UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 2

Desplazamientos y Deformaciones
Teoremas Energéticos

CURSO 2.024

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

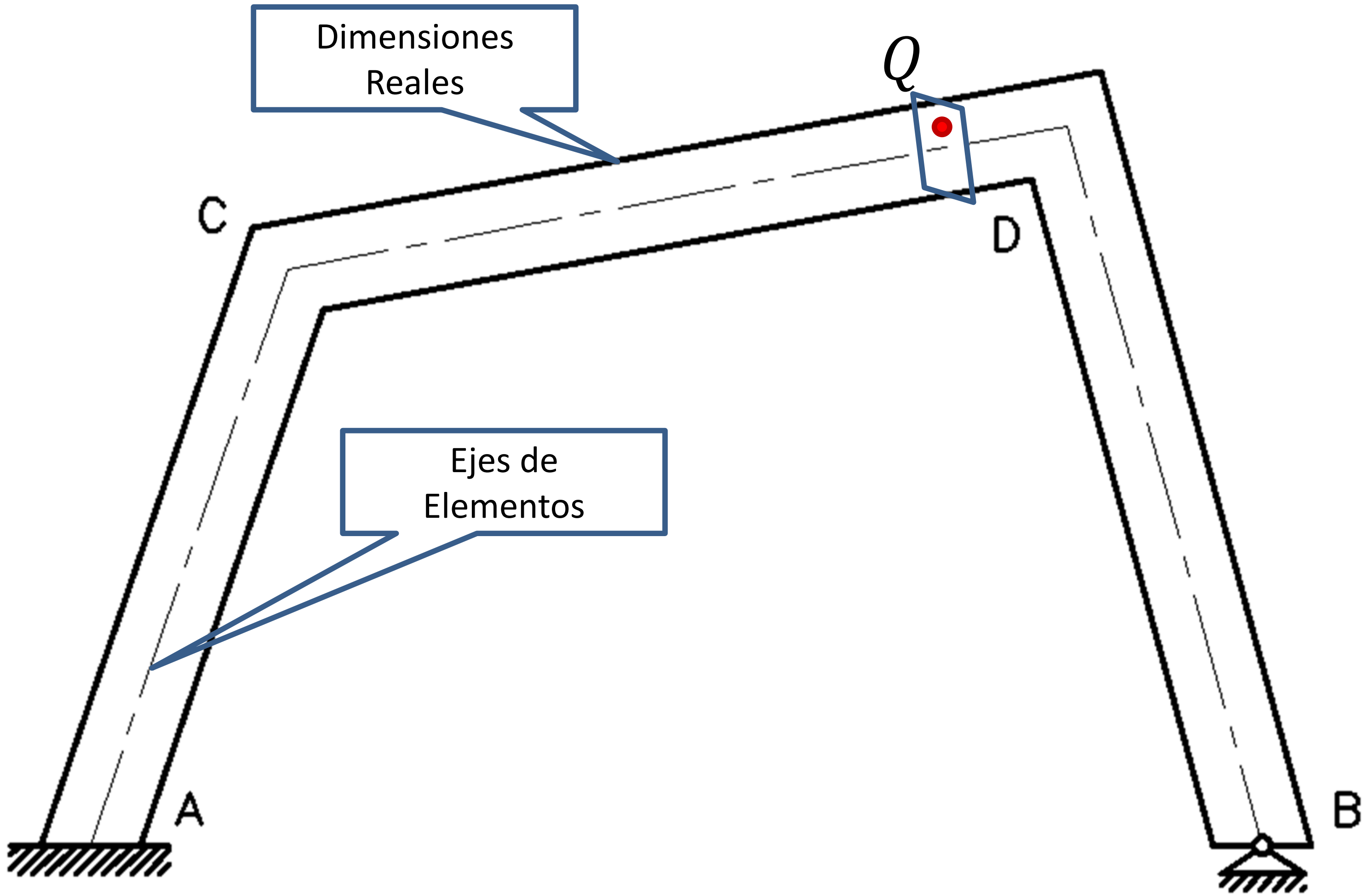
DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Introducción

- Las estructuras cambian de forma debido a acciones externas (cargas, movimientos impuestos, temperatura).
- El cambio en la forma de la estructura se debe a que los elementos que la componen cambian sus dimensiones.
- Al cambiar la forma de la estructura se dice que adquiere su configuración deformada o actualizada, y la línea que representa los ejes de los elementos que la componen se denomina elástica.
- Cuando la estructura cambia de forma cada punto cambia de posición con respecto a la posición original (configuración original).
- A la magnitud que define el cambio de posición de un punto, se la denomina desplazamiento o corrimiento, es un vector.

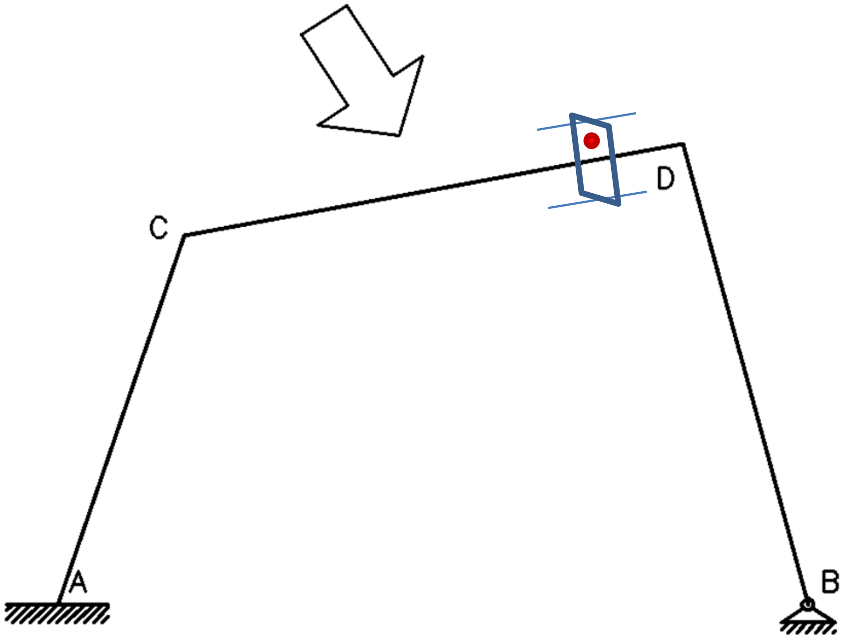
DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

