

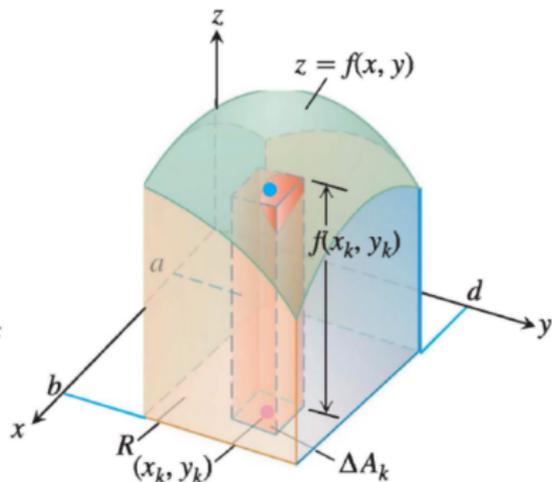
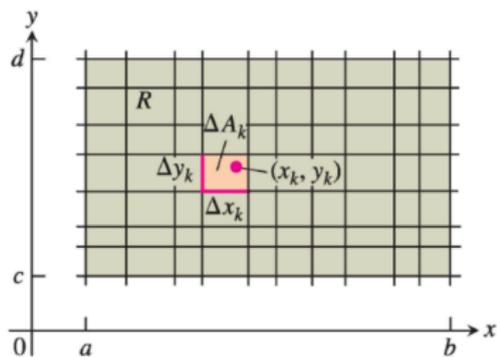
# Integrales de funciones de varias variables

## Ingeniería

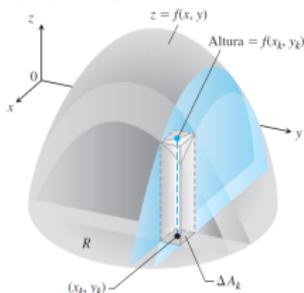
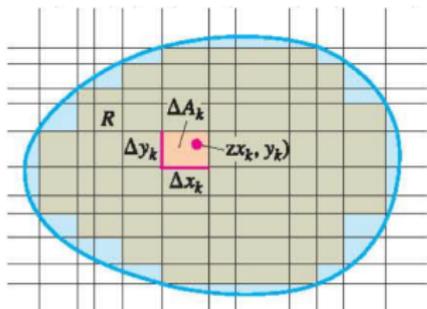
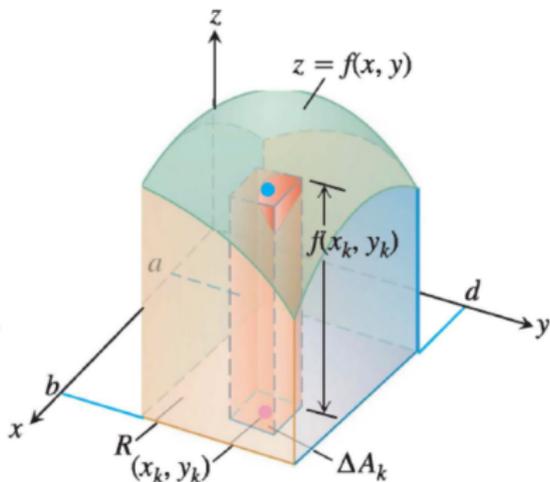
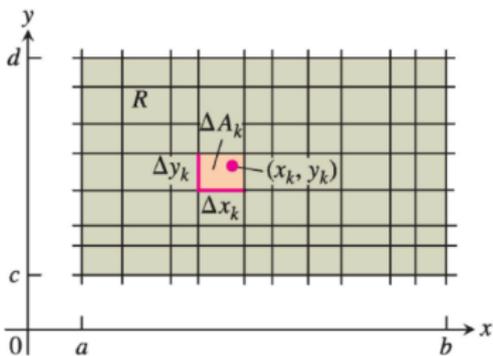
- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Fórmula del cambio de variables
  - Integrales dobles en coordenadas polares
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Fórmula del cambio de variables
  - Integrales dobles en coordenadas polares
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

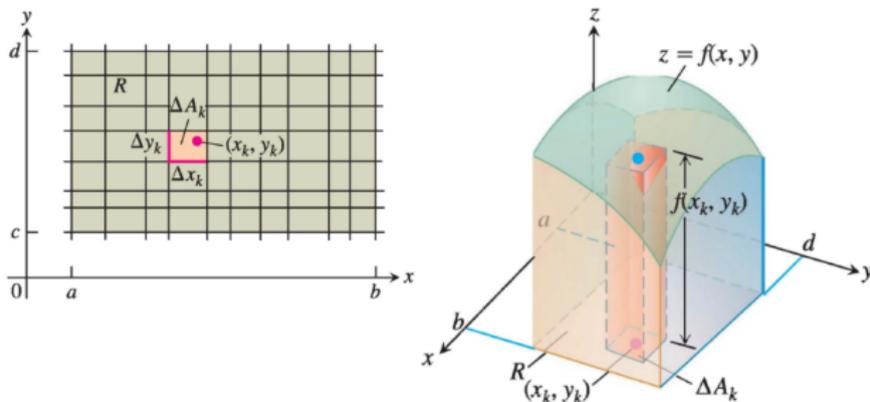
# Definición de integral doble



# Definición de integral doble

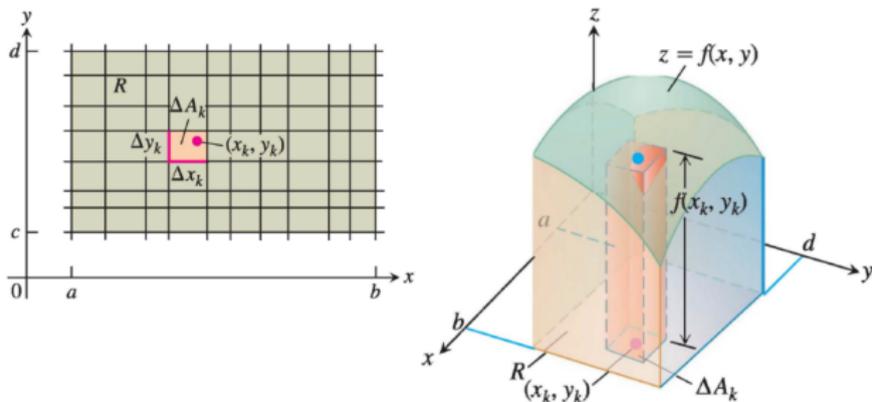


# Definición de integral doble sobre rectángulos



- 1 Sea  $f$  una función definida y **acotada** en un rectángulo  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por  $n \times n$  subrectángulos y formamos la suma de Riemann  $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$ .

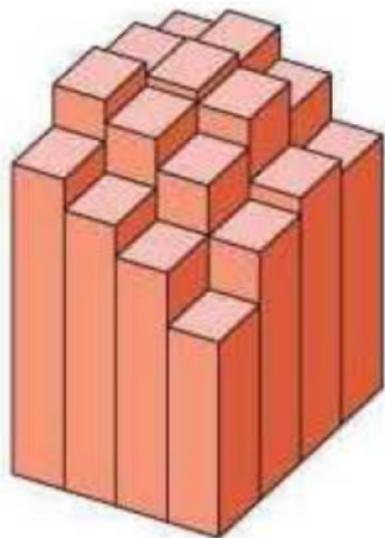
# Definición de integral doble sobre rectángulos



