UNIDAD 1: Funciones de varias variables

1.3 Funciones con valores vectoriales

Recorrido

Recorrido

Diferenciación de trayectorias

Recordemos que una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c}$ de $\mathbb{R}$ o un intervalo en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Si la trayectoria es diferenciable, su derivada en cada instante t es una matriz $n \times 1$. Más concretamente, si las componentes del vector $\mathbf{c}(t)$ son $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, la matriz derivada es

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix},$$

que también puede escribirse en forma de vector como

$$(dx_1/dt, \ldots, dx_n/dt) \qquad \text{o} \qquad (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Propiedades

Reglas de derivación Sean $\mathbf{b}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ trayectorias diferenciables en $\mathbb{R}^3$, y sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones escalares diferenciables.

$$\textit{Regla de la suma:}\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t)+\mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t)+\mathbf{c}'(t).$$

$$\textit{Regla de la multiplicación por una función escalar:}\quad \frac{d}{dt}[p(t)\mathbf{c}(t)] = p'(t)\mathbf{c}(t)+p(t)\mathbf{c}'(t).$$

$$\textit{Regla del producto escalar:}\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t)\cdot\mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t)\cdot\mathbf{c}(t)+\mathbf{b}(t)\cdot\mathbf{c}'(t).$$

$$\textit{Regla del producto vectorial:}\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t)\times\mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t)\times\mathbf{c}(t)+\mathbf{b}(t)\times\mathbf{c}'(t).$$

$$\textit{Regla de la cadena:}\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}(q(t))] = q'(t)\mathbf{c}'(q(t)).$$

Trayectoria de módulo constante

EJEMPLO 4.1 Demostrar que si $\mathbf{c}(t)$ es una función vectorial tal que $\|\mathbf{c}(t)\|$ es constante, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$ para todo t.

Solución

Puesto que $\|\mathbf{c}(t)\|$ es constante, entonces su cuadrado $\|\mathbf{c}(t)\|^2 = \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$ también lo es. La derivada de una constante es cero, de modo que aplicando la fórmula para la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales,

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)\right] = \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t);$$

por tanto, $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$.

Trayectoria de módulo constante

EJEMPLO 4.1 Demostrar que si $\mathbf{c}(t)$ es una función vectorial tal que $\|\mathbf{c}(t)\|$ es constante, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$ para todo t.

Solución

Puesto que $\|\mathbf{c}(t)\|$ es constante, entonces su cuadrado $\|\mathbf{c}(t)\|^2 = \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$ también lo es. La derivada de una constante es cero, de modo que aplicando la fórmula para la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales,

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)] = \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t);$$

por tanto, $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$.

Para una trayectoria que describe un movimiento rectilíneo y uniforme, el vector velocidad es constante. En general, el vector velocidad es una función vectorial $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(t)$ que depende de t. Su derivada $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{c}''(t)$ se denomina ***aceleración*** de la curva. Si la curva es $(x(t), y(t), z(t))$, entonces la aceleración en el instante t viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}.$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$\mathbf{c}''(t) = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$$
$$\mathbf{c}'(t) = (k_1, k_2, -t + k_3)$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$\mathbf{c}''(t) = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$$
$$\mathbf{c}'(t) = (k_1, k_2, -t + k_3)$$

$$\mathbf{c}''(0) = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$\mathbf{c}''(t) = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$$
$$\mathbf{c}'(t) = (k_1, k_2, -t + k_3)$$

$$\mathbf{c}''(0) = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$
$$\mathbf{c}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0)$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$\mathbf{c}''(t) = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$$
$$\mathbf{c}'(t) = (k_1, k_2, -t + k_3)$$

$$\mathbf{c}''(0) = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$
$$\mathbf{c}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0)$$
$$k_1 = k_2 = 1, \; k_3 = 0$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}''(t) &= -\mathbf{k} = (0, 0, -1) \\
\mathbf{c}'(t) &= (k_1, k_2, -t + k_3) \\
&= (1, 1, -t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}''(0) &= \mathbf{k} = (0, 0, 1) \\
\mathbf{c}'(0) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0) \\
k_1 &= k_2 = 1,\ k_3 = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}''(t) &= -\mathbf{k} = (0, 0, -1) \\
\mathbf{c}'(t) &= (k_1, k_2, -t + k_3) \\
&= (1, 1, -t) \\
\mathbf{c}(t) &= \left(t + k_4, t + k_5, -\frac{t^2}{2} + k_6\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}''(0) &= \mathbf{k} = (0, 0, 1) \\
\mathbf{c}'(0) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0) \\
k_1 &= k_2 = 1,\ k_3 = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(t) &= -\mathbf{k} = (0, 0, -1) \\
\mathbf{c}'(t) &= (k_1, k_2, -t + k_3) \\
&= (1, 1, -t) \\
\mathbf{c}(t) &= \left(t + k_4, t + k_5, -\frac{t^2}{2} + k_6\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(0) &= \mathbf{k} = (0, 0, 1) \\
\mathbf{c}'(0) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0) \\
k_1 &= k_2 = 1,\ k_3 = 0 \\
\mathbf{c}(0) &= (0, 0, 1) = (k_4, k_5, k_6)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(t) &= -\mathbf{k} = (0, 0, -1) \\
\mathbf{c}'(t) &= (k_1, k_2, -t + k_3) \\
&= (1, 1, -t) \\
\mathbf{c}(t) &= \left(t + k_4, t + k_5, -\frac{t^2}{2} + k_6\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(0) &= \mathbf{k} = (0, 0, 1) \\
\mathbf{c}'(0) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0) \\
k_1 &= k_2 = 1,\ k_3 = 0 \\
\mathbf{c}(0) &= (0, 0, 1) = (k_4, k_5, k_6) \\
&\Rightarrow k_4 = k_5 = 0,\ k_6 = 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.
Buscaremos $\mathbf{c}(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(t) &= -\mathbf{k} = (0, 0, -1) \\
\mathbf{c}'(t) &= (k_1, k_2, -t + k_3) \\
&= (1, 1, -t) \\
\mathbf{c}(t) &= \left(t + k_4, t + k_5, -\frac{t^2}{2} + k_6\right) \\
&= \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}''(0) &= \mathbf{k} = (0, 0, 1) \\
\mathbf{c}'(0) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} = (1, 1, 0) \\
k_1 &= k_2 = 1,\ k_3 = 0 \\
\mathbf{c}(0) &= (0, 0, 1) = (k_4, k_5, k_6) \\
&\Rightarrow k_4 = k_5 = 0,\ k_6 = 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$ corta el plano $z = 0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2} + 1 = 0$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$ corta el plano $z = 0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{t_0^2}{2} = 1$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$ corta el plano $z = 0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{t_0^2}{2} = 1 \Rightarrow t_0 = \sqrt{2} \quad (t_0 \geq 0).$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$ corta el plano $z = 0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{t_0^2}{2} = 1 \Rightarrow t_0 = \sqrt{2} \quad (t_0 \geq 0).$$

¿En qué punto?

