



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

# **“MATERIALES COMPUESTOS”**

## **MATERIALES**

**Prof. Titular: Dra. Ing. María J. Santillán**

**Prof. Adjunto: Dr. Ing. Claudio Careglio**

- Un material compuesto consiste de la combinación de dos o más constituyentes:
  - Heterogeneidad
  - Fases: dispersa, matriz



- **Ventajas del uso de materiales compuestos**
  - Peso ligero (reduce el consumo de energía, etc.)
  - Vida útil duradera.
  - No corrosivo (costo de mantenimiento reducido y mayor vida útil).
  - En algunos casos muy resistentes.
  - En algunos casos piezas únicas (reduce el costo de fabricación).
  - Etc
  
- **Desventajas del uso de materiales compuestos**
  - Altos costos de fabricación
  - Caracterización de parámetros constitutivos es más complejo.
  - Reparación más compleja
  - Los compuestos no tienen una alta combinación de resistencia y resistencia a la fractura en comparación con los metales
  - Los compuestos no necesariamente dan un mayor rendimiento en todas las propiedades utilizadas cuando se realiza la selección de materiales.
  - Etc

- Propiedades de los compuestos
  - Propiedades en los compuestos en comparación con otros materiales

$$\text{Módulo específico} = \frac{E}{\rho},$$

$$\text{Tensión específica} = \frac{\sigma_{ult}}{\rho}.$$

| Material                         | Gravedad específica | Módulo de Young [GPa] | Tensión última [MPa] | Módulo específico [GPa/m <sup>3</sup> /kg] | Tensión específica [MPa/m <sup>3</sup> /kg] |
|----------------------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|--|---|
| Grafito                          | 1,8                 | 230                   | 2067                 | 0,13                                       | 1,1   |
| Grafito/Epoxy (unidireccional)   | 1,6                 | 181                   | 1500                 | 0,11                                       | 0,94  |
| Grafito/Epoxy (cross-ply)        | 1,8                 | 96                    | 373                  | 0,060                                      | 0,23  |
| Grafito/Epoxy (quasi-isotrópico) | 1,8                 | 70                    | 276                  | 0,043                                      | 0,17  |
| Acero                            | 7,8                 | 207                   | 648                  | 0,026                                      | 0,083                                       |
| Aluminio                         | 2,6                 | 69                    | 276                  | 0,026                                      | 0,106                                       |

# INTRODUCCIÓN

---

- Utilización creciente en ingeniería

Fibra carbono (laminado)



Otro compuestos



Titanio



Fibra carbono (sandwich)