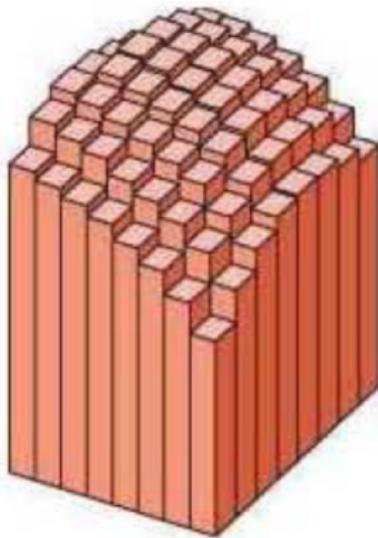
- 1 Sea  $f$  una función definida y **acotada** en un rectángulo  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por  $n \times n$  subrectángulos y formamos la suma de Riemann  $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$ . Si el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n$  existe para cualquier elección de  $(x_i, y_j)$ , se dice que  $f$  es **integrable** sobre  $R$  y que la integral doble de  $f$  sobre  $R$  es el límite de las sumas  $S_n$ . La integral se denota por

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

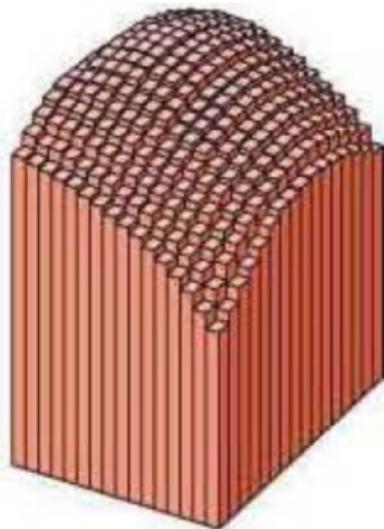
Interpretación: si  $f(x, y) \geq 0$  la integral es un volumen



(a)  $n = 16$

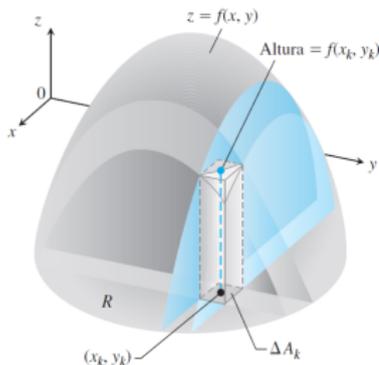
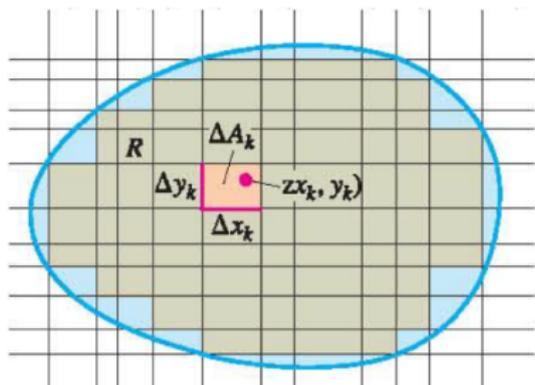


(b)  $n = 64$



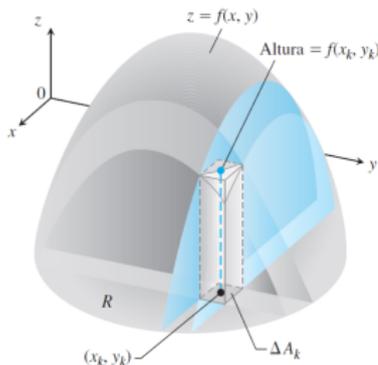
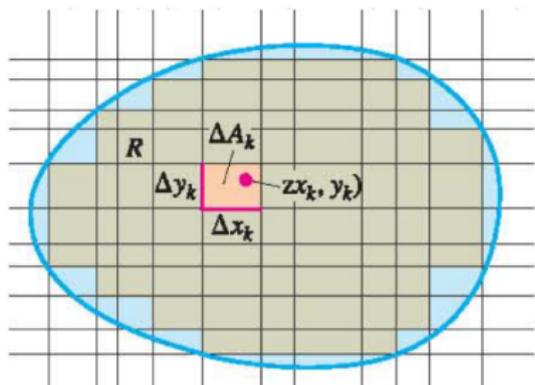
(c)  $n = 256$

# Definición de integral doble sobre otras regiones



- 2 Sea  $f$  una función definida y **acotada** en una región acotada,  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en  $R$  y formamos la suma de Riemann
- $$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}.$$

# Definición de integral doble sobre otras regiones



- 2 Sea  $f$  una función definida y **acotada** en una región acotada,  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por rectángulos; consideramos sólo los rectángulos incluidos en  $R$  y formamos la suma de Riemann  $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$ . Si el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n$  existe, para cualquier elección de  $(x_i, y_j)$ , se dice que  $f$  es **integrable** sobre  $R$  y que la integral doble de  $f$  sobre  $R$  es el límite de las sumas  $S_n$ . La integral se denota por

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

# Propiedades de las integrales dobles

1 Si  $f$  es continua en una región cerrada y acotada  $R$ , entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada  $R$ , entonces:

$$2 \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA.$$

$$3 \iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA.$$

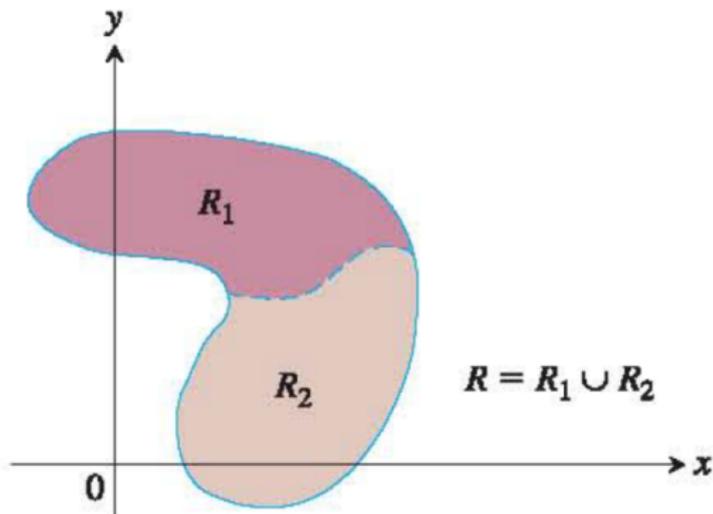
4 Si  $f(x, y) \leq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in R$ ,

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

# Propiedades de las integrales dobles

- 5 Si  $R_1$  y  $R_2$  son dos regiones tales que  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$  y  $f$  es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces  $f$  es integrable en  $R_1 \cup R_2$  y

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA.$$



## 1 Integración de funciones de dos variables

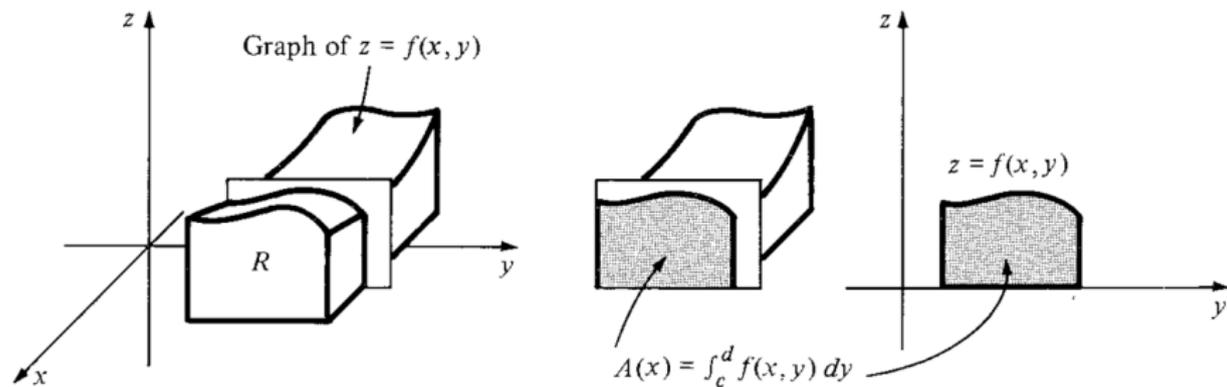
- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
- **Integrales iteradas y Teorema de Fubini**
- Aplicaciones: áreas y valor medio

