UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

“COMPORTAMIENTO INELÁSTICO”

(continuación...)

MATERIALES

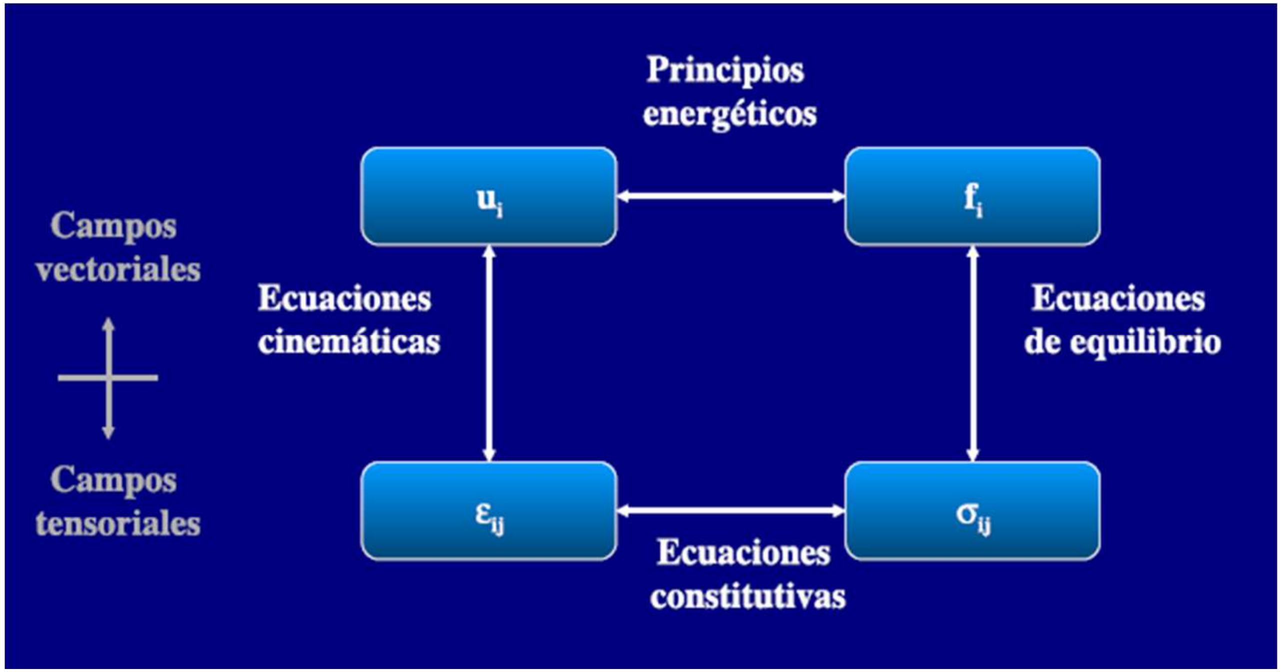
Prof. Titular: Dra. Ing. María J. Santillán
Prof. Adjunto: Dr. Ing. Claudio Careglio

PLAN DE LA PRESENTACIÓN

- Comportamiento elástico lineal de materiales
  - Elasticidad 3D
- Comportamiento inelástico de materiales
  - Plasticidad
    - Microplasticidad
    - Plasticidad del continuo
      (plasticidad fenomenológica)
    - Superplasticidad
  - Viscoplasticidad

Elasticidad lineal 3D

- **Diagrama de Tonti**



Elasticidad lineal 3D

- **Deformaciones**

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

siendo el tensor de Green-Lagrange:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

Este tipo de no linealidad se denomina no linealidad geométrica (Nota: no linealidad del material que hace referencia a la no linealidad de la relación tensión-deformación).

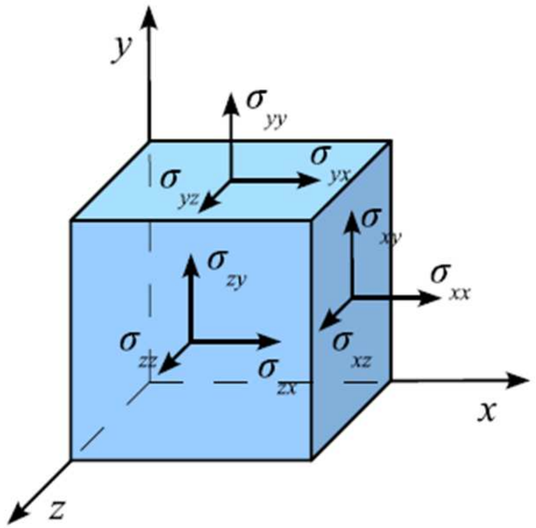
Para el caso lineal:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Elasticidad lineal 3D

- **Tensiones**

Componentes de tensión en un punto interno del material representado por un cubo infinitesimal:



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Cambio de volumen.

Cambio de forma sin cambio de volumen.

Elasticidad

Elasticidad lineal 3D

- **Ecuación constitutiva para un material elástico lineal**

Ley de Hooke generalizada: $\sigma = \mathbb{C}\epsilon$

donde tensiones y deformaciones se relacionan por el tensor de constantes elásticas.

Característica de comportamiento elástico: tensiones no dependen de historia de las deformaciones.

Para material anisotrópico sólo 21 componentes de **C** son independientes.

Para material isotrópo sólo se necesitan dos constantes constantes de Lamé:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ecuación constitutiva para material elástico lineal isotrópo (Ley de Hooke):

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbb{C}\epsilon$$

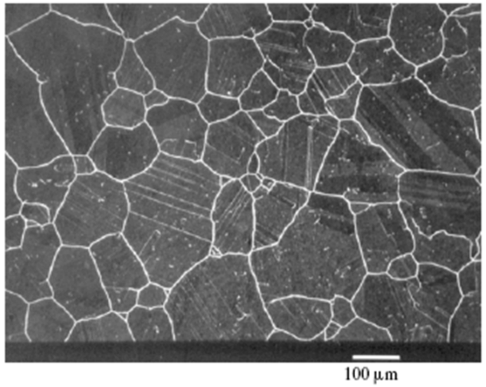
$$\gamma_{yz} = \epsilon_{yz} + \epsilon_{zy} = 2\epsilon_{yz} \quad \gamma_{zx} = \epsilon_{zx} + \epsilon_{xz} = 2\epsilon_{zx} \quad \gamma_{xy} = \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} = 2\epsilon_{xy}$$

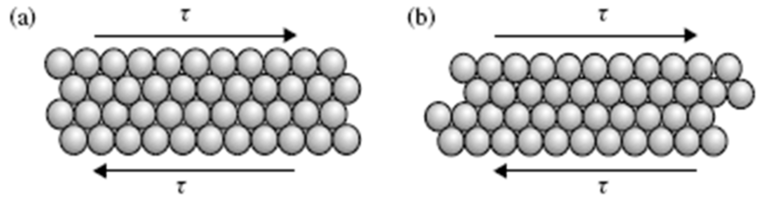
$$\epsilon_x = \epsilon_{xx} \quad \epsilon_y = \epsilon_{yy} \quad \epsilon_z = \epsilon_{zz}$$

Microplasticidad

Granos, deslizamiento, sistema de deslizamiento, tensión de corte crítica, dislocaciones.

