UNIDAD 1: Funciones de varias variables

1.1 Diferenciación

Recorrido

Recorrido

Trayectorias y curvas

Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$;

Trayectorias y curvas

Definición (Trayectoria y curva)

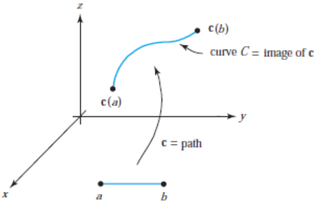
Una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$.

Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama **curva** y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**.

Definición (Trayectoria y curva)

Una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; es una **trayectoria en el plano** si $n = 2$ y una **trayectoria en el espacio** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a,b]$ se llama **curva** y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus **extremos**. Se dice que la trayectoria o camino $\mathbf{c}$ **parametriza** la curva C. Decimos también que $\mathbf{c}(t)$ traza C al variar t. Si $\mathbf{c}$ es un camino en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ **funciones componentes** de $\mathbf{c}$. Las funciones componentes en $\mathbb{R}^2$ o, en general, en $\mathbb{R}^n$, se definen de forma similar.



Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?

Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$

Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$
4. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$

Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$
4. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$
5. $\mathbf{c}(t) = (t, f(t)), \quad t \in D(f) \subset \mathbb{R}.$

Ejemplos

1. $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Otra trayectoria, misma curva?
2. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$
4. $\mathbf{c}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$
5. $\mathbf{c}(t) = (t, f(t)), \quad t \in D(f) \subset \mathbb{R}.$

Velocidad y tangente a una trayectoria

Si $\mathbf{c}(t)$ es la curva trazada por una partícula y t es el tiempo, se define:

Definición (Vector velocidad)

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria y es diferenciable, decimos que $\mathbf{c}$ es una trayectoria diferenciable. La velocidad de $\mathbf{c}$ en el instantte t se define como

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}.$$

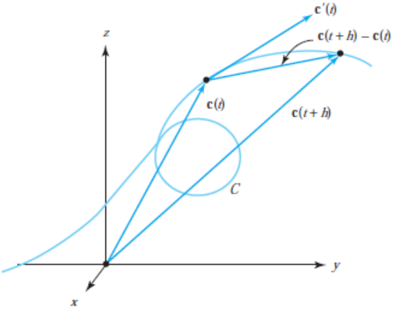
Normalmente trazamos el vector $\mathbf{c}'(t)$ con origen en el punto $\mathbf{c}(t)$. La *rapidez* de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, la longitud del vector velocidad. Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ está en $\mathbb{R}^2$, se tiene

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

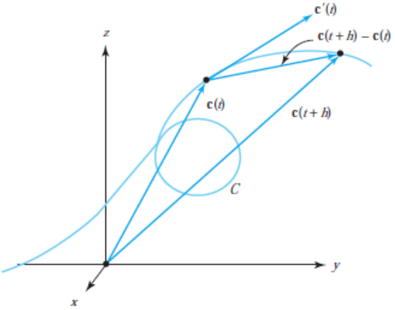
y, si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Interpretación gráfica

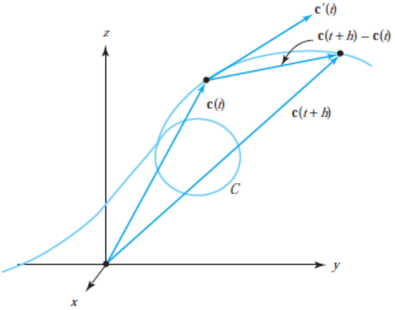


Interpretación gráfica



Definición (Vector tangente)

La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Si C es una curva trazada por $\mathbf{c}$ y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual al vector nulo, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.



Definición (Vector tangente)

La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Si C es una curva trazada por $\mathbf{c}$ y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual al vector nulo, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

La derivada $\mathbf{Dc}(t)$ es un vector columna, de componentes $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$.

Ejemplos

EJEMPLO 2.36 Calcular el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, e^t)$ en el punto $t = 0$.

Solución

Resulta que $\mathbf{c}'(t) = (1, 2t, e^t)$ y en $t = 0$ obtenemos el vector tangente $(1, 0, 1)$.

EJEMPLO 2.37 Describir la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t)$. Hallar el vector velocidad en el punto de la curva imagen cuando $t = \pi/2$.