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$ corta el plano $z = 0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{t_0^2}{2} = 1 \Rightarrow t_0 = \sqrt{2} \quad (t_0 \geq 0).$$

¿En qué punto?

$$\mathbf{c}(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right).$$

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t=0$ se encuentra en $(0,0,1)$ y la velocidad en $t=0$ es $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z=0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2}+1\right)$ corta el plano $z=0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2}+1=0 \Rightarrow \frac{t_0^2}{2}=1 \Rightarrow t_0=\sqrt{2} \quad (t_0 \geq 0).$$

¿En qué punto?

$$\mathbf{c}(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right).$$

La trayectoria que sigue es

Ejemplo 4.2

Una partícula se mueve con aceleración $-\mathbf{k}$. Si en $t = 0$ se encuentra en $(0, 0, 1)$ y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula, suponiendo $t \geq 0$.

$\mathbf{c}(t) = \left(t, t, -\frac{t^2}{2} + 1\right)$ corta el plano $z = 0$ cuando su tercera componente se anule:

$$-\frac{t_0^2}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{t_0^2}{2} = 1 \Rightarrow t_0 = \sqrt{2} \quad (t_0 \geq 0).$$

¿En qué punto?

$$\mathbf{c}(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right).$$

La trayectoria que sigue es una parábola en el plano $x = y$.

Trayectoria regular

La imagen de una trayectoria C^1 no es necesariamente «muy suave»; en efecto, puede tener bruscos cambios de dirección. Por ejemplo, la hipocicloide de cuatro puntas, $\mathbf{c}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, que tiene picos o cúspides en cuatro puntos (*véase* la Figura 4.1.2). En tales puntos, $\mathbf{c}'(t) = 0$, lo que es coherente con la no existencia de recta tangente. Evidentemente, la dirección de la velocidad $\mathbf{c}'(t)$ puede cambiar abruptamente en los puntos en los que la partícula se ha parado.

Diremos que una trayectoria diferenciable $\mathbf{c}$ es regular en $t = t_0$ si $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Si se verifica $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t, diremos que $\mathbf{c}$ es una trayectoria regular. En este caso, la curva imagen tiene un aspecto suave.

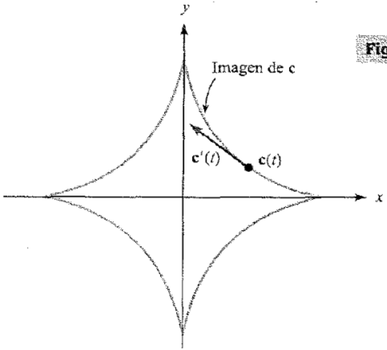


Figura 4.1.2. La imagen de la trayectoria regular $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, una hipocicloide, no tiene un «aspecto suave».

Recorrido

Definición (Longitud de arco en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Longitud de arco

Definición (Longitud de arco en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t, r\cos t),$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c})$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2}dt$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\text{sen}\, t, r\cos t), \;\; \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\text{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\text{sen}]^2 + [r\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} r\, dt$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\operatorname{sen} t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\operatorname{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\operatorname{sen}]^2 + [r\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2}dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$:

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2t),$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t, r\cos t), \ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\, t, \cos t, 2t), \ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-\,\mathrm{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2}.$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2}dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-\,\mathrm{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2}.$$

$$L(\mathbf{c})$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r \operatorname{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r \operatorname{sen}]^2 + [r\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-\operatorname{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2}.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} \sqrt{[-\operatorname{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2} dt$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$, $0 \leq t \leq \pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-\,\mathrm{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2}.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} \sqrt{[-\,\mathrm{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4t^2 + 1}\,dt$$

Ejemplos 4.5 y 4.6

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2} = r.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\,\mathrm{sen}]^2 + [r\cos t]^2}dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$, $0 \le t \le \pi$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2t),\ \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{[-\,\mathrm{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2}.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} \sqrt{[-\,\mathrm{sen}]^2 + [\cos t]^2 + [2t]^2}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4t^2+1}\,dt \approx 10,63.$$

Curva suave por partes

Si una curva está formada por un número finito de trozos cada uno de los cuales es C^1 (con derivada acotada), calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de cada uno de sus trozos. Tales curvas se denominan C^1 ***a trozos***. A veces diremos simplemente «suaves a trozos».

Curva suave por partes

Si una curva está formada por un número finito de trozos cada uno de los cuales es C^1 (con derivada acotada), calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de cada uno de sus trozos. Tales curvas se denominan C^1 ***a trozos***. A veces diremos simplemente «suaves a trozos».

Ejemplo

La curva dada por

$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (t,1), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (1, 2-t), & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

es suave por partes, suave a trozos o C^1 a trozos.

Si una curva está formada por un número finito de trozos cada uno de los cuales es C^1 (con derivada acotada), calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de cada uno de sus trozos. Tales curvas se denominan C^1 *a trozos*. A veces diremos simplemente «suaves a trozos».

Ejemplo

La curva dada por

$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (t,1), & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ (1, 2-t), & \text{si } 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

es suave por partes, suave a trozos o C^1 a trozos.

Observación: con frecuencia trabajaremos con dos trayectorias, tales que las curvas que definan estén unidas por sus extremos.

