UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“ECUACIONES CONSTITUTIVAS EN FLUIDOS”

MATERIALES

Prof. Titular: Dra. Ing. María J. Santillán
Prof. Adjunto: Dr. Ing. Claudio Careglio

Plan de la presentación I

- Un fluido es un material en sí mismo. (Recordemos la definición de material:Del latín materia. Materia de origen natural o artificial que puede ser manipulada o procesada para fabricar algo)
- Además, la Mecánica de Fluidos es empleada en la Ciencia de Materiales, por ejemplo en:

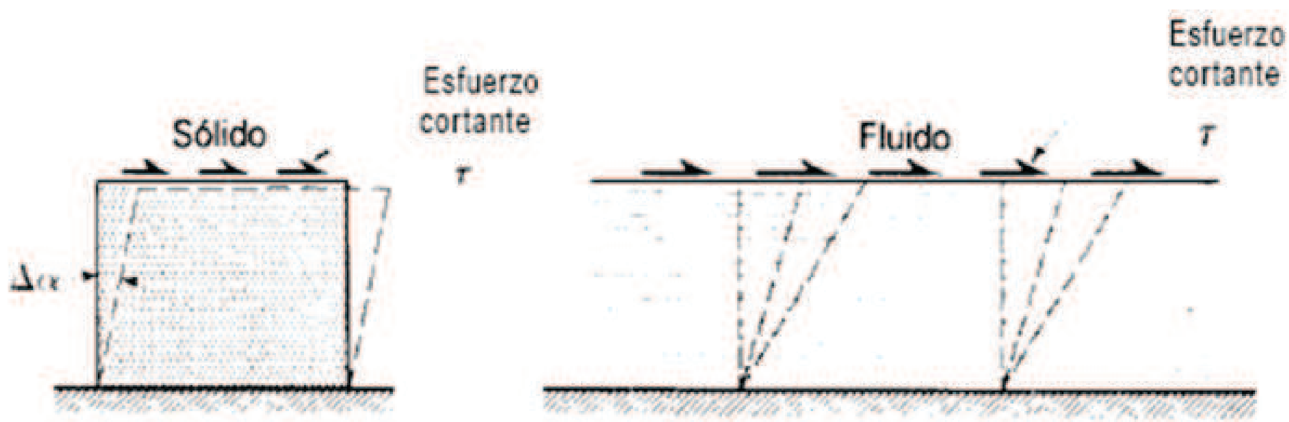
- extrusión de polímeros,
- el crecimiento de cristales,
- flujos de fluidos en el procesamiento de metales líquidos y operaciones de fundición,
- etc.

- El conocimiento de la Mecánica de Fluidos es necesario para entender comprender la naturaleza del medio que fluye.
- Esto contribuye a mejorar el procesamiento de materiale, como así también a desarrollar nuevos materiales y procesos con los cuales podemos producir estos nuevos materiales.

Definición de Fluido:

- Sustancia que se deforma continuamente siempre que esté sometida a un esfuerzo cortante (sin importar que tan pequeño sea ese esfuerzo).
- Por el contrario un sólido experimenta un desplazamiento definido (o se rompe) cuando es sometido a un esfuerzo rompe) cortante.

Esfuerzo cortante en un sólido y en un líquido:

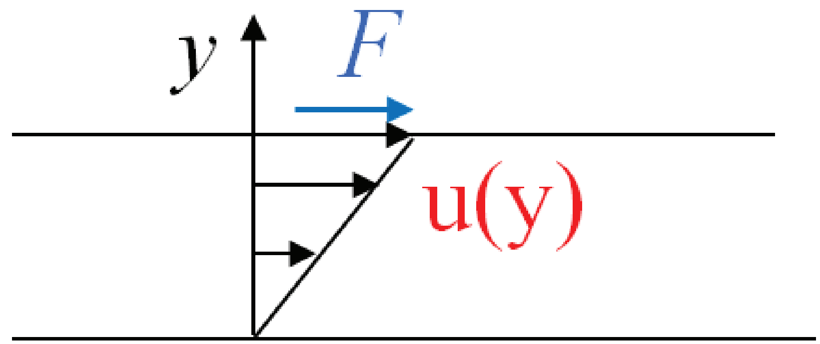


Fluidos:

