Algunos ejercicios resueltos del TP4b
11c-13a-15a-18-26b-32

11. Calcule la integral de la función f dada en la superficie S indicada:

    c) $f(x,y,z) = x^2\sqrt{5-4z}$ sobre el domo parabólico $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

    Debemos hallar $\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma$ y, para ello, necesitamos una parametrización de la superficie S. Una forma de parametrizarla es

    $$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1-r^2),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1.$$

    En este caso

    $$\begin{aligned}
    \mathbf{r}_r(r,\theta) &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2r)\\
    \mathbf{r}_\theta(r,\theta) &= (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)\\
    (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)(r,\theta) &= (2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r)\\
    |(\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)(r,\theta)| &= r\sqrt{4r^2+1}
    \end{aligned}$$

    y, así,

    $$\begin{aligned}
    \iint_S f(x,y,z)\, d\sigma &= \iint_D f(\mathbf{r}_r(r,\theta))|(\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)(r,\theta)|\, dr\, d\theta\\
    &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\sqrt{5-4(1-r^2)}\, r\sqrt{4r^2+1} dr\, d\theta\\
    &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta(4r^2+1) dr\, d\theta\\
    &= \frac{17}{15}\pi. \qquad \blacksquare
    \end{aligned}$$

13. Encuentre las integrales de superficie de los campos vectoriales dados, a través de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$ en el primer octante, en la dirección que se aleja del origen.

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{k}$.

    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 1)$.

    a) Necesitamos contar con una parametrización de esta superficie, por ejemplo:

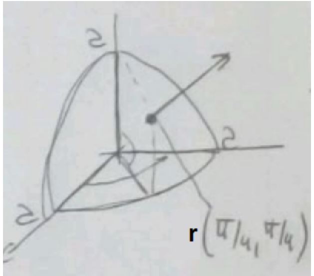
    $$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\cos\theta\operatorname{sen}\phi, a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, a\cos\phi),\ 0 \leq \phi \leq \pi/2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

    En este caso:

    $$\begin{aligned}
    \mathbf{r}_\phi(\phi,\theta) &= (a\cos\theta\cos\phi, a\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -a\operatorname{sen}\phi)\\
    \mathbf{r}_\theta(\phi,\theta) &= (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, a\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 0)\\
    (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)(\phi,\theta) &= (a^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, a^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, a^2\cos\phi\operatorname{sen}\phi)
    \end{aligned}$$

    Veamos si la orientación que este producto vectorial nos provee es la correcta (caso contrario, debemos cambiar el sentido al producto vectorial). Para ello elegimos valores para los parámetros, por ejemplo $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\phi = \frac{\pi}{4}$ y evaluamos:

    $$\begin{aligned}
    \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\\
    (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) &= \left(a^2\frac{\sqrt{2}}{4}, a^2\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{a^2}{2}\right)
    \end{aligned}$$



Como se aprecia en la imagen, la orientación es la indicada. Entonces calculamos la integral de superficie pedida:

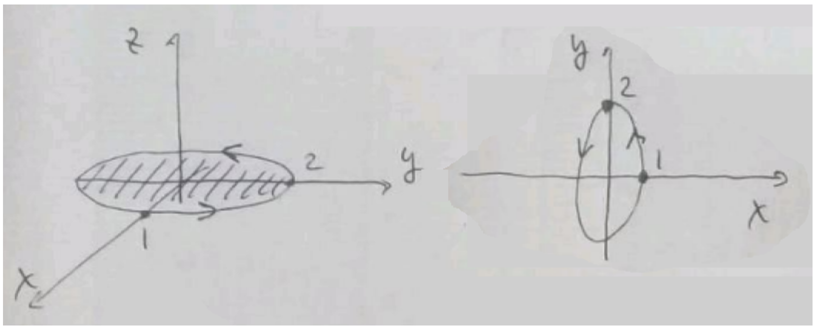
$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta))\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta)(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(0,0,a\cos\phi)\cdot(a^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, a^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, a^2\cos\phi\operatorname{sen}\phi)d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a^3\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi)d\phi\,d\theta \\
&= \frac{2^3}{6}\pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

15. Utilice el teorema de Stokes para calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C mediante la integral de superficie correspondiente.

    a) $\mathbf{F}=(x^2,2x,z^2)$ y C: la elipse $4x^2+y^2=4$ en el plano xy, en sentido antihorario.

    b) $\mathbf{F}=(2y,3x,-z^2)$ y C: la circunferencia $x^2+y^2=9$ en el plano xy, en sentido antihorario.

    a) La curva es la elipse de la figura y podemos **elegir** la superficie plana encerrada por dicha elipse.