Diferencial de la longitud de arco

Dada $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t))$, consideramos un incremento pequeño Δt de la variable independiente y el correspondiente incremento en la trayectoria,

$$\mathbf{c}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)).$$

Diferencial de la longitud de arco

Dada $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t))$, consideramos un incremento pequeño Δt de la variable independiente y el correspondiente incremento en la trayectoria,

$$\mathbf{c}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)).$$

La diferencia $\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)$ es un vector y representa un desplazamiento.

Diferencial de la longitud de arco

Dada $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t))$, consideramos un incremento pequeño Δt de la variable independiente y el correspondiente incremento en la trayectoria,

$$\mathbf{c}(t + \Delta t) = (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)).$$

La diferencia $\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)$ es un vector y representa un desplazamiento.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t) &= (x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)) - (x(t), y(t), z(t)) \\
&= (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t)) \\
&= (\Delta x(t), \Delta y(t), \Delta z(t)) \\
&\approx (x'(t)\, dt, y'(t)\, dt, z'(t)\, dt)
\end{aligned}$$

Diferencial de la longitud de arco

Definición (Diferencial de la longitud de arco)

Dada $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t))$, un **desplazamiento infinitesimal** de una partícula que sigue esta trayectoria es

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt\right)$$

y la longitud de tal desplazamiento,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[x'(t)^2] + [y'(t)^2] + [z'(t)^2]}dt,$$

es la **diferencial de la longitud de arco**.

Diferencial de la longitud de arco

Definición (Diferencial de la longitud de arco)

Dada $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t))$, un **desplazamiento infinitesimal** de una partícula que sigue esta trayectoria es

$$ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt\right)$$

y la longitud de tal desplazamiento,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[x'(t)^2] + [y'(t)^2] + [z'(t)^2]}dt,$$

es la **diferencial de la longitud de arco**.

Observación: $L(\mathbf{c}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} ds$.

Longitud de arco en $\mathbb{R}^n$

Definición (Longitud de arco)

Sea $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos. Su **longitud** se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

es decir

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + \cdots + [x_n'(t)]^2} dt.$$

Longitud de arco en $\mathbb{R}^n$

Definición (Longitud de arco)

Sea $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos. Su **longitud** se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

es decir

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + \cdots + [x_n'(t)]^2} dt.$$

Observación: $L(\mathbf{c}) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} ds.$

Ejemplo 4.9

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t), \operatorname{sen}(2t)),\ 0 \le t \le \pi.$$

Ejemplo 4.9

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t), \operatorname{sen}(2t)),\ 0 \leq t \leq \pi.$$

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 4\operatorname{sen}^2(2t) + 4\cos^2(2t)}\,dt = \sqrt{5}\pi.$$

Longitud de arco

Definición (Función longitud de arco)

Sea $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria C^1 a trozos. La función **longitud de arco s(t)** asociada a $\mathbf{c}(t)$ se define como

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{c}'(u)\| du,$$

y, por el TFC1,

$$s'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| \qquad \text{y} \qquad \int_{t_0}^{t_1} s'(t)\, dt = s(t_1) - s(t_0) = s(t_1).$$

Ejemplo 4.10

La gráfica de una función de una variable $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$, puede verse como una curva parametrizada por

$$\mathbf{c}(x) = (x, f(x)),\ a \leq x \leq b.$$

Ejemplo 4.10

La gráfica de una función de una variable $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$, puede verse como una curva parametrizada por

$$\mathbf{c}(x) = (x, f(x)),\ a \leq x \leq b.$$

La longitud de esta curva es

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

Dada $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, tomamos una partición de $[a,b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

Dada $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, tomamos una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, que determina n subintervalos de igual longitud:

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

Dada $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, tomamos una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, que determina n subintervalos de igual longitud:

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

y consideramos la línea poligonal obtenida uniendo los pares de puntos $\mathbf{c}(t_{i-1})$, $\mathbf{c}(t_i)$, para $1 \leq i \leq n$.

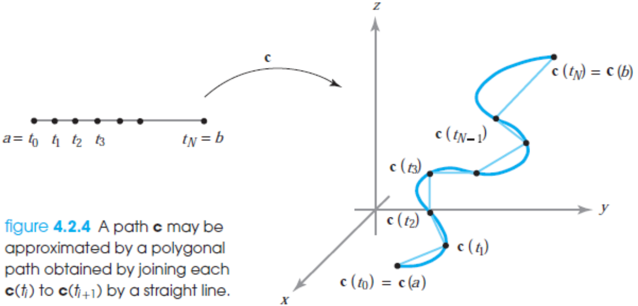


figure 4.2.4 A path $\mathbf{c}$ may be approximated by a polygonal path obtained by joining each $\mathbf{c}(t_i)$ to $\mathbf{c}(t_{i+1})$ by a straight line.

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En cada subintervalo tenemos

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En cada subintervalo tenemos

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Aplicamos el TVM a las funciones x, y y z en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y obtenemos que existen puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} en $[t_{i-}, t_i]$ tales que

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En cada subintervalo tenemos

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Aplicamos el TVM a las funciones x, y y z en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y obtenemos que existen puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} en $[t_{i-}, t_i]$ tales que

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(t_i^{**})(t_i - t_{i-1}) \\ z(t_i) - x(t_{i-1}) &= z'(t_i^{***})(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En cada subintervalo tenemos

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Aplicamos el TVM a las funciones x, y y z en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y obtenemos que existen puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} en $[t_{i-}, t_i]$ tales que

$$\begin{aligned} x(t_i)-x(t_{i-1}) &= x'(t_i^*)(t_i-t_{i-1}) \\ y(t_i)-y(t_{i-1}) &= y'(t_i^{**})(t_i-t_{i-1}) \\ z(t_i)-x(t_{i-1}) &= z'(t_i^{***})(t_i-t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x'(t_i^*)]^2+[y'(t_i^{**})]^2+[z'(t_i^{***})]^2}(t_i-t_{i-1}).$$

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En cada subintervalo tenemos