El origen de la plasticidad en materiales cristalinos es el deslizamiento (se puede observar en las figuras de la derecha la deformación plástica debido al deslizamiento cristalográfico)





Lo anterior influye en la plasticidad macroscópica:

a) Deslizamiento plástico no produce cambio de volumen (condición de incompresibilidad de la plasticidad).
   Nota: no todos los procesos de deformación plástica son incompresibles (ej: metal poroso)
b) El deslizamiento plástico es un proceso conducido por el corte. La tensión hidroestática en el macronivel se puede asumir (por ej. en metales) que no influye sobre el deslizamiento.

Plasticidad

- **Introducción**

  La plasticidad es uno de los modelos constitutivos más utilizados en la práctica para caracterizar el comportamiento no lineal de diferentes materiales. Es muy adecuado para todo tipo de metales, pero además se lo emplea para modelar arcillas, rocas, hormigones y otros materiales de interés.

- **Hipótesis:**
  - Las deformaciones son infinitesimales
- **Características**
  - Pérdida de linealidad

    La relación entre Tensiones y deformaciones no es lineal. Se reconoce dos estados bien diferenciados: elástico y plástico.

  - Deformación plástica o permanente

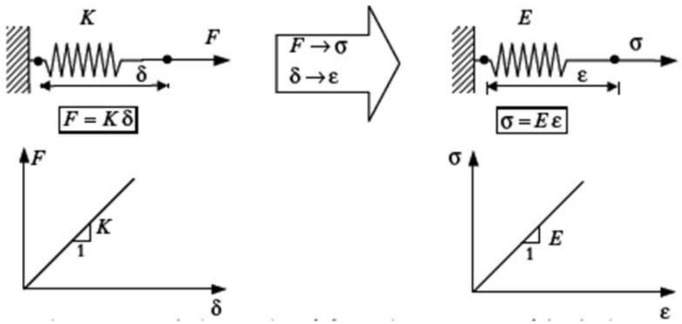
    Una parte de la deformación que se genera en el proceso de carga no se recupera en la descarga

  - Se disipa energía
  - No es válido el principio de superposición.

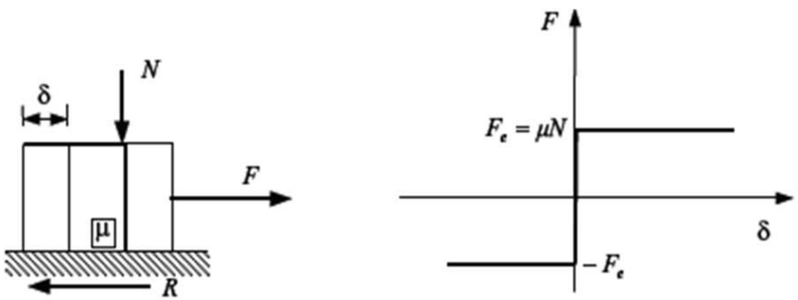
Modelos reológicos de fricción

Los modelos reológicos son idealizaciones de modelos mecánicos, construidos como combinación de elementos simples cuyo comportamiento es fácilmente intuible.

- **Elemento elástico**



- **Elemento de fricción**



Si δ es el desplazamiento horizontal del bloque y μ es el coeficiente de rozamiento ≥ 0, el modelo de fricción de Coulomb establece que:

$F_u = \mu N$ $\quad$ $|F| < \mu N$ $\delta = 0$

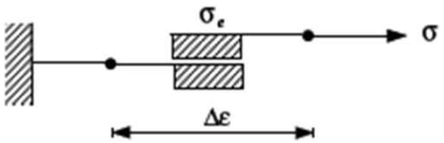
$|F| = \mu N$ $\delta \neq 0$

$|F| > \mu N$ Inadmisible

Modelos reológicos de fricción

- **Elemento de fricción**

Por analogía con el modelo mecánico de fricción podemos definir el modelo reológico de fricción donde σ es la tensión que actúa sobre el dispositivo y ε es la deformación que experimenta. Dicho modelo dispone de un dispositivo friccional caracterizado por σ_e cuyo valor no puede ser excedido.



$|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0$

$|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon \neq 0$

$|\sigma| > \sigma_e \Rightarrow$ Imposible

Tramo 0-1: $|\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = 0$

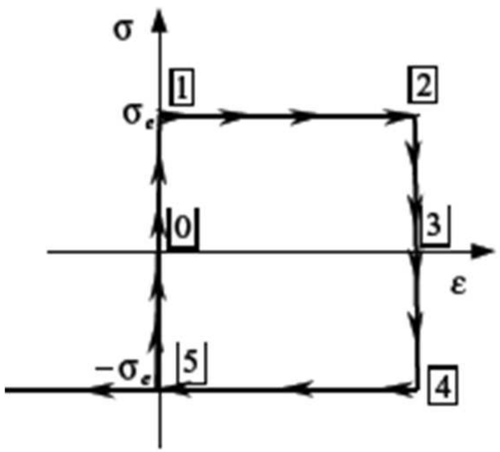
Tramo 1-2: $|\sigma| = \sigma_y \Rightarrow \varepsilon \neq 0$

Tramo 2-3: $|\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = 0$

Tramo 3-4: $|\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = 0$

Tramo 4-5: $|\sigma| = \sigma_y \Rightarrow \varepsilon \neq 0$

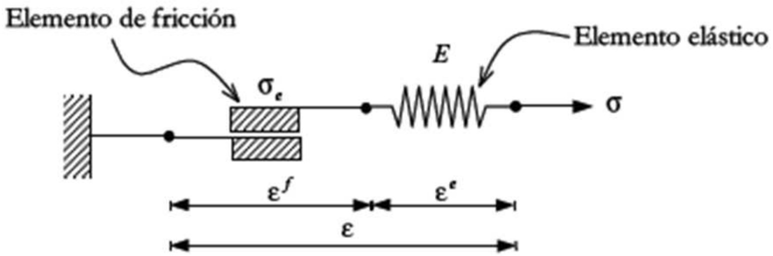
Tramo 5-0: $|\sigma| < \sigma_y \Rightarrow \varepsilon = 0$



Modelos reológicos de fricción

- **Modelo elástico friccional**

Disponemos en serie un elemento elástico de parámetro E y uno de fricción de parámetro σ_e que denominaremos límite elástico. Sea σ la tensión que actúan en el modelo y ε la deformación total del mismo. Se verifica que:



$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \sigma^e = \sigma^f \\ \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f = \dfrac{\sigma}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f \end{array}\right\} \text{Descomposición aditiva de la deformación}$$

- $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e$

  $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$

- $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + \varepsilon^f \Rightarrow |\sigma| = \sigma_e$

  $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f \Rightarrow \Delta\varepsilon^e = 0 \Rightarrow \Delta\sigma = 0$

- $|\sigma| > \sigma_e$ Es incompatible con el elemento de fricción.