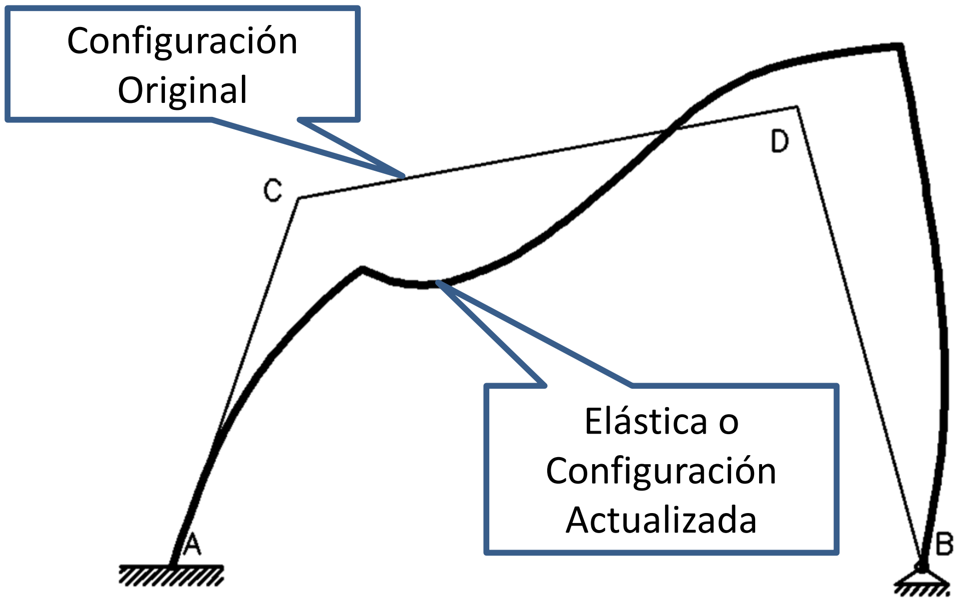
Desplazamientos

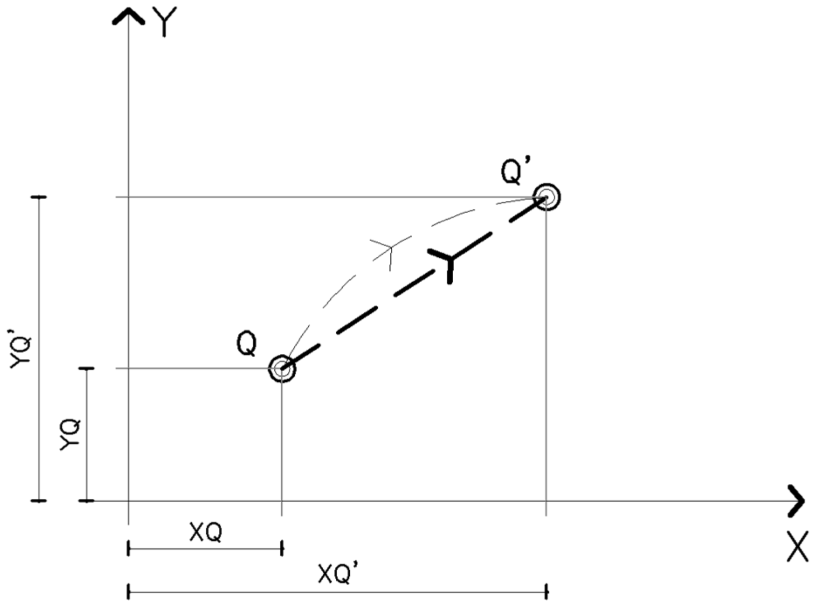


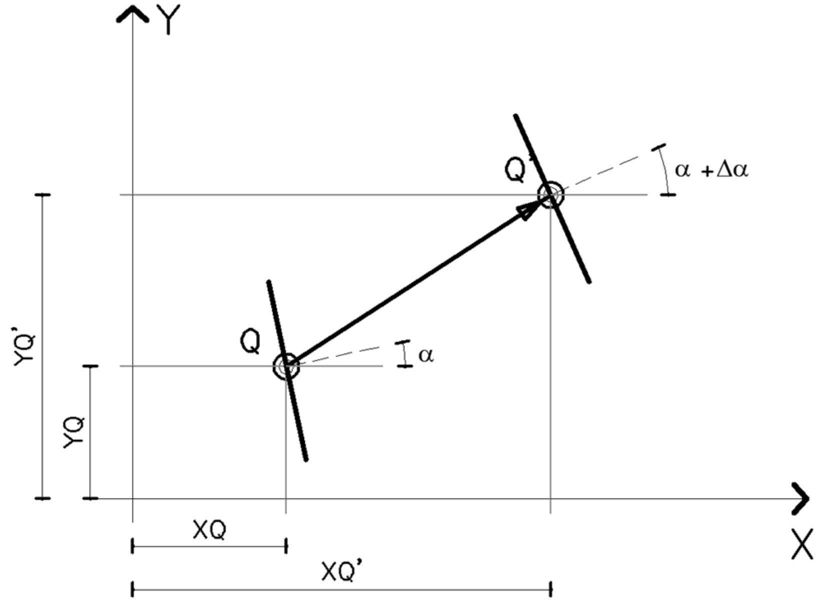
DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



