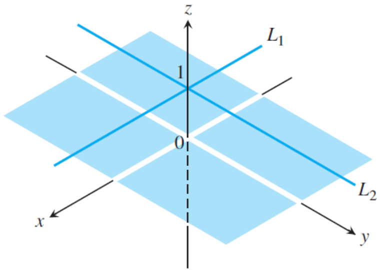


- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



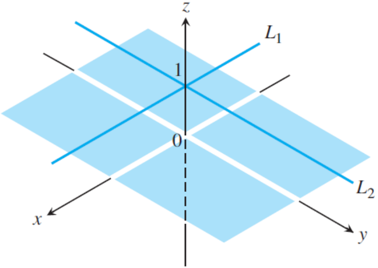
- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$f_y(0,0) = 0.$$

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$f_y(0,0) = 0.$$

Observación: la existencia de derivadas parciales en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto.

Recorrido

Recorrido

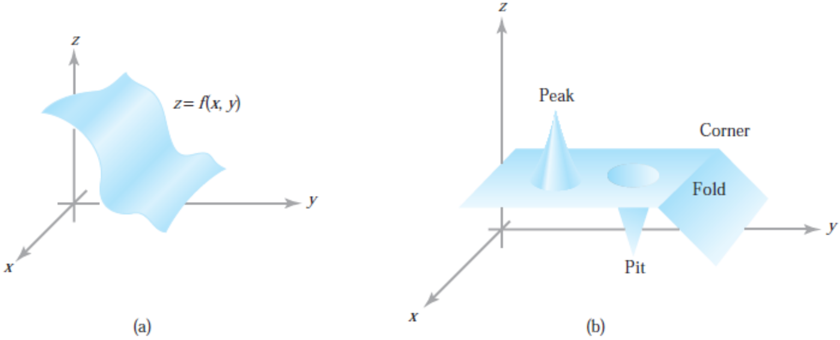


figure **2.3.1** (a) A smooth graph and (b) a nonsmooth one.

Aproximación lineal

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ si f es suave es:

$z = ax + by + c \qquad \leftarrow$ ecuación de un plano no vertical en $\mathbb{R}^3$

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0); \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)$$

Debe pasar por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) : f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y + f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Plano tangente (informal)

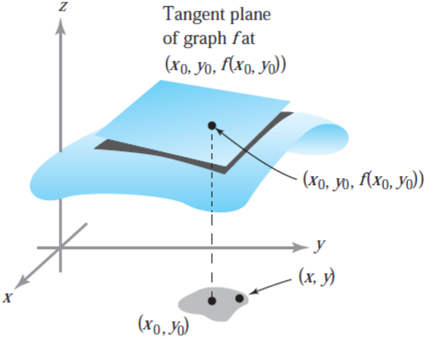


figure **2.3.3** For points (x, y) near (x_0, y_0), the graph of the tangent plane is close to the graph of f.

Motivación definición función diferenciable

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0, se tiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Recorrido

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Definición

Diferenciabilidad, dos variables Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple

$$\frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Definición

Diferenciabilidad, dos variables Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple

$$\frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \to 0$$

cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Observación: Esta ecuación expresa lo que queremos decir cuando decimos que

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

es una **buena aproximación** de la función f (en un entorno de (x_0,y_0)).

Recorrido

El plano tangente

DEFINICIÓN: Plano tangente Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se llama ***plano tangente*** de la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

Definition Tangent Plane Let $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be differentiable at $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. The plane in $\mathbb{R}^3$ defined by the equation

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

is called the ***tangent plane*** of the graph of f at the point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ejemplo

EJEMPLO 2.26 Calcular el plano tangente a la gráfica de $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

Solución

Utilícese la Fórmula (1) con $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, y $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}.$$