Aluminio



Otros



# ***INFLUENCIA DE PARÁMETROS SOBRE LA RESPUESTA MECÁNICA***

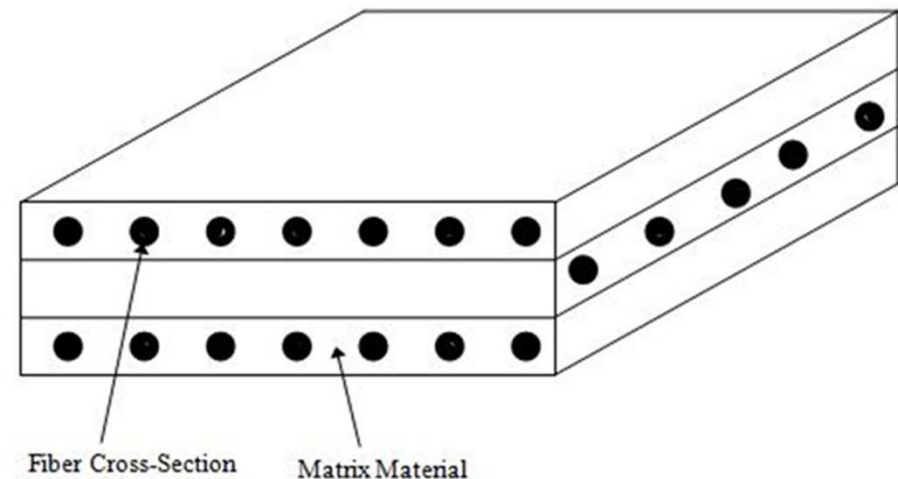
---

- En reforzados con fibras:
  - Fibra:
    - Longitud de la fibra: corta, larga
    - Orientación de la fibra: una dirección, varias direcciones
    - Forma de la fibra: sección circular, etc.
    - Material de la fibra: vidrio, aramida, carbono, etc.
  - Matriz:
    - Polímeros (termoestables, termoplásticos), Metales, Cerámicos
  - Interfase fibra-matriz
    - Factores químicos
    - Factores mecánicos

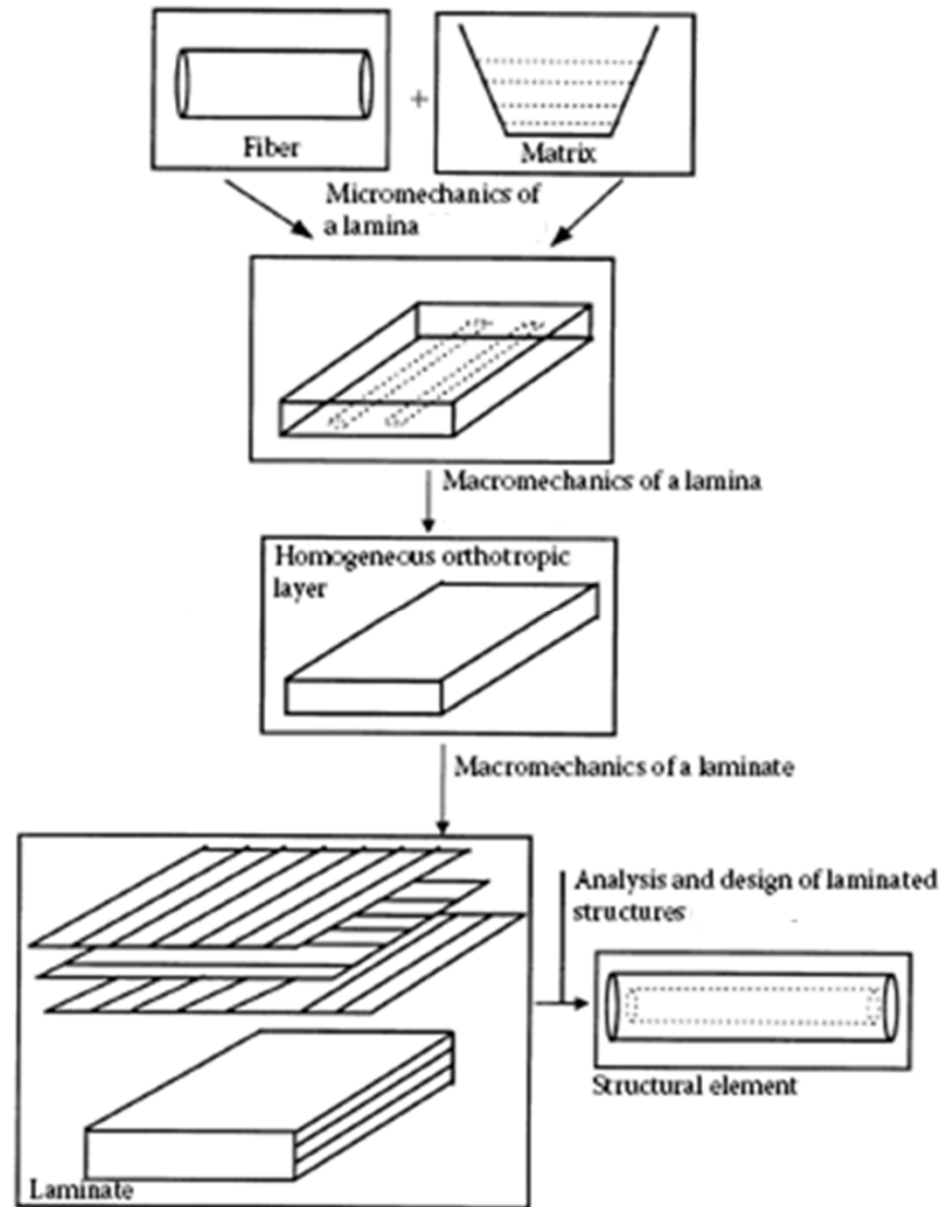
# LAMINA Y LAMINADO DE MATERIAL COMPUESTO