## 2 Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables

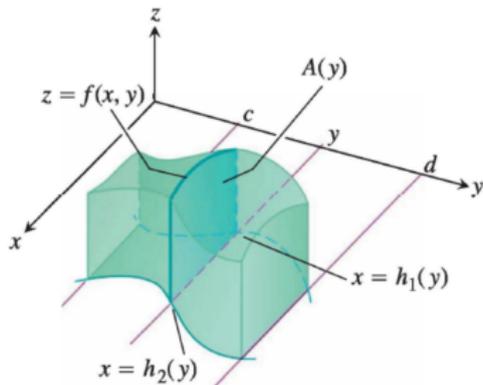
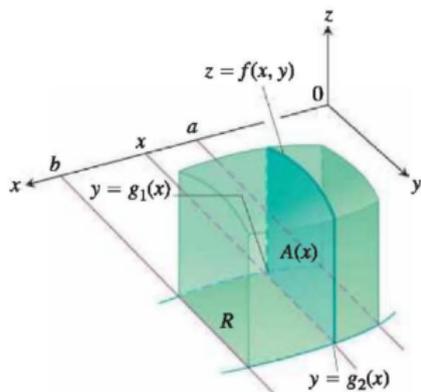
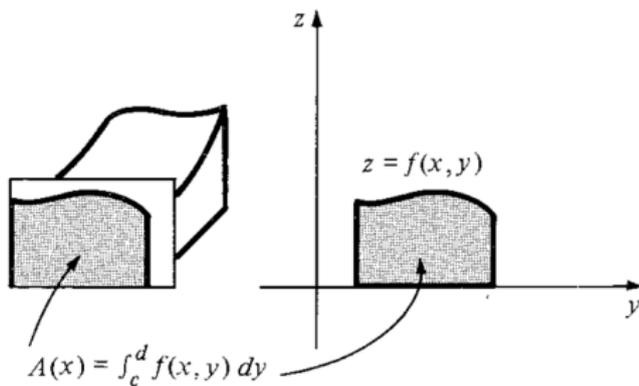
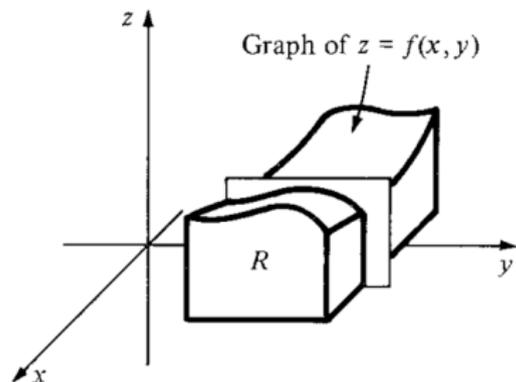
- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- **Fórmula del cambio de variables**
- Integrales dobles en coordenadas polares
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

## 3 Ejemplos varios

# Integrales iteradas: Principio de Cavalieri



# Integrales iteradas: Principio de Cavalieri



# Teorema de Fubini

## Teorema

*Si  $f$  es una función continua en la región  $R$  y*

- *$R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d]$ ), entonces*

# Teorema de Fubini

## Teorema

Si  $f$  es una función continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d]$ ), entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

# Teorema de Fubini

## Teorema

Si  $f$  es una función continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d]$ ), entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

- $R$  está definida por  $a \leq x \leq b$  y  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ , con  $g_1$  y  $g_2$  continuas en  $[a, b]$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

# Teorema de Fubini

## Teorema

Si  $f$  es una función continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d]$ ), entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

- $R$  está definida por  $a \leq x \leq b$  y  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ , con  $g_1$  y  $g_2$  continuas en  $[a, b]$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

- $R$  está definida por  $c \leq y \leq d$  y  $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ , con  $h_1$  y  $h_2$  continuas en  $[c, d]$ , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

# Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y sobre la región  $D$  en el plano  $xy$ , acotada por la recta  $y = 2x$  y la parábola  $y = x^2$ .

# Ejemplo

Halle el volumen del sólido que es la parte del espacio bajo el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y sobre la región  $D$  en el plano  $xy$ , acotada por la recta  $y = 2x$  y la parábola  $y = x^2$ .

A B C

$$\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy$$

Rta:  $\frac{216}{35} \approx 6,17$ .

## 1 Integración de funciones de dos variables

- Integrales dobles en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Aplicaciones: áreas y valor medio

## 2 Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables

- Integrales triples en coordenadas rectangulares
- Integrales iteradas y Teorema de Fubini
- Fórmula del cambio de variables
- Integrales dobles en coordenadas polares
- Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

## 3 Ejemplos varios

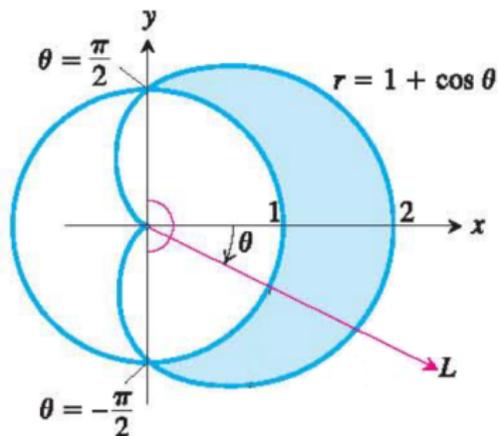
# Áreas por doble integración

## Definición

El área de una región plana cerrada y acotada  $R$  es

$$A = \iint_R dA.$$

¿Y para qué serviría? Para hallar el área de la región sombreada, fuera del círculo  $r = 1$  y dentro de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ :



# Valor medio de una función integrable en una región acotada $R$

## Definición

Sea  $f$  una función integrable sobre una región acotada  $R$ . Entonces:

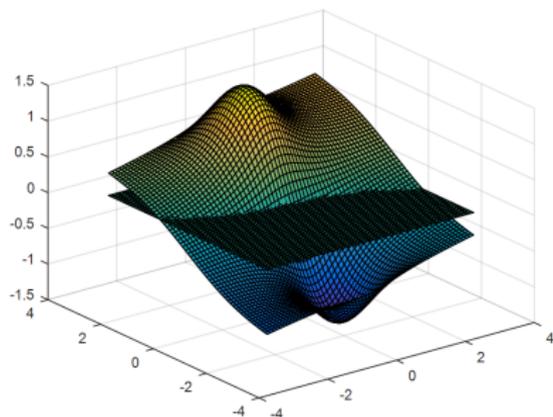
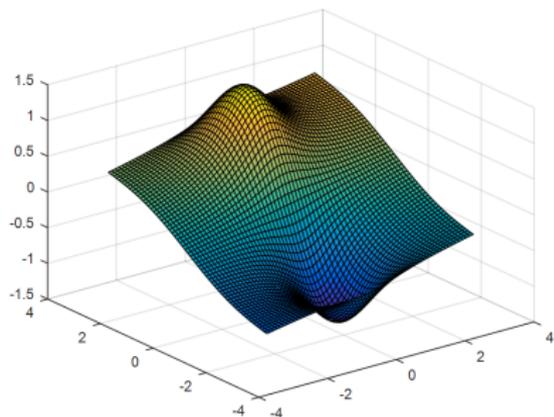
$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$

# Valor medio de una función integrable en una región acotada $R$

## Definición

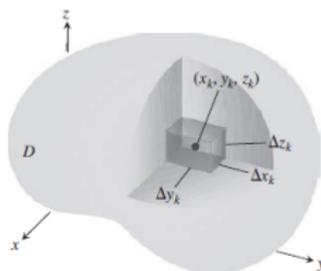
Sea  $f$  una función integrable sobre una región acotada  $R$ . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f \, dA.$$



- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Fórmula del cambio de variables
  - Integrales dobles en coordenadas polares
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

# Definición de integral triple sobre rectángulos



**FIGURA 15.29** Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen  $\Delta V_k$ .

# Definición de integral triple sobre rectángulos

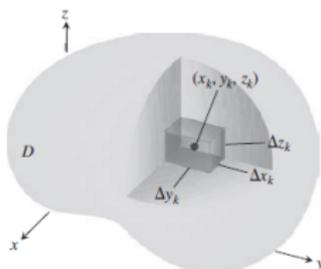


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen  $\Delta V_k$ .