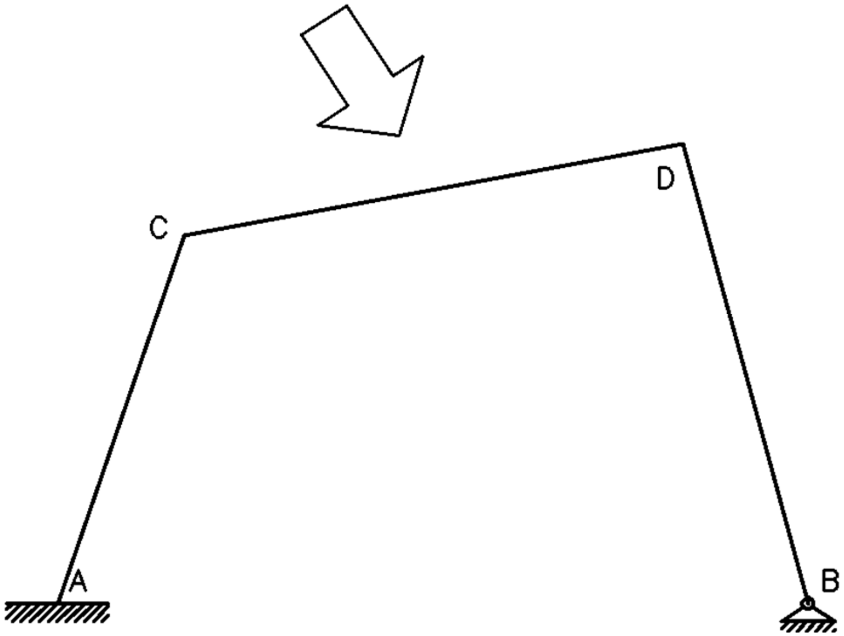


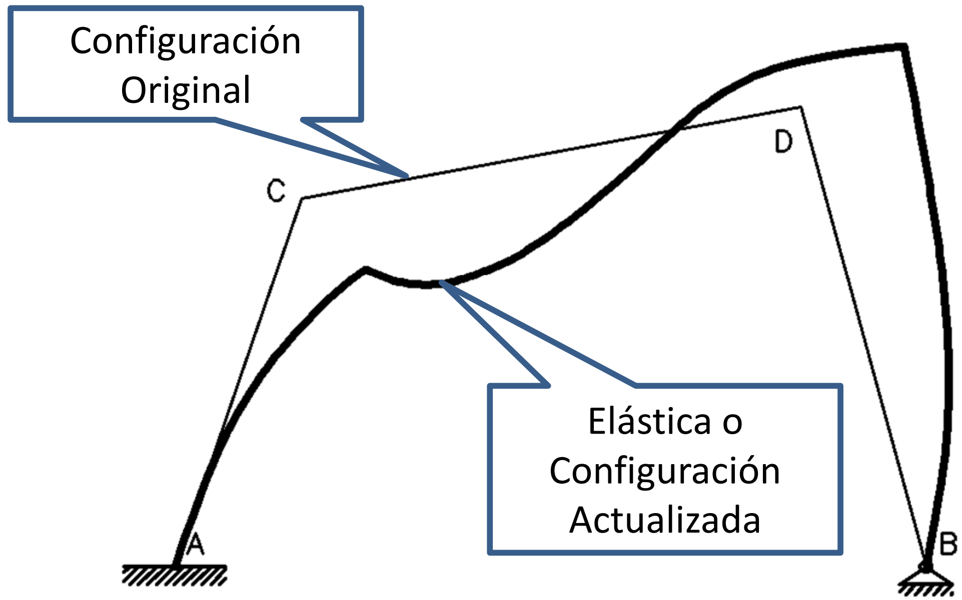


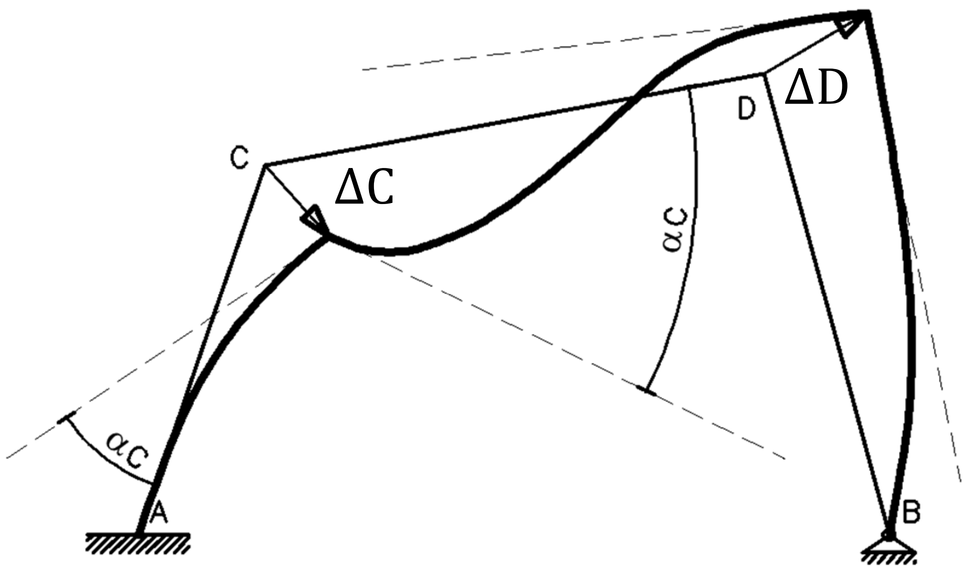


DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos

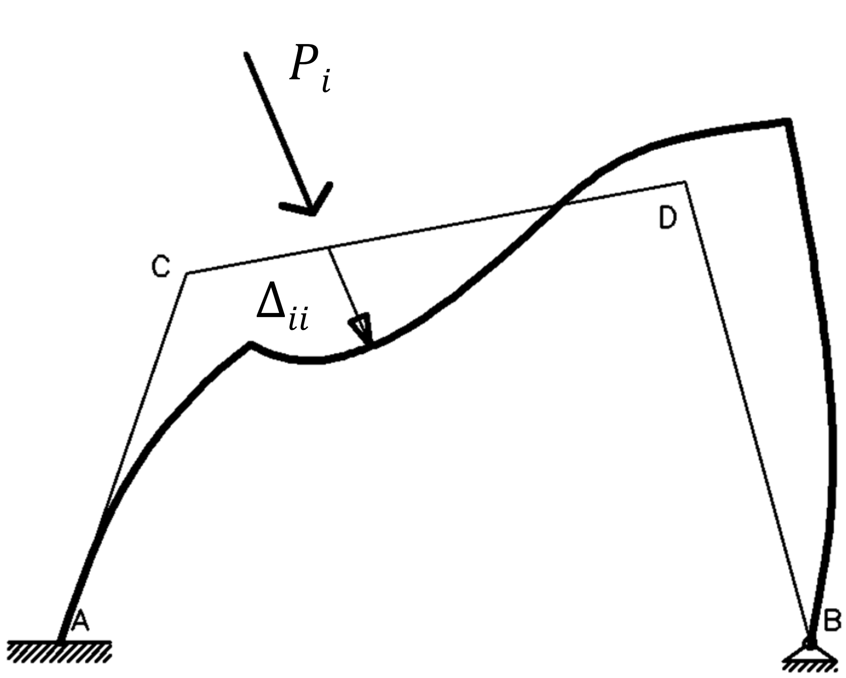


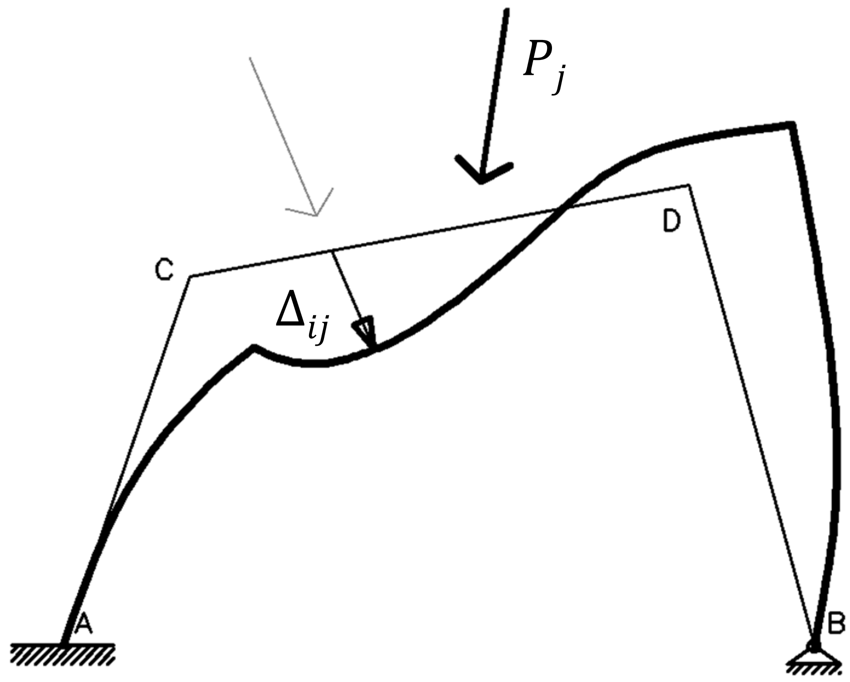




DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



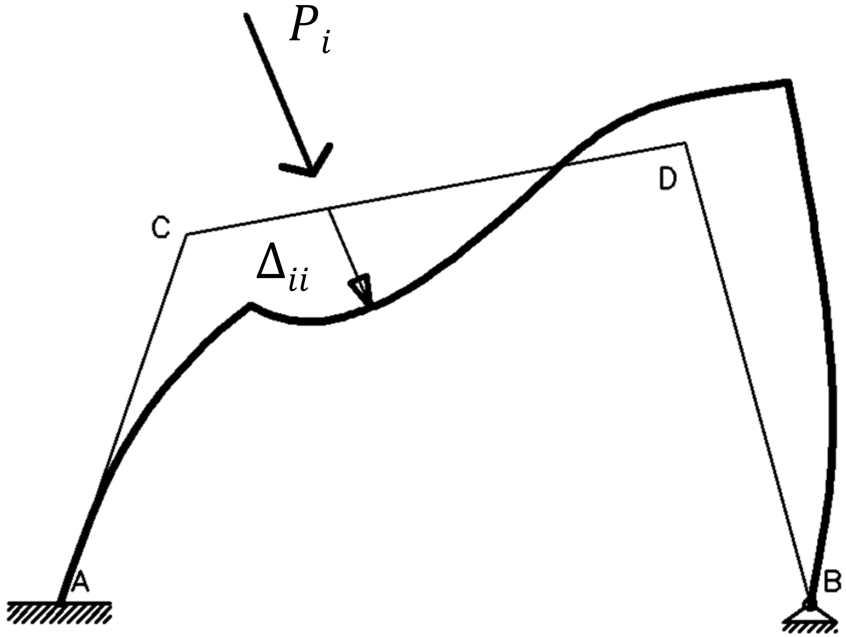


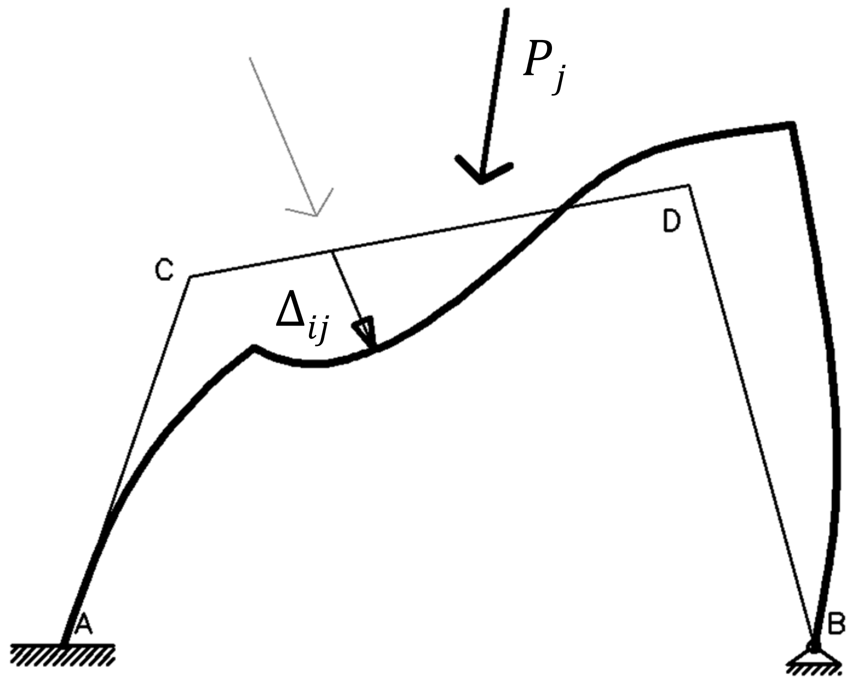
Δ_{ii} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pi*

Δ_{ij} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pj*

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos





δ_{ii} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pi, cuando Pi* $= 1$

δ_{ij} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pj, cuando Pj* $= 1$

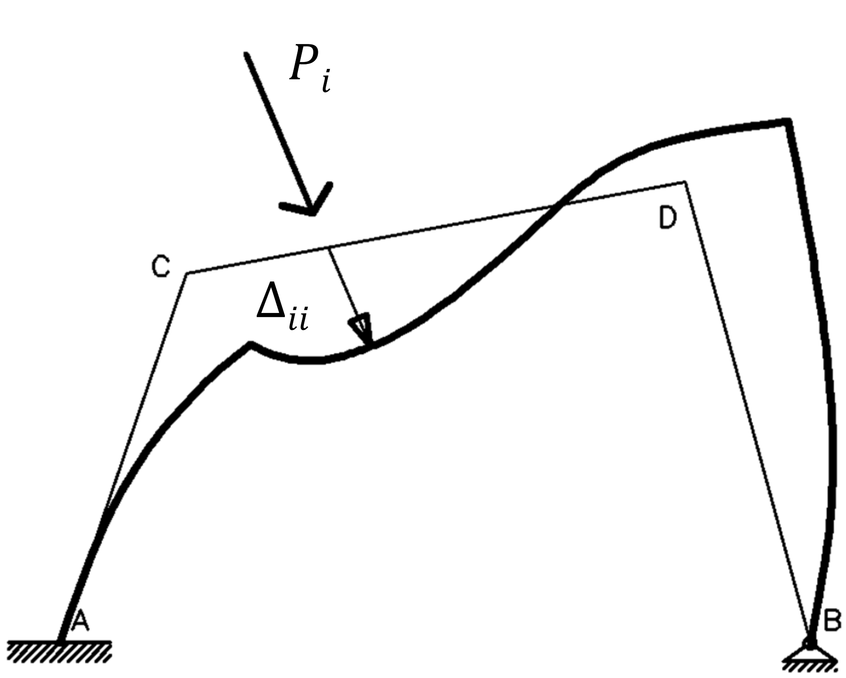
Por hipótesis de la Teoría Clásica de las Estructuras

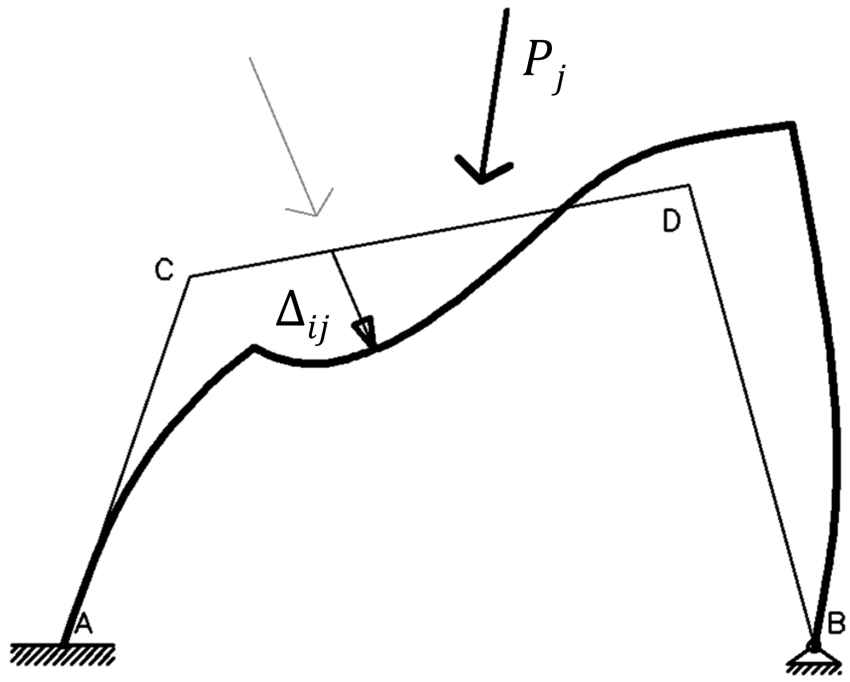
$$\delta_{ii} = \frac{\Delta_{ii}}{P_i}$$