---

- **Lamina:**
  - Capa delgada de un material compuesto
  - Una lámina es diferente a un material isótropo homogéneo.
  - El análisis macromecánico de una lámina se basa en propiedades promedio y considerando que la lámina es homogénea
- **Laminado:**
  - Apilamiento de láminas en la dirección del espesor de la lámina
- **Laminado híbrido**



# ANÁLISIS DE LAMINADOS





# *ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA*

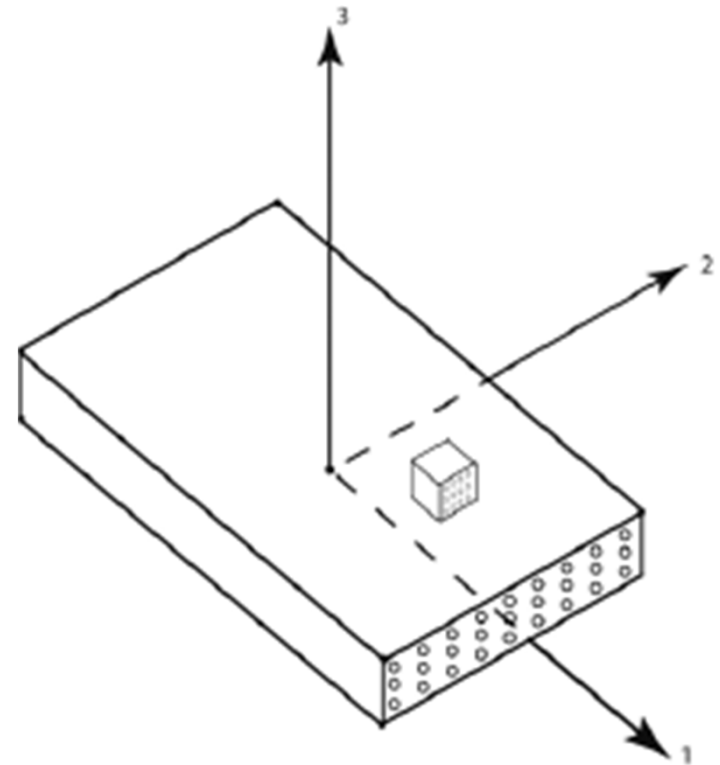
---

- Análisis de las tensiones y deformaciones de una lámina unidireccional.
- La caracterización mecánica de estos materiales generalmente requiere una experimentación y / o modelado teórico costoso y lento.
- Por lo tanto, el objetivo es encontrar el número mínimo de parámetros requeridos para la caracterización mecánica de una lámina.