Sea  $f$  una función definida y **acotada** en un **rectángulo o caja**  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por  $n^3$  subrectángulos y formamos la suma de Riemann  $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V_{ijk}$ .

# Definición de integral triple sobre rectángulos

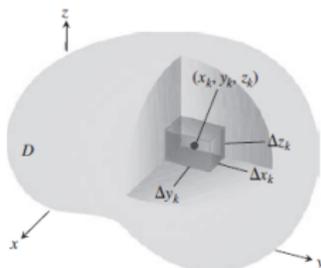


FIGURA 15.29 Partición de un sólido con celdas cúbicas de volumen  $\Delta V_k$ .

Sea  $f$  una función definida y **acotada** en un **rectángulo o caja**  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por  $n^3$  subrectángulos y formamos la suma de Riemann  $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V_{ijk}$ . Si el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n$  existe para cualquier elección de  $(x_i, y_j, z_k)$ , se dice que  $f$  es **integrable** sobre  $R$  y que la integral triple de  $f$  sobre  $R$  es el límite de las sumas  $S_n$ . La integral se denota por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

## Definición de integral triple sobre otras regiones

Sea  $f$  una función definida y **acotada** en una región acotada,  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en  $R$ ; formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V_{ijk}.$$

## Definición de integral triple sobre otras regiones

Sea  $f$  una función definida y **acotada** en una región acotada,  $R$ . Definimos una partición de  $R$ , formada por rectángulos y consideramos sólo los rectángulos incluidos en  $R$ ; formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V_{ijk}.$$

Si el límite  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n$  existe, para cualquier elección de  $(x_i, y_j, z_k)$ , se dice que  $f$  es **integrable** sobre  $R$  y que la integral triple de  $f$  sobre  $R$  es el límite de las sumas  $S_n$ . La integral se denota por

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

# Propiedades de las integrales triples

1 Si  $f$  es continua en una región cerrada y acotada  $R$ , entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

Si  $f$  y  $g$  son funciones integrables sobre la región cerrada y acotada  $R$ , entonces:

$$2 \quad \iiint_R [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_R f(x, y, z) dV + \iiint_R g(x, y, z) dV.$$

$$3 \quad \iiint_R cf(x, y, z) dV = c \iiint_R f(x, y, z) dV.$$

4 Si  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  para todo  $(x, y, z) \in R$ ,

$$\iiint_R f(x, y, z) dV \leq \iiint_R g(x, y, z) dv.$$

- 5 Si  $R_1$  y  $R_2$  son dos regiones tales que  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$  y  $f$  es acotada e integrable en cada una de ellas, entonces  $f$  es integrable en  $R_1 \cup R_2$  y

$$\iiint_{R_1 \cup R_2} f(x, y, z) dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z) dV.$$

- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 **Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables**
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - **Integrales iteradas y Teorema de Fubini**
  - Fórmula del cambio de variables
  - Integrales dobles en coordenadas polares
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

## Teorema

Si  $f$  es continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$ ), entonces

## Teorema

Si  $f$  es continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$ ), entonces

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x, y, z) dz dx dy \dots\end{aligned}$$

## Teorema

Si  $f$  es continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$ ), entonces

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x, y, z) dz dx dy \dots\end{aligned}$$

- $R$  está definida por  $a \leq x \leq b$ ,  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  y  $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$ , con  $g_1$  y  $g_2$  continuas en  $[a, b]$ , y  $h_1$  y  $h_2$  continuas en  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ , entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

## Teorema

Si  $f$  es continua en la región  $R$  y

- $R$  es rectangular ( $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, m]$ ), entonces

$$\begin{aligned}\iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^m f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_e^m f(x, y, z) dz dx dy \dots\end{aligned}$$

- $R$  está definida por  $a \leq x \leq b$ ,  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  y  $h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$ , con  $g_1$  y  $g_2$  continuas en  $[a, b]$ , y  $h_1$  y  $h_2$  continuas en  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ , entonces

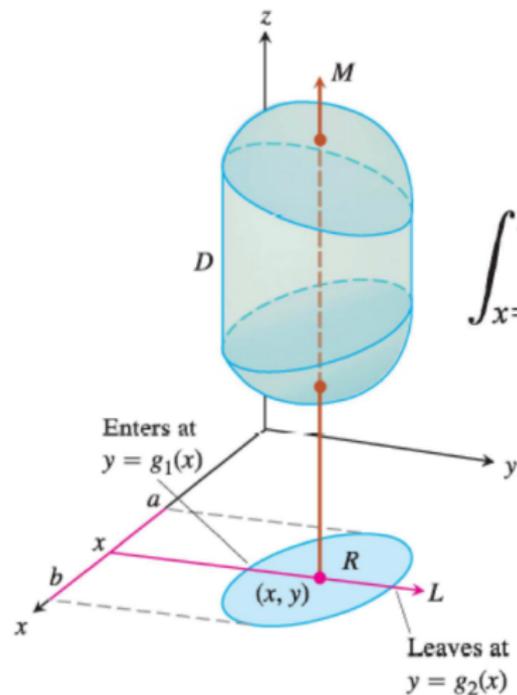
$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

- Hay otros casos...

# Teorema de Fubini

Si  $f$  es continua en  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dz dy dx = \dots$$



$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x, y)}^{z=f_2(x, y)} F(x, y, z) dz dy dx.$$

## Definición

Si  $D$  es un sólido (cuerpo que ocupa una región en  $\mathbb{R}^3$  que es **cerrada y acotada**), su volumen es

## Definición

Si  $D$  es un sólido (cuerpo que ocupa una región en  $\mathbb{R}^3$  que es **cerrada y acotada**), su volumen es

$$V = \iiint_D dV.$$

## Definición

Sea  $f$  una función integrable sobre una región acotada  $R$ . Entonces:

$$\text{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{volumen de } R} \iiint_R f \, dV.$$

# Aplicaciones: Masa y centro de masa

Si un sólido  $D$  tiene densidad en cada punto dada por una función integrable  $\delta(x, y, z)$ , su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

# Aplicaciones: Masa y centro de masa

Si un sólido  $D$  tiene densidad en cada punto dada por una función integrable  $\delta(x, y, z)$ , su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

# Aplicaciones: Masa y centro de masa

Si un sólido  $D$  tiene densidad en cada punto dada por una función integrable  $\delta(x, y, z)$ , su masa se calcula por

$$M = \iiint_D \delta dV$$

y las coordenadas de su centro de masa vienen dadas por  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_D x\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_D y\delta dV}{\iiint_D \delta dV} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_D z\delta dV}{\iiint_D \delta dV}$$

**Observación:** cuando  $\delta$  es constante, el centro de masa se llama **centroide**.

## Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$ , si la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$ .