Solución

Para un t dado, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. Por tanto, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ está t unidades sobre el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si t es positivo y $-t$ unidades por debajo de $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si t es negativo. Cuando t crece $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la coordenada z creciente. La curva que traza se llama ***hélice*** y aparece dibujada en la Figura 2.4.9. En $t = \pi/2$, $\mathbf{c}'(\pi/2) = (-\operatorname{sen} \pi/2, \cos \pi/2, 1) = (-1, 0, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

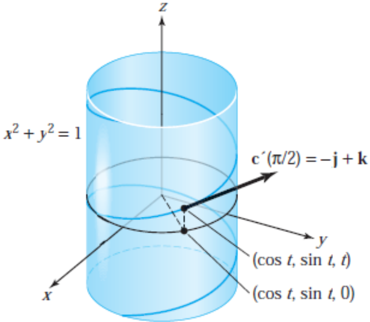


Figura 2.4.9. La hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ se enrolla sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Definición

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza $\mathbf{c}$, entonces la recta que traza $\mathbf{l}$ es la **recta tangente a la curva** C en $\mathbf{c}(t_0)$.

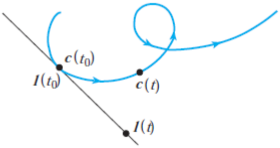
Recta tangente a una trayectoria y a una curva

Definición

Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su **recta tangente** en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza $\mathbf{c}$, entonces la recta que traza $\mathbf{l}$ es la **recta tangente a la curva** C en $\mathbf{c}(t_0)$.



Observación: $\mathbf{l}$ pasa por $\mathbf{c}(t_0)$ en $t = t_0$ (y no en $t = 0$).

Ejemplos

EJEMPLO 2.39 Una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ pasa por el punto $(3, 6, 5)$ en el instante $t = 0$ con vector tangente $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar la ecuación de la recta tangente.

Solución

La ecuación de la recta tangente es

$$l(t) = (3, 6, 5) + t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0) = (3 + t, 6 - t, 5).$$

En coordenadas $(x, y, z,)$, la recta tangente es $x = 3 + t$, $y = 6 - t$, $z = 5$.

Ejemplos

EJEMPLO 2.40 Supóngase que una partícula sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 1$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución

El vector velocidad es $(e^t, -e^{-t}, -\operatorname{sen} t)$, que en instante $t = 1$ es el vector $(e, -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. La partícula está en $(e, 1/e, \cos 1)$ en el instante $t = 1$. La ecuación de la recta tangente es $l(t) = (e, 1/e, \cos 1) + (t-1)(e, 1/e, -\operatorname{sen} 1)$. En el instante $t = 3$ la posición sobre esta recta es:

$$l(3) = \left(e, \frac{1}{e}, \cos 1\right) + 2\left(e, -\frac{1}{e}, -\operatorname{sen} 1\right) = \left(3e, -\frac{1}{e}, \cos 1 - 2\operatorname{sen} 1\right)$$

$$\cong (8{,}155, -0{,}368, -1{,}143).$$

Recorrido

1. 2.4: Introducción a trayectorias y curvas
2. 2.5: Propiedades de la derivada
3. 2.6 Gradientes y derivadas direccionales

Sumas, productos y cocientes

Teorema

1. **Multiplicación por una constante**. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y sea* c *un número real. Entonces* $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \textit{(igualdad de matrices).}$$

2. **Suma**. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciables en* $\mathbf{x}_0$*. Entonces* $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \qquad \textit{(suma de matrices).}$$

3. **Producto**. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciables en* $\mathbf{x}_0$ *y sea* $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$*. Entonces* $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(cada miembro es una matriz $1 \times n$*).*

Teorema

4. **Cociente**. *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciables en* $\mathbf{x}_0$ *y sea* $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ *y supóngase que* g *nunca se anula en* U*. Entonces* $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}.$$

(cada miembro es una matriz $1 \times n$*).*

Sumas, productos y cocientes

Dem 1: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(igualdad de matrices).}$$

Dem 1: Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(igualdad de matrices).}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}
&= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|c|\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= |c| \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(x_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= 0 \qquad \text{por ser } f \text{ diferenciable en } \mathbf{x}_0.
\end{aligned}$$

Regla de la cadena

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ *y* $V \subset \mathbb{R}^m$ *conjuntos abiertos. Sean* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *funciones tales que* $g(U) \subset V$, *de tal forma que* $f \circ g$ *esté definida. Supóngase que* g *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y que* f *es diferenciable en* $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. *Entonces* $f \circ g$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *y*

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

El segundo miembro es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ *y* $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ es matriz fila y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ es matriz columna.