Modelos reológicos de fricción

- **Modelo elástico – friccional**

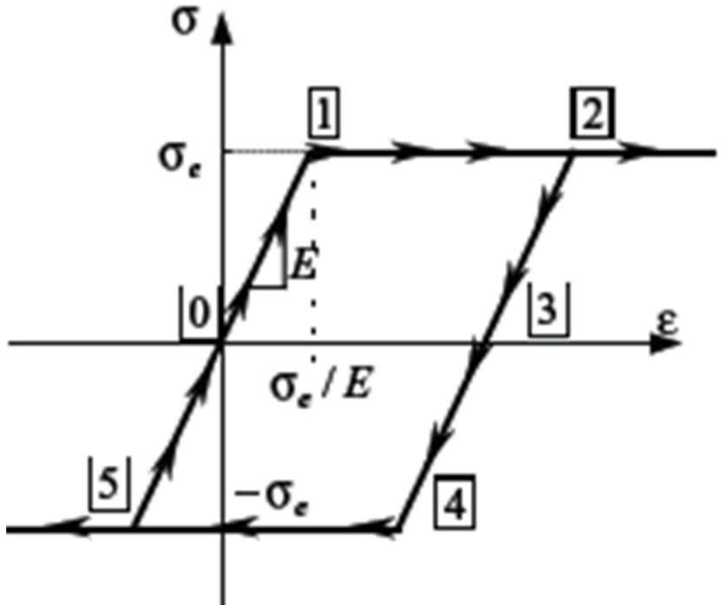
Tramo 0-1: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e$

Tramo 1-2: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma_e}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f > 0 \end{cases}$

Tramo 2-3: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e$

Tramo 3-4: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e$

Tramo 4-5: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_e}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^f < 0 \end{cases}$

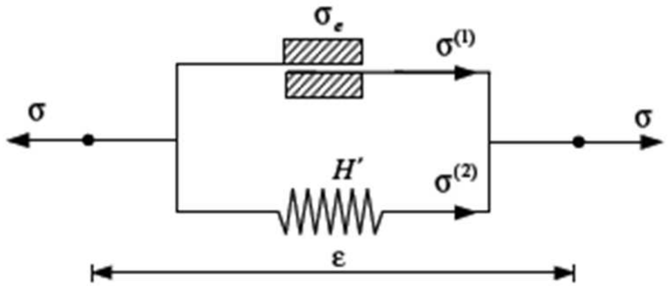


Modelos reológicos de fricción

- **Modelo friccional con endurecimiento**

Consideramos un elemento elástico con parámetro H' que denominamos módulo de endurecimiento y uno de fricción de parámetro σ_e que denominaremos límite elástico dispuestos en paralelo. Sea σ la tensión que actúan en el modelo y ε la deformación total del mismo. Se verifica que:

$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$
$\Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} + \Delta\sigma^{(2)}$
$\varepsilon = \varepsilon^{e} = \varepsilon^{f}$



- a) Elemento de fricción

$|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^{f} = \Delta\varepsilon^{e} = 0$

$|\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^{f} = \Delta\varepsilon^{e} \neq 0$

$|\sigma| > \sigma_e$ imposible

- b)Elemento elástico

$\sigma^{(2)} = H'\,\varepsilon^{e} = H'\,\varepsilon$

$\Delta\sigma^{(2)} = H'\,\Delta\varepsilon^{e} = H'\,\Delta\varepsilon$

- c) Combinando:

$|\sigma^{(1)}| = |\sigma - \sigma^{(2)}| = |\sigma - H'\,\varepsilon|$

Modelos reológicos de fricción

- **Modelo friccional con endurecimiento**

Pueden establecerse las siguientes situaciones para el modelo reológico:

- $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Leftrightarrow |\sigma - H'\varepsilon| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon = 0$

  $\Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon^e = H'\Delta\varepsilon = 0$

  $$\boxed{\begin{array}{l}\Rightarrow \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} \\ \quad \Delta\varepsilon = 0\end{array}}$$

- $|\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Leftrightarrow |\sigma - H'\varepsilon| = \sigma_e \Rightarrow |\sigma^{(1)}| = \sigma_e$

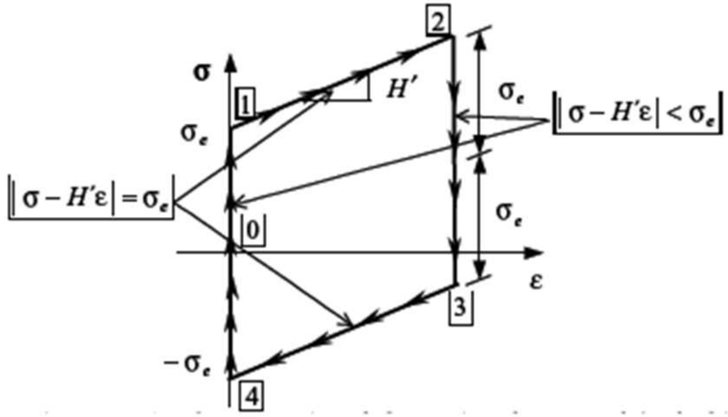
  $|\sigma^{(2)}| = |\sigma - \sigma^{(1)}|$

  $$\boxed{\Rightarrow \Delta\sigma^{(2)} = \Delta\sigma = H'\Delta\varepsilon}$$

Modelos reológicos de fricción

- **Modelo friccional con endurecimiento**

Tramo 0-1: $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(2)} = E\Delta\varepsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \end{cases}$



Tramo 1-2: $|\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H' \Delta\varepsilon \end{cases}$

Tramo 2-3: $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \\ \Delta\sigma^{(2)} = 0 \end{cases}$

Tramo 3-4: $|\sigma^{(1)} - \sigma_e| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -\sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon \end{cases}$

Modelos reológicos de fricción

- **Modelo elástico - friccional con endurecimiento**

Consideramos un elemento elástico de módulo E en serie con el modelo friccional con endurecimiento H’ y límite elástico σ_e. Se verifica que:

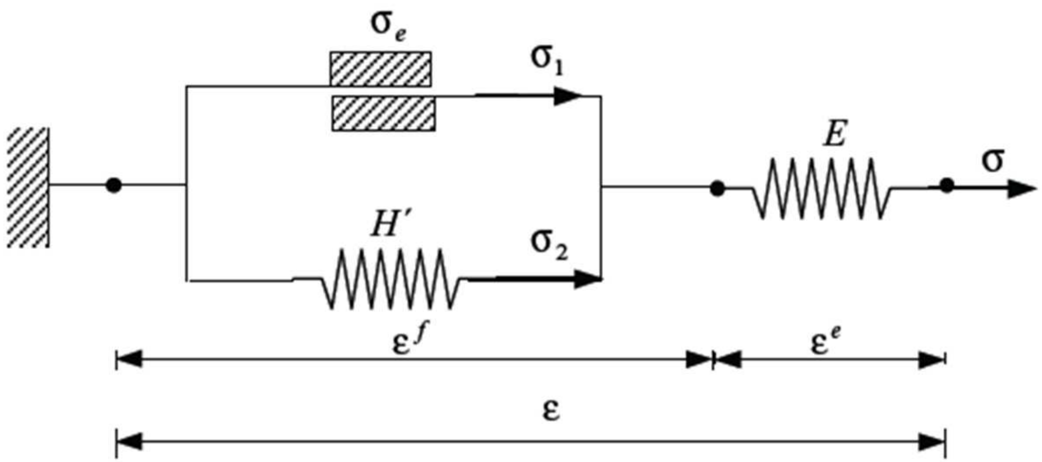
$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f$

