Integrales de superficie de campos escalares y de campos vectoriales

11. Calcule la integral de la función f dada en la superficie S indicada:

   a) $f(x,y,z) = x$ sobre $S : y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

   b) $f(x,y,z) = x^2$ sobre la esfera unitaria $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   c) $f(x,y,z) = x^2\sqrt{5-4z}$ sobre el domo parabólico $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \leq 0$.

   d) $f(x,y,z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular cortado en el primer octante por los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

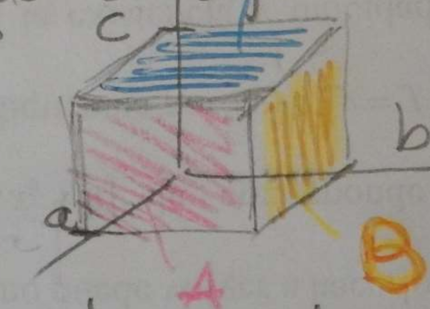
   e) $f(x,y,z) = z - x$, sobre la porción de la gráfica de $z = x + y^2$ arriba del triángulo en el plano xy, con vértices en $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,0)$ (véase la figura).

$f(x,y,z) = xyz$ sobre la sup. sólido rect.

Como la superficie no es suave, la integral se calcula como suma de las integrales de cada cara (que por separado son superficies suaves)

$$\iint_S f\,d\sigma =$$

$$\underbrace{\iint f\,d\sigma}_{A} + \underbrace{\iint f\,d\sigma}_{B} + \underbrace{\iint d\sigma}_{C} + \underbrace{\iint f\,d\sigma}_{\substack{\text{cara trasera} \\ (*)\ 0}} + \underbrace{\iint f\,d\sigma}_{\substack{\text{cara izquierda} \\ 0}} + \overbrace{\underbrace{\iint f\,d\sigma}_{\substack{\text{cara de abajo} \\ C}}}^{0}$$



(*) porque por ej. en la de atrás la parametrización sería $r(x,z)=(x,0,z)$ y en ella $f(x,y,z)=0$, con lo cual se anula la integral.

CARA A

$r(y,z) = (a, y, z) \qquad r_y = (0,1,0) \qquad r_z = (0,0,1)$

$$r_y \times r_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0) \rightarrow \|r_y \times r_z\| = 1$$

va a quedar igual para $\|r_x \times r_z\|$ y $\|r_x \times r_y\|$ al parametrizar las otras caras

$$\iint_S f \, d\sigma = \underbrace{\int_0^b \int_0^c ayz \cdot 1 \, dz \, dy}_{A} + \underbrace{\int_0^a \int_0^b cxy \, 1 \, dy \, dx}_{C} + \underbrace{\int_0^a \int_0^c bxz \, 1 \, dz \, dx}_{B}$$

$$= a \frac{c^2}{2} \frac{b^2}{2} + c \frac{b^2}{2} \frac{a^2}{2} + b \frac{c^2}{2} \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{abc}{4} (cb + ba + ca)$$