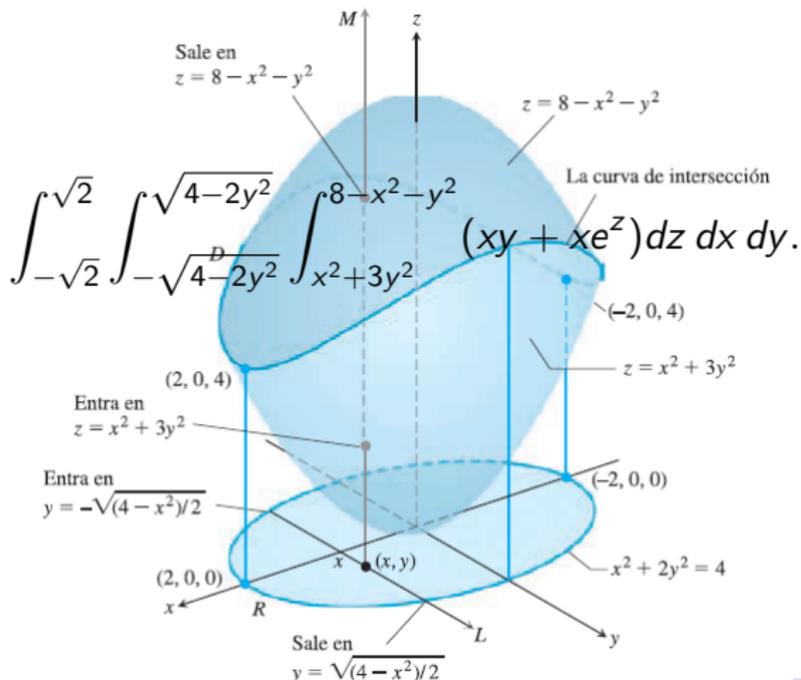
## Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$ , si la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$ . SOL: (pag.862)



# Ejemplo: masa

Plantee una integral para calcular la masa del sólido comprendido entre las superficies dadas por  $z = x^2 + 3y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$ , si la densidad en cada punto viene dada por  $\delta(x, y, z) = xy + xe^z$ . SOL: (pag.862)





- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 **Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables**
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - **Fórmula del cambio de variables**
  - Integrales dobles en coordenadas polares
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

## Reminder...

Para resolver por sustitución la integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} 5 \cos(5x) dx,$$

planteamos:  $u = 5x$ ;  $du = 5dx$  y

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 1.$$

## Reminder...

Para resolver por sustitución la integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} 5 \cos(5x) dx,$$

planteamos:  $u = 5x$ ;  $du = 5dx$  y

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 1.$$

En general, dada  $g : [A, B] \rightarrow [a, b]$ , biyectiva,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(g(u)) |g'(u)| du.$$

En el ejemplo:

$$g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, \frac{\pi}{10}] \quad g(u) = x = \frac{u}{5} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos\left(5 \frac{u}{5}\right) \frac{1}{5} du$$

# Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta), \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio  $S$  y la imagen  $R$  de  $r$ .

Ejemplo:

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta), \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio  $S$  y la imagen  $R$  de  $r$ .

Verificar que  $r(\rho, 0)$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , es el segmento  $[0, 1] \times \{0\}$ ; y que  $r(\frac{1}{2}, \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , es la circunferencia con centro en  $(0, 0)$  y radio  $\frac{1}{2}$ .

# Transformaciones en el plano

Ejemplo:

$$r(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta), \quad 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Representar gráficamente el dominio  $S$  y la imagen  $R$  de  $r$ .

Verificar que  $r(\rho, 0)$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , es el segmento  $[0, 1] \times \{0\}$ ; y que  $r(\frac{1}{2}, \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , es la circunferencia con centro en  $(0, 0)$  y radio  $\frac{1}{2}$ .

Esta transformación no es inyectiva en la frontera de  $S$  (todos los puntos  $(0, \theta)$  tienen imagen  $(0, 0)$ ), pero sí lo es en el interior de  $S$ .

# Fórmula del cambio de variables

Para calcular

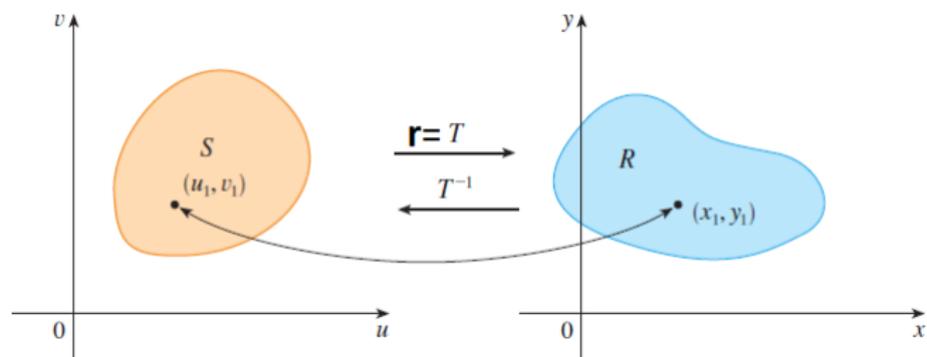
$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

# Fórmula del cambio de variables

Para calcular

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

se puede definir una transformación



$T : S \rightarrow R$  biyectiva

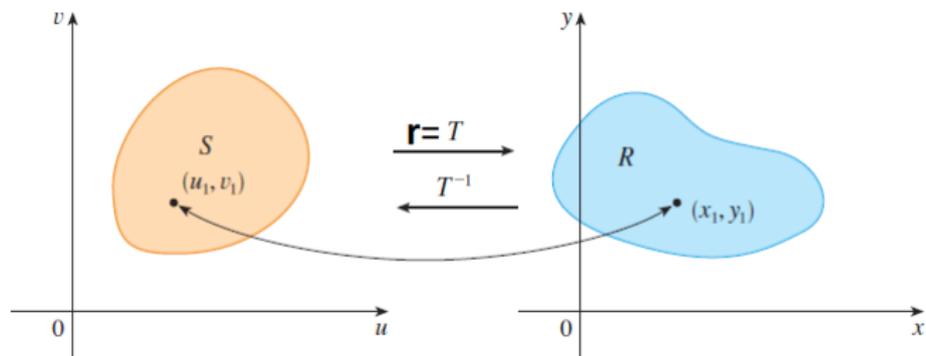
$$T(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

# Fórmula del cambio de variables

Para calcular

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

se puede definir una transformación



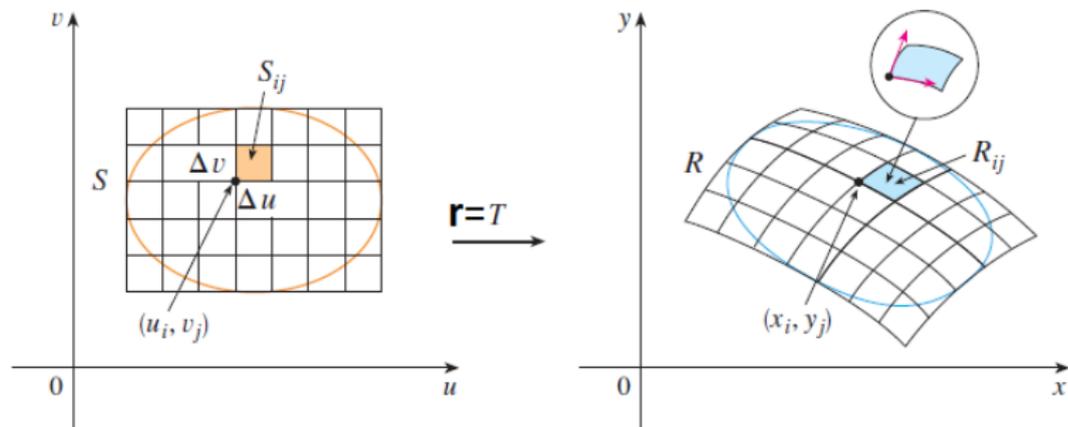
$T : S \rightarrow R$  biyectiva

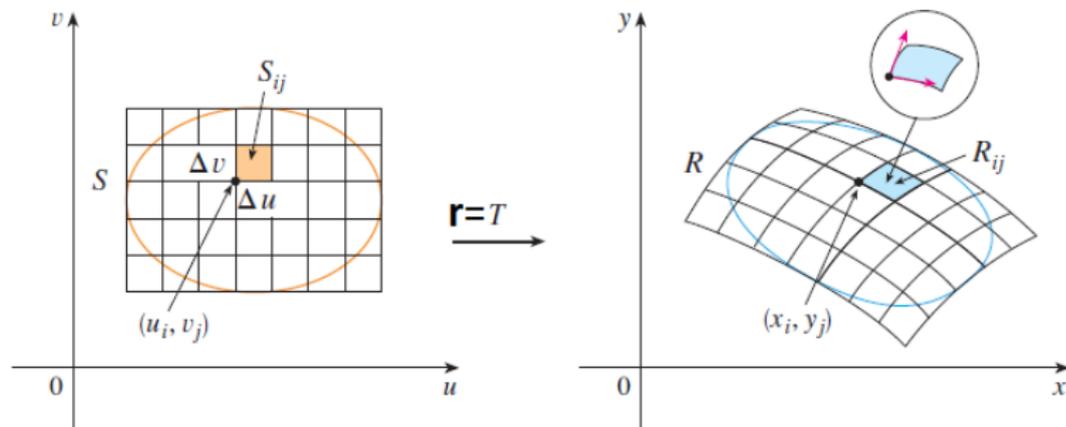
$$T(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$$