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{P_j}$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos





δ_{ii} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pi, cuando* $Pi = 1$

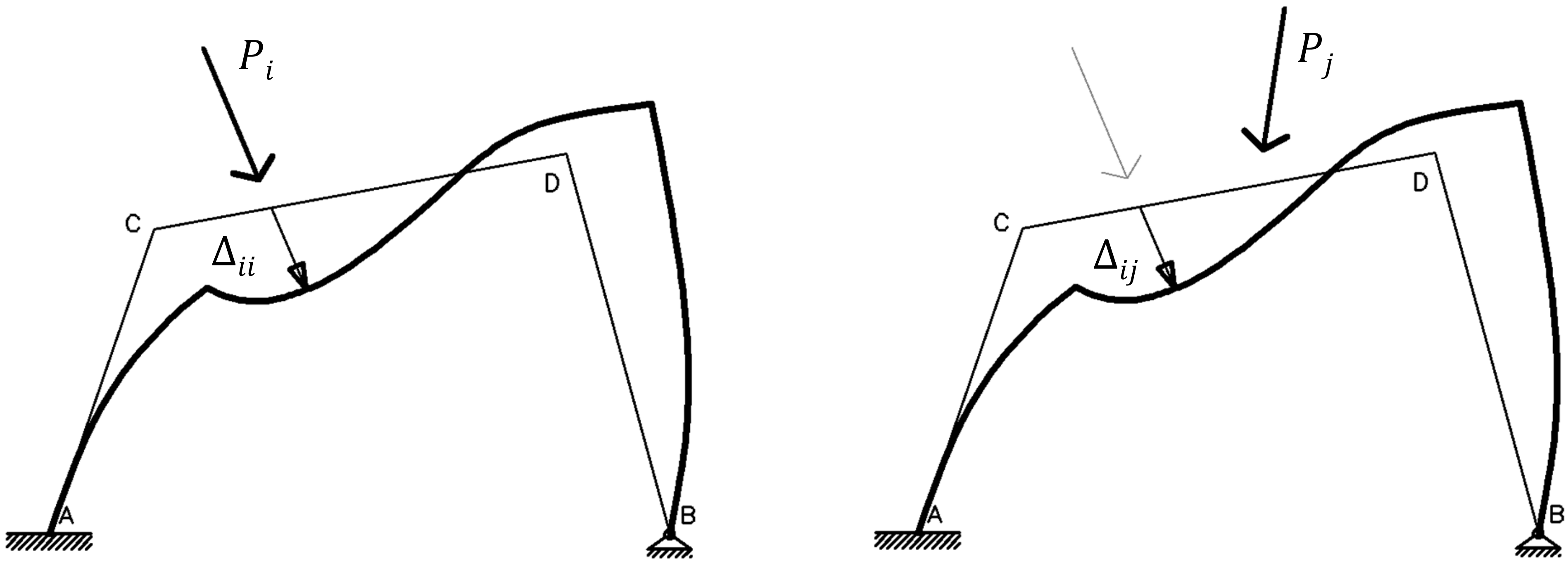
δ_{ij} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pj, cuando* $Pj = 1$

Cuando actuan P_i *y* P_j

$$\boxed{\Delta_i = \Delta_{ii} + \Delta_{ij} = \delta_{ii} P_i + \delta_{ij} P_j}$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos



δ_{ii} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pi, cuando Pi* $= 1$

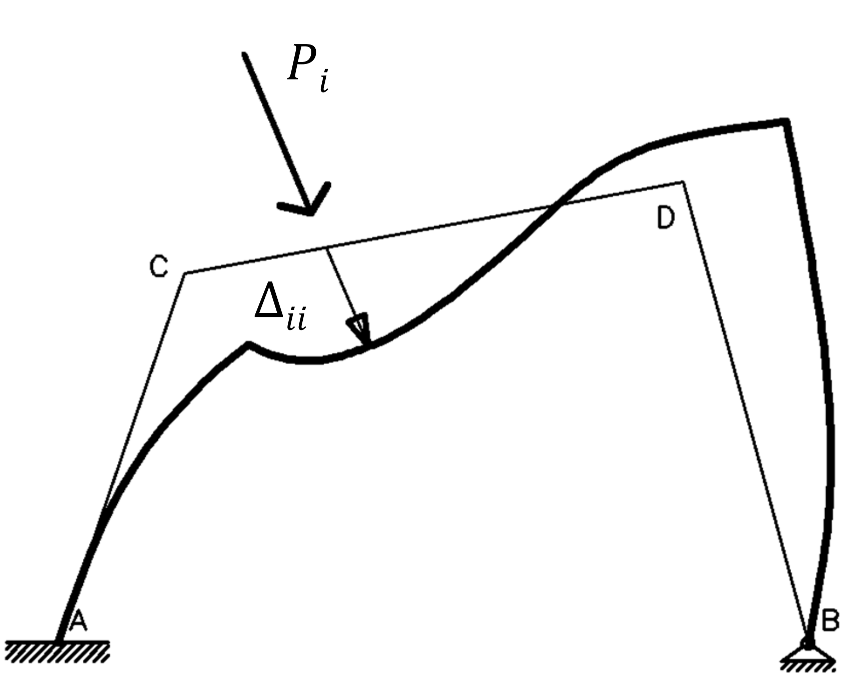
δ_{ij} : *Despalzamiento en la* ***dirección*** *de Pi provocado por Pj, cuando Pj* $= 1$

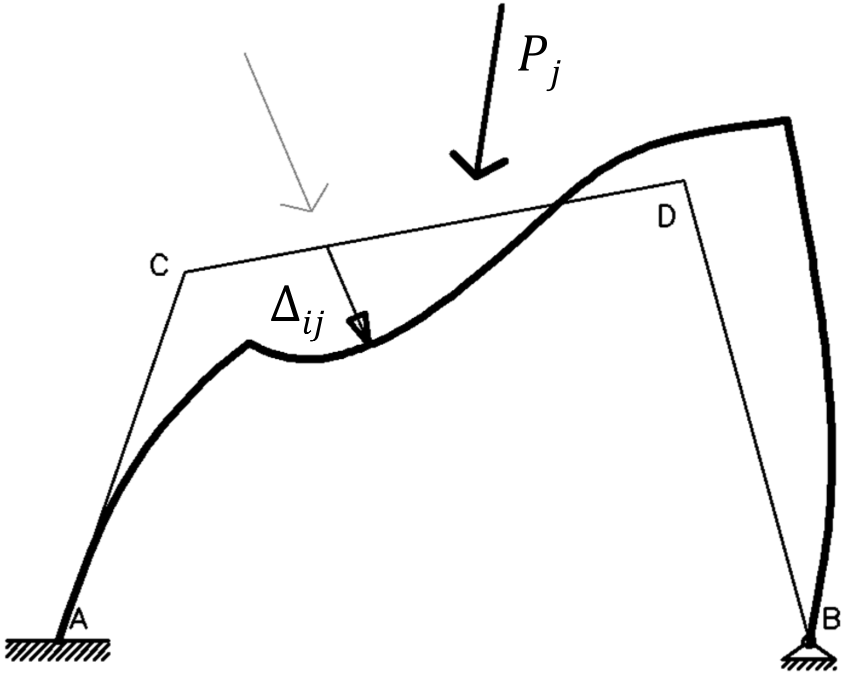
Cuando actuan $P_1 \dots P_i \dots \ P_n$