$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f$

Descomposición de la deformación

$\sigma = \sigma^e = \sigma^f$

$\Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^f$



Modelos reológicos de fricción

- **Modelo elástico friccional con endurecimiento**

Pueden establecerse las siguientes situaciones para el modelo reológico:

- $|\sigma - H' \varepsilon_f| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon}$

  $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e$

- $|\sigma - H' \varepsilon_f| = \sigma_e$

  - $\sigma \cdot \Delta\sigma > 0 \Rightarrow \quad \Delta\sigma = \Delta\sigma^f = H'\,\Delta\varepsilon^f \Rightarrow$ proceso de carga inelástico

    $\Delta\sigma = \Delta\sigma^e = H'\,\Delta\varepsilon^e$

$$\Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^f = \frac{1}{E}\Delta\sigma + \frac{1}{H'}\Delta\sigma = \frac{E+H'}{EH'}\Delta\sigma \quad \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E^{ef}\,\Delta\varepsilon}$$

$$\boxed{E^f = E\,\frac{H'}{E+H'}}$$

  - $\sigma \cdot \Delta\sigma < 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \Rightarrow \Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon$ proceso de descarga elástica

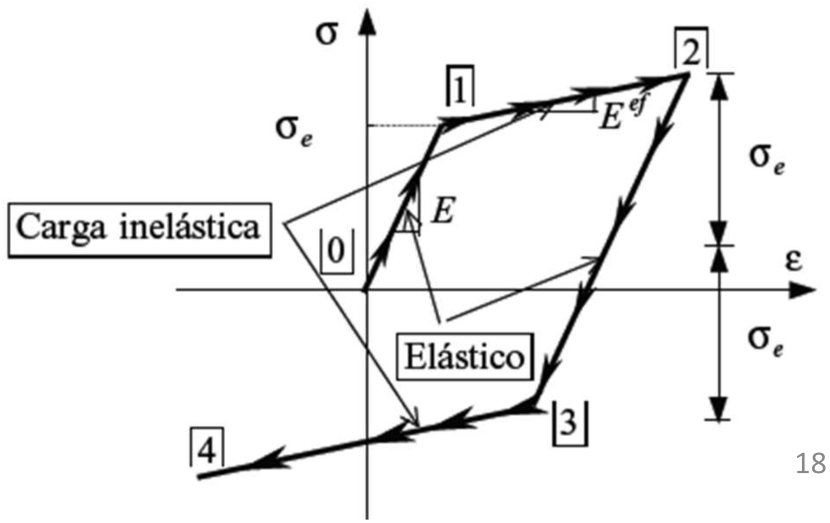
Modelos reológicos de fricción

- **Modelo friccional con endurecimiento**

Tramo 0-1 y 2-3 : $|\sigma - H' \varepsilon_f| < \sigma_e \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon}$

Tramo 1-2 y 3-4 : $\begin{cases} |\sigma - H' \varepsilon_f| = \sigma_e \\ \sigma \cdot \Delta\sigma > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E^{ef}\,\Delta\varepsilon}$

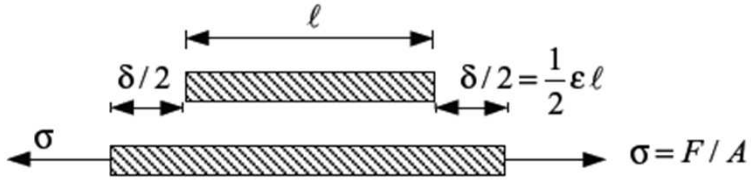
Punto 2: : $\begin{cases} |\sigma - H' \varepsilon_f| = \sigma_e \\ \sigma \cdot \Delta\sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon}$



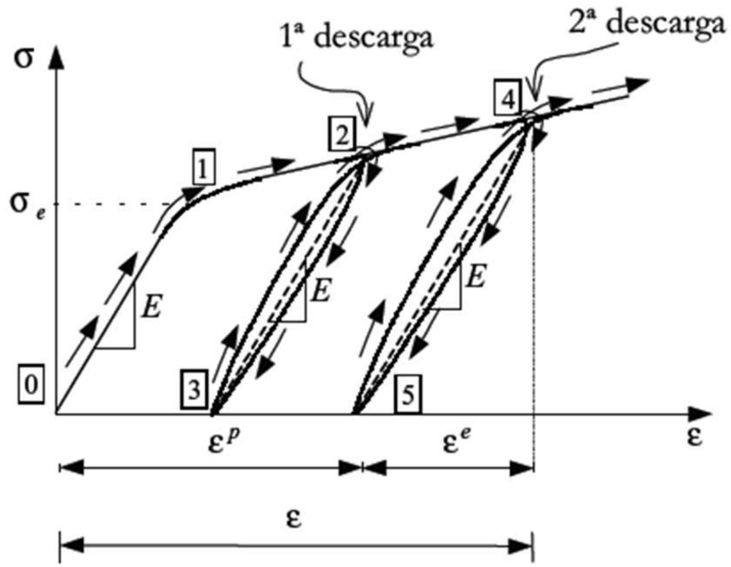
Plasticidad

Plasticidad 1D – Comportamiento elastoplástico

- Consideremos una barra de acero de longitud l y sección A sometida a una fuerza de tracción F en sus extremos. La tensión de la barra será $\sigma = F/A$ y la deformación puede ser estimada como $\varepsilon = \delta / l$ donde δ es el alargamiento de la barra.



- Si sometemos la pieza a varios ciclos de carga y descarga se obtiene una respuesta en términos de la curva tensión deformación $\sigma – \varepsilon$.



Plasticidad

Plasticidad 1D – Comportamiento elastoplástico

Mientras la tensión no supera el valor σ_e en el punto 1 el comportamiento es elástico lineal caracterizado por el módulo elástico E y no existen deformaciones irrecuperables.

Para tensiones superiores a σ_e el comportamiento deja de ser elástico y parte de la deformación no se recupera ante una eventual reducción a cero de la tensión apareciendo una deformación remanente denominada deformación plástica ε^p. Sin embargo durante la rama de descarga el comportamiento vuelve a ser, al menos en forma aproximada, elástico. Lo mismo ocurre en la posterior recarga. Es importante destacar que durante la recarga, el límite elástico es mayor que el límite elástico inicial. En la práctica se acostumbra a descomponer la deformación como la suma de una componente elástica más otra plástica

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p}$$

Plasticidad 1D

- **Descomposición aditiva de la deformación. Variable de endurecimiento.**

Se descompone la deformación total ε en la suma de una deformación elástica ε^e y una deformación plástica ε^p

Descomposición aditiva de la deformación

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \Longrightarrow d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E}$$

Donde E es el módulo elástico.