En $(1, 0, 2)$ estas derivadas parciales son 2 y 1 respectivamente, por tanto, por la Fórmula (1), el plano tangente es

$$z = 2(x - 1) + 1(y - 0) + 2, \qquad \text{es decir,} \qquad z = 2x + y.$$

Escribamos $\mathbf{D}f(x_0,y_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]$. Eso implica

$$f(x_0,y_0)+ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) =$$
$$= f(x_0,y_0)+\mathbf{D}f(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

En la definición de diferenciabilidad podemos sustituir:

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \to 0$$

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\mathbf{D}f(x_0,y_0)\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \to 0$$

Función diferenciable, caso general

Ahora estamos preparados para dar una definición de diferenciabilidad de funciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ utilizando la discusión precedente como motivación. La derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en un punto $\mathbf{x}_0$ es una matriz $\mathbf{T}$ cuyos elementos son $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$[2].

DEFINICIÓN: Diferenciable, *n* variables, *m* funciones Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es ***diferenciable*** en $\mathbf{x}_0 \in U$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y, además,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{4}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ con elementos $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ por $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (visto como matriz columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ la ***derivada*** de f en $\mathbf{x}_0$.

Función diferenciable, caso general

Ahora estamos preparados para dar una definición de diferenciabilidad de funciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ utilizando la discusión precedente como motivación. La derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en un punto $\mathbf{x}_0$ es una matriz $\mathbf{T}$ cuyos elementos son $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$ [2].

DEFINICIÓN: Diferenciable, *n* variables, *m* funciones Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es ***diferenciable*** en $\mathbf{x}_0 \in U$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y, además,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{4}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ con elementos $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ por $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (visto como matriz columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ la ***derivada*** de f en $\mathbf{x}_0$.

Aquí siempre denotaremos la derivada $\mathbf{T}$ de f en $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, aunque en algunos libros se denota por $df(\mathbf{x}_0)$ y se refieren a ella como la ***diferencial*** de f. En el caso en el que $m = 1$ la matriz $\mathbf{T}$ es simplemente el vector fila

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right]$$

En el caso general en el que f está definida sobre un conjunto de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$, la derivada es la matriz $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde las $\partial f_i / \partial x_j$ se evalúan en $\mathbf{x}_0$. La matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ se llama, con propiedad, ***matriz de las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$***.

Caso $n = 2$

si ponemos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, una función con valores reales f de n variables es diferenciable en un punto $\mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left| f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j \right| = 0,$$

ya que

$$\mathbf{Th} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Ejemplos

EJEMPLO 2.27 Calcular las matrices de derivadas parciales para las funciones:

a) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$.

b) $f(x, y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$.

c) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$.

Ejemplos

EJEMPLO 2.27 Calcular las matrices de derivadas parciales para las funciones:

a) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$.

b) $f(x, y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$.

c) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$.

Solución

a) Aquí $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define por medio de $f_1(x, y) = e^{x+y} + y$, y de $f_2(x, y) = y^2x$; por tanto, $\mathbf{D}f(x, y)$ es la matriz 2×2

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}.$$

b) Tenemos que

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}.$$

c) En este caso

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}.$$

Recorrido

Gradientes

Para funciones con valores reales utilizamos una terminología especial para la derivada.

DEFINICIÓN: Gradiente Considérese el caso especial $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En este caso $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, llamado ***gradiente*** de f y denotado por ∇f o grad f.

Gradientes

Para funciones con valores reales utilizamos una terminología especial para la derivada.

DEFINICIÓN: Gradiente Considérese el caso especial $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En este caso $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, llamado ***gradiente*** de f y denotado por ∇f o grad f.

