Dada

$$a(x)y'''(x) + b(x)y''(x) + c(x)y'(x) + d(x)y(x) = G(x), \tag{1}$$

donde las funciones coeficientes a, b, c y d y la función G son continuas en un intervalo I y $a(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Por simplicidad, escribiremos las funciones sin indicar la variable independiente. De esta manera, nuestra ecuación (1) se escribe así:

$$ay''' + by'' + cy' + dy = G.$$

Supongamos que se conoce la función complementaria, digamos

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3,$$

(esto significa, según nuestra convención, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$), en la que y_1, y_2 e y_3 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$, en I.

Proponemos una solución y_p que sea una combinación de las soluciones de la edo homogénea asociada, en la que los coeficientes sean **funciones** u_1, u_2 y u_3 que queremos determinar:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3.$$

Las funciones incógnitas, u_1, u_2 y u_3, deben ser tales que y_p sea solución de (1). Para asegurarnos que eso suceda, derivamos y sustituimos las correspondientes derivadas en (1):

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3\\
y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' + u_3'y_3 + u_3y_3'\\
y_p'' &= u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2'' + u_3''y_3 + 2u_3'y_3' + u_3y_3''\\
y_p''' &= u_1'''y_1 + 3u_1''y_1' + 3u_1'y_1'' + u_1y_1''' + u_2'''y_2 + 3u_2''y_2' + 3u_2'y_2'' + u_2y_2''' + u_3'''y_3 + 3u_3''y_3' + 3u_3'y_3'' + u_3y_3'''
\end{aligned}$$

Para sustituir en $ay''' + by'' + cy' + dy = G$, observamos en las derivadas que:

$$\begin{aligned}
y_p &= \underbrace{u_1y_1}_{1} + \underbrace{u_2y_2}_{2} + \underbrace{u_3y_3}_{3}\\
y_p' &= u_1'y_1 + \underbrace{u_1y_1'}_{1} + u_2'y_2 + \underbrace{u_2y_2'}_{2} + u_3'y_3 + \underbrace{u_3y_3'}_{3}\\
y_p'' &= u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + \underbrace{u_1y_1''}_{1} + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + \underbrace{u_2y_2''}_{2} + u_3''y_3 + 2u_3'y_3' + \underbrace{u_3y_3''}_{3}\\
y_p''' &= u_1'''y_1 + 3u_1''y_1' + 3u_1'y_1'' + \underbrace{u_1y_1'''}_{1} + u_2'''y_2 + 3u_2''y_2' + 3u_2'y_2'' + \underbrace{u_2y_2'''}_{2} + u_3'''y_3 + 3u_3''y_3' + 3u_3'y_3'' + \underbrace{u_3y_3'''}_{4}
\end{aligned}$$

y así, al hacer $ay_p''' + by_p'' + cy_p' + dy_p = G$, los términos marcados con 1 darán 0, ya que y_1 es solución de la edo homogénea asociada a (1). Lo mismo pasa con términos marcados con 2 y con los marcados con 3.

De esta manera, omitiendo estos términos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
G &= ay_p''' + by_p'' + cy_p' + dy_p\\
&= a\left\{(u_1'''y_1 + u_1''y_1') + (u_2'''y_2 + u_2''y_2') + (u_3'''y_3 + u_3''y_3') + \right.\\
&\quad 2[(u_1''y_1' + u_1'y_1'') + (u_2''y_2' + u_2'y_2'') + (u_3''y_3' + u_3'y_3'')] +\\
&\quad \left. u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3''\right\}\\
&\quad + b\left\{(u_1''y_1 + u_1'y_1') + (u_2''y_2 + u_2'y_2') + (u_3''y_3 + u_3'y_3') + u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3'\right\}\\
&\quad + c[u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3]
\end{aligned} \tag{2}$$

Recordando que

$$\frac{d}{dx}(u_1'y_1) = u_1''y_1 + u_1'y_1',$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(u_1'y_1) = u_1'''y_1 + 2u_1''y_1' + u_1'y_1'',$$

y fórmulas análogas se verifican para los casos que involucran a u_2, y_2, u_3 y y_3, podemos repensar las fórmulas (2):

$$\begin{aligned}
G &= ay_p''' + by_p'' + cy_p' + dy_p \\
&= a\left\{ (\underbrace{u_1'''y_1}_{1} + \underbrace{u_1''y_1'}_{1'}) + (\underbrace{u_2'''y_2}_{2} + \underbrace{u_2''y_2'}_{2'}) + (\underbrace{u_3'''y_3}_{3} + \underbrace{u_3''y_3'}_{3'}) + \right. \\
&\quad 2[(\underbrace{u_1''y_1'}_{1} + \underbrace{u_1'y_1''}_{1'}) + (\underbrace{u_2''y_2'}_{2} + \underbrace{u_2'y_2''}_{2'}) + (\underbrace{u_3''y_3'}_{3} + \underbrace{u_3'y_3''}_{3'})] + \\
&\quad \left. \underbrace{u_1'y_1''}_{1} + \underbrace{u_2'y_2''}_{2} + \underbrace{u_3'y_3''}_{3} \right\} \\
&\quad + b\left\{(u_1''y_1 + u_1'y_1') + (u_2''y_2 + u_2'y_2') + (u_3''y_3 + u_3'y_3') + u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3'\right\} \\
&\quad + c\left[u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3\right]
\end{aligned}$$

Notando que podemos agrupar las expresiones con igual número debajo y algunas otras como derivadas, obtenemos:

$$\begin{aligned}
G = a &\left[\frac{d^2}{dx^2}(u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3) + \frac{d}{dx}(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3') + u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3''\right] \\
&+ b\left[\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3) + u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3'\right] \\
&+ c\left[u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3\right]
\end{aligned}$$

Hemos encontrado una ecuación con tres incógnitas. Para poder hallar **alguna** solución a nuestro problema, podemos elegir condiciones que estas funciones u_1, u_2 y u_3 cumplan y nos faciliten la búsqueda. Por ejemplo, si elegimos que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 = 0$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3' = 0$$

vemos que se anulan muchos términos en nuestra ecuación y bastará que las funciones incógnitas cumplan

$$u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3'' = \frac{G}{a}.$$

Entonces formamos el sistema

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3' &= 0 \\ u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3'' &= \frac{G}{a} \end{cases}$$

que resolvemos por el método de determinantes y nos permite hallar u_1', u_2' y u_3'. Integrando, hallamos u_1, u_2 y u_3 y, una vez que las tenemos, podemos dar la solución general de la edo como

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + u_1y_2 + u_2y_2 + u_3y_3.$$