Se define además la *variable de endurecimiento* $\alpha(\sigma, \varepsilon^p)$ mediante la ecuación de evolución:

Variable de endurecimiento $d\alpha \geq 0$

$$\begin{cases} d\alpha = \text{signo}(\sigma)\, d\varepsilon^p \\ \alpha|_{\varepsilon p=0} = 0 \end{cases}$$

La variable de endurecimiento es siempre positiva. Para un proceso monótono creciente de la deformación plástica ambas variables coinciden. Sin embargo si el proceso no es creciente la ε^p puede disminuir y su valor ya no coincide con α.

Plasticidad 1D

- **Límite elástico y dominio elástico**

Suponemos que existe una función $F(\sigma, \alpha)$ que depende de la tensión y de alguna variable interna.

Se define como *dominio elástico* en el espacio de tensiones al interior del dominio encerrado por la superficie $F(\sigma, \alpha) = 0$

Dominio elástico $\rightarrow E_\sigma := \{\sigma \in R |\ F(\sigma, \alpha) < 0\}$

donde a la función $F(\sigma, \alpha) : R \times R_+ \rightarrow R$ se la denomina *función de fluencia plástica* y es una función que mide el estado de un sólido elastoplástico.

$F(\sigma, \alpha) < 0$	Comportamiento elástico
$F(\sigma, \alpha) = 0$	Comportamiento plástico o límite elástico
$F(\sigma, \alpha) > 0$	Inadmisible

El *límite elástico* es el conjunto de valores de σ que satisface que $F(\sigma, \alpha) = 0$.

Plasticidad 1D

- **Tensión de fluencia. Ley de endurecimiento**

En la práctica resulta conveniente reescribir a la función de fluencia $F(\sigma, \alpha)$ como

$$|\sigma| - \sigma_y(\alpha) \qquad\qquad \sigma_y \equiv \sigma_f$$

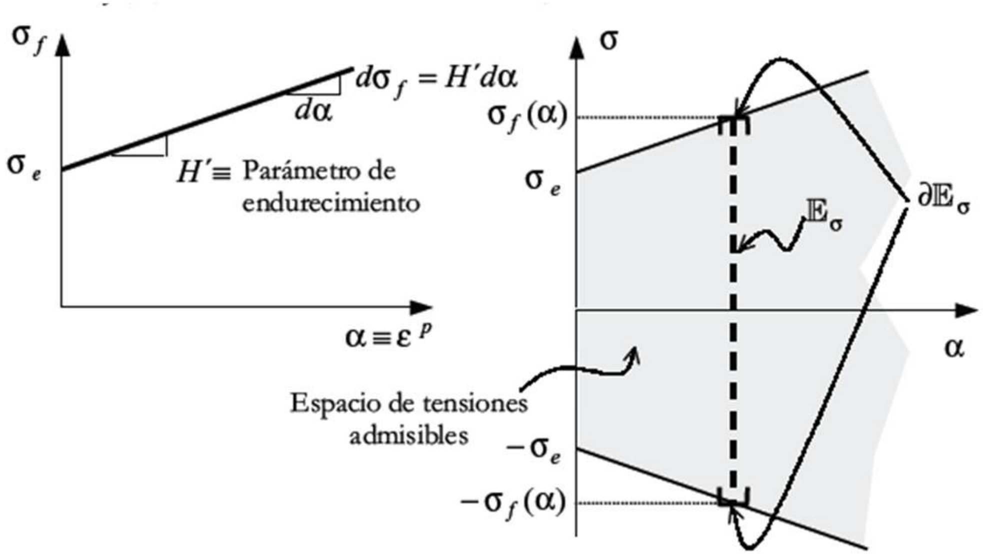
De esta manera el término $|\sigma|$ representa la acción de las cargas externas y que va dar lugar a la llamada tensión efectiva en plasticidad 3D.

$\sigma_y(\alpha) > 0$ es la denominada *tensión de fluencia.* Es una propiedad del material que define el límite elástico y que evoluciona o cambia en función de alguna variable interna conveniente.

El valor inicial, para $\alpha=0$, de la tensión de fluencia es el límite elástico σ_e.

A la función $\sigma_y(\alpha) > 0: R_+ \rightarrow R_+$ se la denomina *Ley de endurecimiento*.

Plasticidad 1D



La ley de endurecimiento proporciona la evolución de la tensión de fluencia plástica $\sigma_y(\alpha)$ con el parámetro de endurecimiento α. En general se considera una ley de tipo lineal :

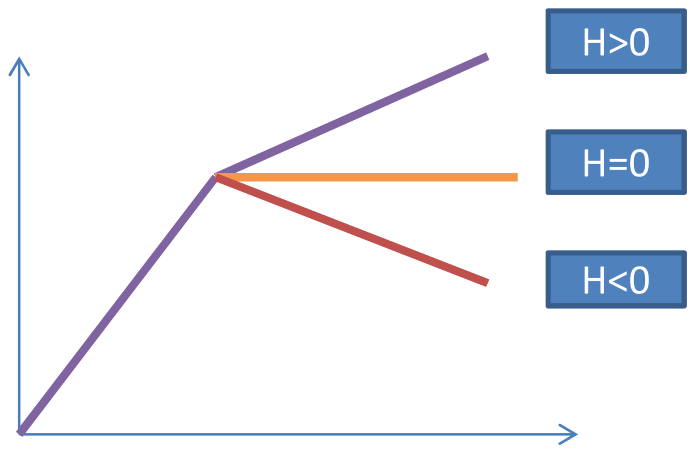
$$\sigma_y = \sigma_e + H' \alpha$$

Donde H' recibe el nombre de parámetro de endurecimiento.

En plasticidad 1D la componente plástica ε^p de la deformación ε es una variable interna y en muchos casos es útil escribir

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H' \varepsilon^p$$

Plasticidad 1D



Existen materiales cuya tensión de fluencia aumenta con la deformación plástica y se denominan materiales con endurecimiento. Ej: metales como acero al carbono, aluminio.

Si la tensión de fluencia no cambia, se dice que el material es elastoplástico perfecto. Ej: cobre.

Finalmente, si la tensión disminuye con el aumento de la deformación plástica se trata de un material con ablandamiento. Ej: suelos.