Se puede probar que **si**  $f$  es continua,  $x$  y  $y$  tienen derivadas parciales de primer orden continuas y el jacobiano de la transformación,  $J(u, v)$ , solo se anula en puntos aislados o nunca, **entonces**

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

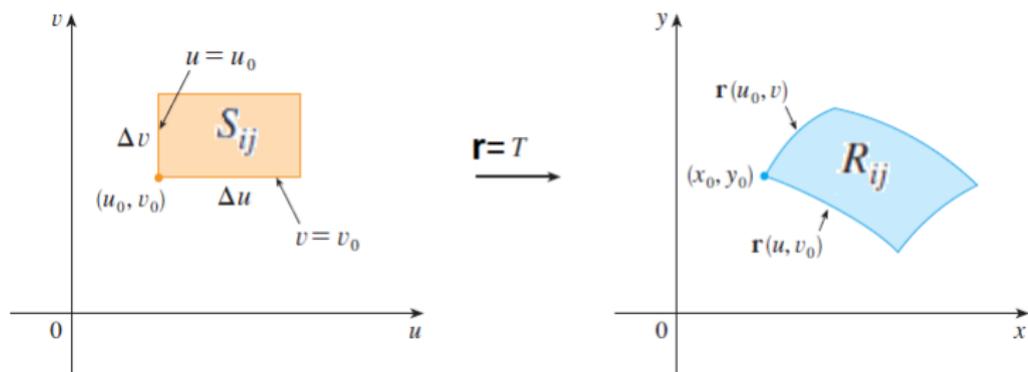
# JACOBIANO



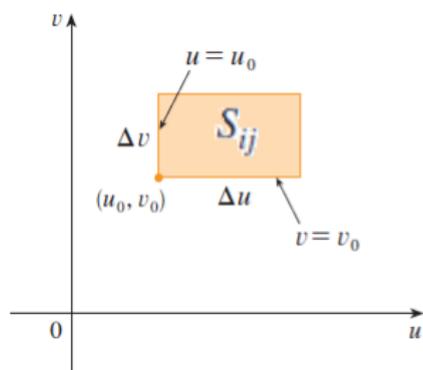


$$\iint_R f(x, y) dA \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$$

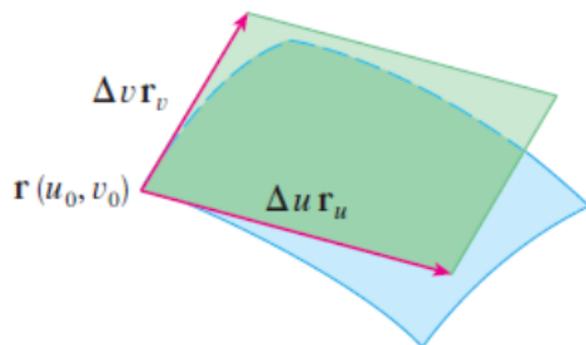
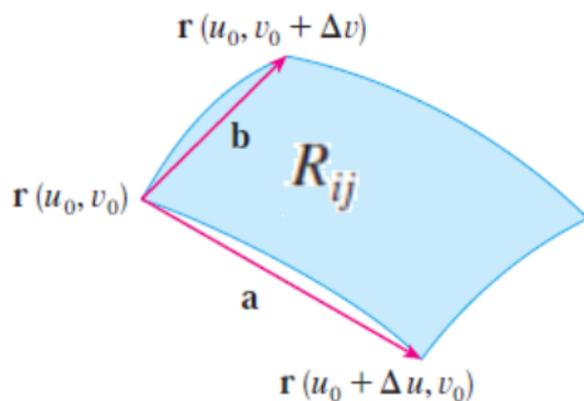
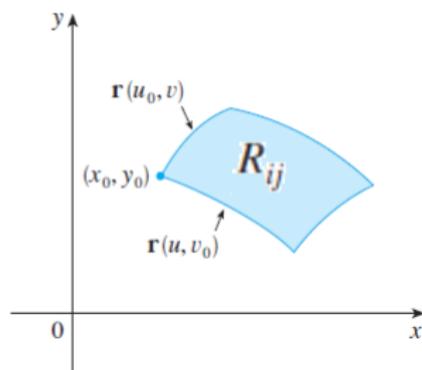
# JACOBIANO



# JACOBIANO



$$\mathbf{r} = T \longrightarrow$$



$$|(\Delta u r_u) \times (\Delta v r_v)| = |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v$$

$$|(\Delta u r_u) \times (\Delta v r_v)| = |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$|(\Delta u r_u) \times (\Delta v r_v)| = |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

## Definición

El Jacobiano de la transformación  $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$$\iint_R f(x, y) dA \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$$

$$\iint_R f(x, y) dA \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$$

$$\Delta A_{ij} \simeq \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| (u_i, v_j) \Delta u_i \Delta v_j$$

$$\iint_R f(x, y) dA \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$$

$$\Delta A_{ij} \simeq \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| (u_i, v_j) \Delta u_i \Delta v_j$$

$$\iint_R f(x, y) dA \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u_i \Delta v_j$$

## Teorema

*Supóngase que  $T$  es una transformación biyectiva de  $S$  en  $R$ , tal que sus componentes tienen derivadas parciales continuas de primer orden en  $S$  y cuyo Jacobiano es no nulo en  $S$ . Supóngase que  $f$  es continua en  $R$ .*