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Aplicamos el TVM a las funciones x, y y z en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y obtenemos que existen puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} en $[t_{i-}, t_i]$ tales que

$$\begin{aligned} x(t_i)-x(t_{i-1}) &= x'(t_i^*)(t_i-t_{i-1}) \\ y(t_i)-y(t_{i-1}) &= y'(t_i^{**})(t_i-t_{i-1}) \\ z(t_i)-x(t_{i-1}) &= z'(t_i^{***})(t_i-t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x'(t_i^*)]^2+[y'(t_i^{**})]^2+[z'(t_i^{***})]^2}(t_i-t_{i-1}).$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2+[y'(t_i^{**})]^2+[z'(t_i^{***})]^2}(t_i-t_{i-1})$$

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

En cada subintervalo tenemos

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2}.$$

Aplicamos el TVM a las funciones x, y y z en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y obtenemos que existen puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} en $[t_{i-}, t_i]$ tales que

$$\begin{aligned} x(t_i)-x(t_{i-1}) &= x'(t_i^*)(t_i-t_{i-1}) \\ y(t_i)-y(t_{i-1}) &= y'(t_i^{**})(t_i-t_{i-1}) \\ z(t_i)-x(t_{i-1}) &= z'(t_i^{***})(t_i-t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{c}(t_i)-\mathbf{c}(t_i-1)\| = \sqrt{[x'(t_i^*)]^2+[y'(t_i^{**})]^2+[z'(t_i^{***})]^2}(t_i-t_{i-1}).$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2+[y'(t_i^{**})]^2+[z'(t_i^{***})]^2}(t_i-t_{i-1})$$

$$L = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t]^2+[z'(t]^2}dt$$

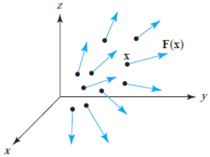
que existe si las derivadas x', y' y z' son continuas.

Recorrido

Concepto de campo vectorial

Definición

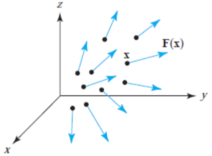
Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.



Concepto de campo vectorial

Definición

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

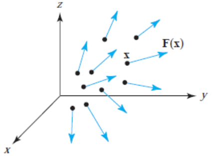


Observación: si $n = 2$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el plano*; si $n = 3$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el espacio*.

Concepto de campo vectorial

Definición

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

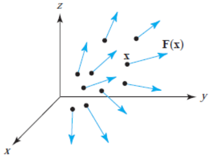


Observación: si $n = 2$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el plano*; si $n = 3$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el espacio*.
Observación: un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ tiene n funciones componentes, cada una de las cuales es un *campo escalar*.

Concepto de campo vectorial

Definición

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

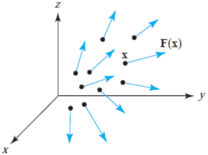


Observación: si $n = 2$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el plano*; si $n = 3$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el espacio*.
Observación: un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ tiene n funciones componentes, cada una de las cuales es un *campo escalar*.
Nota: si cada componente es de clase C^k, entonces diremos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es de clase C^k.

Concepto de campo vectorial

Definición

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in A$ un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.



Observación: si $n = 2$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el plano*; si $n = 3$, $\mathbf{F}$ se denomina *campo vectorial en el espacio*.

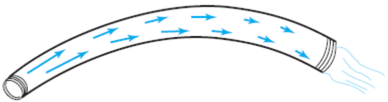
Observación: un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ tiene n funciones componentes, cada una de las cuales es un *campo escalar*.

Nota: si cada componente es de clase C^k, entonces diremos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es de clase C^k.

Nota: en adelante supondremos que los campos vectoriales son al menos de clase C^1, salvo que se diga expresamente lo contrario.

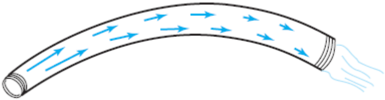
Ejemplo 4.11

Cuando fluye agua a través de una tubería, en cada punto hay una **velocidad** que afecta a la partícula en esa **posición**.



Ejemplo 4.11

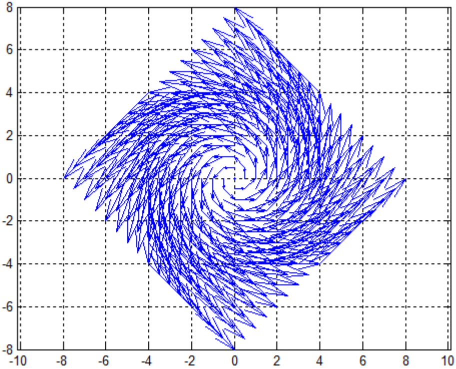
Cuando fluye agua a través de una tubería, en cada punto hay una **velocidad** que afecta a la partícula en esa **posición**.



Esta velocidad, que depende de la posición, puede también depender del tiempo. Si no depende del tiempo, decimos que el flujo es **estacionario** (que no es lo mismo que decir que la velocidad es constante o que el agua no se mueve). El campo de velocidades $\mathbf{V}$ asigna a cada punto la velocidad del fluido en ese punto y, si el flujo es estacionario, $\mathbf{V}$ no depende del tiempo, sino solo de la posición en el espacio. La velocidad es una magnitud vectorial, su módulo es la rapidez; se aprecia cómo rapidez y dirección pueden cambiar de un punto a otro.

Ejemplo 4.12

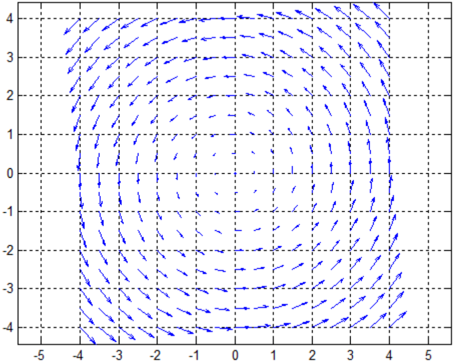
$$\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$$



Nota: se suele ajustar la escala de los campos vectoriales.

Ejemplo 4.12

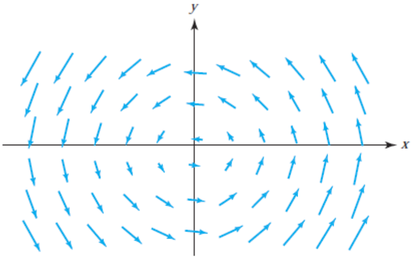
$$\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$$



Nota: se suele ajustar la escala de los campos vectoriales.