Plasticidad 3D

- El tensor de deformaciones se descompone aditivamente

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

- La relación entre tensión y deformación elástica sigue las reglas de la elasticidad

$\sigma = D:\varepsilon^e \Rightarrow \varepsilon^e = D^{-1}: \sigma$ D es el tensor de elasticidad de cuarto orden

- Existe una ley de evolución o *regla de flujo* que gobierna el cambio de la deformación plástica

$$\dot{\varepsilon}^p = G(\sigma, \alpha)$$

Y muchas veces se lo puede expresar en términos de una función denominada *potencial plástico* $G(\sigma, \alpha)$ tal que

$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma}(\sigma, \alpha)$ λ *multiplicador plástico*

$\dot{\alpha} = \lambda$ o $\dot{\alpha} = H(\sigma, \alpha)\, \dot{\varepsilon}^p$

La caracterización de las variables internas y la expresión de G depende de cada material

Plasticidad 3D

- Existe una función de fluencia plástica

$F(\sigma, \alpha) = f(\sigma) - \sigma_y(\alpha)$

$\sigma_y = \sigma_e + H'\, d\alpha$ Ley de endurecimiento $\sigma_e \equiv \sigma_{yo}$

Dominio elástico $E_\sigma := \{\sigma |\ F(\sigma, \alpha) < 0\}$

Dominio elástico inicial $E_\sigma^0 := \{\sigma |\ F(\sigma, 0) < 0\}$

Superficie de fluencia $\partial E_\sigma := \{\sigma |\ F(\sigma, \alpha) = 0\}$

Espacio de tensiones admisibles $\overline{E_\sigma} = E_\sigma \cup \partial E_\sigma = \{\sigma |\ F(\sigma, \alpha) \leq 0\}$

- **Tensión efectiva**

Puede pensarse a $f(\sigma)$ como un operador que transforma el tensor de tensiones en un escalar. Dicho escalar se denomina *tensión efectiva o uniaxial*. σ_e es el límite elástico obtenido en un ensayo uniaxial y σ_y es la tensión de fluencia. H' determina la expansión o contracción del dominio elástico E_σ.

$H' > 0 \Rightarrow$ Expansión de E_σ con $\alpha \rightarrow$ Plasticidad con endurecimiento

$H' < 0 \Rightarrow$ Contracción de E_σ con $\alpha \rightarrow$ Plasticidad con ablandamiento

$H' = 0 \Rightarrow$ Dominio elástico constante ($E_\sigma = E_\sigma^0$) $\rightarrow$ Plasticidad perfecta

Plasticidad 3D

- **Condiciones de carga y descarga** (Condición de Kuhn - Tucker)

$$\boxed{\lambda \geq 0 \; ; \quad F(\sigma, \alpha) \leq 0 \; ; \quad \lambda F(\sigma, \alpha) = 0}$$

$\lambda = 0$; $F(\sigma, \alpha) \leq 0$ Campo elástico

$\lambda > 0$; $F(\sigma, \alpha) = 0$ Campo elastoplástico

- **Condiciones de consistencia**

  $F(\sigma, \alpha) = 0 \Rightarrow \lambda \dot{F}(\sigma, \alpha) = 0$ permite calcular el multiplicador plástico.

Plasticidad

Superficies de fluencia y criterios de fallo

- **Criterio de fluencia**

- Permite determinar a partir de una combinación de tensiones si habrá comportamiento plástico.

-Esto proporciona además un criterio de “falla” respecto al comportamiento elástico del material (la función de fluencia es un modelo matemático que permite determinar el comienzo de la falla a partir del estado de tensiones o deformaciones en un punto del material).

- Hay diferentes funciones de fluencia dependiendo de si el material es dúctil, frágil, isótropo, anisótropo, etc. No hay una única función de fluencia que se adapte a todos los tipos de materiales.

-Observación:

Se define tensión equivalente o tensión efectiva a un escalar. El valor correspondiente coincide con un estado uniaxial.

Plasticidad

Superficies de fluencia y criterios de fallo

- **Criterio de von Mises**

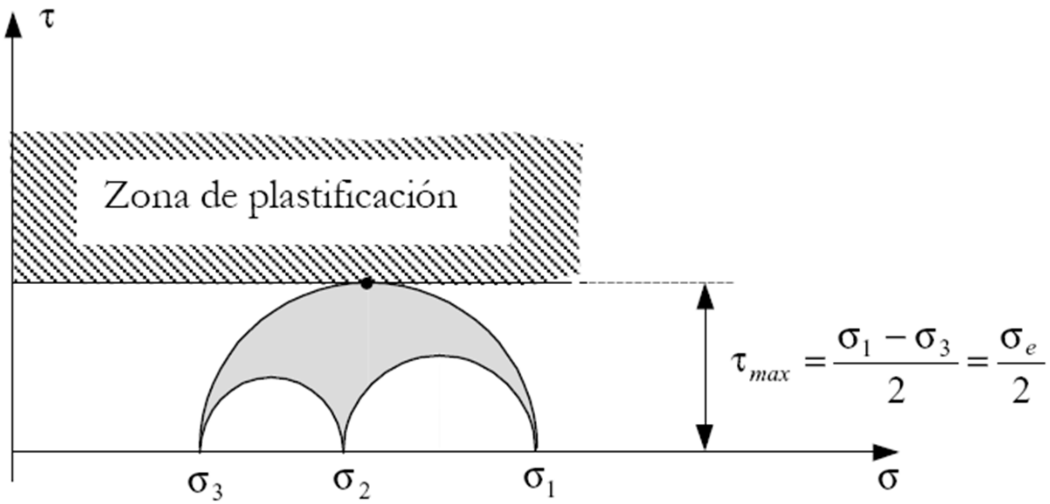
- Suele emplearse para materiales dúctiles como los metales (estados de tensión hidrostática es elástico y la falla se produce por componentes desviadoras de tensión).

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{1/2}-\sigma_e=0$$

- **Criterio de Tresca**

-Cuando la máxima tensión tangencial alcanza es igual a (siendo σ_e el límite elástico uniaxial) :

$$\tau_{\text{máx}}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{\sigma_e}{2}$$



Plasticidad

Superficies de fluencia y criterios de fallo

- **Criterio de Mohr-Coulomb**

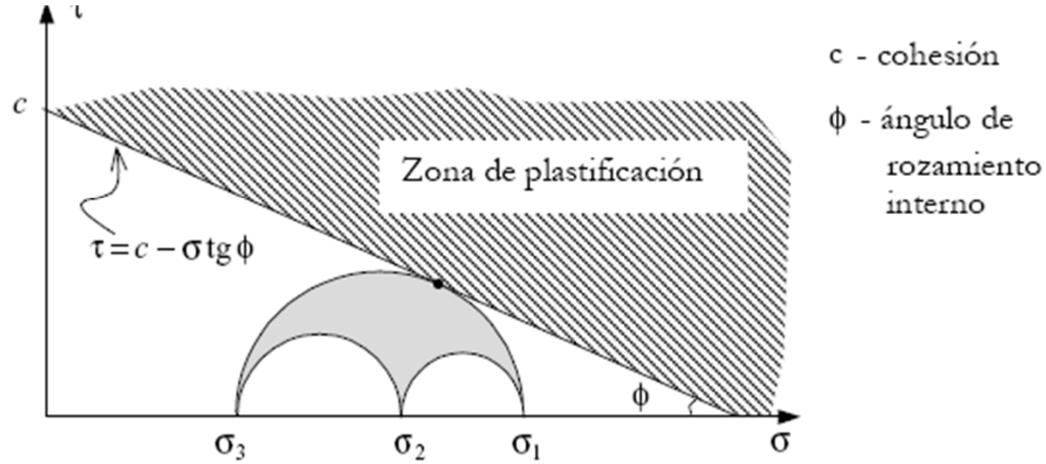
-La constante c del material es la resistencia al corte cuando la tensión normal es nula, por esto se denomina “cohesión” del mismo.

