UNIDAD 1: Funciones de varias variables

1.2 Derivadas de orden superior y extremos

Recorrido

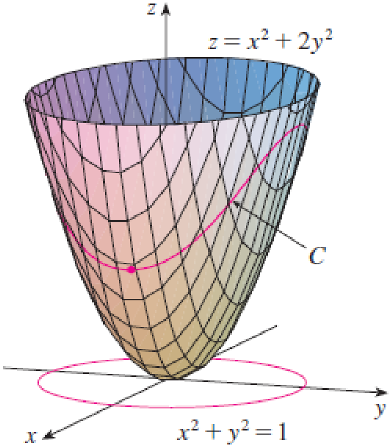
Recorrido

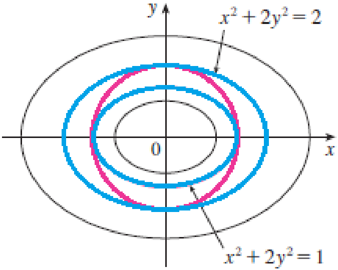
1. Multiplicadores de Lagrange

2. Teoremas

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Buscamos los extremos de f sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$.





Multiplicadores de Lagrange

Teorema (Método de multiplicadores de Lagrange)

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones* C^1. *Sean* $\mathbf{x}_0 \in U$ *y* $g(\mathbf{x}_0) = c$ *y sea* S *el conjunto de nivel de* g *con valor* c. *Supongamos que* $\nabla g(\mathbf{x}_0)) \neq \mathbf{0}$.

Si $f\big|S$ *(*f *restringida a* S*) alcanza en* $\mathbf{x}_0$ *un extremo local en* S*, entonces existe un número real* λ *tal que*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Multiplicadores de Lagrange

Teorema (Método de multiplicadores de Lagrange)

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$ y $g(\mathbf{x}_0) = c$ y sea S el conjunto de nivel de g con valor c. Supongamos que $\nabla g(\mathbf{x}_0)) \neq \mathbf{0}$.
Si $f\big|S$ (f restringida a S) alcanza en $\mathbf{x}_0$ un extremo local en S, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Un punto $\mathbf{x}_0$ donde se cumple $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ se llama punto crítico de $f\big|S$.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema (Método de multiplicadores de Lagrange)

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funciones* C^1. *Sean* $\mathbf{x}_0 \in U$ *y* $g(\mathbf{x}_0) = c$ *y sea* S *el conjunto de nivel de* g *con valor* c. *Supongamos que* $\nabla g(\mathbf{x}_0)) \neq \mathbf{0}$.
Si $f\big|S$ *(*f *restringida a* S*) alcanza en* $\mathbf{x}_0$ *un extremo local en* S, *entonces existe un número real* λ *tal que*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Un punto $\mathbf{x}_0$ donde se cumple $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ se llama punto crítico de $f\big|S$.
λ se llama multiplicador de Lagrange.

Planteo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ g(x_1, \ldots, x_n) &= c \end{aligned}\right\}$$

for $x_1, \ldots, x_n$ and λ.

Planteo

Another way of looking at these equations is as follows: Think of λ as an additional variable and form the auxiliary function

$$h(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda[g(x_1, \ldots, x_n) - c].$$

The Lagrange multiplier theorem says that to find the extreme points of $f|S$, we should examine the critical points of h. These are found by solving the equations

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial \lambda} = g(x_1, \ldots, x_n) - c \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

which are the same as equations (2) above.

EJEMPLO 3.21 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por $(-1, 0)$ con una inclinación de 45°, y sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$. Hallar los extremos de $f|S$.

Solución

Aquí $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$, y por consiguiente hacemos $g(x, y) = y - x - 1$ y $c = 0$. Tenemos $\nabla g(x, y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Los puntos de extremo relativo de $f|S$ deben hallarse entre aquellos puntos en que ∇f es ortogonal a S, esto es, en rectas con una inclinación de $-45°$.