A partir de la definición vemos que, para $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

mientras que para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

El significado geométrico del gradiente se discutirá en la Sección 2.6. En términos del producto escalar podemos escribir la derivada de f como

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

Ejemplos

EJEMPLO 2.28 Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^y$. Entonces

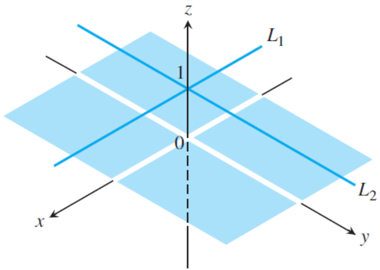
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 0).$$

EJEMPLO 2.29 Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $(x, y) \to e^{xy} + \operatorname{sen} xy$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (ye^{xy} + y\cos xy)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x\cos xy)\mathbf{j}\\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).\end{aligned}$$

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

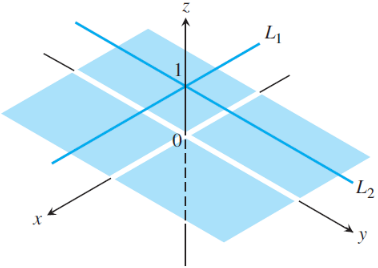
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

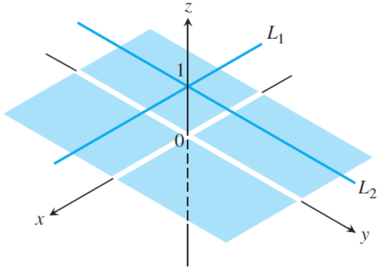
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$: existe $\nabla f(0,0)$.
  $f_x(0,0) = 0$;
  $f_y(0,0) = 0$;

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

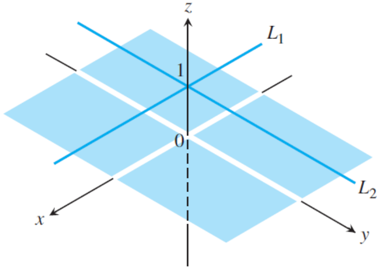
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$: existe $\nabla f(0,0)$.
  $f_x(0,0) = 0$;
  $f_y(0,0) = 0; \nabla f(0,0) = (0,0)$.

Ejemplo: sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$: existe $\nabla f(0,0)$.
  $f_x(0,0) = 0$;
  $f_y(0,0) = 0; \nabla f(0,0) = (0,0)$.

Observación: la existencia de gradiente en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto.

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in u$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

Teoremas

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in u$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

Sin demostración.

Teoremas

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in u$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

Sin demostración.

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Supongamos que todas las derivadas parciales* $\partial f_i / \partial x_j$ *de* f *existen y son continuas en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$*.*

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in u$*. Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

Sin demostración.

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Supongamos que todas las derivadas parciales* $\partial f_i/\partial x_j$ *de* f *existen y son continuas en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$*. Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$*.*

Con desmotración del caso $m = 1$.

Teoremas

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in u$. *Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

Sin demostración.

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Supongamos que todas las derivadas parciales* $\partial f_i / \partial x_j$ *de* f *existen y son continuas en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$. *Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$.

Con desmotración del caso $m = 1$.

	Condición suficiente para la diferenciabilidad ↓		Definición de derivada ↓	
Parciales continuas	⇒	Diferenciable	⇒	Parciales existen

Teoremas

Teorema (Diferenciabilidad implica continuidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{x}_0 \in u$. *Entonces* f *es continua en* $\mathbf{x}_0$.

Sin demostración.

Teorema (Condición suficiente para la diferenciabilidad)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Supongamos que todas las derivadas parciales* $\partial f_i / \partial x_j$ *de* f *existen y son continuas en un entorno de un punto* $\mathbf{x} \in U$. *Entonces* f *es diferenciable en* $\mathbf{x}$.

Con desmotración del caso $m = 1$.

	Condición suficiente para la diferenciabilidad ↓		Definición de derivada ↓	
Parciales continuas	⇒	Diferenciable	⇒	Parciales existen

Se dice que una función es de *clase* C^1 si sus derivadas parciales existen y son continuas; por tanto, el Teorema 9 dice que *toda función* C^1 *es diferenciable*.