- Líquidos.
- Gases

Esfuerzo de corte:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1}$$



Parámetro constitutivo fundamental: Viscosidad

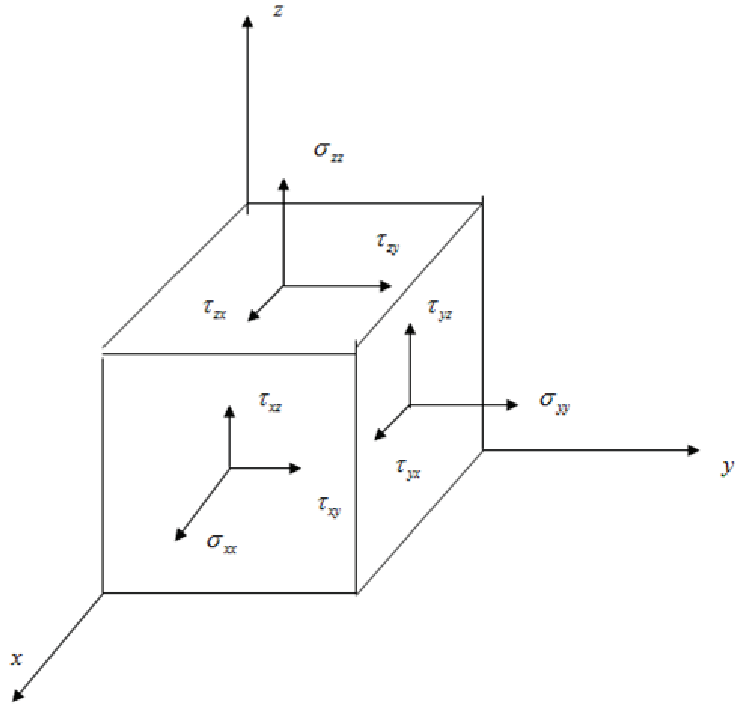
$\mu \; [N \frac{s}{m^2}]$ Viscosidad dinámica

$\nu = \frac{du}{dy} [\frac{m^2}{s}]$ Viscosidad cinemática

- Líquidos: Decrece con el aumento de T
- Gases: Aumenta con el aumento de T

-Fuerzas actuantes en un fluido:

- Fuerzas de cuerpo
- Fuerzas superficiales



- ¿Sólido o fluido?

- Número de Deborah (adimensional)

$$De = \frac{\tau}{\lambda} \tag{2}$$

siendo:

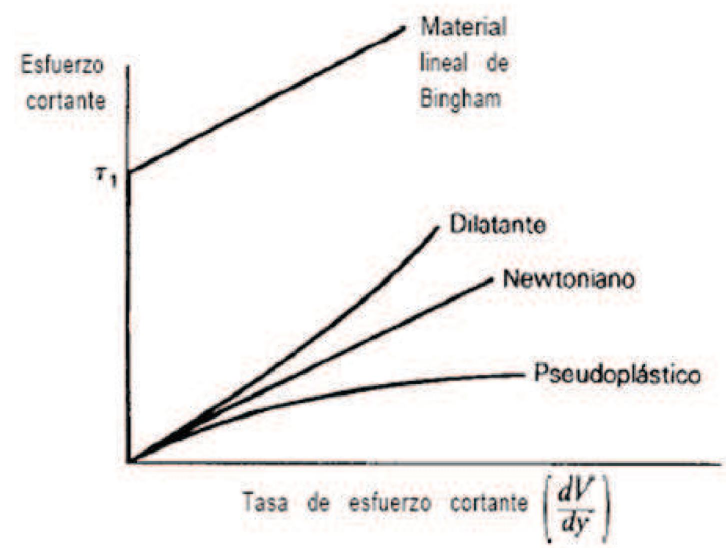
τ : tiempo característico del material (tiempo de relajación)

λ : escala de tiempo de observación

¿En que contexto se ubica la Mecánica de los Fluidos?

Mecánica
- Mecánica del punto material y de los sistemas de puntos materiales
- Mecánica de los cuerpos rígidos
- Mecánica de los medios continuos
  - Mecánica de sólidos
  - Mecánica de fluidos

- Newtonianos
- No Newtonianos:
  - Plástico de Bingham (ej: plásticos, pinturas, lodos, etc):
    - Debajo de un determinado τ se comportan como un sólido y por encima como un fluido.
  - Pseudoplastico (ej: leche, sangre):
    - La resistencia a la deformación disminuye al aumentar el esfuerzo cortante.
  - Dilatante (soluciones concentradas (ej: soluciones de azúcar en agua, suspensiones de almidón de maíz):
    - Resistencia a la deformación aumenta al aumentar el esfuerzo cortante.