# *ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA*

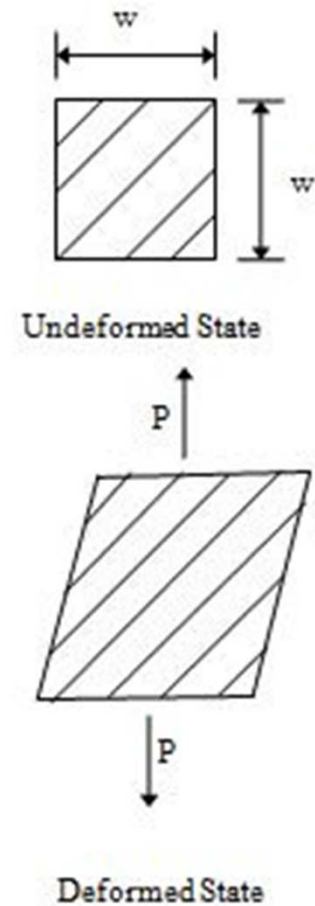
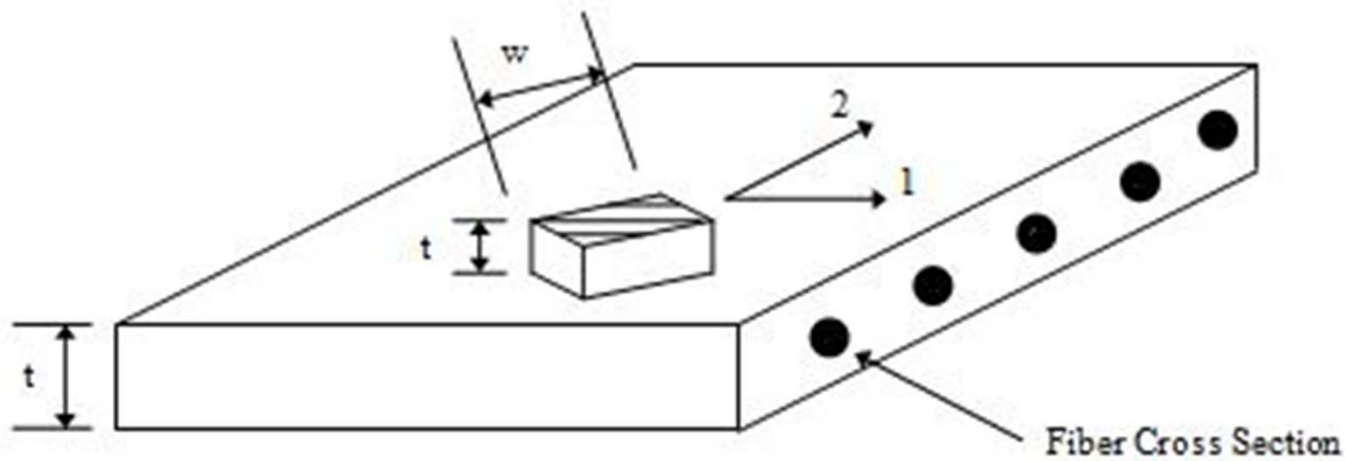
---

- Sistema coordenado de una lámina
  - .El eje 1 está alineado con la dirección de la fibra
  - El eje 2 está en el plano de la capa y perpendicular a las fibras.
  - El eje 3 es perpendicular al plano de la capa y perpendicular a las fibras.
  - 1 se denomina dirección de la fibra, 2 y 3 se denominan las direcciones de la matriz o las direcciones transversales



# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Deformación de una lámina unidireccional con fibras formando un ángulo respecto a las cargas



# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Ecuación constitutiva en 3D
  - Ley de Hooke
    - Tensor constitutivo tiene 36 constantes, por simetría se reduce a 21 constantes independientes.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Ecuación constitutiva en 3D
  - Caso de material ortótropo

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Ecuación constitutiva en 3D
  - Caso de material ortótropo

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Ecuación constitutiva en 3D
  - Caso de material isótropo

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Ecuación constitutiva en 3D
  - Caso de material isótropo