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

y definimos $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por medio de

$$h(x,y,z) = (f \circ g)(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)).$$

En este caso la regla de la cadena dice:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escribimos

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$$

y definimos $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por medio de

$$h(x, y, z) = (f \circ g)(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

En este caso la regla de la cadena dice:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Hemos escrito explícitamente el producto de matrices $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)]\,[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$, y no se han escrito los puntos $\mathbf{x}_0$ ni $\mathbf{y}_0$ en las matrices.

Ejemplo

EJEMPLO 2.42 Verificar la regla de la cadena en la forma dada por la Fórmula (3′) para

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$$

donde

$$u(x, y, z) = x^2y, \qquad v(x, y, z) = y^2, \qquad w(x, y, z) = e^{-xz}.$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(-ze^{-xz})$$
$$= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz},$$

que coincide con la ecuación precedente.

Ejemplo

EJEMPLO 2.43 Dadas $g(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ y $f(u, v) = (u + v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en el punto $(x, y) = (1, 1)$ usando la regla de la cadena.

Solución

Las matrices de derivadas parciales son:

$$\mathbf{D}f(u, v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

Nótese que, cuando $(x, y) = (1, 1)$, $g(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. Por tanto

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \mathbf{D}f(2, 1)\mathbf{D}g(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es la derivada pedida.

Ejemplo

EJEMPLO 2.44 Dados $f(x, y)$ y el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ (coordenadas p
lares), dar una fórmula para $\partial f/\partial\theta$.

Solución

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ejemplo

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$.

a) Dar una fórmula para $f \circ g$.

b) Calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

Ejemplo

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$.

a) Dar una fórmula para $f \circ g$.

b) Calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

Solución

a) Tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u, v) &= f(e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v) \\ &= (\cos(u - \operatorname{sen} v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \operatorname{sen} v}).\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$.

a) Dar una fórmula para $f \circ g$.

b) Calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

Solución

a) Tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u, v) &= f(e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)\\ &= (\cos(u - \operatorname{sen} v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \operatorname{sen} v}).\end{aligned}$$

b) Por la regla de la cadena,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = [\mathbf{D}f(g(0, 0))][\mathbf{D}g(0, 0)] = [\mathbf{D}f(1, 0)][\mathbf{D}g(0, 0)].$$

Ahora bien,

$$\mathbf{D}g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}_{(u, v) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(1, 0) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{(x, y) = (1, 0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}.$$

Recuérdese que $\mathbf{D}f$ se evalúa en $g(0, 0)$, ¡no en $(0, 0)$!). Por tanto,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}.$$

Recorrido

Gradientes en $\mathbb{R}^3$

Definición

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Gradientes en $\mathbb{R}^3$

Definición

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Ejemplo 2.48 Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) =$$

Gradientes en $\mathbb{R}^3$

Definición

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

Ejemplo 2.48 Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (y, x, 1).$$

.

Derivadas direccionales

Definición

Si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la **derivada direccional** de f en $\mathbf{x}$ en la dirección del vector **unitario** $\mathbf{v}$ es

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}+t\mathbf{v})\bigg|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

siempre que exista.

Fórmula de cálculo de la derivada direccional

Teorema (Fórmula de cálculo de la derivada direccional)

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{D} f(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es unitario.

Fórmula de cálculo de la derivada direccional

Teorema (Fórmula de cálculo de la derivada direccional)

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es unitario.

Dem: sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, de forma que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Aplicando la regla de la cadena, podemos derivar

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{c})(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable y* $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, *entonces* $\nabla f(\mathbf{x})$ *apunta en la dirección de máximo crecimiento de* f.

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.

Dem: Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$.

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.

Dem: Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos.

Direcciones de máximo crecimiento

Teorema

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.

Dem: Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección de $\mathbf{n}$ es

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \underbrace{\|\mathbf{n}\|}_{1} \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos.
Observación: cuando $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, esta variación es 0 para todo $\mathbf{n}$.

Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0,1)$?