Ejemplo 4.12

$$\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$$



Nota: se suele ajustar la escala de los campos vectoriales.

Recorrido

Ejemplo

Sea f definida en $\mathbb{R}^n$ tal que existen sus derivadas parciales. El gradiente

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Big| \mathbf{x} \mapsto (f_{x_1}(\mathbf{x}), \cdots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

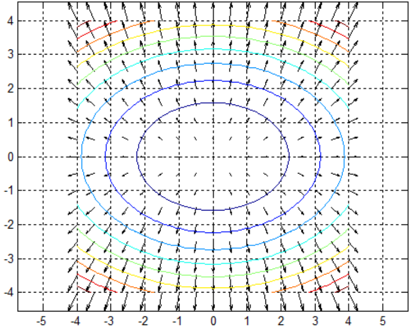
es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

Sea f definida en $\mathbb{R}^n$ tal que existen sus derivadas parciales. El gradiente

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Big| \mathbf{x} \mapsto (f_{x_1}(\mathbf{x}), \cdots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$$

es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$.
Ejemplo: $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$.



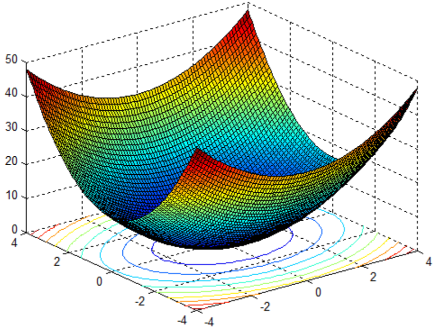


Imagen de ∇f y del gráfico de f junto con algunas curvas de nivel de f.

Ejemplo 4.14

EJEMPLO 4.14 Considérese un objeto sólido que está siendo calentado por un extremo y enfriado por el otro. La temperatura en cada punto del interior del cuerpo en un instante dado viene descrita por una función escalar $T(x, y, z)$. El flujo de calor puede representarse por un campo vectorial, donde las flechas indican la dirección y magnitud del flujo (Figura 4.3.5). Este ***campo vectorial flujo de calor*** o ***energía*** viene dado por $\mathbf{J} = -k\nabla T$, donde $k > 0$ es una constante llamada ***conductividad***, y ∇T es el gradiente de la función escalar T. Los conjuntos de nivel de T se llaman ***isotermas***. Obsérvese que el calor fluye de las regiones calientes hacia las frías, puesto que $-\nabla T$ apunta en la dirección en que T decrece.

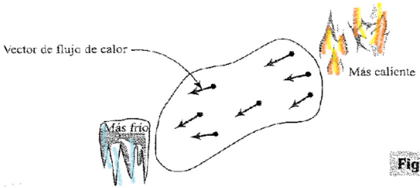


Figura 4.3.5. Un campo vectorial que describe la dirección y magnitud del flujo de calor.

Ejemplo 4.15

EJEMPLO 4.15 La fuerza de atracción de la Tierra sobre una masa m puede describirse mediante un campo vectorial, llamado ***campo gravitatorio***. Tomamos un sistema de coordenadas cuyo origen está situado en el centro de la Tierra (que suponemos esférica). De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación, este campo viene dado por

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, y $r = \|\mathbf{r}\|$ (*véase* la Figura 4.3.6). El dominio de este campo vectorial consiste en aquellos valores de $\mathbf{r}$ para los que $\|\mathbf{r}\|$ es mayor que el radio de la Tierra. Como vimos en el Ejemplo 2.52, Sección 2.6, $\mathbf{F}$ es un campo gradiente, $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde

$$V = -\frac{mMG}{r}$$

es el ***potencial gravitatorio***. Obsérvese nuevamente que $\mathbf{F}$ apunta en la dirección hacia la que V decrece. Escribiendo $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes, vemos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMG}{r^3}x, \frac{-mMG}{r^3}y, \frac{-mMG}{r^3}z\right).$$

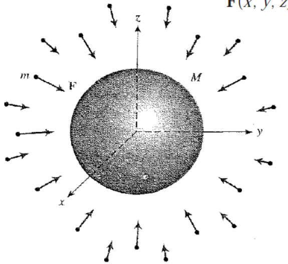


Figura 4.3.6. El campo vectorial **F** dado por la ley de la gravitación de Newton.

Ejemplo 4.17

Probar que no hay una función f de clase C^1 tal que $\nabla f(x, y) = \mathbf{V}(x, y)$ para $\mathbf{V}(x, y) = (y, -x)$.

Ejemplo 4.17

Probar que no hay una función f de clase C^1 tal que $\nabla f(x, y) = \mathbf{V}(x, y)$ para $\mathbf{V}(x, y) = (y, -x)$.
Si la hubiera, debería ocurrir

$$f_x(x, y) = y \text{ y } f_y(x, y) = -x$$

Ejemplo 4.17

Probar que no hay una función f de clase C^1 tal que $\nabla f(x,y) = \mathbf{V}(x,y)$ para $\mathbf{V}(x,y) = (y,-x)$.
Si la hubiera, debería ocurrir

$$f_x(x,y) = y \text{ y } f_y(x,y) = -x$$

pero derivando tendríamos

$$f_{xy}(x,y) = 1 \text{ y } f_{yx}(x,y) = -1$$

Ejemplo 4.17

Probar que no hay una función f de clase C^1 tal que $\nabla f(x,y) = \mathbf{V}(x,y)$ para $\mathbf{V}(x,y) = (y, -x)$.
Si la hubiera, debería ocurrir

$$f_x(x,y) = y \text{ y } f_y(x,y) = -x$$

pero derivando tendríamos

$$f_{xy}(x,y) = 1 \text{ y } f_{yx}(x,y) = -1$$

y serían continuas, por ser f de clase C^1; luego deberían ser iguales (por teorema), lo cual es absurdo.