-Se abordará la descripción del movimiento de la materia continua y de la descripción de la cinemática del mismo.
-Enfoques para describir el movimiento del fluido: se diferencian por el tipo de coordenadas usadas en las funciones que representan las propiedades del continuo

1. Descripción lagrangeana o material:
    - Como en puntos materiales de la mécanica clásica (se sigue una partícula en particular) para lo que usa coordenadas materiales
    - Partículas de fluido con coordenadas X,Y,Z y t
    - Para cualquier t las coordenadas de la partícula serán:

$$x = f(X, Y, Z, t) \tag{3}$$
$$y = g(X, Y, Z, t) \tag{4}$$
$$z = h(X, Y, Z, t) \tag{5}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(u, v, w) = \mathbf{V}(X, Y, Z, t)$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{df(X,Y,Z,t)}{dt} \qquad \dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2f(X,Y,Z,t)}{dt^2}$$

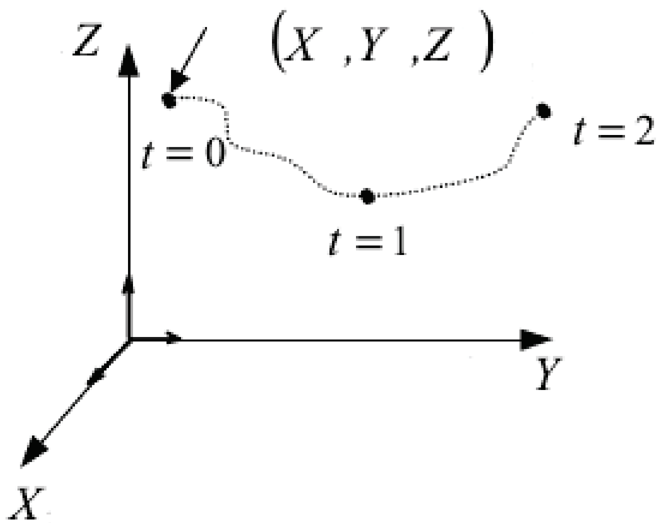
$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dg(X,Y,Z,t)}{dt} \qquad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2g(X,Y,Z,t)}{dt^2}$$

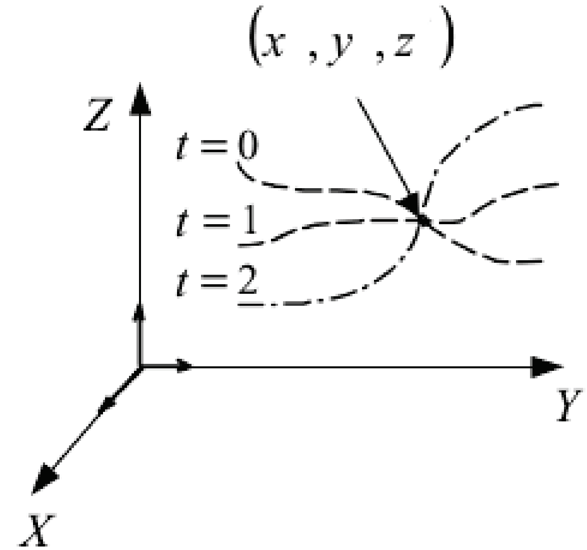
$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{dh(X,Y,Z,t)}{dt} \qquad \dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2h(X,Y,Z,t)}{dt^2}$$

2. Descripción euleriana o espacial:
   - Se focaliza en un punto del espacio.

$$u = u(x, y, z, t) \tag{6}$$
$$v = v(x, y, z, t) \tag{7}$$
$$w = w(x, y, z, t) \tag{8}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(u, v, w) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t), t)$$

