UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“VISCOPLASTICIDAD”

MATERIALES

Prof. Titular: Dra. Ing. María J. Santillán
Prof. Adjunto: Dr. Ing. Claudio Careglio

Introducción

Modelos reológicos

Viscoplasticidad 3D

Plan de la presentación I

1 Introducción

2 Modelos reológicos

3 Viscoplasticidad 3D

- Curva tensión-deformación
- Concepto de *sobretensión*: según Ottosen es una medida de que tan lejos se está fuera de la superficie estática de fluencia $f = 0$
- Viscoplasticidad 1D
- Viscoplasticidad 3D
- Algunas aplicaciones

- Modelo de Bingham:

$$\dot{\epsilon}^{f} = 0 \qquad \text{si} \qquad |\sigma^{f}| < \sigma_{y_0} \tag{1}$$

$$\dot{\epsilon}^{f} \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad \sigma^{f} = \sigma_{y_0} \tag{2}$$

$$\dot{\epsilon}^{f} \leqslant 0 \qquad \text{si} \qquad \sigma^{f} = -\sigma_{y_0} \tag{3}$$

$$\sigma = \sigma^{f} + \sigma^{v} \tag{4}$$

$$\epsilon = \epsilon^{f} = \epsilon^{v} \tag{5}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{f} = \dot{\epsilon}^{v} \tag{6}$$

$$\sigma^{v} = \eta\dot{\epsilon}^{v} = \eta\dot{\epsilon} \tag{7}$$

a)

$$| \sigma^f | < \sigma_{y_0}$$

$$\dot{\epsilon}^f = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon} = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow \sigma^v = 0 \tag{10}$$

b)

$$\sigma^f = \sigma_{y_0}$$

$$\dot{\epsilon}^f = \dot{\epsilon} = \frac{\sigma^v}{\eta} \geqslant 0 \tag{11}$$

$$\sigma^v = \sigma - \sigma^f \tag{12}$$

$$= \sigma - \sigma_{y_0} \geqslant 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \sigma \geqslant \sigma_{y_0} \tag{14}$$

de (13) en (11):

$$\Rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\sigma - \sigma_{y_0}}{\eta} \tag{15}$$

- Modelo elastoviscoplástico sin endurecimiento:

Viscoplasticidad perfecta

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^{vp} \tag{16}$$

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp} \tag{17}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{vp} \tag{18}$$

$$\sigma^e = E\epsilon^e \tag{19}$$

$$= E\left(\epsilon - \epsilon^{vp}\right) \tag{20}$$

$$\sigma^{vp} = \sigma^v + \sigma^f \tag{21}$$

$$\epsilon^f = \epsilon^v = \epsilon^{vp} \tag{22}$$

$$\dot{\epsilon}^f = \dot{\epsilon}^v = \dot{\epsilon}^{vp} \tag{23}$$

$$\sigma^v = \eta\dot{\epsilon}^{vp} \tag{24}$$

a)

$$\mid \sigma \mid < \sigma_y$$

$$\Rightarrow \epsilon^{vp} = 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}^{vp} = 0 \tag{26}$$

$$\sigma^{v} = 0 \tag{27}$$

$$\epsilon = \epsilon^{e} \tag{28}$$

$$\sigma = E\epsilon^{e} \Rightarrow \dot{\epsilon}^{e} = \frac{\dot{\sigma}}{E} \tag{29}$$

b)

$$\mid \sigma \mid \geqslant \sigma_y$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{e} + \dot{\epsilon}^{vp} \tag{30}$$

$$= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - \sigma_y}{\eta} \tag{31}$$

Demostración adicional de la obtención de $\dot{\epsilon}^{vp}$:

$$\sigma^{f} = \sigma_{y} \tag{32}$$

$$\sigma = \sigma_{e} = \sigma^{vp} \tag{33}$$

$$\sigma = \sigma_{v} + \sigma_{y} \tag{34}$$

$$\Rightarrow \sigma_{v} = \sigma - \sigma_{y} \tag{35}$$

$$\Rightarrow \eta\dot{\epsilon}^{vp} = \sigma - \sigma_{y} \tag{36}$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\sigma - \sigma_{y}}{\eta} \tag{37}$$