$$\boxed{\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \, P_j}$$

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Desplazamientos





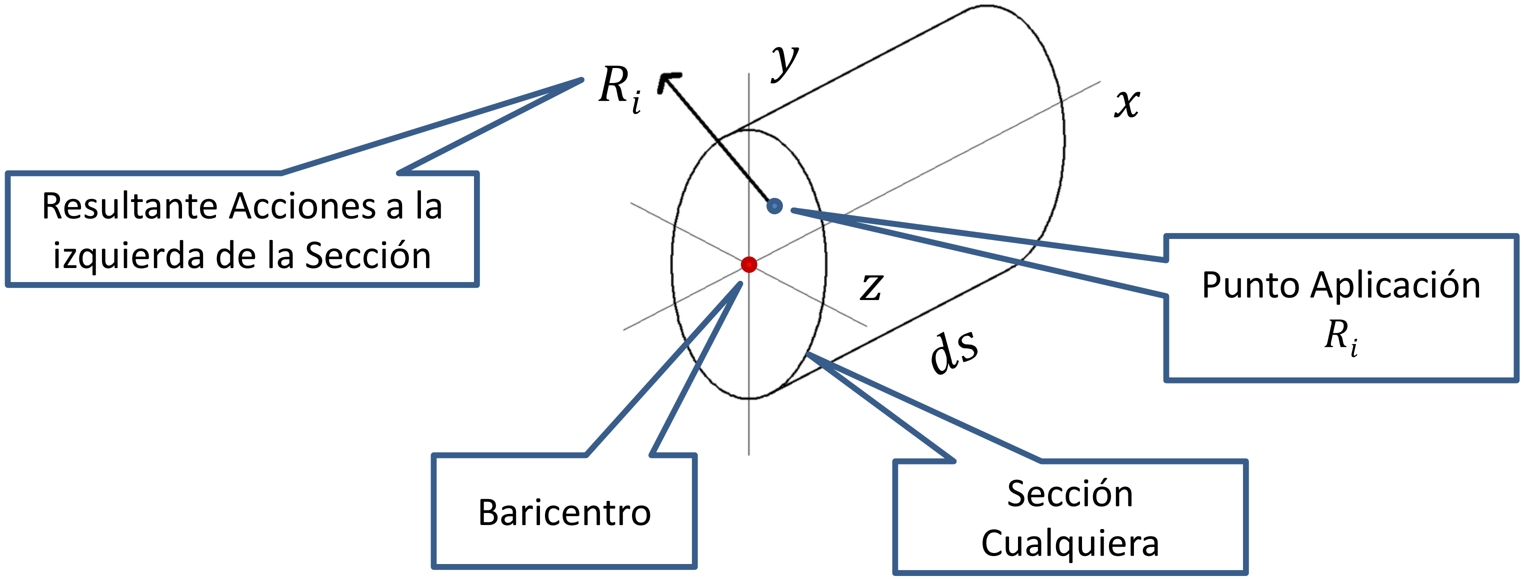
!

Pi *se refiere a una Carga genérica.* ***Fueza o Momento***

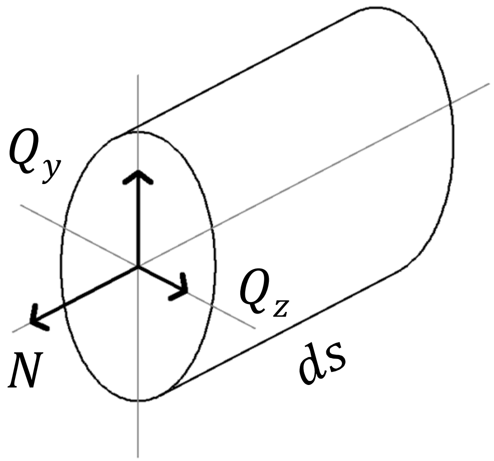
δ_{ij} *se refiere a un Despalzamiento genérico,* ***Lineal o Angular***

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

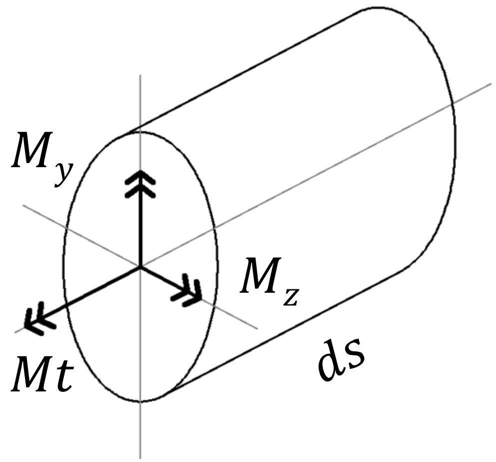
Deformaciones. Esfuerzos Internos



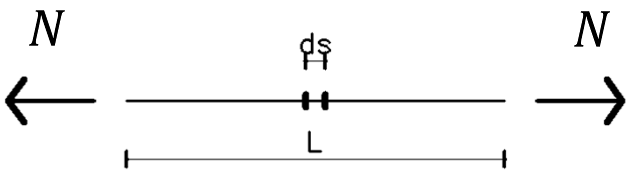
Proyección de R_i

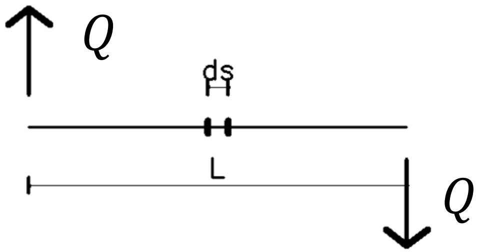


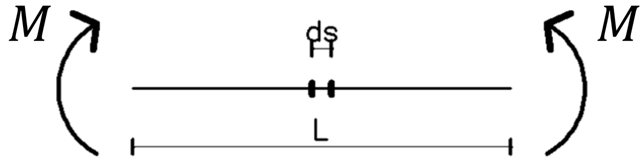
Traslación de R_i



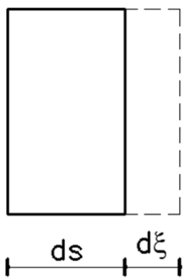
Deformaciones debidas a N, Q y Mf



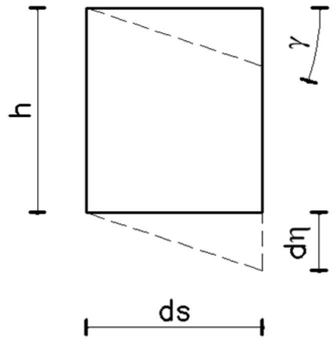




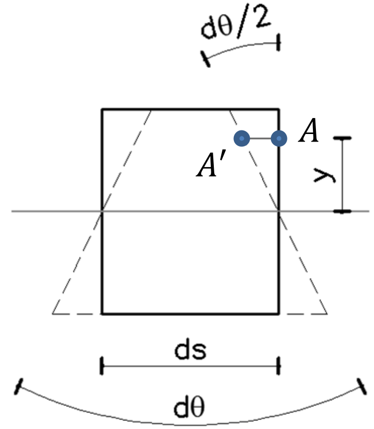
N



Q



M



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA} ds$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \psi \frac{Q}{GA}$$

$$d\eta = \gamma \, ds$$

$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad AA' = y\frac{d\theta}{2}$$

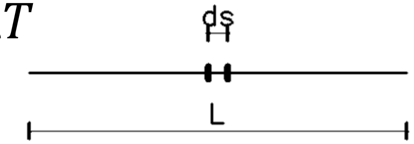
$$\sigma = -\frac{My}{I} \qquad 2AA' = y \, d\theta$$

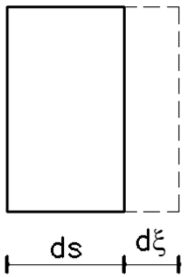
$$\varepsilon = -\frac{My}{EI} \qquad d\theta = -\frac{\varepsilon \, ds}{y}$$

$$\varepsilon = -\frac{2AA'}{ds} \qquad d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

Deformaciones debidas a variaciones de Temperatura

ΔT





ΔT ctte

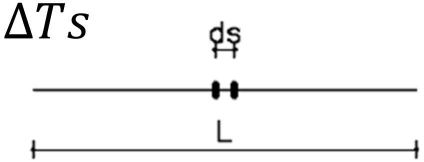
$$\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}$$

$$\varepsilon = \alpha\,\Delta T$$

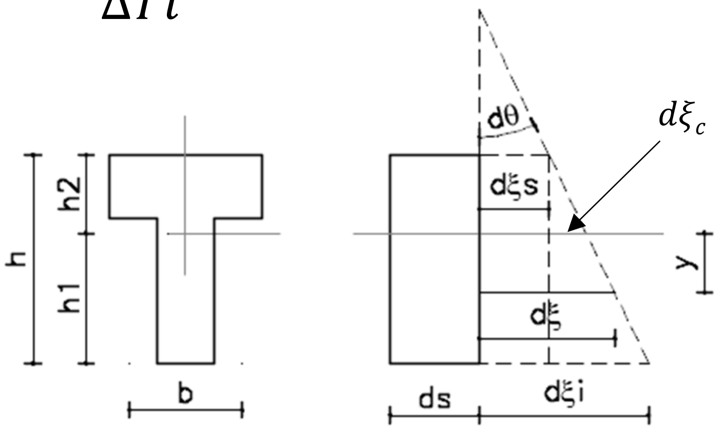
$$d\xi = \alpha\,\Delta T ds$$

$$\Delta L = \int_0^L \alpha\,\Delta T\,ds$$

ΔTs



ΔTi



ΔT var

$$d\xi_i = \alpha\,\Delta T_i\,ds \quad , \quad d\xi_s = \alpha\,\Delta T_s\,ds$$

$$d\xi_c = \frac{d\xi_i + d\xi_s}{2} = \frac{\alpha\,(\Delta T_i + \Delta T_s)ds}{2}$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha\,(\Delta T_i\,h1 + \Delta T_s\,h2)ds}{h}$$

