UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Carrera: ARQUITECTURA
ESTADÍSTICA

Práctico Nº 2: *Probabilidad básica.*

- *Comprender la noción de Probabilidad.*
- *Adquirir el "Pensamiento probabilístico", con el objetivo de manejar la Probabilidad y su cálculo para construir modelos de aplicación la disciplina.*

Espacios muestrales y Eventos

1. Indique los elementos de los siguientes espacios muestrales:
   a) $\mathscr{E}_1$: el conjunto de los enteros entre 1 y 50 divisibles por 8
   b) $\mathscr{E}_2$: $x^2 + 4x - 5 = 0$
   c) $\mathscr{E}_3$: $x^2 + y^2 - 5 \leq 4$
   d) $\mathscr{E}_4$: $2x - 4x \geq 0; x < 1$
   (Considere a *x* como un número real)
2. Considere el espacio muestral Ω = {Cu, Na, N, K, U, O, Zn}y los eventos A = {Cu, Na, Zn}; B = {Na, N, K} y C = {O} Lista los elementos de los conjuntos que corresponden a los siguientes eventos
   a) $\bar{A}$
   b) $A \cup C$
   c) $(A \cap \bar{B}) \cup C$
   d) $\bar{B} \cap \bar{C}$
   e) $A \cap B \cap C$
   f) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap C)$
3. Si $\Omega = \{ x / 0 < x < 12 \}$, M =$\{x / 1 < x < 9\}$ y N = $\{x / 0 < x < 5\}$, encuentre
   a) $(M \cup N)$
   b) $(M \cap N)$
   c) $(M' \cap N')$

Conteo de puntos de muestra

3. ¿Cuántos resultados posibles pueden obtenerse largando dos dados legales simultáneamente?
4. Si un experimento consiste en lanzar un dado y después extraer una letra al azar del alfabeto ¿cuántos resultados hay en el espacio muestral?
5. Cierto calzado se recibe en cinco diferentes estilos, cada uno disponible en cuatro colores ¿cuántos pares componen el espacio muestral? Realiza un diagrama de árbol.
6. ¿Cuántas posibles patentes automovilísticas permite el sistema en Argentina?
7. Un lote de siete bolsas de cemento contiene dos defectuosas. Un encargado de obra compra al azar tres ¿De cuántas formas puede llevarse ninguna defectuosas? ¿Y una? ¿Y dos?

Probabilidades

1. Indique Verdadero (V) o Falso (F), según corresponda, y justifique la elección
   a) Para un día cualquiera la probabilidad de lluvia es 0,40 y la probabilidad de que no llueva es 0,52

b) Las probabilidades de que un futbolista convierta 0, 1, 2 y 3 goles en un partido son 0,19; 0,38; 0,29 y 0,15 respectivamente
c) Las probabilidades de que una impresora cometa 0, 1, 2, 3 y 4 errores al imprimir un documento son 0,19; 0,35; – 0,25; 0,43 y 0,29 respectivamente
d) Al sacar una carta de la baraja inglesa en un solo intento la probabilidad de obtener corazones es 1/4, la probabilidad de obtener una carta negra es 1/2 y la probabilidad de seleccionar una carta negra de corazones es 1/8

2. En un grupo de 500 estudiantes universitarios se observa que 210 fuman, 258 consumen alcohol, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen alcohol, 83 comen entre comidas y consumen alcohol, 97 fuman y comen entre comidas y 53 tienen los tres hábitos. Si se selecciona al azar un miembro, encuentre la probabilidad de:
   a) que el estudiante fume pero no consuma alcohol
   b) coma entre comidas y consuma alcohol pero no fume
   c) ni fume ni coma entre comidas
   d) que fume, coma entre comidas y consuma alcohol
3. Se lanza un par de dados. Encuentre la probabilidad de obtener
   a) un total de ocho
   b) un total a lo sumo de cinco
   c) una suma impar a lo sumo de cinco
4. Se sacan dos cartas sucesivamente de una baraja sin reemplazo ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean mayores que dos y menores que ocho?
5. Una mano de póker consiste en cinco cartas. ¿Cuál es la probabilidad de tener tres ases? ¿Y la de tener cuatro cartas de corazones y una de trébol?
6. Un lote de siete bolsas de cemento contiene dos defectuosas. Un encargado de obra compra al azar tres ¿Cuál es la probabilidad de llevarse ninguna defectuosas? ¿Y una? ¿Y dos?
7. Los empleados de una compañía se clasifican según indica la siguiente tabla:

	Mujer (M)	Hombre (H)	Total
Administración (A)	20	30	50
Operación (O)	60	140	200
Ventas (V)	100	50	150
Total	180	220	400

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en administración?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en operaciones si es mujer?
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si trabaja en operaciones?
   f) ¿Son los eventos V y H estadísticamente independientes?
   g) ¿Son los eventos A y M estadísticamente independientes?
8. En un estudio urbanístico realizado para estudiar la relación entre el nivel de ingresos y la cantidad de automóviles por familia, se reúnen los siguientes datos para 180 grupos familiares, con el propósito de contar con información valiosa a la hora de tener en cuenta el espacio necesario para diseñar las cocheras de las casas de un barrio de clase media que se está proyectando.