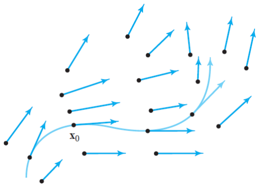
Recorrido

1. Sección 4.1 del libro: la aceleración y la segunda ley de Newton
2. Sección 4.2 Longitud de arco
3. Sección 4.3 Campos vectoriales
   - Campo vectorial gradiente
   - Líneas de flujo
4. Sección 4.4 La divergencia y el rotacional
   - Divergencia
   - Interpretación de la divergencia
   - Rotacional
   - Los campos gradiente son irrotacionales
   - Rotacional escalar o componente $\mathbf{k}$ del rotacional
   - Divergencia de un rotacional
   - Laplaciano
   - Identidades vectoriales

Líneas de flujo

Definición (Líneas de flujo de campos vectoriales)

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, una **línea de flujo** de $\mathbf{F}$ es una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ tal que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$. Es decir que $\mathbf{F}$ da el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.

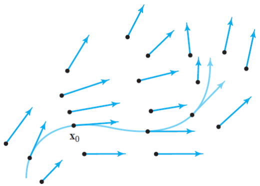


Observación: si $\mathbf{F}$ es un *campo de velocidades de un fluido*, una línea de flujo es la trayectoria seguida por una pequeña partícula suspendida en el fluido. Las líneas de flujo también se llaman líneas de corriente o curvas integrales.

Líneas de flujo

Definición (Líneas de flujo de campos vectoriales)

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, una **línea de flujo** de $\mathbf{F}$ es una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ tal que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$. Es decir que $\mathbf{F}$ da el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.



Observación: geométricamente, una línea de flujo para un campo vectorial $\mathbf{F}$ dado es una curva sobre el dominio de $\mathbf{F}$ tal que el vector tangente a la curva en cada punto coincide con el campo vectorial.

Líneas de flujo

Definición (Líneas de flujo de campos vectoriales)

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, una **línea de flujo** de $\mathbf{F}$ es una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ tal que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$. Es decir que $\mathbf{F}$ da el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.

Observación: una línea de flujo puede iterpretarse como la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t), z(t)), \\ y'(t) = Q(x(t), y(t), z(t)), \\ z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)), \end{cases}$$

donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

Ejemplo 4.18

Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. ¿Hay más líneas de flujo?

Ejemplo 4.18

Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. ¿Hay más líneas de flujo?
Veamos que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$:

Ejemplo 4.18

Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. ¿Hay más líneas de flujo?
Veamos que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \text{ y } \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t),$$

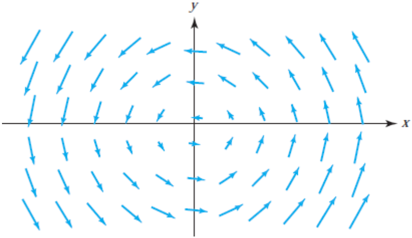
o sea que $\mathbf{c}(t)$ es una línea de flujo.

Ejemplo 4.18

Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. ¿Hay más líneas de flujo?
Veamos que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$:

$$\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \text{ y } \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = (-\operatorname{sen} t, \cos t),$$

o sea que $\mathbf{c}(t)$ es una línea de flujo.



En cada punto del dominio de $\mathbf{F}$ pasa una línea de flujo; son circunferencias:

$$\mathbf{c}(t) = (r\cos(t - t_0), r\operatorname{sen}(t - t_0)), \quad r \text{ y } t_0, \text{ constantes.}$$

Recorrido

Operador nabla

Operador nabla:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

El gradiente de una función se forma operando con nabla sobre f:

$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Recorrido

Definición de divergencia de un campo vectorial

Definición

Si $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, su divergencia es

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Definición de divergencia de un campo vectorial

Definición

Si $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, su divergencia es

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{F} = (M, N)$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = M_x + N_y$.
En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{F} = (M, N, P)$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = M_x + N_y + P_z$.

Definición de divergencia de un campo vectorial

Definición

Si $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, su divergencia es

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{F} = (M, N)$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = M_x + N_y$.
En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{F} = (M, N, P)$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = M_x + N_y + P_z$.

Ejemplo: si $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y, z, xyz)$,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

Recorrido

Interpretación de la divergencia

Si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, entonces div$\mathbf{F}$ representa la razón de expansión del fluido por unidad de volumen bajo el flujo. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, el fluido se está comprimiendo; si $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$, el fluido se está expandiendo.

Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ en todo su dominio, el campo vectorial se llama solenoidal.

Se llama fuente a un punto $\mathbf{x}$ en el dominio de $\mathbf{F}$ tal que $(\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) > 0$.

Se llama sumidero a un punto $\mathbf{x}$ en el dominio de $\mathbf{F}$ tal que $(\nabla \cdot \mathbf{F})(\mathbf{x}) < 0$.

Ejemplo 4.21

The flow lines of the vector field $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ are straight lines directed away from the origin (Figure 4.4.3).

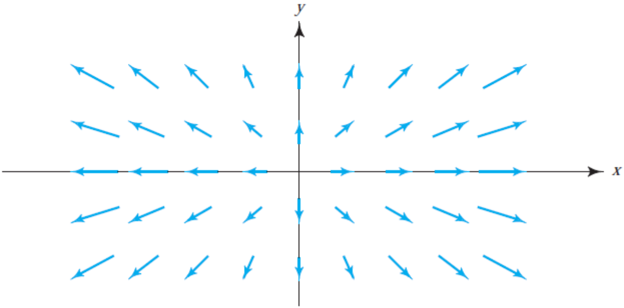


figure **4.4.3** The vector field $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

The flow lines of the vector field $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ are straight lines directed away from the origin (Figure 4.4.3).

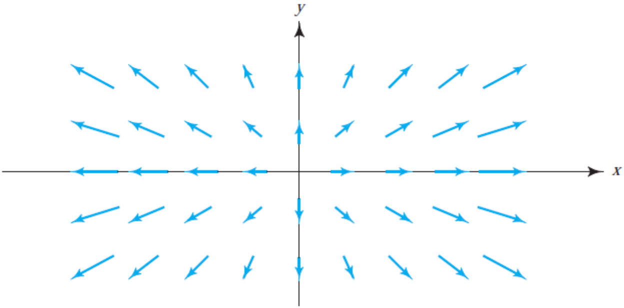


figure **4.4.3** The vector field $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y = 2 > 0.$$

Ejemplo 4.21

The flow lines of the vector field $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ are straight lines directed away from the origin (Figure 4.4.3).