Según el Teorema de Stokes, bajo ciertas condiciones $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$. Podemos parametrizar la superficie plana encerrada por la elipse por medio de

$$\mathbf{r}(r,t)=(r\cos(t),2r\operatorname{sen}(t),0),\ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le r\le 1.$$

En este caso,

$$\mathbf{r}_r(r,t)=(\cos(t),2\operatorname{sen}(t),0),\ \mathbf{r}_t(r,t)=(-r\operatorname{sen}(t),2r\cos(t),0),\ \mathbf{r}_r(r,t)\times\mathbf{r}_t(r,t)=(0,0,2r).$$

Debemos constatar que la orientación inducida por este producto vectorial sea la deseada, entonces verificamos con una elección de valores de los parámetros que lo sea (caso contrario cambiamos los signos de todas las componentes del vector $\nabla\times\mathbf{F}(x,y,z)=(0,0,2)$). Podemos elegir, por ejemplo, $r=1$ y $t=0$ y así $\mathbf{r}(1,0)=(1,0,0)$ y $\mathbf{r}_r(1,0)\times\mathbf{r}_t(1,0)=(0,0,2)$. Vemos que la orientación es positiva con respecto a la orientación de la curva C, de manera que no hacemos ningún cambio. Por otra parte, $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 2)$, de manera que:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{r}(r,t)) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_t) dr\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (0,0,2) \cdot (0,0,2r) dr\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r\, dr\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{4r^2}{2}\Big|_0^1 dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\, dt \\
&= 4\pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

18. Sea S el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con $a > 0$ y $0 \leq z \leq h$, junto con su tapa superior, $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$. Sea $\mathbf{F} = (-y, x, x^2)$. Utilice el teorema de Stokes para encontrar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ hacia fuera a través de S.

    Según el Teorema de Stokes,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)) \cdot \mathbf{n} = \oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}\, ds,$$

donde C es la curva frontera de la superficie S; en este caso, C es la circunferencia $X^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy. Para que la orientación de la curva sea positiva con respecto a la orientación de S, ésta debe estar orientada en sentido positivo visto desde el semieje z positivo.

Podemos parametrizar la curva C por medio de $\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t), 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; en este caso se tiene $\mathbf{r}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), 0)$. Así:

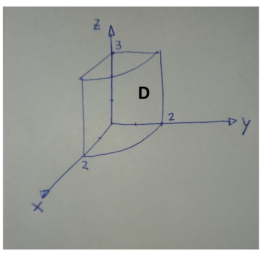
$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), a^2\cos^2(t)) \cdot (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^2\, dt \\
&= a^2 2\pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

26. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F}$ hacia afuera de la superficie S frontera de D, siendo

    a) $\mathbf{F} = (y - x, z - y, y - x)$ y D el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

    b) $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2 z)\mathbf{j} + (4x^2 y^3)\mathbf{k}$ y D la región en el primer octante cortada por $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$.

b) $\oiint_S \mathbf{F}(x, y, z)\, d\sigma = \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z)\, dV$



$$(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = 12x + 2y + 2$$

$$\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{F}(x, y, z)\, d\sigma &= \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z)\, dV \\
&= \iiint_D (12x + 2y + 2) dV \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^3 (12r \cos\theta + 2r \operatorname{sen}\theta + 2) r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= 112 + 6\pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

32. Sea $\mathbf{F} = (x, y, z)$ y suponga que una superficie S y una región sólida D satisfacen las hipótesis del teorema de la divergencia. Demuestre que el volumen de D está dado por la fórmula

$$\text{Volumen de D} = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Dado que $(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) = 3$, en este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Volumen de D} &= \iiint_D 1\, dV \\
&= \frac{1}{3} \iiint_D 3\, dV \\
&= \frac{1}{3} \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) \\
&= \frac{1}{3} \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$