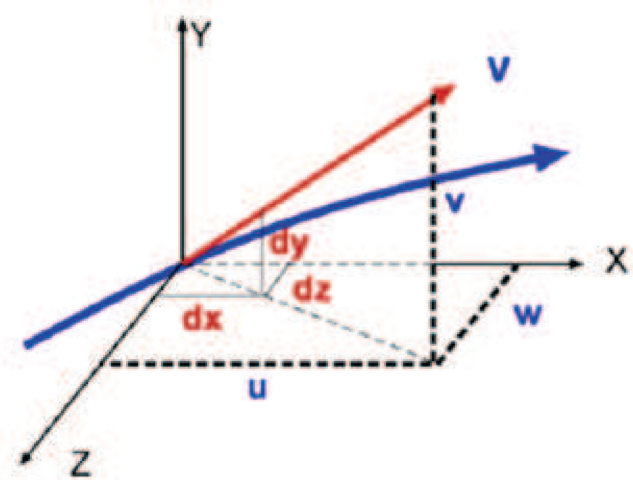

Z
(X ,Y ,Z)
t = 0
t = 1
t = 2
Y
X

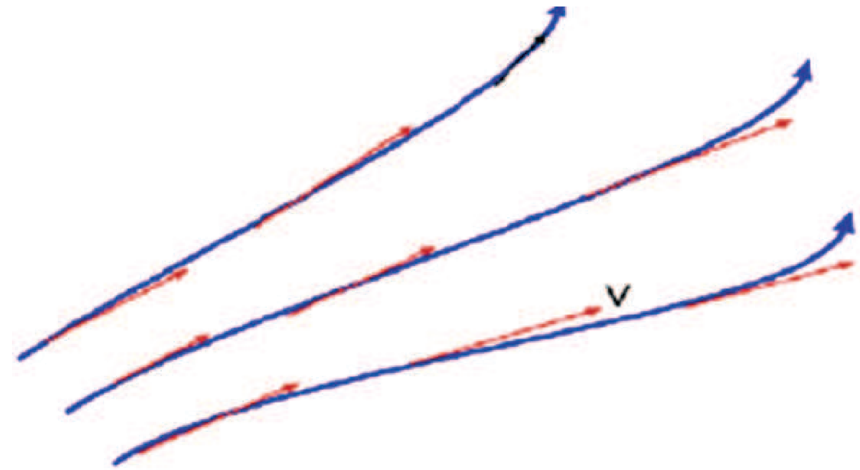

(x , y , z)
Z
t = 0
t = 1
t = 2
Y
X

1. Flujo permanente o estacionario
   Dado $\mathbf{V} = \mathbf{V}(u, v, w)$ se tiene $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$
2. Línea de corriente
   Línea que en un instante dado es tangente al vector velocidad en todo punto.
   La ecuación de la línea de corriente es:

$$\frac{\delta x}{u(x,y,z,t)} = \frac{\delta y}{v(x,y,z,t)} = \frac{\delta z}{w(x,y,z,t)} \qquad (9)$$

siendo:
$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ el desplazamiento en el espacio en un tiempo determinado.



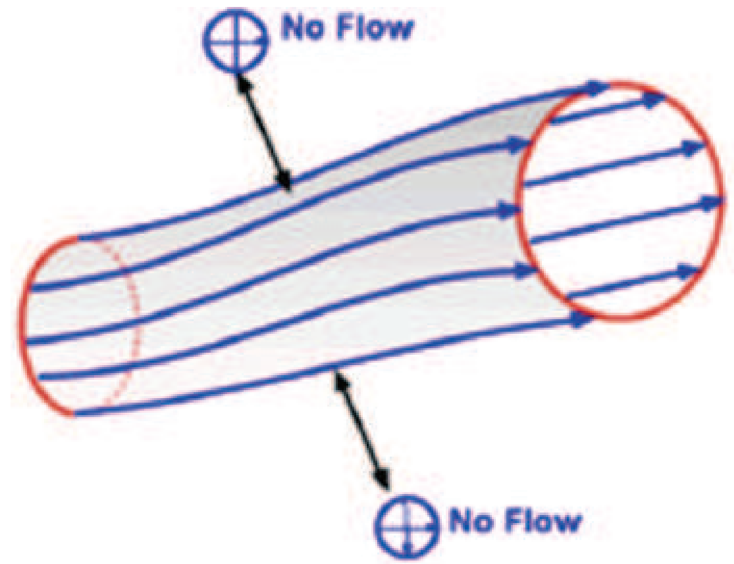


3. Trayectoria
Es la traza de una partícula de fluido.
La ecuación de la trayectoria es:

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} = dt \qquad (10)$$

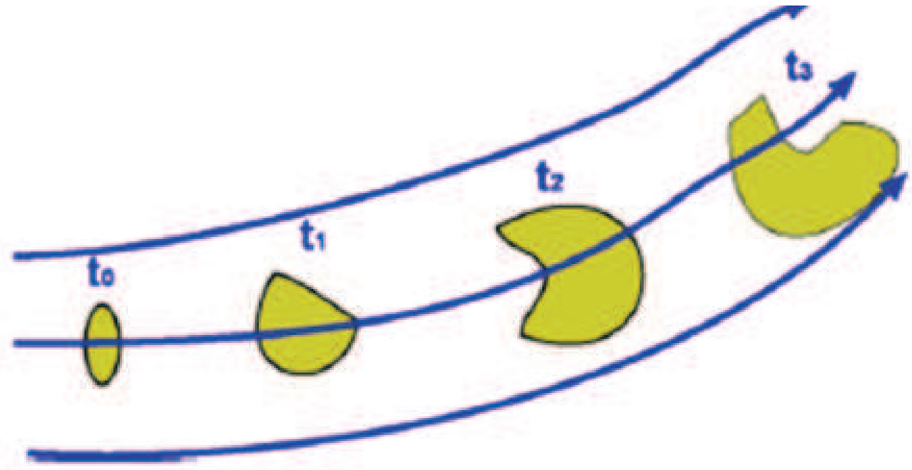
siendo:
$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$ el desplazamiento durante un dt.
Para flujo estacionario coinciden las líneas de corriente y las trayectorias.