- El ´angulo ϕ determina se relaciona con cuanto crece la resistencia al corte en función de la tensión normal.

-Comportamiento a tracción diferente a compresión.

-Materiales frágiles

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\operatorname{sen}\phi - 2c\cos\phi = 0$$



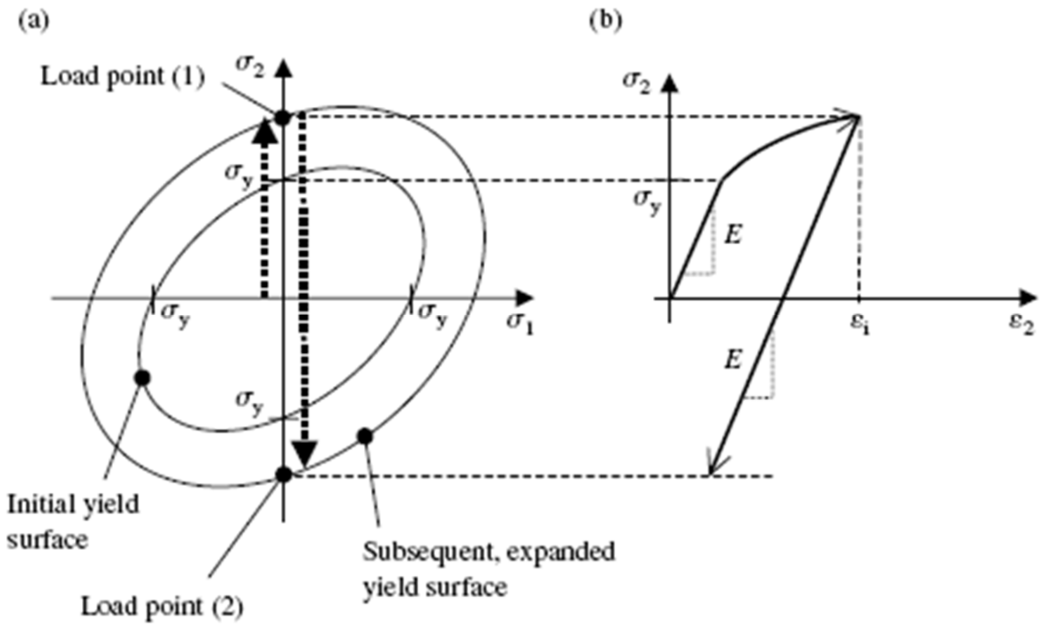
- **Criterio de Drucker-Praguer**

Materiales cohesivos-friccionales (hormigón, rocas y suelos)

Tipos de endurecimiento

- **Endurecimiento isotrópico**

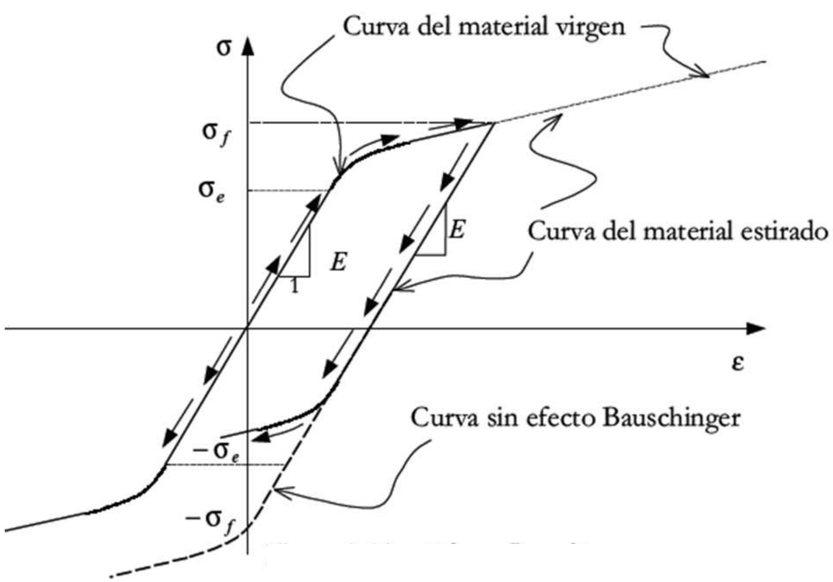
Consideremos una probeta de material virgen sometida a un ensayo de tracción uniaxial y otra probeta sometida a un ensayo de compresión uniaxial. Para ciertos materiales, las respuestas de ambos ensayos, en términos de σ–ε son simétricas respecto al origen.

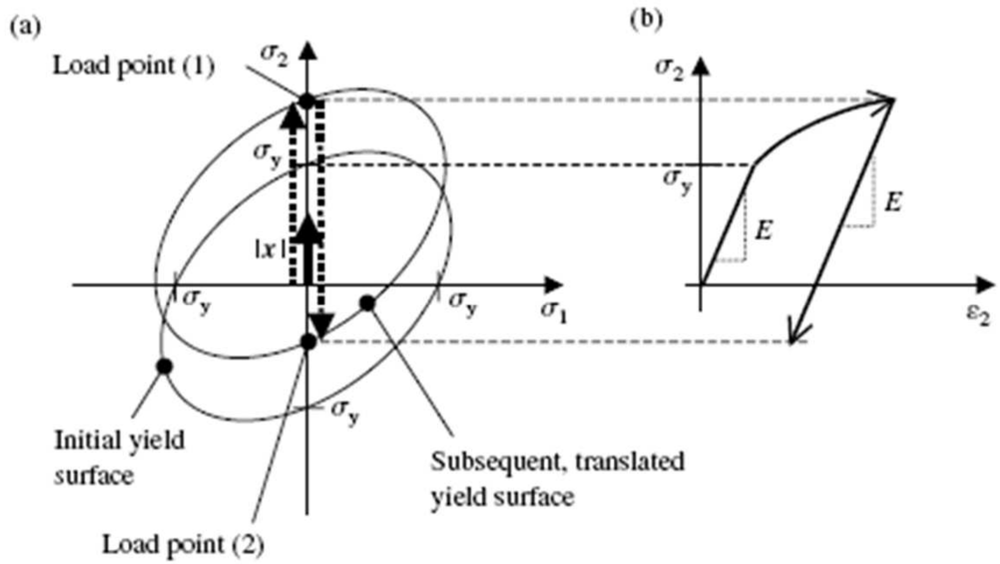


Tipos de endurecimiento

- **Endurecimiento cinemático**

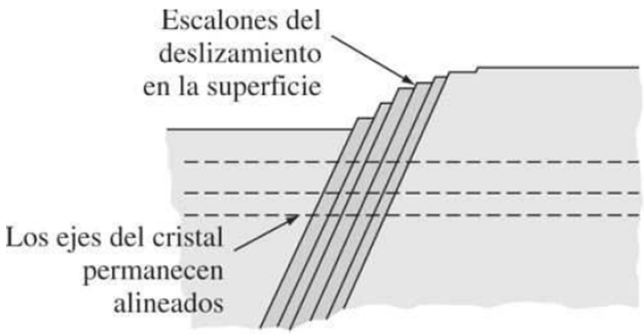
  Supongamos ahora que realizamos el ensayo a compresión sobre una probeta que ha estado sometida a una historia de deformaciones plásticas, y sea $\sigma_f > \sigma_e$. Un comportamiento simétrico llevaría a que el material tuviera ahora un comportamiento elástico en el rango de tensiones $[-\sigma_f, \sigma_f]$. Sin embargo, en ciertos casos, el comportamiento elástico a compresión termina mucho antes. Este efecto es conocido como *endurecimiento cinemático o Efecto Bauschinger* .

