Análisis Matemático II

TP4b: Ejercicio 15

Teorema de Stokes

15. Utilice el teorema de Stokes para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C mediante la integral de superficie correspondiente.

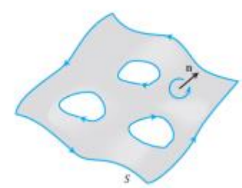
a) $\mathbf{F} = (x^2, 2x, z^2)$ y C: la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy, en sentido antihorario.

b) $\mathbf{F} = (2y, 3x, -z^2)$ y C: la circunferencia $x^2+y^2 = 9$ en el plano xy, en sentido antihorario.

Teorema

Sea S una superficie orientada, suave por partes, que tiene como "frontera" una curva suave por partes, C. Sea $\mathrm{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre una región abierta que contiene a S. Entonces la circulación de F a lo largo de C en la dirección antihoraria con respecto al vector unitario normal a la superficie, n, es:

$$\oint_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \iint_S \nabla \times \mathrm{F} \cdot \mathrm{n}\, d\sigma.$$



superficies con agujeros

a) El ejercicio nos pide que usemos el teorema de Stokes para calcular la circulación, es decir, nos está pidiendo que calculemos la integral de superficie del rotacional del campo vectorial, a través de alguna superficie conveniente.

Primero calculamos el rotacional del campo F:

$$rot\ \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ x^2 & 2x & z^2 \end{vmatrix} = (0; 0; 2)$$

Ahora tenemos elegir alguna superficie S que tenga a la curva C (elipse) como frontera. Elegimos la superficie plana del interior de la elipse. La parametrización natural de una superficie elíptica se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{r}(r,\theta) = (arcos\theta; brsen\theta; 0)$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

En esta elipse en particular, a=1 y b=2.

Las derivadas parciales del vector posición resultan:

$$\vec{r}_r(r,\theta) = (acos\theta; bsen\theta; 0)$$

$$\vec{r}_\theta(r,\theta) = (-arsen\theta; brcos\theta; 0)$$

Calculamos el producto vectorial que dará la dirección del vector normal a la superficie elíptica:

$$\vec{r}_r\, x\, \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ acos\theta & bsen\theta & 0 \\ -arsen\theta & brcos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; abr)$$

Si recorremos la circunferencia en sentido antihorario con la mano derecha, nuestro dedo pulgar apuntará en dirección z positiva, la misma dirección que el vector anterior, por lo cual concluimos que $\vec{r}_r\, x\, \vec{r}_\theta$ tiene el sentido adecuado para obtener la circulación antihoraria.

Si por ejemplo, en algún ejercicio el signo es opuesto al que necesitamos, sólo invertimos el orden de los vectores, es decir, en vez de usar $\vec{r}_r\, x\, \vec{r}_\theta$, usamos $\vec{r}_\theta\, x\, \vec{r}_r$.

Volviendo al teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_c^d\int_a^b rot\vec{F} \cdot \frac{(\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v)}{\|\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v\|} \|\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v\|\, dudv$$

Reemplazamos en la integral de superficie de campo vectorial:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0{,}0{,}2) \cdot (0; 0; abr)\, drd\theta$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2abr\, drd\theta$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi$$

b) Procedemos del mismo modo que en el ejercicio anterior. Calculamos el rotacional del campo F:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = (0; 0; 1)$$

Ahora tenemos que elegir alguna superficie S que tenga a la curva C (circunferencia) como frontera. Elegimos la superficie plana del interior y parametrizamos:

$$\vec{r}(r,\theta) = (rcos\theta; rsen\theta; 0)$$

$$0 \le r \le 3$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Las derivadas parciales del vector posición resultan:

$$\vec{r}_r(r,\theta) = (cos\theta; sen\theta; 0)$$

$$\vec{r}_\theta(r,\theta) = (-rsen\theta; rcos\theta; 0)$$

Calculamos el producto vectorial que dará la dirección del vector normal a la superficie:

$$\vec{r}_r\, x\, \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos\theta & sen\theta & 0 \\ -rsen\theta & rcos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; r)$$

Si recorremos la circunferencia en sentido antihorario con la mano derecha, nuestro dedo pulgar apuntará en dirección z positiva, la misma dirección que el vector anterior, por lo cual concluimos que $\vec{r}_r\, x\, \vec{r}_\theta$ tiene el sentido adecuado para obtener la circulación antihoraria.

Volviendo al teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_c^d\!\!\int_a^b rot\vec{F} \cdot \frac{(\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v)}{\|\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v\|} \|\vec{r}_u\, x\, \vec{r}_v\|\, dudv$$

Reemplazamos en la integral de superficie de campo vectorial:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^3 (0{,}0{,}1) \cdot (0; 0; r)\, drd\theta$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^3 r\, drd\theta$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9\pi$$