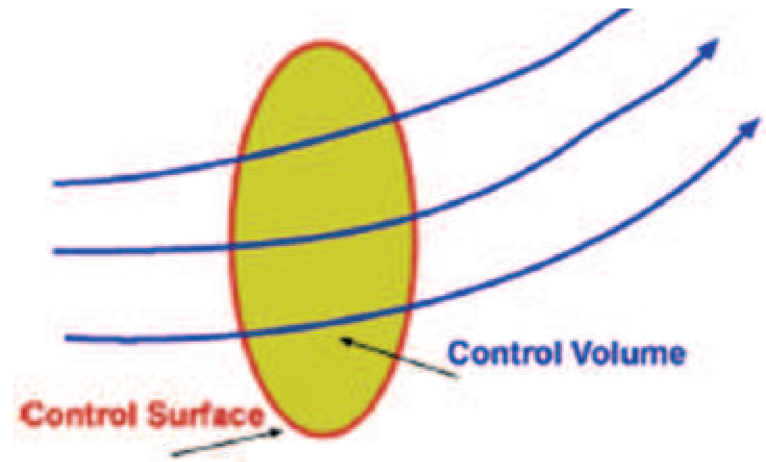
4. Tubo de corriente
   Tubo formado por todas las líneas de corriente que pasan a través de una curva pequeña cerrada. No puede haber flujo a través de la superficie lateral (el vector velocidad no tiene componente perpendicular a la superficie del tubo).



5. Vena fluida (o manojo de tubos de corriente)
   Es un continuo de tubos de corriente, adyacentes y ordenado formando un tubo con sección transversal finita.