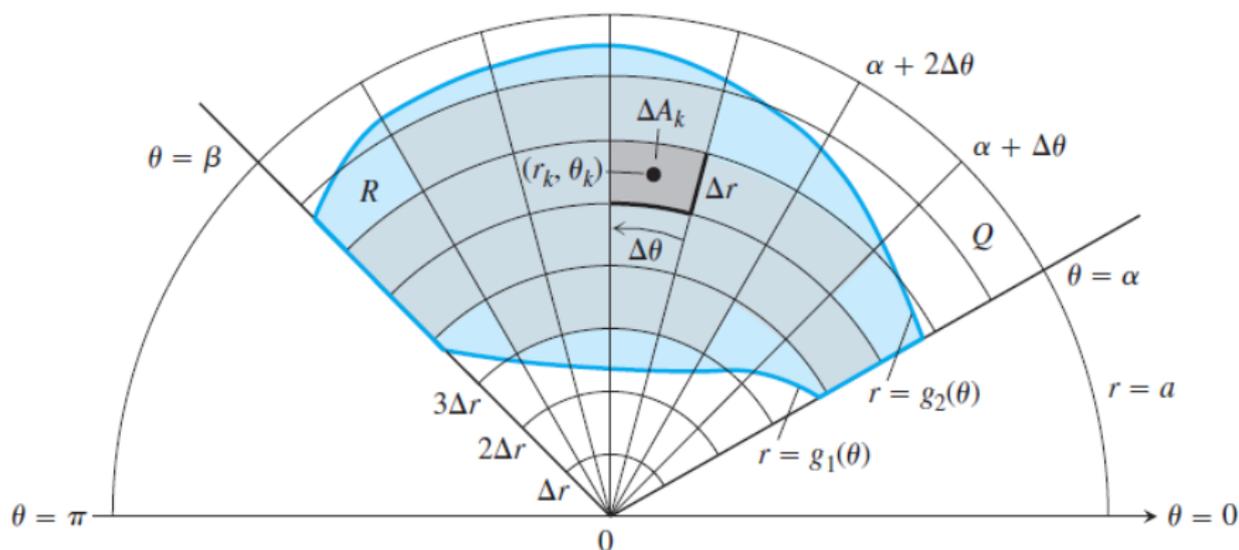
*Entonces:*

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

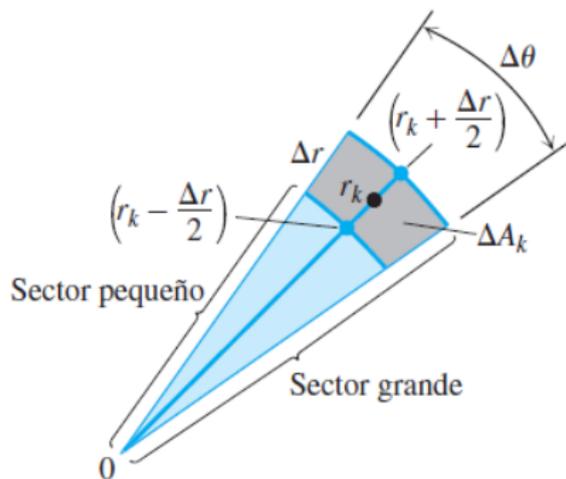
**Observación:** el teorema también vale si  $T$  no es inyectiva en puntos de la frontera de  $S$ .

- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 **Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables**
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Fórmula del cambio de variables
  - **Integrales dobles en coordenadas polares**
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

# Integrales dobles en coordenadas polares



**FIGURA 15.21** La región  $R: g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$ , está contenida en la región con forma de abanico  $Q: 0 \leq r \leq a, \alpha \leq \theta \leq \beta$ . La partición de  $Q$  mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de  $R$ .



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

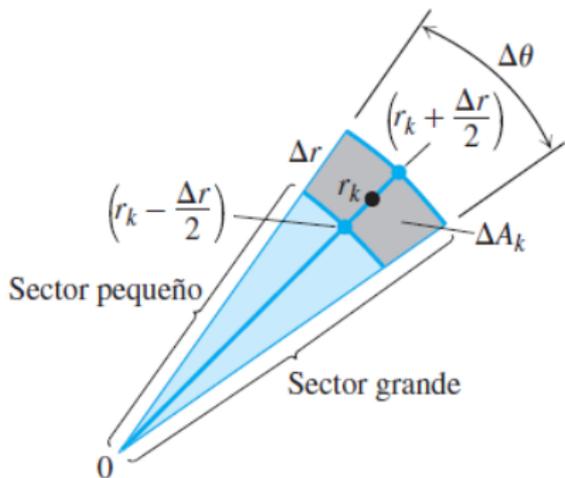
$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left( r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left( r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

**FIGURA 15.22** La observación de que

$$\Delta A_k = \left( \text{área del sector más grande} \right) - \left( \text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula  $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$ .



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left( r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left( r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

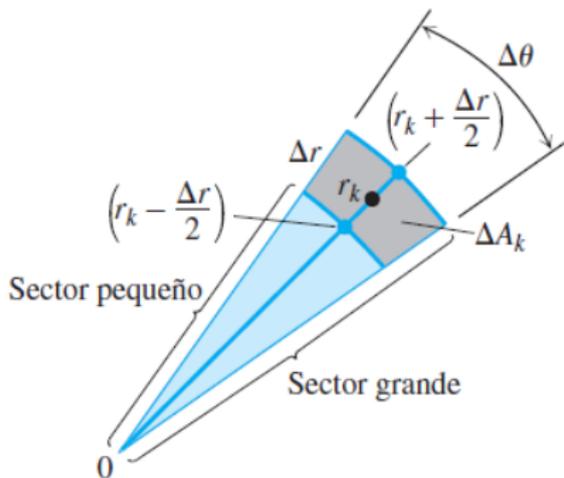
**FIGURA 15.22** La observación de que

$$\Delta A_k = \left( \text{área del sector más grande} \right) - \left( \text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula  $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$ .

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left( r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left( r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

**FIGURA 15.22** La observación de que

$$\Delta A_k = \left( \text{área del sector más grande} \right) - \left( \text{área del sector más pequeña} \right)$$

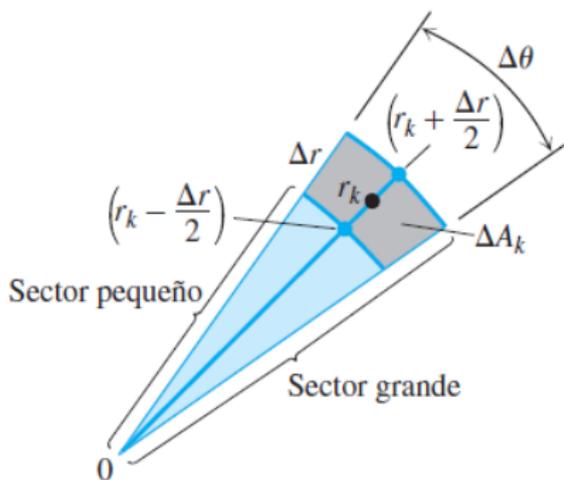
nos conduce a la fórmula  $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$ .

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Jacobiano:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$



$$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2,$$

$$\text{Radio interior: } \frac{1}{2} \left( r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta$$

$$\text{Radio exterior: } \frac{1}{2} \left( r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta.$$

**FIGURA 15.22** La observación de que

$$\Delta A_k = \left( \text{área del sector más grande} \right) - \left( \text{área del sector más pequeña} \right)$$

nos conduce a la fórmula  $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$ .

Transformación:

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Jacobiano:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{array} \right| = |r| = r.$$

# Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

# Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

# Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **rectangulares**:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

## Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **rectangulares**:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \right) dx \end{aligned}$$

## Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **rectangulares**:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{2}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \right) dx \end{aligned}$$

Ver fórmulas 45 y 46 del final del libro (reparar análisis 1)

# Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **polares**:

# Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **polares**:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

## Ejemplo

¿Cómo se calcula el volumen del sólido que es la parte del primer octante que se encuentra bajo el gráfico de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  y sobre el cuarto de círculo centrado en el origen y de radio 1 en el primer cuadrante del plano  $xy$ ?

Planteo:  $V = \iint_R f(x, y) dA$

SOLUCIÓN en coordenadas **polares**:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 d\theta dr = \frac{\pi}{8}$$

# Aplicación al cálculo de áreas

Cálculo de áreas de superficies planas y acotadas.

# Aplicación al cálculo de áreas

Cálculo de áreas de superficies planas y acotadas. Si la región plana  $R$  es **acotada**, su área es

# Aplicación al cálculo de áreas

Cálculo de áreas de superficies planas y acotadas. Si la región plana  $R$  es **acotada**, su área es

$$A = \iint_R dA.$$

# Aplicación al cálculo de áreas

Cálculo de áreas de superficies planas y acotadas. Si la región plana  $R$

es **acotada**, su área es  $A = \iint_R dA$ .

Ejemplo: hallar el área fuera del círculo  $r = 1$  y dentro de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ .

# Aplicación al cálculo de áreas

Cálculo de áreas de superficies planas y acotadas. Si la región plana  $R$

es **acotada**, su área es  $A = \iint_R dA$ .

Ejemplo: hallar el área fuera del círculo  $r = 1$  y dentro de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ .

Representar y buscar intersecciones en coordenadas polares.