Ejemplo

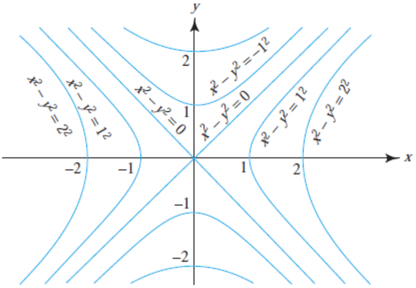
¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

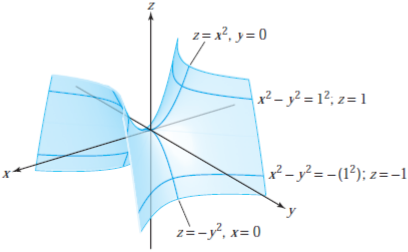
$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$

Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

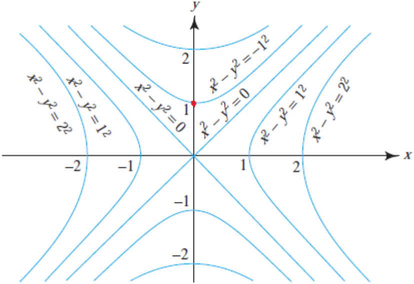
$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$

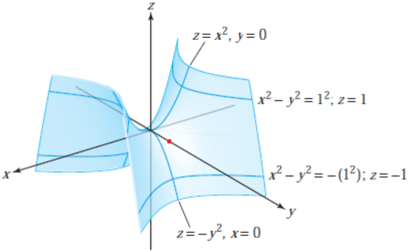




¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0, 1)$?

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0, 1) = (0, -2).$$

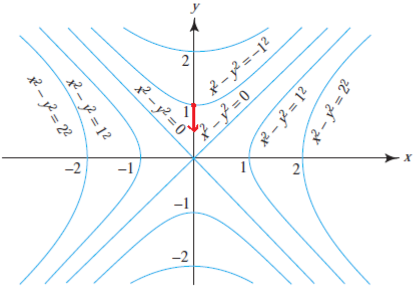


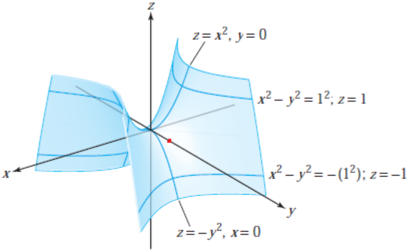


Ejemplo

¿En qué dirección crece más rápidamente la función $f(x,y) = x^2 - y^2$ desde el punto $(0,1)$?

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (2x, -2y); \quad \nabla f(0,1) = (0,-2).$$





Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

Teorema (El gradiente es normal a las superficies de nivel)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una aplicación de clase* C^1 *y sea* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *un punto de la superficie de nivel* S *definida por* $f(x, y, z) = k$ *para una constante* k*. Entonces* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *es normal a la superficie de nivel. (Es decir que si* $\mathbf{v}$ *es el vector tangente en* $t = 0$ *de una trayectoria* $\mathbf{c}(t)$ *en* S *con* $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$*, entonces* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$*.)*

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

Teorema (El gradiente es normal a las superficies de nivel)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una aplicación de clase* C^1 *y sea* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *un punto de la superficie de nivel* S *definida por* $f(x, y, z) = k$ *para una constante* k*. Entonces* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *es normal a la superficie de nivel. (Es decir que si* $\mathbf{v}$ *es el vector tangente en* $t = 0$ *de una trayectoria* $\mathbf{c}(t)$ *en* S *con* $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$*, entonces* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$*.)*

Dem: Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria en S, con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0 \in S$. Entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$ y, si $\mathbf{v}$ es el vector tangente en $t = 0$ de $\mathbf{c}(t)$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Como $f(\mathbf{c}(t))$ es constante en t, $\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = 0$ y, por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}.$$

Planos tangentes a superficies de nivel

Definición

Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para $k = cte$. El plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{1}$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (1).

Planos tangentes a superficies de nivel

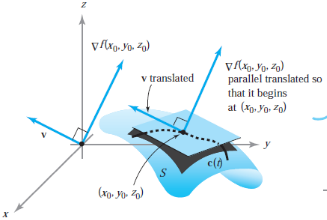
Definición

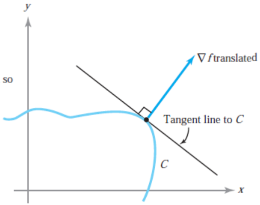
Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para $k = cte$. El plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface la ecuación (1).

Observación: de forma similar se define recta tangente a una curva de nivel de una función de dos variables.





Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x,y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x,y,z)=0$ para la función $g(x,y,z)=f(x,y)-z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$
$$(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-f(x_0,y_0))=0$$
$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0$$
$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Caso especial: plano tangente al gráfico de una función de dos variables

Dada $f(x, y)$ su gráfico **coincide** con el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 0$ para la función $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
La ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por:

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

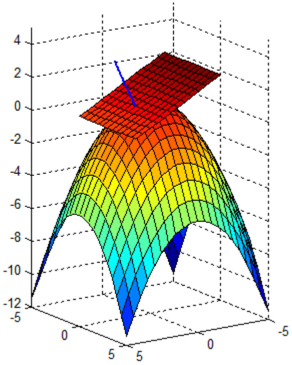
Obs: relacionar con la linealización de f en (x_0, y_0).

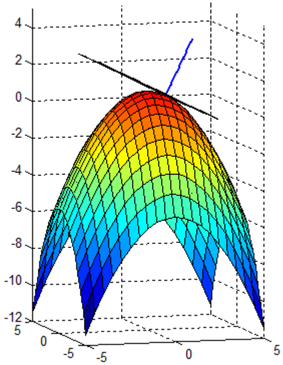
Ejemplo: $f(x,y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

.

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$z = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + 0(y-0) \qquad\qquad z = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(x-1)$$





El campo vectorial gradiente

A menudo nos referimos a ∇f como un ***campo vectorial gradiente***. La palabra «campo» significa que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f. En la Figura 2.6.4 describimos el gradiente ∇f no por medio de su gráfica que, si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sería un subconjunto de $\mathbb{R}^6$, es decir, el conjunto de pares $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$, sino representando $\nabla f(\mathrm{P})$, para cada punto P como un vector que parte del punto P, no del origen. Como en una gráfica, este método de representación de ∇f contiene el punto P y el valor $\nabla f(\mathrm{P})$ en la misma figura.

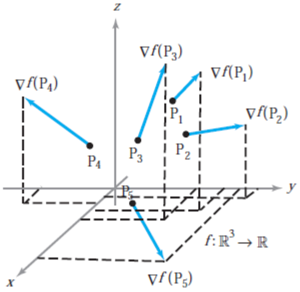


figure **2.6.4** The gradient ∇f of a function $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is a vector field on $\mathbb{R}^3$; at each point P_i, $\nabla f(P_i)$ is a vector emanating from P_i.

Ejemplo

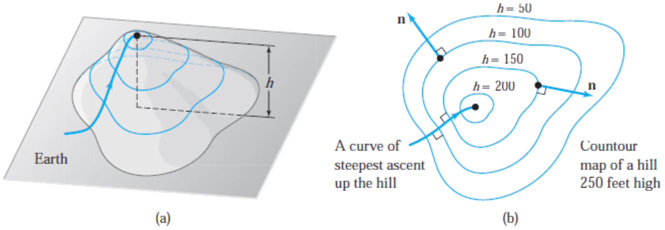
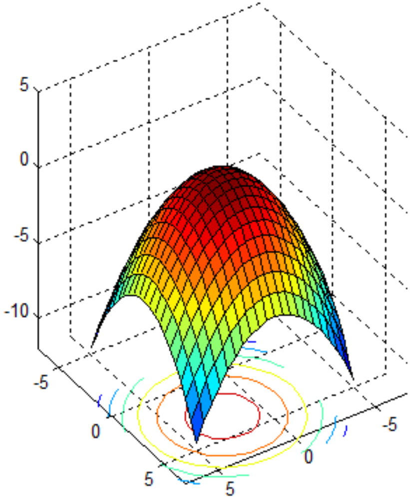


figure 2.6.5 A physical illustration of the two facts (a) ∇f is the direction of fastest increase of f, and (b) ∇f is orthogonal to the level curves.