Cantidad de automóviles	Nivel de ingresos			Total
	Medio – Bajo (**B**)	Medio (**M**)	Medio – alto (**A**)	
Uno (**U**)	21	36	30	87
Dos (**D**)	48	26	19	93
Total	69	62	49	180

I ¿Si se selecciona una familia al azar, cuál es la probabilidad de que

a) posea un solo vehículo, si tiene nivel de ingresos medio – alto?

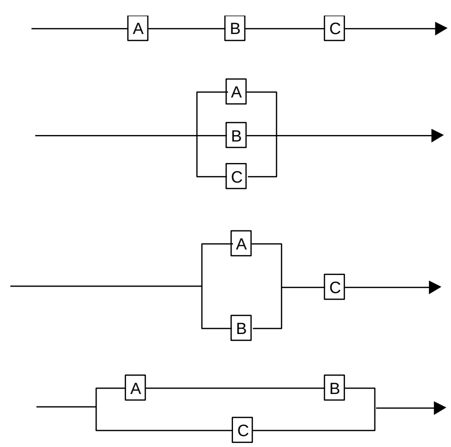
b) tenga dos autos y su nivel de ingresos sea medio?

c) tenga dos autos o su nivel de ingreso sea medio?

II ¿Los eventos “Nivel de ingresos medio” y “Poseer dos automóviles” son independientes? Justifica

9. Se tendrá, a la hora de hacer más fluido el tránsito en cierta zona controlar los límites de velocidad mediante el uso de radares, colocándolos en cuatro puntos diferentes de la ciudad: L_1, L_2, L_3, L_4. Las probabilidades de pasar por uno de estos radares es 0,2; 0,1; 0,5 y 0,2 respectivamente. Si los conductores viajan con exceso de velocidad, 40%, 30%, 20% y 30% son detectados y multados en cada punto de inspección, respectivamente. a) ¿Si un automovilista conduce con exceso de velocidad, cuál es la probabilidad de recibir una multa? b) ¿Si un automovilista es multado, cuán probable es que lo sea por el punto de control L_3?

10. Un acueducto que une el canal de distribución con la planta potabilizadora tiene tres válvulas de regulación, A, B y C. Las formas en que podría montarse el circuito son las que se indican en las figuras. ¿Si las tres válvulas funcionan independientemente y la probabilidad de que una cualquiera de ellas funcione en cualquier momento es de 0,95, cuál es la configuración que tiene mayor probabilidad de funcionar? Analice cada caso



ANEXO I.

COMBINATORIA APLICADA AL CONTEO DE ESPACIO MUESTRALES

1. Muestreo con reposición

Si se tira una moneda, los resultados posibles son C (cara) y X (cruz), entonces el espacio muestral es

$\Omega = \{C, X\}$, y $\# \Omega = 2^1 = 2$

Si se tiran dos monedas, entonces

$\Omega = \{(C, C); (C, X); (X, C); (X, X)\}$, y $\# \Omega = 2^2 = 4$

Si se tiran tres monedas, entonces

$\Omega = \{(C, C, C); (C, C, X); (C, X, C); (X, C, C); (C, X, X); (X, C, X); (X, X, C); (X, X, X)\}$, y $\# \Omega = 2^3 = 8$

Cada paréntesis (C,X,C), por ejemplo, es una muestra ordenada con reposición, es decir que cada resultado posible C o X puede ocurrir nuevamente en cada lanzamiento. A esto se lo llama **variación simple**.
La cantidad de variaciones simples de una población de 2 resultados, (C y X), de orden 3 (tres lanzamientos) se simboliza y $V'_{2,3} = 2^3 = 8$
En general,

$$V'_{m,m} = m^n \quad (1)$$

“Cantidad de variaciones con reposición de m elementos de orden n”

2. Muestreo sin reposición

Si de un conjunto de m elementos se extraen n elementos sucesivamente, tal que $n \leq m$, entonces el muestreo es sin reposición.

Así:

$$m(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(n-1)] = V_{m,n} \quad (2)$$

“Cantidad de variaciones simples sin reposición”

Donde m es la primera extracción, (m – 1) es la segunda extracción, (m – 2) es la tercera extracción y [m – (n – 1)] es la n – ésima extracción.