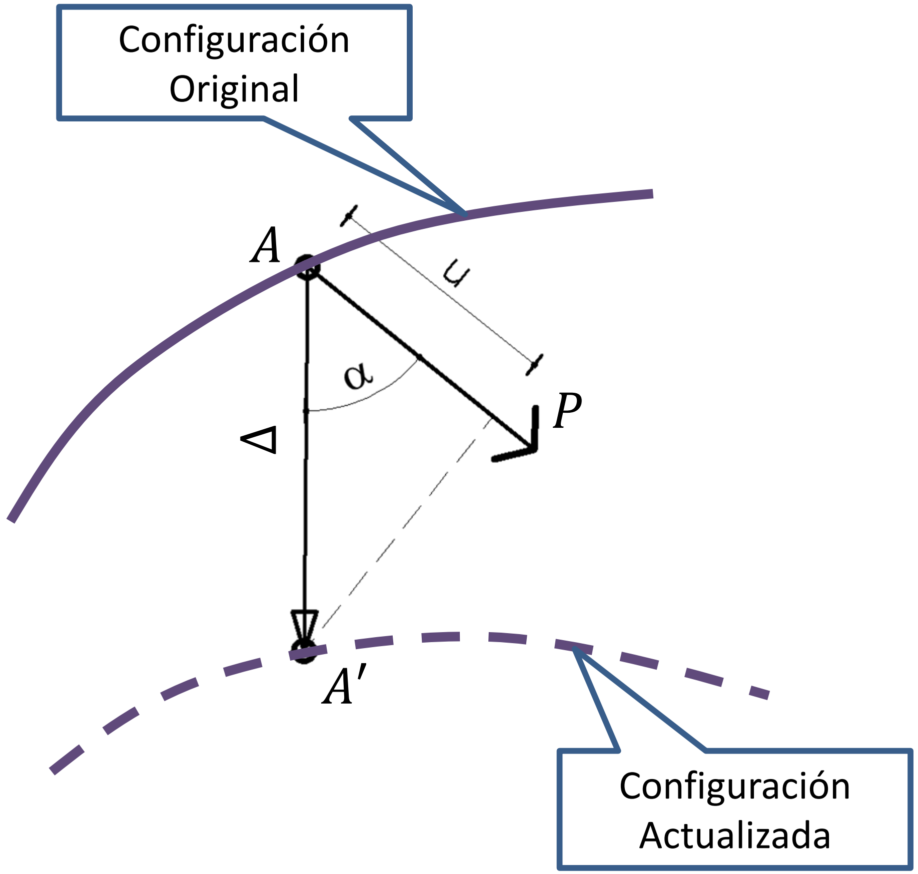
$$d\theta = \frac{d\xi_i - d\xi_s}{h} = \frac{\alpha\,(\Delta T_i - \Delta T_s)ds}{h}$$

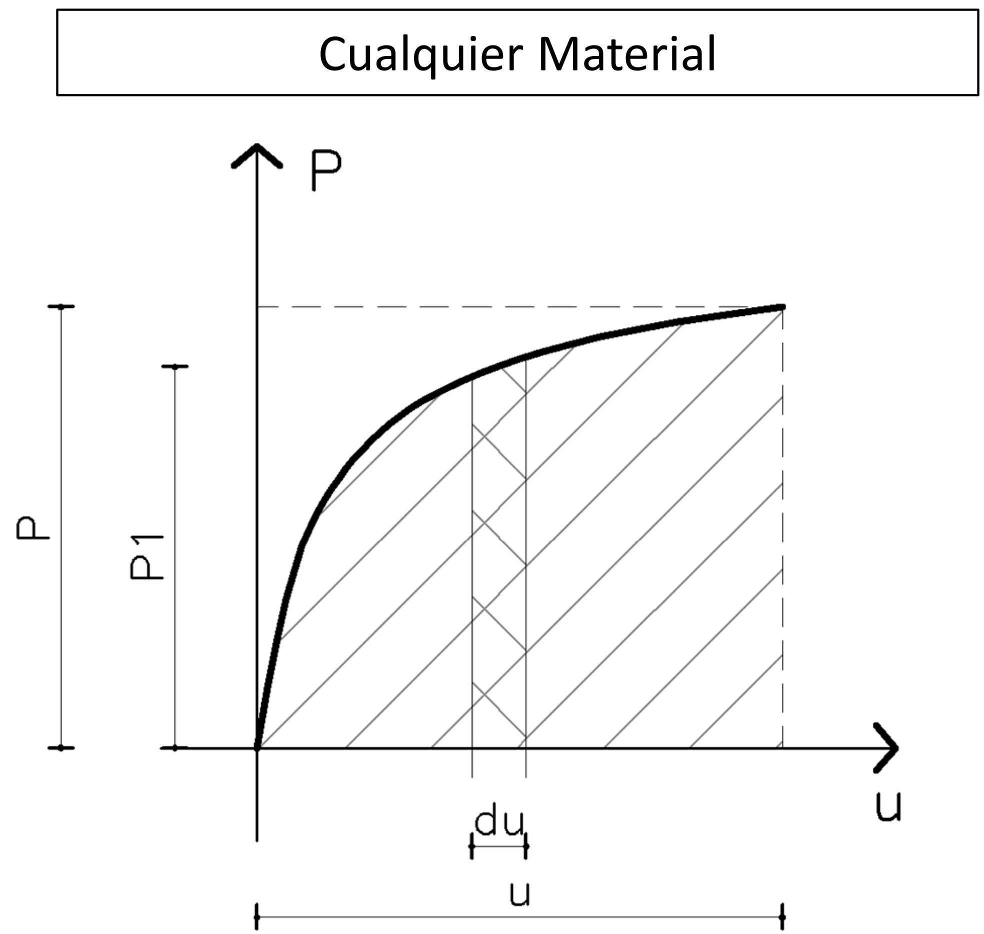
Introducción

- Para el cálculo de desplazamientos se requiere conocer el trabajo de las acciones externas y la energía de deformación de las acciones (esfuerzos) internas.
- Las acciones externas realizan trabajo en los desplazamientos de sus punto o secciones de aplicación.
- Las acciones internas desarrollan energía en las deformaciones.
- El trabajo y la energía serán **reales** si lo realizan las acciones en las deformaciones y desplazamientos que ellas mismas provocan.
- El trabajo y la energía serán **virtuales** si lo realizan las acciones en las deformaciones y desplazamientos provocados por otras acciones.
- Al trabajo de las acciones externas los llamamos **W** y a la energía de las acciones internas **U**