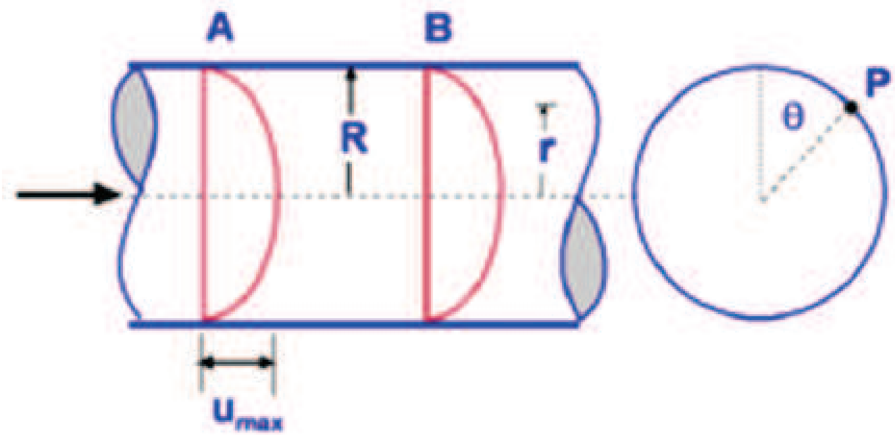
6 Sistema y volumen de control



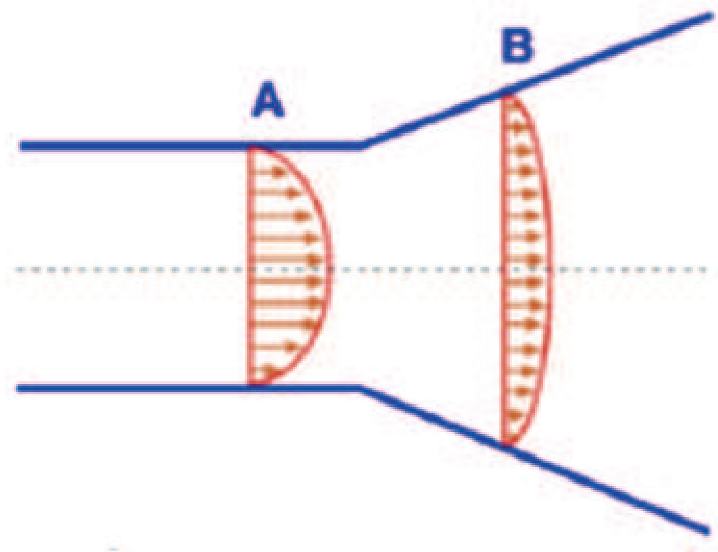


7. Flujo unidimensional, bidimensional y tridimensional
   - Los términos “uni”, “bi” o “tri” dimensional de un flujo se refiere a la cantidad de espacio coordenado necesario para describirlo.
   - El flujo verdadero generalmente es tridimensional. Pero estos son difíciles de calcular y requieren tanta simplificación como sea posible.
   - Esto se consigue ignorando los cambios del flujo en alguno de las direcciones, lo que reduce la complejidad. En algunos casos es posible reducir un problema tridimensional a uno de dos dimensiones, o incluso a uno unidimensional .

- Consideremos el flujo a través de un tubo circular. Este flujo es complejo en la posición donde el flujo entra en la tubería. Pero aguas abajo el flujo se simplifica considerablemente y alcanza el estado de flujo totalmente desarrollado. Una característica de este flujo es que la velocidad se convierte en invariante en la dirección del flujo, como se muestra en la figura 2. Se ve que la velocidad en cualquier lugar sólo depende de la distancia radial “r” de la línea central y es independiente de la distancia, ”x” o de la posición angular ”θ”. Esto representa un flujo unidimensional típico.



- Consideremos ahora un flujo a través de un conducto divergente como se muestra en la figura 3. La velocidad en cualquier lugar no sólo depende de la distancia radial "r" sino también de la distancia "x". Esto es por lo tanto un flujo bidimensional.



8. Definición de derivada total o sustancial
La velocidad de una partícula de fluido está dada por:
$\mathbf{V} = \mathbf{V}(u, v, w) = \mathbf{V}(x(t), y(t), z(t), t)$
y su aceleración total en coordenadas cartesianas por:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{11}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{12}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \tag{13}$$

donde:
$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$: aceleración local (variación de la velocidad con el tiempo en un punto).
Para flujo *permanente* es cero.
$u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$: aceleración convectiva (variación de la velocidad en el espacio).
Para flujo *uniforme* es cero.

Ejemplo 1: Flujo *permanente* en un conducto convergente.

Ejemplo 2: Flujo en un conducto de sección constante.

RECORDATORIO:

Operador nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Al introducir el operador nabla se puede generalizar el concepto de la *aceleración total* a otras propiedades del fluido (ej.: para la presión, densidad, temperatura, etc.). Entonces la derivada total o sustancial, la cual permite calcular la variación de las propiedades del fluido, queda definida como:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \tag{14}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{15}$$

donde:

$\frac{\partial}{\partial t}$: derivada local

$u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$: derivada convectiva

RECORDATORIO:

$(\mathbf{V} \cdot \nabla)() \neq \nabla \cdot \mathbf{V}$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{V} \cdot \nabla)() &= (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial ()}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial ()}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial ()}{\partial z}\mathbf{k} \right) \\
&= u\frac{\partial ()}{\partial x} + v\frac{\partial ()}{\partial y} + w\frac{\partial ()}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

El resultado del operador vectorial $(\mathbf{V} \cdot \nabla)()$ es una diferenciación que debe operar sobre una función escalar o vectorial

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial ()}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial ()}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial ()}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$

El resultado es un escalar

-El flujo debe satisfacer los siguientes principios generales de la Mecánica:

- Conservación de la masa
- Balance del momento cinético (o cantidad de movimiento)
- Balance del momento angular (o momento de la cantidad de movimiento)
- Conservación de la energía (Primer principio de la termodinámica)

-Forma de las ecuaciones básicas:

- Ecuaciones diferenciales
  Leyes anteriores aplicadas a una partícula (masa fija e infinitesimal) ó a un volumen infinitesimal.
- Ecuaciones integrales
  Leyes anteriores aplicadas a un sistema (masa fija e infinitesimal) ó a un volumen de control finito.

M: masa total de fluido considerada.
m: masa de un elemento de fluido.

$$M = \sum(\delta m) = cte \tag{16}$$

De la ley de conservación de la masa

$$\frac{dM}{dt} = 0 \tag{17}$$

o análogamente:

$$\frac{d}{dt}\sum(\delta m) = \sum \frac{d}{dt}(\delta m) = 0 \tag{18}$$

Esta ecuación indica que la conservación de la masa en el volumen de control es preservada cuando cada elemento individual conserva su masa, es decir:

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = 0 \tag{19}$$

y transformando esta expresión en variables eulerianas, es decir en cantidades de campo, se obtiene para la conservación de la masa que:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\delta V_{vol}\right) = 0 \tag{20}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt}\delta V_{vol} + \rho\frac{d\delta V_{vol}}{dt} = 0 \tag{21}$$