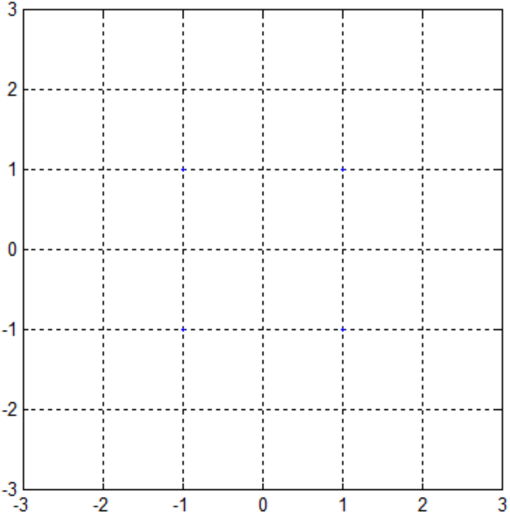
Ejemplo: $f(x,y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$



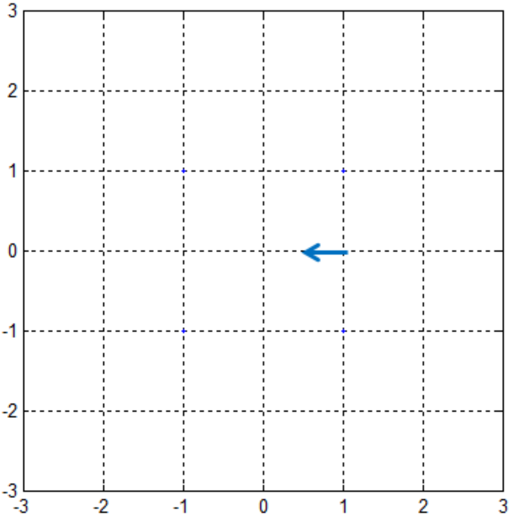
.

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right).$$

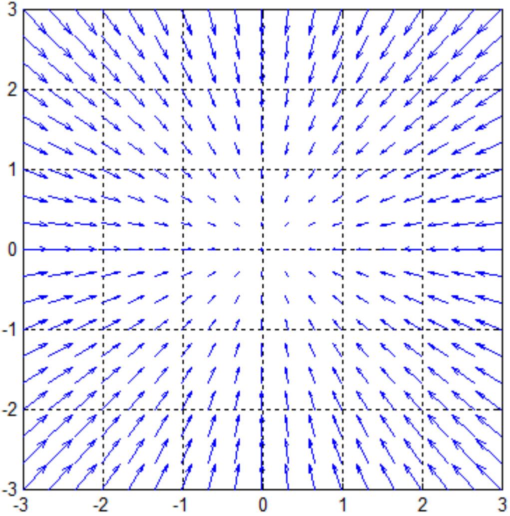
Ejemplo: $f(x,y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$



Ejemplo: $f(x, y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$

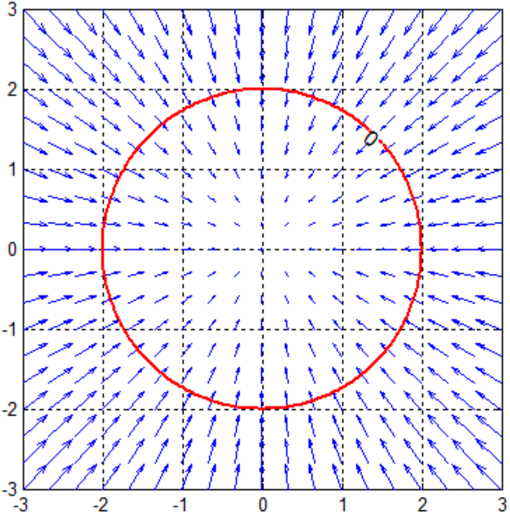


Ejemplo: $f(x,y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$



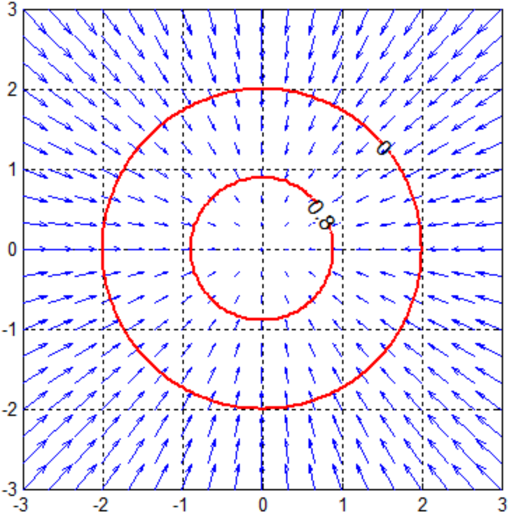
.

Ejemplo: $f(x, y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$



.

Ejemplo: $f(x, y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$



Ejemplo: $f(x,y) = 1 - x^2/4 - y^2/4$