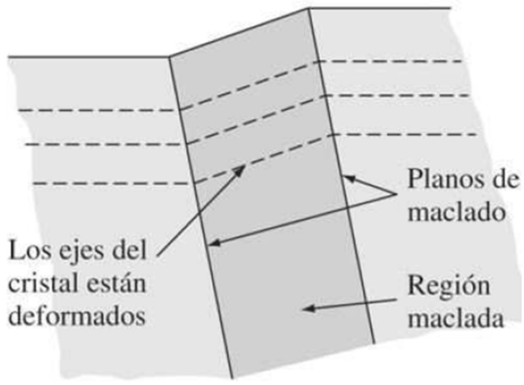


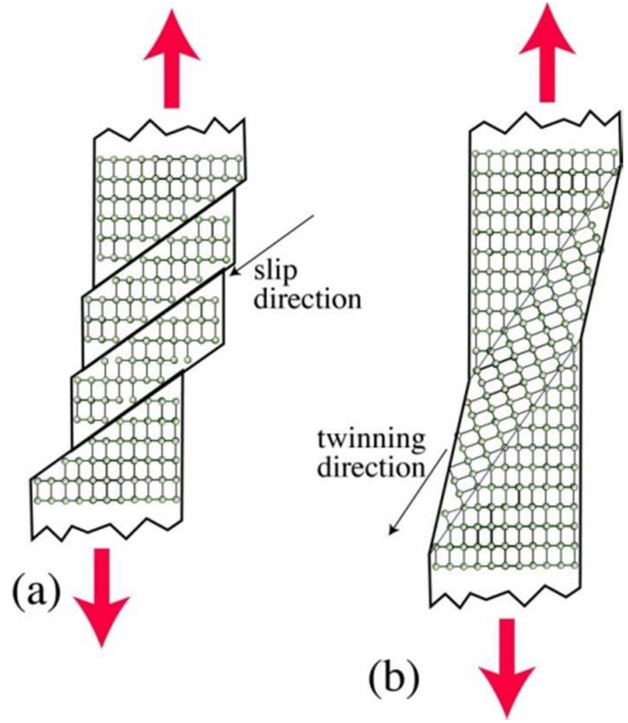


Mecanismos de deformación

- **Deformación plástica por el mecanismo de deslizamiento**
- **Deformación plástica por el mecanismo de maclado**







Deslizamiento: los átomos se mueven distancias iguales.

Maclado: los átomos se mueven distancias proporcionales respecto al plano de maclado.

Mecanismos de endurecimiento

- Resistencia de los metales se ve afectada por su microestructura.

- Los mecanismos de endurecimiento en general dificultan el movimiento de las dislocaciones.

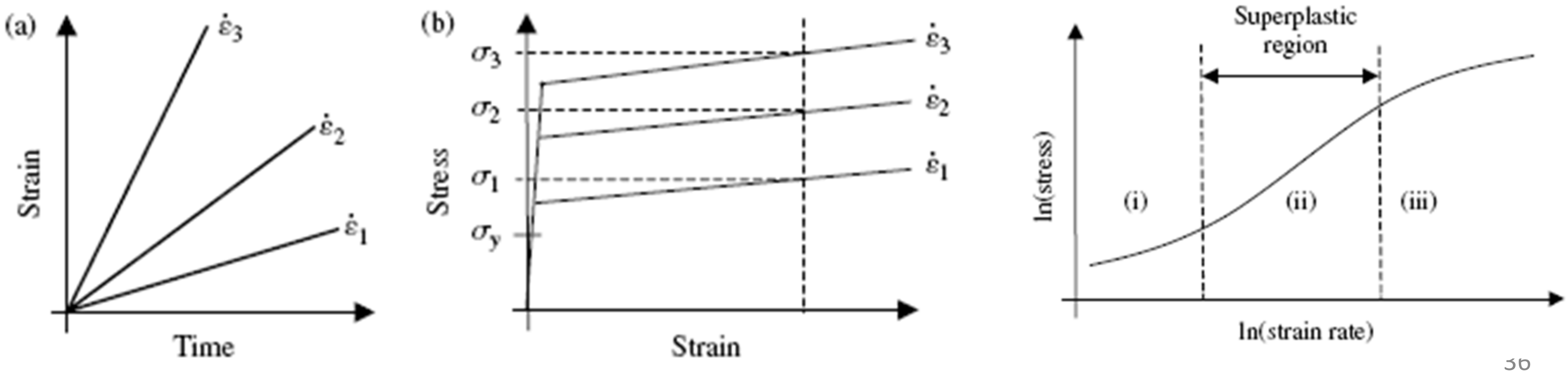
- Algunos de ellos son:
  - Disminución del tamaño de grano
    - Con granos más finos hay más límites de grano para impedir el movimiento de las dislocaciones.
  - Endurecimiento por deformación:
    - La deformación aumenta el número de dislocaciones y cada una interfiere con el movimiento de otras.
  - Endurecimiento a través de la solución sólida
    - En las soluciones sólidas, átomos de soluto interrumpen la periodicidad de la red.
  - Dispersión de partículas finas:
    - Dispersiones finas de partículas crean obstáculos al movimiento de las dislocaciones.

Superplasticidad

- Es la capacidad de algunos materiales de soportar grandes deformaciones plásticas, sin que se produzca estricción y falla.
  - Grano fino
  - Deformación a cierta temperatura

- Ej: algunas aleaciones de Al y Ti

- Respuesta en tensión y región superplástica:
  - Región i: velocidades de deformación muy bajas, predominando la difusión.
  - Región ii: zona superplástica, se obtienen grandes deformaciones.
  - Región iii: velocidades de deformación muy alta, la deformación se produce a través del movimiento de dislocación.



Viscoplasticidad

- Modelo viscoplástico de Perzyna:
  - Tensión efectiva
  - Ley de endurecimiento
  - Regla de flujo
  - Multiplicador viscoplástico
  - Aditividad de las deformaciones
  - Sobretensión
  - Exponente de endurecimiento
  - Exponente de viscosidad
  - Casos límites