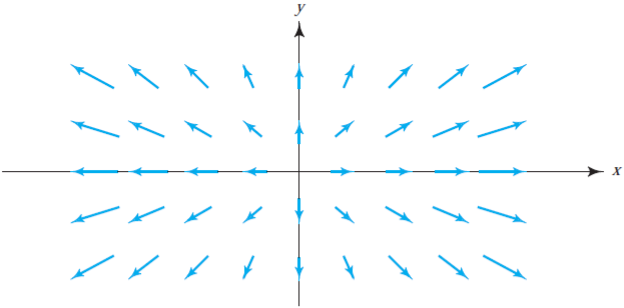


figure **4.4.3** The vector field $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y = 2 > 0.$$

If these flow lines are those of a fluid, the fluid is expanding as it moves out from the origin, so div $\mathbf{F}$ should be positive.

Sea W una pequeña región alrededor de un punto $\mathbf{x}_0$. Para cada $\mathbf{x} \in W$, sea $\mathbf{x}(t)$ la línea de flujo que parte de $\mathbf{x}$; llamemos $W(t)$ a la imagen de W por $\mathbf{x}(t)$ y $\mathcal{V}(t)$ a su volumen.

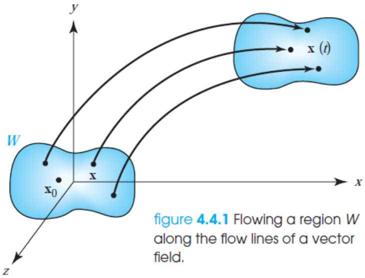
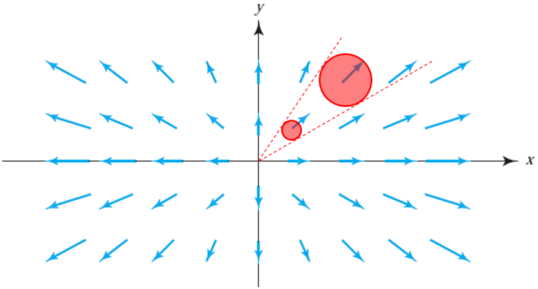


figure 4.4.1 Flowing a region W along the flow lines of a vector field.



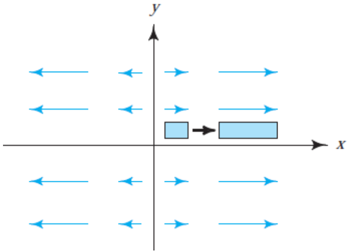
Entonces la razón relativa de cambio de volumen es la divergencia:

$$\frac{1}{\mathcal{V}(0)} \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) \Big|_{t=0} \approx \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$$

Ejemplo 4.20

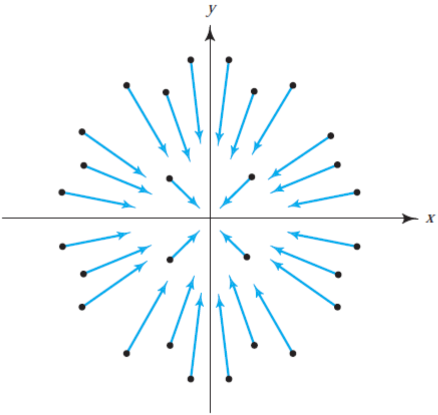
Sea $\mathbf{V}(x, y) = (x, 0)$. Relacionar el signo de $\nabla \cdot \mathbf{V}$ con la razón de cambio de áreas bajo el flujo.

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(x, y) = 1$$



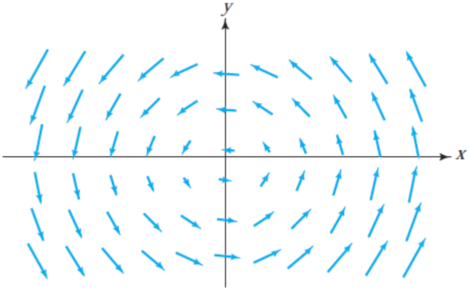
Sea $\mathbf{F}(x, y) = (-x, -y)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = -2 < 0$$



Sea $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$.

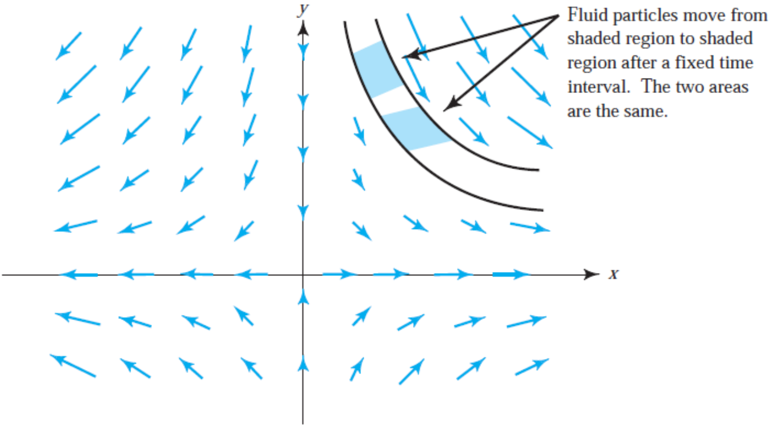
$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y) = 0$$



Ejemplo 4.22

Sea $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = 0$$



Recorrido

Definición de rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

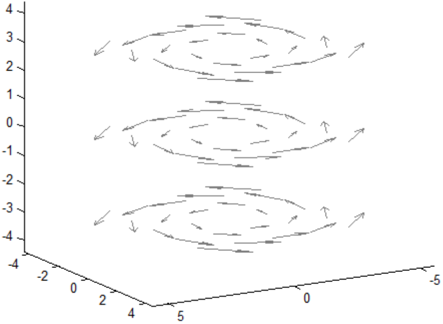
Si $\mathbf{F} = (M, N, P)$, entonces el rotacional de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y)$$

Ejemplos

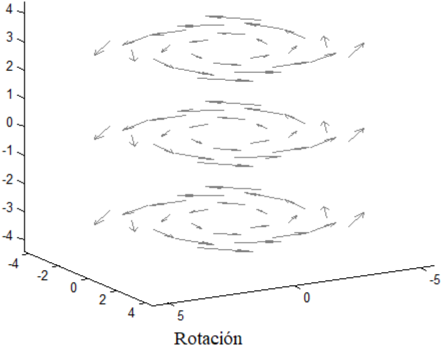
1. $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y,x,0)$, $(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z) = (0,0,2)$.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$, $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, 2)$.