TRABAJO Y ENERGÍA

Trabajo de una Fuerza



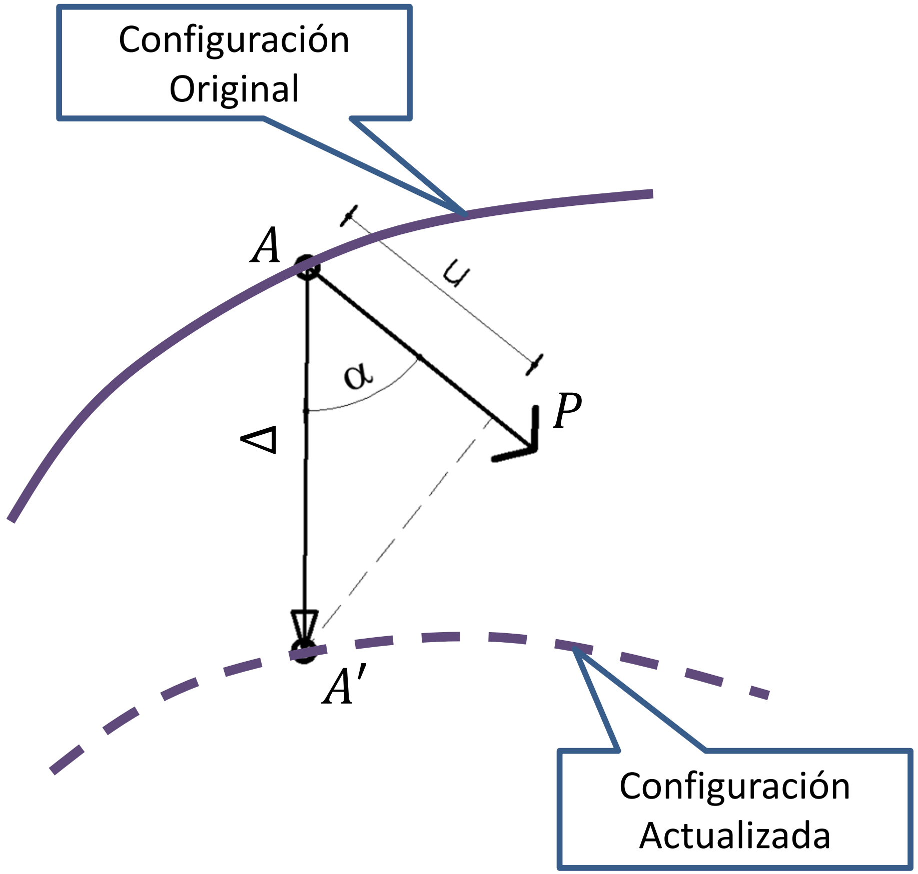


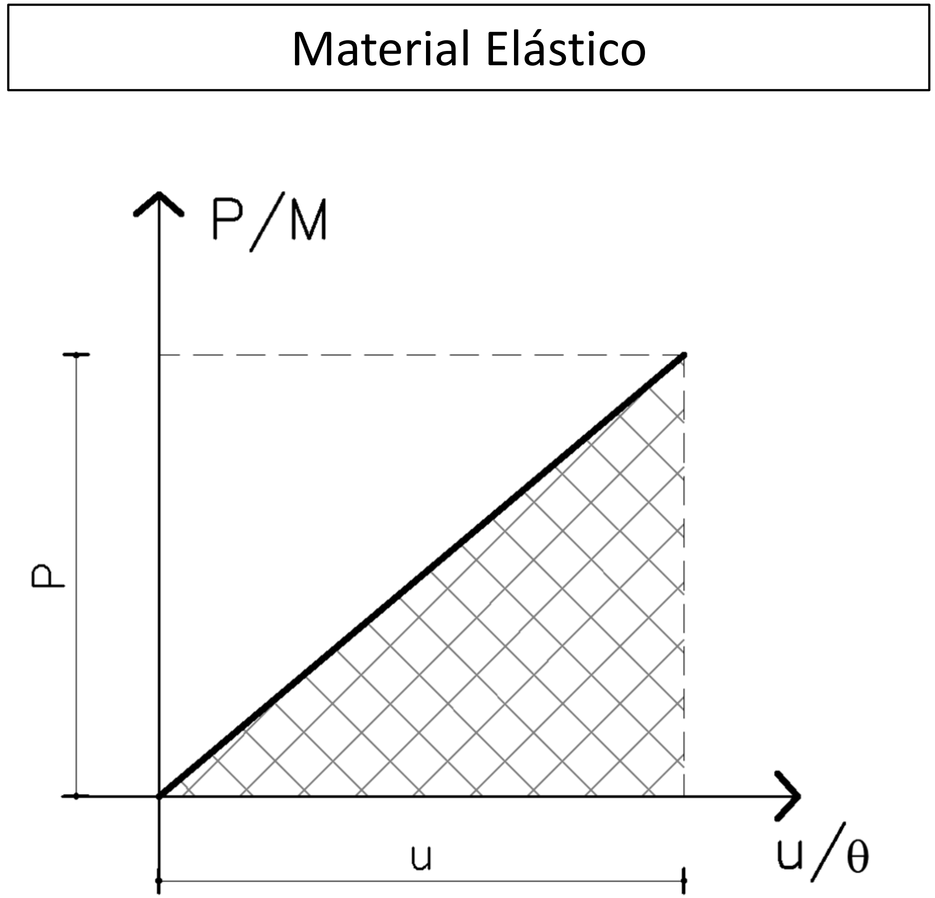
$$dW = P1\,du$$

$$W = \int_0^u P1\,du$$

TRABAJO Y ENERGÍA

Trabajo de una Fuerza/Par. Material Elástico

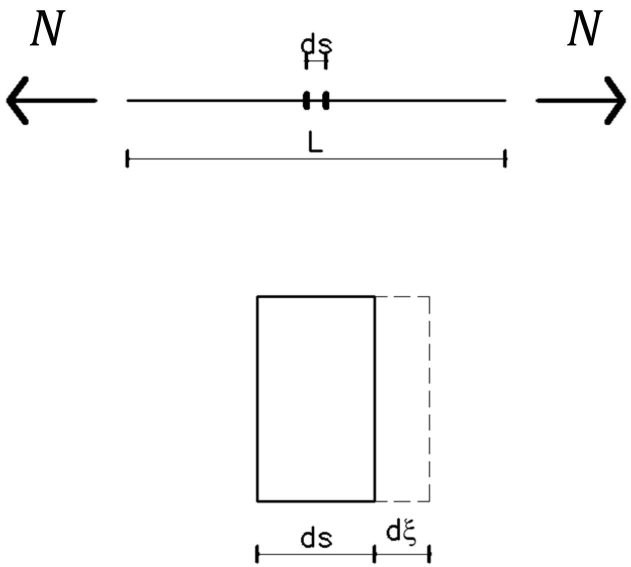




$$W = \frac{1}{2}\,P\,u$$

$$W = \frac{1}{2}\,M\,\theta$$

Energía de Deformación de N / Q / Mf



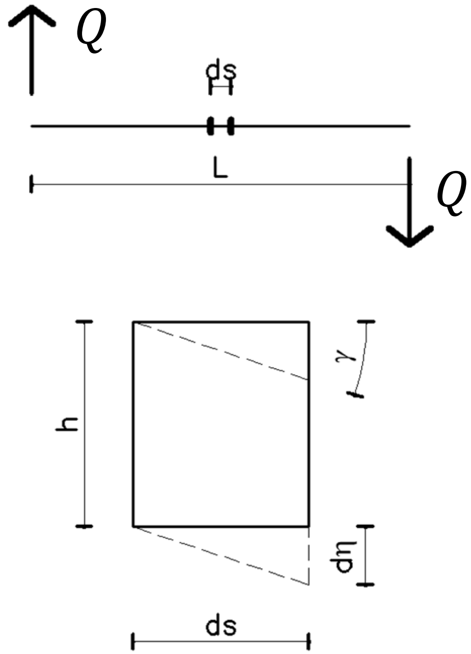
$$d\xi = \frac{N}{EA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} N \, d\xi$$

$$U = \int_o^L \frac{1}{2} N \frac{N}{EA} ds$$

N,E,A ctte

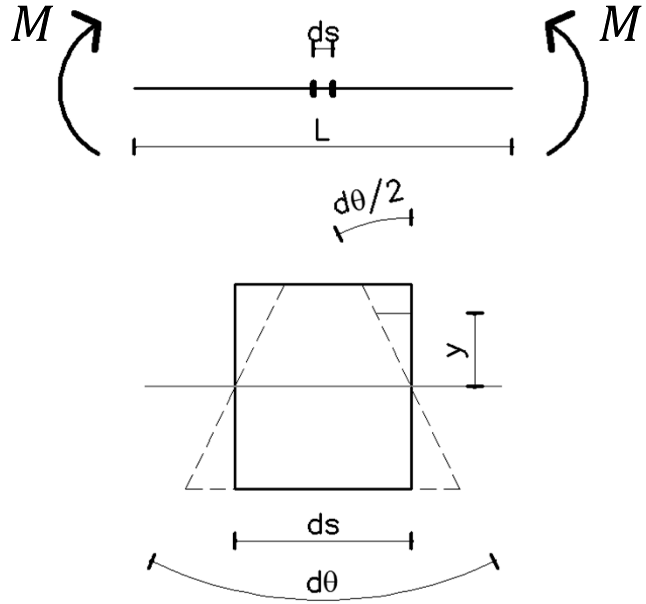
$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} L$$



$$d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$dU = \frac{1}{2} Q \, d\eta$$

$$U = \psi \int_o^L \frac{1}{2} Q \frac{Q}{GA} ds$$

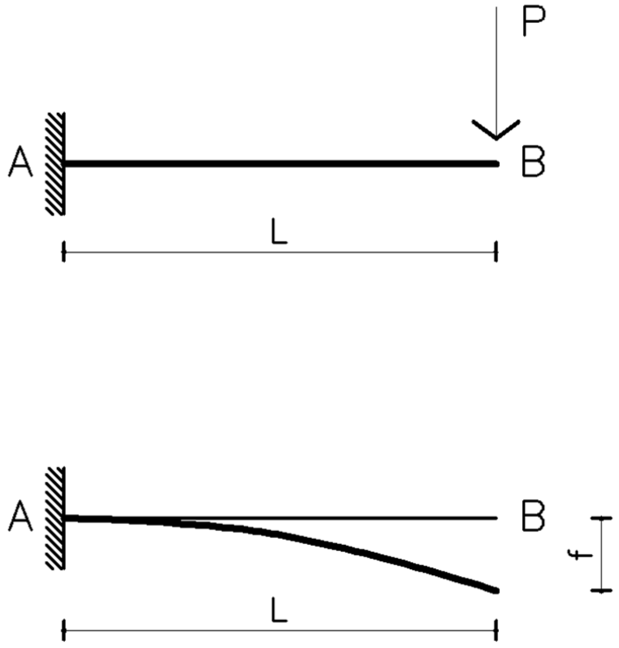


$$d\theta = \frac{M}{EI} ds$$

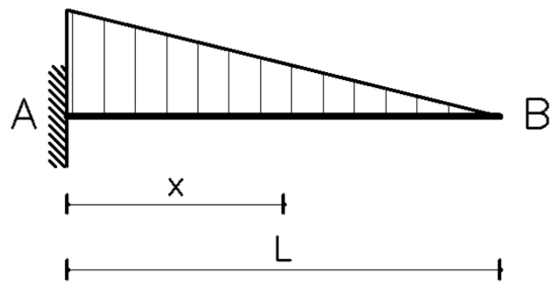
$$dU = \frac{1}{2} M \, d\theta$$

$$U = \int_o^L \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} ds$$

Aplicaciones. Cálculo de Corrimientos



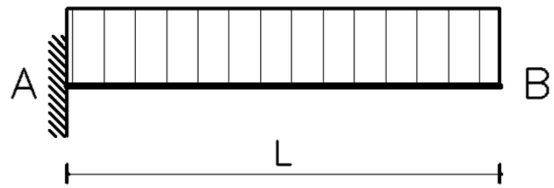
M



$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L-x)$$

Q



$$Q(x) = P$$

$$W = U$$

$$\frac{1}{2}\,P\,f = \int_o^L \frac{1}{2} M \frac{M}{EI} dx + \int_o^L \frac{1}{2} Q \frac{\psi Q}{GA} dx$$

$$\frac{1}{2}\,P\,f = \int_o^L \frac{P^2(L-x)^2}{2EI} dx + \psi \int_o^L \frac{P^2}{2GA} dx$$