Definición:

$$\frac{1}{\delta V_{vol}}\frac{d}{dt}\left(\delta V_{vol}\right) = \nabla\cdot\mathbf{V} \tag{22}$$

Luego, sustituyendo por la expresión (22):

$$\frac{d\rho}{dt}\delta V_{vol} + \rho\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)\delta V_{vol} = 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \delta V_{vol}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)\right) = 0 \tag{24}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right) = 0 \tag{25}$$

y sustituyendo por la expresión de la derivada total o sustancial:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\rho + \rho\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right) = 0 \tag{26}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0} \quad \textbf{Ecuación de continuidad} \tag{27}$$

RECORDATORIO:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\rho + \rho\,(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \tag{28}$$

-Demostración: Del termino de la izquierda:

$$\begin{aligned}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\rho + \rho\,(\nabla \cdot \mathbf{V}) &= u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \\ &+ \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} \\ &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\end{aligned}$$

Del termino de la derecha:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

con lo que queda demostrada la relación (28).

Si el campo de densidad es permanente la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{29}$$

Si el fluido es incompresible la ecuación de continuidad será:

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{V} = 0} \quad \textbf{Ecuación de incompresibilidad} \tag{30}$$

Recordemos que la definición de cantidad de movimiento de la mecánica clásica es el producto:

$$m_i v_i \tag{31}$$

para una partícula con masa m_i y velocidad $\mathbf{v}_i$. Luego, para un sistema las fuerzas actuantes son iguales a la variación de la cantidad de movimiento:

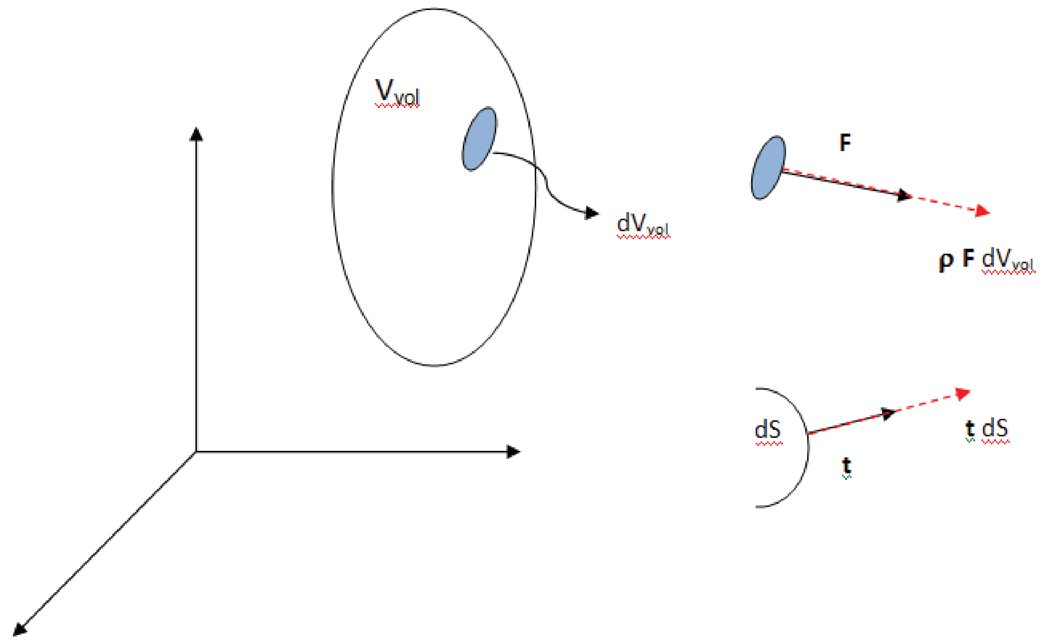
$$\mathbf{R}(t) = \frac{d}{dt}\sum m_i v_i = \frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} \tag{32}$$

siendo:
$\mathbf{R}(t)$: resultante de todas las fuerzas actuantes;
$\mathbf{K}(t)$: cantidad de movimiento.
Extendiendo lo anterior a los medios continuos, se define:

$$\mathbf{K}(t) = \int_m \mathbf{V}\, dm = \int_{V_{vol}} \rho \mathbf{V}\, dV_{vol} \tag{33}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}(t) = \frac{d\mathbf{K}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_{vol}} \rho \mathbf{V}\, dV_{vol} \tag{34}$$

$$= \int_{V_{vol}} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}\, dV_{vol} + \int_{V_{vol}} \mathbf{V}\, \cancel{\frac{d}{dt}(\rho\, dV_{vol})} \tag{35}$$