Si a (2) la multiplicamos y dividimos por (m – n)!:

$$\frac{m(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot m-n+1\cdot(m-n)!}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Entonces,

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = n\ \mathbf{Pr} \qquad (3)$$

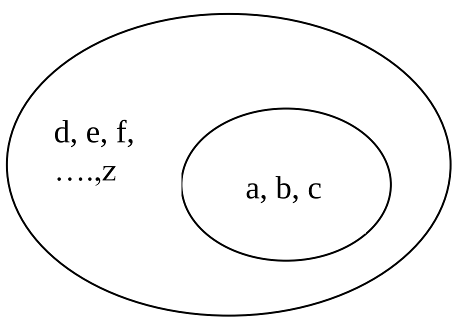
Si en (3) se hace m = n, entonces se tiene el caso particular

$$V_{m,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = \mathrm{Pn} \qquad (4)$$

“Permutaciones simples de n elementos”

3. <u>Combinaciones simples</u>

Sea un conjunto de tamaño *m* y *r* un subconjunto de éste, tal que $r \le m$



Por cada subconjunto de r elementos existen r! ordenamientos sin reposición. Por ejemplo:

$$r = 3; \{a,b,c\} \Rightarrow V_{m,n} = V_{3,3} = 3! = 6 : \{(a,b,c)(b,a,c)(c,a,b)(a,c,b)(b,c,a)(c,b,a)\}$$

Se define la cantidad $c \cdot r! = V_{m,r}$ como la cantidad de ordenamientos sin reposición para formar todos los subconjuntos $V_{m,r}$

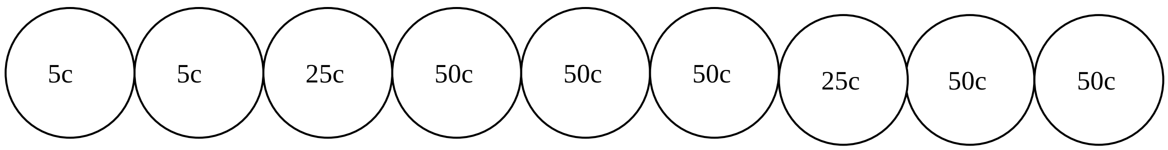
Así,

$$c\cdot = \frac{V_{m,r}}{r!} = \frac{m!}{(m-r)!\cdot r!} = \binom{m}{r} = C_{m,r} \qquad (5)$$

“Cantidad de subconjuntos de tamaño *r* tomados de un conjunto de tamaño *m* llamados combinaciones simples de *m* elementos de orden *r*”

4. <u>Permutaciones con repetición</u>

Si se tienen diez monedas (2x$0,05; 3x$0,25 y 5x$0,50), cada una indistinguible de la otra en cada categoría, y se las alinea, puede obtenerse la siguiente formación:



entre otras.

Intercambiar las dos primeras, por ejemplo, no implica diferencia alguna, dado que son indistinguibles. Entonces, las posibles formas de ordenar cada categoría son:

$\binom{10}{2}$ para las de $0,05

$\binom{8}{3}$ para las de $0,25 en las ocho posiciones que quedan, y

$\binom{5}{5}$ para las de $0,50 en las cinco posiciones que quedan.

Entonces, por cada una de las $\binom{10}{2}$ existen $\binom{8}{3}$ y por cada $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}$ existen $\binom{5}{5}$

En total hay $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{5} = \frac{10\,!}{2!3!5!}$

En general:

$$P_m^{n_1, n_2, \ldots\, n_k} = \frac{m!}{n_1!\, n_2! \ldots\, n_k!} \quad \text{con} \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m \qquad (6)$$

"Cantidad de permutaciones con repetición de m elementos divididos en $n_1, n_2 \ldots n_k$ celdas"

<u>Ejemplos</u>

a) ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los números 1,2,3 y 4?
b) ¿Cuántos números de tres cifras **distintas** pueden formarse con los números 1,2,3, y 4?
c) ¿De cuántas maneras pueden alinearse 10 personas, si tres deben estar juntas?
d) d.1. ¿Cuántas palabras de cuatro letras pueden armarse con JULIETA? (No deben repetirse letras, pero no es necesario que tengan sentido) d.2. ¿Cuántas empiezan con J?

e) ¿Ordenando los números 1 a 10 arbitrariamente, en cuántas alineaciones aparecen 1, 2, 3, en ese orden?

f) ¿Cuántas comisiones de tres miembros de un grupo de cinco personas pueden formarse?