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

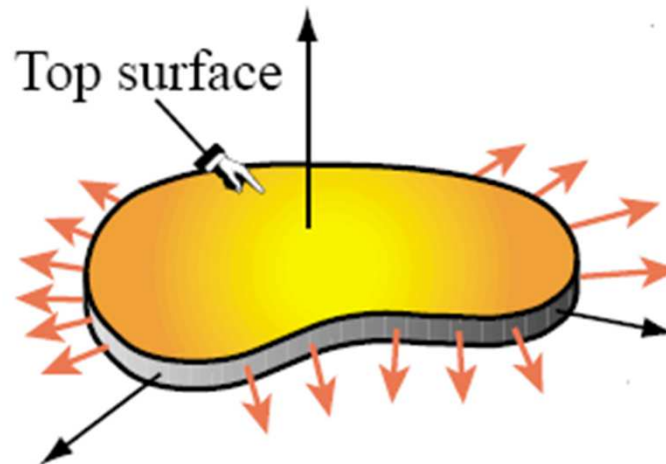
- Número de constantes elásticas
  - Anisótropo: 21
  - Ortótropo: 9
  - Isótropo: 2



# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Ecuación constitutiva en tensión plana
  - En una lámina de material de compuesto reforzado con fibra.
  - Una dimensión geométrica característica de al menos un orden de magnitud inferior al de las otras dos dimensiones.
  - Habitualmente para cada lámina se considera la hipótesis de tensión plana ( $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ ):
    - Las únicas componentes de tensión distintos de cero actúan en un solo plano
  - Mediante la hipótesis de tensión plana la relación constitutiva se simplifica.



# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Ecuación constitutiva en tensión plana

- Para material ortótropo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

resultando de la hipótesis de tensión plana que:

$$\gamma_{13} = 0 \quad \gamma_{23} = 0 \quad \varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

con la que “**compliance matrix**” (o también llamada de flexibilidad) y la relación deformación-tensión para un material ortotrópico bajo un estado de tensión plana (“**reduced compliance matrix**”), como así también la “**matriz de rigidez**” será (“**matriz de rigidez reducida**”) serán:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2},$$

$$Q_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2},$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2},$$

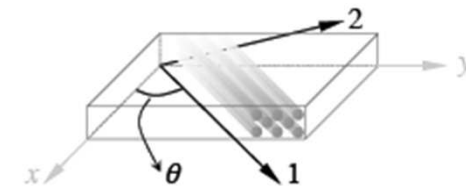
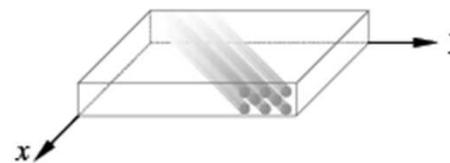
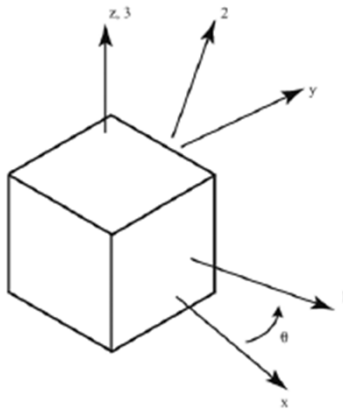
$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Sistema coordenado global de una lámina
  - Laminado consiste de más de una lámina unidireccional.
  - Láminas con diferentes orientaciones:
    - Referir la respuesta de cada capa (lámina) de material al mismo sistema global (“sistema de coordenadas global”).
  - Consideramos caso de tensión plana
  - Ejes locales y ejes globales



# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Sistema coordenado global de una lámina
  - T: matriz de transformación

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c &= \cos(\theta) \\ s &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Sistema coordenado global de una lámina
  - Luego, empleando sobre las expresiones anteriores y considerando las expresiones de (A) se puede obtener las matrices reducidas transformadas (o no orientadas) de rigidez y flexibilidad (es decir, respecto a los ejes globales).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B})$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)$$

# ANÁLISIS EN LA MACROESCALA DE UNA LÁMINA

- Sistema coordenado global de una lámina
  - Las expresiones (B) y (C): acoplamiento entre términos normales y corte para deformaciones y tensiones.
  - Las expresiones (B) y (C) se llaman “**lámina ortotrópica general**” .