De la figura las fuerzas actuantes en el medio continuo son:

$$\mathbf{R}(t) = \int_{V_{vol}} \rho \mathbf{F}\, dV_{vol} + \int_S \mathbf{t}\, dS \tag{36}$$

$$= \int_{V_{vol}} \rho \mathbf{F}\, dV_{vol} + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dS \tag{37}$$

$$= \int_{V_{vol}} \rho \mathbf{F}\, dV_{vol} + \int_{V_{vol}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dV_{vol} \tag{38}$$

Igualando las expresiones (35) y (38):

$$\int_{V_{vol}} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}\, dV_{vol} = \int_{V_{vol}} \rho \mathbf{F}\, dV_{vol} + \int_{V_{vol}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dV_{vol} \tag{39}$$

$$\Rightarrow \int_{V_{vol}} \left(\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) dV_{vol} = 0 \tag{40}$$

A partir de aquí se puede obtener la forma local de la ecuación anterior. Dado que el V_{vol} es arbitrario, para que la (40) sea válida se debe cumplir:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{41}$$

Sustituyendo por la expresión de la derivada sustancial, se tiene:

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{F} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad \textbf{Ec. cantidad de movimiento} \tag{42}$$

En componentes:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho F_x+\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right) \tag{43}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho F_y+\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\right) \tag{44}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho F_z+\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) \tag{45}$$

$$\Downarrow$$

¿Número de ecuaciones vs incógnitas?

RECORDATORIO:

Teorema de la divergencia o de Gauss:

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_{V_{vol}} \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV_{vol}$$

Notación:

A:un campo vectorial

$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \mathrm{div}(\mathbf{A})$

-Modelo constitutivo:
¿Relación tensión vs tasa de deformación?
Fluido newtoniano

$\Downarrow$

Hipótesis del modelo constitutivo:

1. Isotropía $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico
   - Se requieren sólo dos propiedades
     μ: comportamiento al corte (relaciona tensión de corte con la tasa de la deformación de corte) κ (*viscosidad volumétrica*): comportamiento de compresión y expansión (para gases monoatómicos es cero).
2. Tensión de corte en un punto en t tiene relación lineal con el gradiente de velocidad (mismo punto y t)$\Rightarrow$ el fluido no depende de su historia.
3. Conjunto de ecuaciones de estado (relacionan los parámetros físicos μ, κ, etc con el estado termodinámico), por ejemplo:

$$\mu = \mu(\rho, T)$$
$$\mu = \mu(\rho, T)$$

La relación constitutiva que define un fluido newtoniano es (en componentes):

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \mathbf{V}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \mathbf{V}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\
\sigma_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla \cdot \mathbf{V}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{46}
$$

donde:

$$
p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \tag{47}
$$

Nota: Para fluido incompresible $\nabla \cdot \mathbf{V}$=0, con lo que se tiene para las componentes normales:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\
\sigma_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Algunas aclaraciones:
El modelo newtoniano postula:

$$p = p_e - \kappa \left(\nabla \cdot \mathbf{V} \right) \tag{49}$$

donde:
p: presión mecánica
p_e: presión termodinámica (predicha por la ecuación de estado
κ: viscosidad volumétrica $\Rightarrow$ mide en este caso el grado de desviación de la presión mecánica de su valor de equilibrio (κ es cero en gases monoatómicos, pero no siempre en gases complejos y algunos líquidos $\Rightarrow$ dependerá de la tasa de expansión. Para los casos que estudiaremos la diferencia en las dos presiones no es significativa $\Rightarrow$ influencia de κ no significativa $\Rightarrow$ $p = p_e$ es la presión física real del fluido en un punto).

Reescribiendo la (46):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \tag{50}$$

donde:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + 2\mu \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V}) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V}) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V}) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{S} - \mathbf{E} \tag{51}$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{V}) \end{pmatrix}$$

D: tensor tasa de deformación de corte

E: tensor tasa de expansión

S: tensor tasa de deformación

De (51) en (50):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{S} - 2\mu\mathbf{E} \tag{52}$$

Por último, para fluido incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{V}$=0):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{S} \tag{53}$$

-Ecuaciones de Navier-Stokes:

Es la ecuación de cantidad de movimiento expresada en función del campo de velocidades y de presión.
Para fluidos incompresibles:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V}\right) = \rho\mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla}\mathbf{p} + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{V}} \quad \textbf{Ec. Navier-Stokes} \tag{54}$$

y expresando la ecuación en componentes:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{55}$$