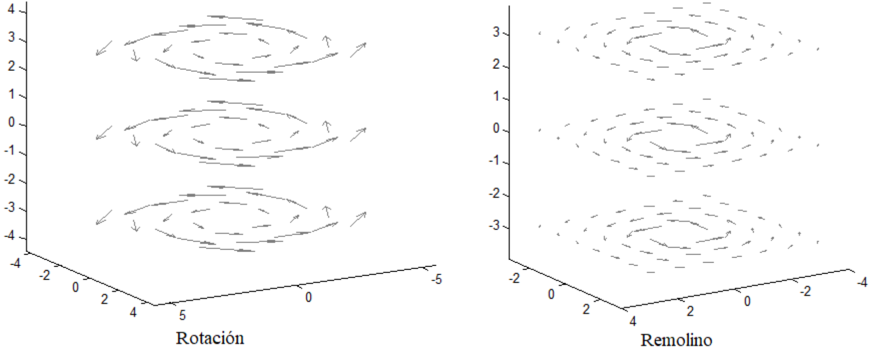


Rotación

1. $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$, $(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z) = (0,0,2)$.
2. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, $(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z) = (0,0,0)$.
   Campo irrotacional.



1. $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$, $(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z) = (0,0,2)$.
2. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, $(\nabla \times \mathbf{F})(x,y,z) = (0,0,0)$.
   Campo irrotacional.



Recorrido

Rotacional de un gradiente

Teorema (Rotacional de un gradiente)

Sea f una función C^2. Entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Rotacional de un gradiente

Teorema (Rotacional de un gradiente)

Sea f una función C^2. Entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Ya que $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$,

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0,0,0).$$

Ejemplo 4.29

EJEMPLO 4.29 Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Demostrar que $\mathbf{V}$ no es un campo gradiente.

Solución

Si $\mathbf{V}$ fuera un campo gradiente, según el Teorema 1 debería verificar rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Pero

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

de manera que $\mathbf{V}$ no puede ser un gradiente.

Recorrido

Componente k del rotacional

Si $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, llamamos
$\mathbf{G}(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ y buscamos $\nabla \times \mathbf{G} = (0, 0, Q_x - P_y)$.

Componente $\mathbf{k}$ del rotacional

Si $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, llamamos
$\mathbf{G}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ y buscamos $\nabla \times \mathbf{G} = (0, 0, Q_x - P_y)$.
La función de dos variables dada por $Q_x - P_y$ es el rotacional escalar de $\mathbf{F}$ o componente $\mathbf{k}$ del rotacional.

Recorrido

Los rotacionales tienen divergencia nula

Teorema (Divergencia de un rotacional)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial de clase* C^2*, entonces* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

Los rotacionales tienen divergencia nula

Teorema (Divergencia de un rotacional)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial de clase* C^2, *entonces* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$, entonces

$$\nabla \cdot (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y) =$$

Los rotacionales tienen divergencia nula

Teorema (Divergencia de un rotacional)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial de clase* C^2*, entonces* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$, entonces

$$\nabla \cdot (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y) = P_{yx} - N_{zx} + M_{zy} - P_{xy} + N_{xz} - M_{yz}$$

Los rotacionales tienen divergencia nula

Teorema (Divergencia de un rotacional)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial de clase* C^2*, entonces* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.

Sea $\mathbf{F} = (M, N, P)$, entonces

$$\nabla \cdot (P_y - N_z, M_z - P_x, N_x - M_y) = P_{yx} - N_{zx} + M_{zy} - P_{xy} + N_{xz} - M_{yz} = 0$$

ya que por continuidad, las derivadas de segundo orden mixtas son iguales.

Recorrido

Laplaciano

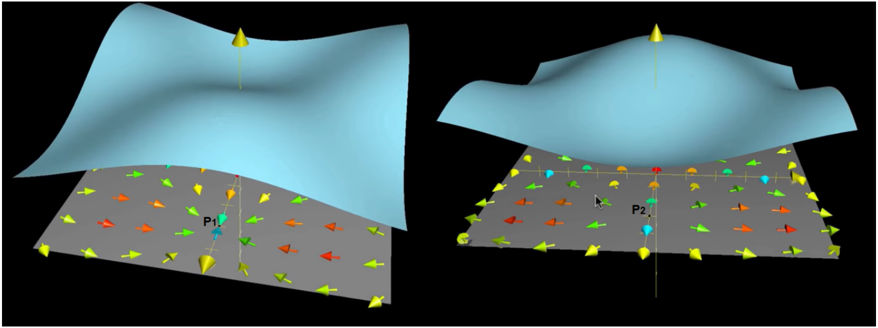
El laplaciano de un campo escalar f se define por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Laplaciano

El laplaciano de un campo escalar f se define por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$



Recorrido

Identidades del análisis vectorial

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, for a constant c
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, at points $\mathbf{x}$ where $g(\mathbf{x}) \neq 0$
5. $\text{div}\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{div}\,\mathbf{F} + \text{div}\,\mathbf{G}$
6. $\text{curl}\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{curl}\,\mathbf{F} + \text{curl}\,\mathbf{G}$
7. $\text{div}\,(f\mathbf{F}) = f\text{div}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$
8. $\text{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\text{curl}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\text{curl}\,\mathbf{G}$
9. $\text{div}\,\text{curl}\,\mathbf{F} = 0$
10. $\text{curl}\,(f\mathbf{F}) = f\text{curl}\,\mathbf{F} + \nabla f\times\mathbf{F}$
11. $\text{curl}\,\nabla f = \mathbf{0}$
12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f\cdot\nabla g)$
13. $\text{div}\,(\nabla f\times\nabla g) = 0$
14. $\text{div}\,(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$