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (C)$$

$$\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4$$

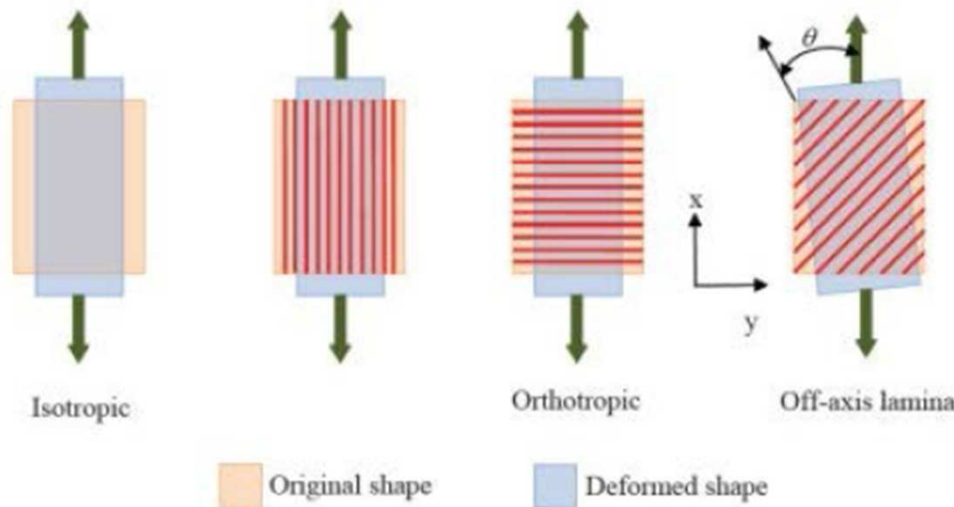
$$\bar{S}_{12} = S_{12}(s^4 + c^4) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})sc^3$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4)$$



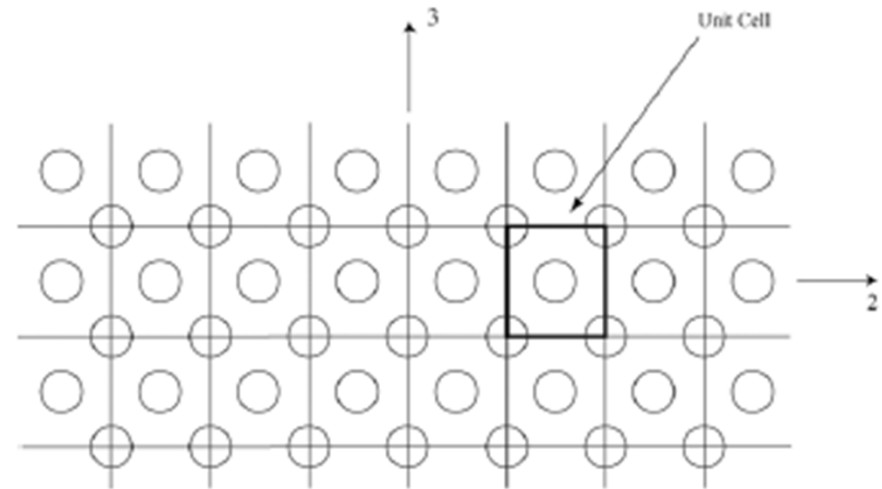
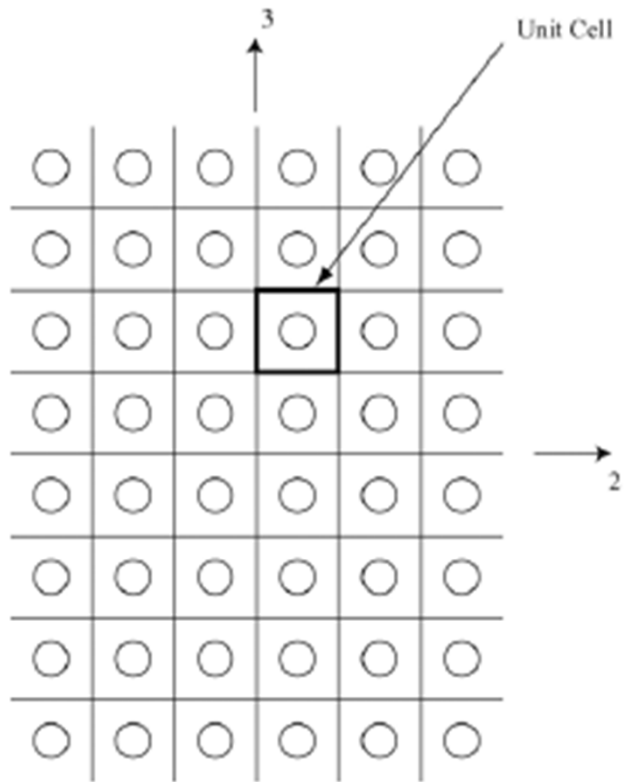
# *ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA*