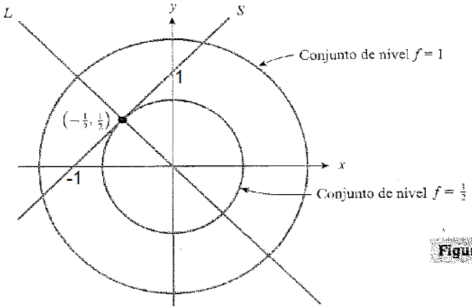


Figura 3.4.3. La geometría asociada con la búsqueda de los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restringida a $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$.

Varias restricciones

Si una superficie S está definida por varias restricciones, a saber,

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) = c_k \end{array}\right\}, \tag{4}$$

entonces el teorema de los multiplicadores de Lagrange se puede generalizar como sigue: *si f tiene un máximo o un mínimo sobre S en $\mathbf{x}_0$, deben existir constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que*[12]

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

EJEMPLO 3.25 Hallar los puntos de extremo de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

Solución

Aquí hay dos restricciones:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

Así, debemos encontrar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z),$$

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

EJEMPLO 3.25 Hallar los puntos de extremo de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

Solución

Aquí hay dos restricciones:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

Así, debemos encontrar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z),$$

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

Éstas son cinco ecuaciones para x, y, z, λ_1 y λ_2. De la tercera ecuación $\lambda_2 = 1$, y por tanto $2x\lambda_1 = 0$, $2y\lambda_1 = 1$. Como la segunda implica $\lambda_1 \neq 0$, tenemos $x = 0$. Por consiguiente, $y = \pm\sqrt{2}$ y $z = 1$. Por lo tanto, los posibles puntos de extremo son $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Una simple inspección muestra que $(0, \sqrt{2}, 1)$ da un máximo relativo y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ un mínimo relativo.

La condición $x^2 + y^2 = 2$ implica que x e y tienen que estar acotadas. La condición $x + z = 1$ implica que también z está acotada. Se deduce que el conjunto S dado por las restricciones es cerrado y acotado. Del Teorema 7 se sigue que f tiene un máximo y un mínimo en S, que se deben alcanzar en $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

Máximos y mínimos globales

El método de los multiplicadores de Lagrange refuerza nuestras técnicas para hallar máximos y mínimos globales. En este sentido, es útil lo que sigue.

DEFINICIÓN Sea U una región abierta en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U. Decimos que ∂U es ***suave*** si ∂U es el conjunto de nivel de una función suave g cuyo gradiente ∇g nunca se anula (esto es, $\nabla g \neq \mathbf{0}$). Entonces podemos seguir la estrategia que sigue.

Estrategia de los multiplicadores de Lagrange para encontrar máximos y mínimos absolutos en regiones con frontera Sea f una función diferenciable sobre una región cerrada y acotada $D = U \cup \partial U$, U abierto en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U suave.

Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

i) Encontrar todos los puntos críticos de f en U.

ii) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar todos los puntos críticos de $f|\partial U$.

iii) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.

iv) Comparar todos estos valores, y seleccionar el mayor y el menor.

Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados

TEOREMA 10 Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$, y sea S la curva de nivel de g correspondiente al valor c. Supongamos que $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ y que existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Formamos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante de la matriz ***hessiana orlada***

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } \mathbf{v}_0.$$

i) Si $|\bar{H}| > 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de máximo local de $f|S$.

ii) Si $|\bar{H}| < 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de mínimo local de $f|S$.

iii) Si $|\bar{H}| = 0$, el criterio no es concluyente y $\mathbf{v}_0$ puede ser un punto de máximo, un punto de mínimo o ninguna de las dos cosas.

Este teorema se prueba en el suplemento de Internet de esta sección.