- Modelo elastoviscoplástico con endurecimiento:

$$\sigma = \sigma^{e} = \sigma^{vp} \tag{38}$$

$$\epsilon = \epsilon^{e} + \epsilon^{vp} \tag{39}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{e} + \dot{\epsilon}^{vp} \tag{40}$$

$$\sigma^{e} = E\epsilon^{e} \tag{41}$$

$$\sigma^{v} = \eta\dot{\epsilon}^{vp} \tag{42}$$

$$\sigma^{vp} = \sigma_{amort.} + \sigma^{f} \tag{43}$$

$$= \sigma^{v} + \sigma^{f} \tag{44}$$

si $\mid \sigma \mid \geqslant \sigma_y$ será:

$$\sigma^{f} = \sigma^{y} \tag{45}$$

siendo ahora:

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} + H\epsilon^{vp} \tag{46}$$

Luego reemplazando en (44) y considerando la (38):

$$\sigma = \sigma^{v} + \sigma_{y} \tag{47}$$

$$= \eta\dot{\epsilon}^{vp} + \sigma_{y_0} + H\epsilon^{vp} \tag{48}$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\sigma - \sigma_{y_0} - H\epsilon^{vp}}{\eta} \tag{49}$$

y teniendo en cuenta $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{e} + \dot{\epsilon}^{vp}$:

$$\boxed{\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - (\sigma_{y_0} + H\epsilon^{vp})}{\eta}} \tag{50}$$

A partir de (49) se tiene:

$$\dot{\epsilon}^{vp} + \frac{1}{\eta}H\epsilon^{vp} = \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_{y_0}) \tag{51}$$

La solución homogénea será:

$$\dot{\epsilon}^{vp} + \frac{1}{\eta} H \epsilon^{vp} = 0 \tag{52}$$

$$\Rightarrow \frac{d\epsilon^{vp}}{\epsilon^{vp}} = -\frac{1}{\eta} H dt \tag{53}$$

$$\Rightarrow \ln \epsilon^{vp} = -\frac{1}{\eta} H t + c \tag{54}$$

$$\Rightarrow \epsilon^{vp} = e^{-\frac{1}{\eta} H t + c} \tag{55}$$

$$\Rightarrow \epsilon^{vp} = c_1 e^{-\frac{1}{\eta} H t} \tag{56}$$

La solución particular será:

$$\frac{1}{\eta} H \epsilon^{vp} = \frac{1}{\eta} (\sigma - \sigma_{y_0}) \tag{57}$$

$$\Rightarrow \epsilon^{vp} = \frac{1}{H} (\sigma - \sigma_{y_0}) \tag{58}$$

Siendo la solución general:

$$\epsilon^{vp} = c_1 e^{-\frac{1}{\eta}Ht} + \frac{1}{H}\left(\sigma - \sigma_{y_0}\right) \tag{59}$$

si $t = 0$ se tiene:

$$\epsilon^{vp} = 0 \tag{60}$$

con lo que en la (59) se obtendrá:

$$0 = c_1 e^0 + \frac{1}{H}\left(\sigma - \sigma_{y_0}\right) \tag{61}$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{H}\left(\sigma - \sigma_{y_0}\right) \tag{62}$$

Finalmente se obtiene sustituyendo c_1 en la solución general:

$$\epsilon^{vp} = -\frac{1}{H}\left(\sigma - \sigma_{y_0}\right) e^{-\frac{1}{\eta}Ht} + \frac{1}{H}\left(\sigma - \sigma_{y_0}\right) \tag{63}$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon^{vp} = \frac{1}{H}(\sigma - \sigma_{y_0})\left(1 - e^{-\frac{1}{\eta}Ht}\right)} \tag{64}$$

y por último reemplazando en $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp}$ la ecuación anterior y $\epsilon^e = \sigma^e/E = \sigma/E$ se obtendrá:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{H}(\sigma - \sigma_{y_0})\left(1 - e^{-\frac{1}{\eta}Ht}\right)} \tag{65}$$

- Casos particulares:

$$\eta \to 0: \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{H}(\sigma - \sigma_{y_0})\left(1 - e^{-\frac{1}{0}Ht}\right) \tag{66}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{H}(\sigma - \sigma_{y_0}) \tag{67}$$

$$\eta \to \infty: \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{H}(\sigma - \sigma_{y_0})\left(1 - e^{0}\right) \tag{68}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{69}$$

-Modelos clásicos del continuo (resumen):

- Hohenemser-Prager
    - Generalización del modelo de Bingham
- Perzyna
    - Generaliza la teoría de un sólido rígido perfectamente viscoplástico de Hohenemser-Prager a un caso elastico/elastoviscoplástico con endurecimiento
- Duvaut-Lions
    - Puede decirse que es similar a Perzyna, expresándose de otra manera la $\dot{\epsilon}^{vp}$