---

- Estudiar respuesta del material compuesto:
  - Mediante su análisis micromecánico ( estudio de la interacción fibras-matriz, como así también del compuesto a través de sus constituyentes)
  - Dentro de la matriz, dentro de la fibra, y la interfase entre ambas)
  
- Hipótesis consideradas:
  - Comportamiento elástico lineal (de las fibras y la matriz)
  - Fibras infinitamente largas
  - Fibras espaciadas periódicamente (ordenamiento cuadrado o hexagonal)



# ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA



# *ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA*

---

- Enfoques de estudio micromecánico:
  - Modelos basados en la teoría de la elasticidad
  - Modelos de regla de las mezclas (basados en la mecánica del material)
  - Modelos empíricos basados en el ajuste de curvas de datos obtenidos experimentalmente.
  - Modelos numéricos (ej: MEF)

•

# ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Fracción de volumen

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad V_f + V_m = 1 \quad v_f + v_m = v_c$$

- Fracción de peso y masa

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \quad W_m = \frac{w_m}{w_c} \quad W_f + W_m = 1 \quad w_f + w_m = w_c$$

considerando la densidad:

$$w_f = \rho_f v_f \quad w_m = \rho_m v_m \quad w_c = \rho_c v_c \quad w_f + w_m = w_c$$

# ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Densidad

- La fracción de masa y la fracción de volumen se pueden relacionar con la densidad por medio de la siguiente expresión:

$$W_f + W_m = W_c \Rightarrow \rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m$$

$$\Rightarrow \rho_c = \rho_f \frac{v_f}{v_c} + \rho_m \frac{v_m}{v_c}$$

$$\Rightarrow \rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$$

- En forma similar se puede expresar la densidad en función de la fracción de masa

$$V_f + V_m = V_c \Rightarrow \frac{1}{\rho_c} = \frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m}$$

# ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Módulo de Young longitudinal

$$F_c = F_f + F_m$$

$$F_c = \sigma_c A_c$$

$$\sigma_c = E_l \varepsilon_c$$

$$F_f = \sigma_f A_f$$

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f$$

$$F_m = \sigma_m A_m$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m$$

$$\Rightarrow E_l \varepsilon_c A_c = E_f \varepsilon_f A_f + E_m \varepsilon_m A_m$$

Considerando que:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m$$

entonces:

$$\Rightarrow E_l = E_f \frac{A_f}{A_c} + E_m \frac{A_m}{A_c} \Rightarrow E_l = E_f V_f + E_m V_m$$

# ANÁLISIS EN LA MICROESCALA DE UNA LÁMINA

---

- Módulo de Young transversal

En forma similar a lo anterior, pero considerando que:

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m$$

se demuestra que:

$$\frac{l}{E_2} = \frac{l}{E_f} \frac{t_f}{t_c} + \frac{l}{E_m} \frac{t_m}{t_c} \Rightarrow \frac{l}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$