<u>Solución</u>:

a) $V'_{4,3} = 2^3 = 64$ formas

b) $V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$ formas

c) Por ejemplo, si a cada persona la identificamos con una letra, una formación puede ser: a b c d e f g h i j

Entonces hay $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = V_{10,10} = P_{10} = 10!$

Pero si tres deben permanecer siempre juntas

$V_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$ y $V_{8,8} = 8!$

Entonces, $V_{10,3} \cdot V_{8,8} = 720 \cdot 8!$

d) d.1) $V_{7,4}' = 840$; d.2) Empezando con J, quedan seis letras a usarse de a tres: $V_{6,3}' = 120$

e) Se considera 123 como un solo bloque que puede ir en cualquier posición, entonces habrá siete números más ese bloque ordenados sin reposición (sin repetición). $P_8 = 8!$

ANEXO II

DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

Históricamente las definiciones de probabilidad fueron dándose así:

- **Definición clásica** (a priori)
- **Definición frecuencial** (a posteriori)
- **Definición axiomática**

DEFINICIÓN CLÁSICA

DEFINICIÓN CLÁSICA o **REGLA DE LAPLACE (a priori)**

Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes, y si n_A de estos resultados tienen un atributo A, la probabilidad de A, es la proporción de n_A con respecto a n.

Simbólicamente: $P(A) = \dfrac{n_A}{n}$

De otra manera, podemos decir que, dado un espacio muestral con sucesos elementales equiprobables y mutuamente excluyentes, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre la cantidad de casos favorables (cardinal de A) y la cantidad de casos posibles (cardinal de Ω):

Simbólicamente: $P(A) = \dfrac{\# A}{\# \Omega}$

- Que esta definición sea *a priori*, significa que no es necesario realizar el experimento para calcularla, es anterior a la experiencia.
- Una limitación de esta definición es que los sucesos intervinientes deben ser equiprobables, o sea, tener todos la misma probabilidad de ocurrir, además de ser mutuamente excluyentes, es decir, que no pueden ocurrir al mismo tiempo, como los lados de una moneda o las caras de un dado.

DEFINICIÓN FRECUENCIAL

DEFINICIÓN FRECUENCIAL (a posteriori)

La probabilidad aparece como resultado de muchos ensayos o pruebas, sin poder calcularla con anterioridad, ya sea por desconocerse la manera de actuar de las causas que originan el fenómeno, ya sea por ser éstas demasiado numerosas o complicadas.
Si se realiza *n* veces un experimento y se observa *k* veces el suceso que nos interesa (por ejemplo, suceso A)

Simbólicamente: $P(A) = \frac{k}{n} = p_{\text{frecuencia}}$

Si se repite un gran número de veces ($n \to \infty$) y se calcula la probabilidad frecuencial tiende a coincidir con la probabilidad teórica, calculada a priori.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Esta definición fue dada por Kolmogorov en 1933 y nos permite desarrollar la teoría de las probabilidades como cualquiera otra teoría.

Antes de llegar a la definición de probabilidad debemos analizar otros conceptos:

Para ser manejable, el conjunto de los sucesos debe verificar una serie de propiedades, por ejemplo, si A y B son sucesos, la cuestión o enunciado resultante de la conjunción lógica de A y B debe ser también observable, esto también debe ocurrir con la disyunción lógica y la negación. A su vez, estas operaciones deben presentar ciertas propiedades para su manejo. Concretamente, es necesario que la colección de los sucesos definidos sobre una experiencia tengan una estructura algebraica que nos permita trabajar con los sucesos.

Al conjunto de sucesos que presenta esta estructura se lo denomina **álgebra de sucesos** y lo indicamos con la letra $\mathcal{A}$.

El conjunto de todos los subconjuntos de un espacio muestral Ω, llamado "partes de Ω" que se anota como $\mathcal{P}(\Omega)$, es un álgebra de sucesos, siendo $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$.

En $\mathcal{A}$, se deben verificar los siguientes axiomas:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

De los axiomas de definición del álgebra se deduce inmediatamente que:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Dado un Ω y un $\mathcal{A}$ definido en él, una función

$$\mathbf{P}: \mathcal{A} \to \mathbf{R} \quad \text{(siendo R el conjunto de los números reales)}$$
$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{P(A)}$$

es una **probabilidad** sobre $\mathcal{A}$ si cumple los siguientes axiomas:

1) $P(A) \geq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A})$
2) $P(\Omega) = 1$
3) $A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

De esta definición surgen las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$

b) $\mathbf{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$ llamada ***propiedad del suceso opuesto***

Nota: Indicaremos al suceso opuesto de A, indistintamente, con $\bar{A}$ o **A'** o C_A.

c) $\mathbf{A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$

d) $\mathbf{A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1}$

e) $\mathbf{A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

En resumen, la teoría axiomática de la probabilidad proporciona un vocabulario, una sintaxis, axiomas y demostraciones que son parte de la lógica.