Recorrido

Teorema de la función implícita

Teorema

Sea $F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ *con derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *por* $(\mathbf{x},z)$, *donde* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ *y* $z\in\mathbb{R}$ *y suponemos que* $(\mathbf{x}_0,z_0)$ *cumple*

$$F(\mathbf{x}_0,z_0)=0 \quad \textit{y} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0,z_0)\neq 0.$$

Entonces hay dos bolas: $U\subset\mathbb{R}^n$ *tal que* $\mathbf{x}_0\in U$ *y* $V\subset\mathbb{R}$ *tal que* $z_0\in V$, *tales que existe una única función* $z=g(\mathbf{x})$ *definida para* $\mathbf{x}\in U$ *y* $z\in V$ *que satisface*

$$F(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))=0.$$

Más aún, si $\mathbf{x}\in U$ *y* $z\in V$ *satisfacen* $F(\mathbf{x},z)=0$, *entonces* $z=g(\mathbf{x})$. *Finalmente* $z=g(\mathbf{x})$ *es continuamente diferenciable, con derivada dada por*

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x})=-\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x},z)}\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x},z)\big|_{z=g(\mathbf{x})},$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F$ *denota las derivadas parciales de* F *con respecto a la variable* $\mathbf{x}$, *esto es* $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F=[\partial F/\partial x_1,\cdots,\partial F/\partial x_n$. *En otras palabras*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}=-\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z},\quad i=1,2,...,n.$$

El teorema general de la función implícita

A continuación enunciaremos, sin demostración, el *teorema general de la función implícita*[15]. En lugar de tratar de despejar una variable de una ecuación, intentamos despejar m variables $z_1, \ldots, z_m$ de m ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
F_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\
F_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad & \;\;\vdots \\
F_m(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

En el Teorema 11 teníamos la condición $\partial F/\partial z \neq 0$. La condición adecuada para el teorema general de la función implícita es que $\Delta \neq 0$[16], donde Δ es el determinante de la matriz $m \times m$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m}
\end{bmatrix}
$$

evaluado en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$; en un entorno de dicho punto podemos despejar $\mathbf{z}$, de manera única, en términos de $\mathbf{x}$.

Teorema de la función implícita

Teorema

Si $\Delta \neq 0$, entonces la ecuación (3) define de manera única funciones (suaves)

$$z_i = k_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, \cdots, m),$$

cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Sus derivadas se pueden calcular mediante diferenciación implícita.

El teorema de la función inversa

El *teorema de la función inversa* es un caso particular del teorema general de la función implícita. Aquí trataremos de despejar $x_1, \ldots, x_n$ como funciones de $y_1, \ldots, y_n$ en las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= y_1 \\ &\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{4}$$

es decir, estamos intentando invertir las ecuaciones del sistema (4).

A la pregunta de si es posible despejar, se responde mediante el teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, \ldots, x_n)$ con las incógnitas $(x_1, \ldots, x_n)$ (anteriormente llamadas $(z_1, \ldots, z_n)$). La condición para poder despejar en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0$ es $\Delta \neq 0$, donde Δ es el determinante de la matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, y $f = (f_1, \ldots, f_n)$. La cantidad Δ se denota por $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$, $\partial(y_1, \ldots, y_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ o $J(f)(\mathbf{x}_0)$, y recibe el nombre de ***determinante jacobiano*** de f. Explícitamente,

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = J(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Teorema de la función inversa

Teorema

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $f_1 : U \to \mathbb{R}, \cdots, f_1 : U \to \mathbb{R}$ con derivadas paricales continas. Consideramos las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \cdots, x_n) &= y_1 \\ &\cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{1}$$

cerca de una solución dada $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$. Si el determinante jacobiano

$$J(f)(\mathbf{x}_0) = \left.\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}$$

es no nulo, entonces en (1) se puede despejar[a] de manera única $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{y}$ cerca de $\mathbf{y}_0$. Además, la función g tiene derivadas parciales continuas.

[a] En el sentido de considerar como función, no siempre se podrá despejar.