- 1 Integración de funciones de dos variables
  - Integrales dobles en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Aplicaciones: áreas y valor medio
- 2 Integrales múltiples y la fórmula del cambio de variables
  - Integrales triples en coordenadas rectangulares
  - Integrales iteradas y Teorema de Fubini
  - Fórmula del cambio de variables
  - Integrales dobles en coordenadas polares
  - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas
- 3 Ejemplos varios

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r \cos \theta; \quad h(r, \theta, z) = y = r \operatorname{sen} \theta; \quad k(r, \theta, z) = z$$

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r \cos \theta; \quad h(r, \theta, z) = y = r \operatorname{sen} \theta; \quad k(r, \theta, z) = z$$

Jacobiano:

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas cilíndricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

$$g(r, \theta, z) = x = r \cos \theta; \quad h(r, \theta, z) = y = r \operatorname{sen} \theta; \quad k(r, \theta, z) = z$$

Jacobiano:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z$$

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r.$$

## Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el paraboloides  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

## Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el paraboloides  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el paraboloides  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

## Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el paraboloides  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 4$$

## Ejemplo: coordenadas cilíndricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el paraboloides  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta.$$

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

$$\begin{aligned}g(\rho, \theta, \phi) = x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; & h(\rho, \theta, \phi) = y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta; \\k(\rho, \theta, \phi) = z &= \rho \cos \phi\end{aligned}$$

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho, \theta, \phi) = x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; \quad h(\rho, \theta, \phi) = y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$$

$$k(\rho, \theta, \phi) = z = \rho \cos \phi$$

Jacobiano:

# Fórmula del cambio de variables: coordenadas esféricas

Definimos la transformación  $T$  a través de sus funciones componentes:

$$g(\rho, \theta, \phi) = x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta; \quad h(\rho, \theta, \phi) = y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta;$$
$$k(\rho, \theta, \phi) = z = \rho \cos \phi$$

Jacobiano:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi.$$

## Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el plano  $z = 1$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

## Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el plano  $z = 1$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

## Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el plano  $z = 1$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el plano  $z = 1$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

## Ejemplo: coordenadas esféricas

Ejemplo:

Sea  $D$  la región acotada abajo por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y arriba por el plano  $z = 1$ . Plantear una integral que dé el volumen de  $D$ .

Solución:

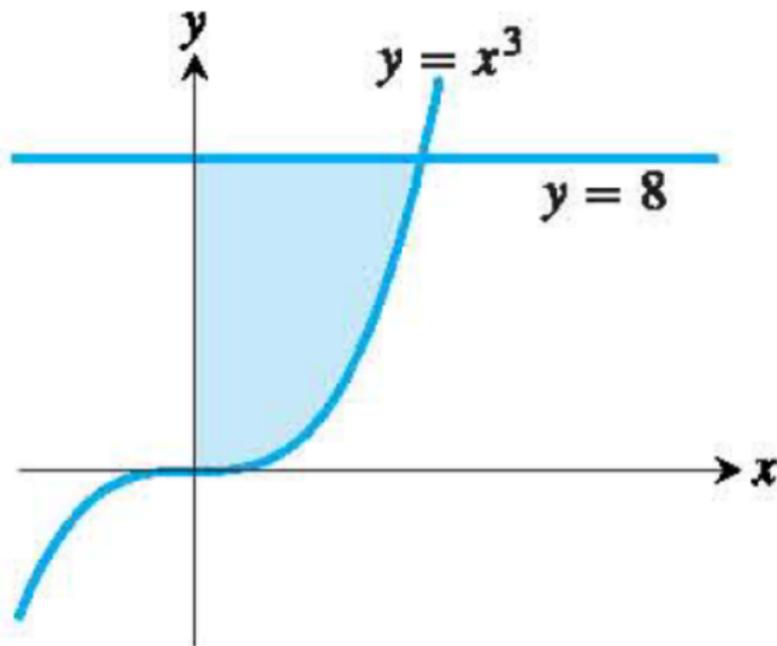
$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

# Otros ejemplos

- 1) Escriba dos integrales iteradas para hallar  $\iint_R f(x, y) dA$  sobre la región  $R$  dada en el gráfico.

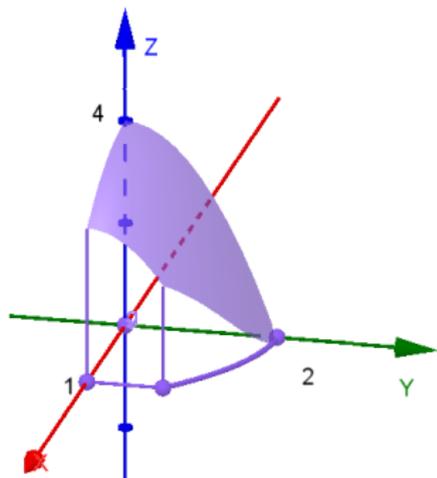


## Otros ejemplos

2) ¿Qué calcula la integral  $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy dx$ ? ¿Cuánto vale?

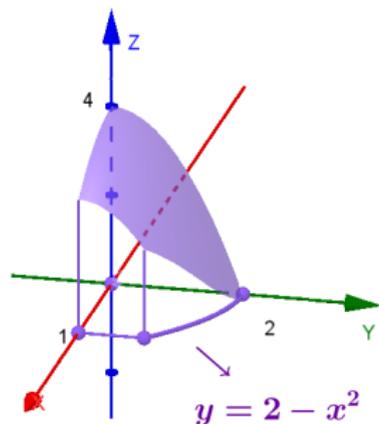
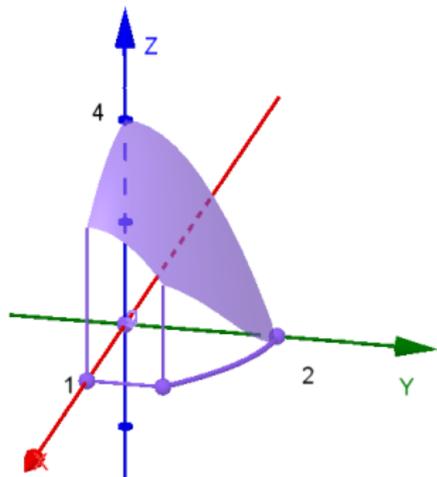
## Otros ejemplos

- 2) ¿Qué calcula la integral  $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy dx$ ? ¿Cuánto vale?  
SOLUCIÓN:



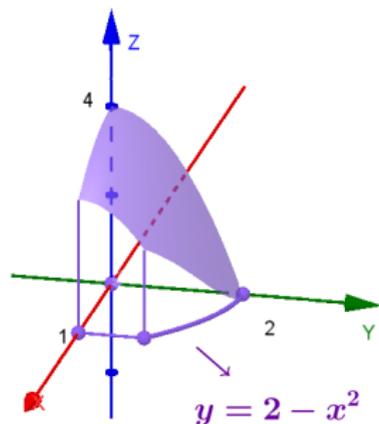
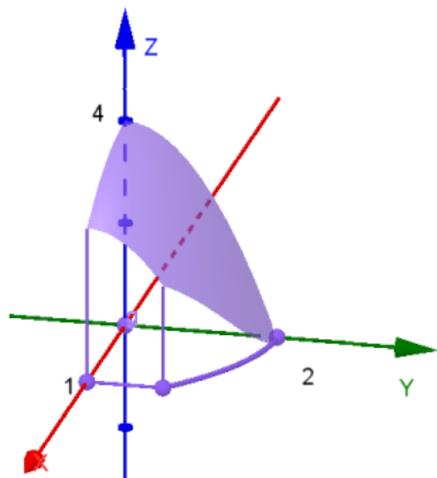
# Otros ejemplos

- 2) ¿Qué calcula la integral  $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy dx$ ? ¿Cuánto vale?  
SOLUCIÓN:



## Otros ejemplos

- 2) ¿Qué calcula la integral  $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy dx$ ? ¿Cuánto vale?  
SOLUCIÓN:



$$\int_0^1 \int_0^{2-x^2} (4 - x^2 - y^2) dy dx = \frac{158}{35} \simeq 4,5143$$