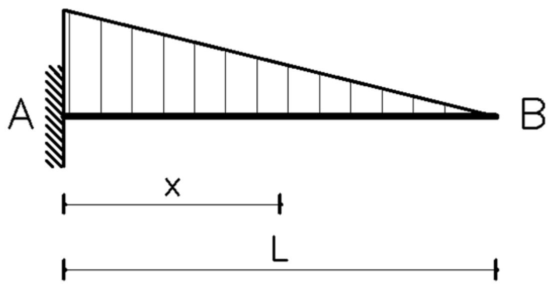
$$Pf = \frac{P^2}{EI}\left(L^3 - L^3 + \frac{L^3}{3}\right) + \psi \frac{P^2 L}{GA}$$

$$\boxed{f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}}$$

TRABAJO Y ENERGÍA

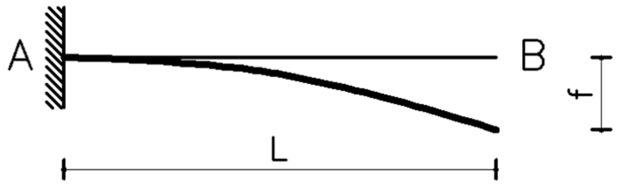
Aplicaciones. Cálculo de Corrimientos

M

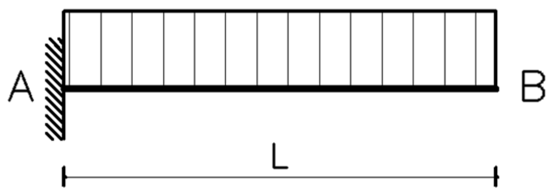


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



Q



$$Q(x) = P$$

$$P = 30.00\ kN$$
$$L = 10.00\ m$$

$$b = 0.20\ m$$
$$h = 1.00\ m$$

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

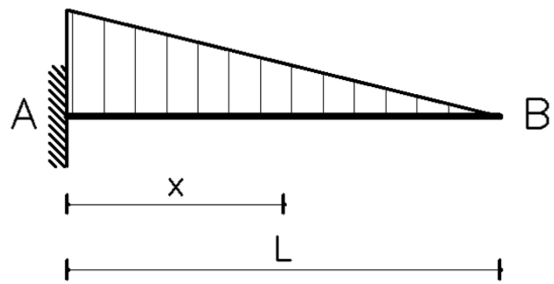
$$E = 21000\ MPa$$
$$\mu = 0.25\ m$$
$$G = 0.40\ E$$

$$A = 0.20\frac{L}{10} = \frac{L}{50}m^2$$

$$I = \frac{0.20}{12}\left(\frac{L}{10}\right)^3 = \frac{L^3}{60000}m^4$$

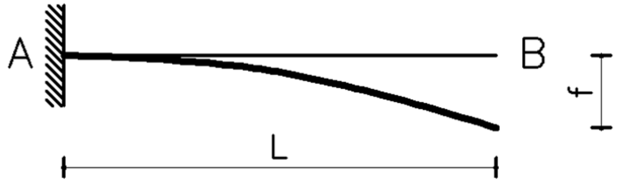
Aplicaciones. Cálculo de Corrimientos

M

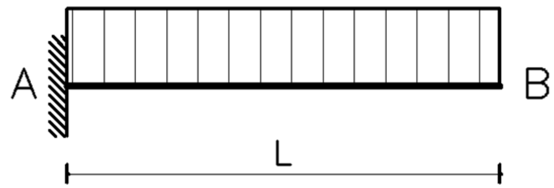


$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L - x)$$



Q



$$Q(x) = P$$

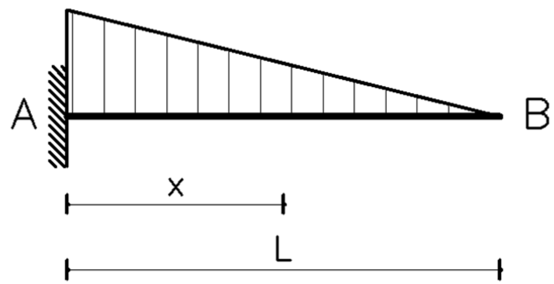
$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi\frac{PL}{GA}$$

$P = 30.00\ kN$	$P = 30.00\ kN$
$L = 10.00\ m$	$L = 1.00\ m$
$b = 0.20\ m$	$b = 0.20\ m$
$h = 1.00\ m$	$h = 1.00\ m$
$E = 21000\ MPa$	$E = 21000\ MPa$
$\mu = 0.25\ m$	$\mu = 0.25\ m$
$G = 0.40\ E$	$G = 0.40\ E$
$A = 0.20\frac{L}{10} = \frac{L}{50}m^2$	$A = 0.20\ L = \frac{L}{5}m^2$
$I = \frac{0.20}{12}\left(\frac{L}{10}\right)^3 = \frac{L^3}{60000}m^4$	$I = \frac{0.20}{12}\ L^3 = \frac{L^3}{60}m^4$

TRABAJO Y ENERGÍA

Aplicaciones. Calculo de Corrimientos

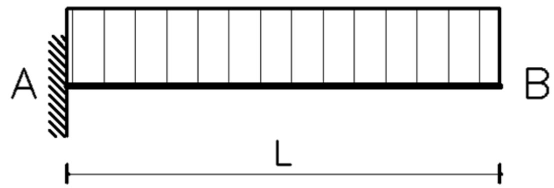
M



$$M(A) = -PL$$

$$M(x) = -P(L-x)$$

Q



$$Q(x) = P$$

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \psi \frac{PL}{GA}$$

$$P = 30.00\ kN$$
$$L = 10.00\ m$$

$$b = 0.20\ m$$
$$h = 1.00\ m$$

$$E = 21000\ MPa$$
$$\mu = 0.25\ m$$
$$G = 0.40\ E$$

$$A = 0.20\frac{L}{10} = \frac{L}{50}m^2$$
$$I = \frac{0.20}{12}\left(\frac{L}{10}\right)^3 = \frac{L^3}{60000}m^4$$

$$P = 30.00\ kN$$
$$L = 1.00\ m$$

$$b = 0.20\ m$$
$$h = 1.00\ m$$

$$E = 21000\ MPa$$
$$\mu = 0.25\ m$$
$$G = 0.40\ E$$

$$A = 0.20\ L = \frac{L}{5}m^2$$
$$I = \frac{0.20}{12}L^3 = \frac{L^3}{60}m^4$$

$$f = \frac{60000}{3}\frac{P}{E} + \psi\ 125\frac{P}{E}$$

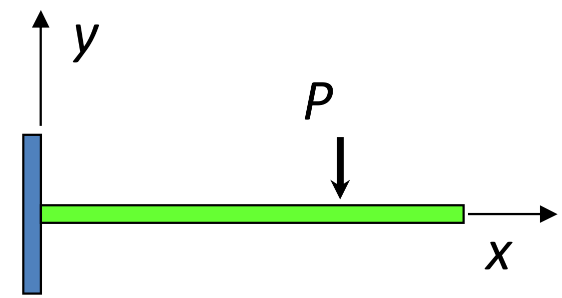
$$f = \frac{60}{3}\frac{P}{E} + \psi\ 12.5\frac{P}{E}$$

TRABAJO Y ENERGÍA VIRTUALES

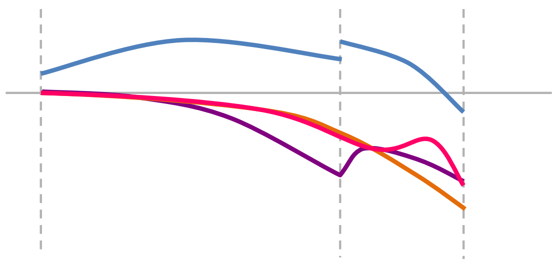
Desplazamiento y Deformación Virtual

- Desplazamiento Virtual: Es todo desplazamiento pequeño, posible, que satisface las condiciones de vinculo (contorno cinemáticas) y las condiciones de compatibilidad interna. Pueden no ocurrir.
- La configuración de la estructura sujeta a desplazamientos virtuales en todos sus puntos se denomina Admisible y puede ser no equilibrada.

Estructura



Elástica



- Deformación Virtual: Son las que originan los desplazamientos virtuales. En general se designan deformaciones virtuales tanto a los desplazamientos como a las deformaciones propiamente dichas.

TRABAJO VIRTUAL

Definiciones. Trabajo Virtual

- Trabajo Virtual. Es el que realizan las Acciones Reales aplicadas sobre la estructura en Desplazamientos Virtuales originados por acciones distintas de las reales. También se lo denomina Trabajo Virtual Externo.
- También puede ser el trabajo de Acciones Ficticias, en los Desplazamientos debidos a las Acciones Reales aplicadas sobre la estructura.

- Similarmente las Acciones Internas Reales desarrollan Energía en las Deformaciones Virtuales. También se lo denomina Trabajo Virtual Interno.

Sistema Equilibrado. SE

- Sistema Equilibrado. Toda estructura que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las cargas externas y las reacciones de vinculo.

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Clapeyron

El trabajo real de varias fuerzas, independientemente de su orden de aplicación, es igual a la semisuma del producto de cada fuerza por el desplazamiento que en su dirección provocan todas las fuerzas.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i \, \Delta_i$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \theta_i$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Trabajo de un sistema equilibrado en un movimiento rígido

El trabajo de un sistema de acciones en equilibrio, que actúan sobre un sólido rígido, es nulo en todo desplazamiento virtual del mismo.

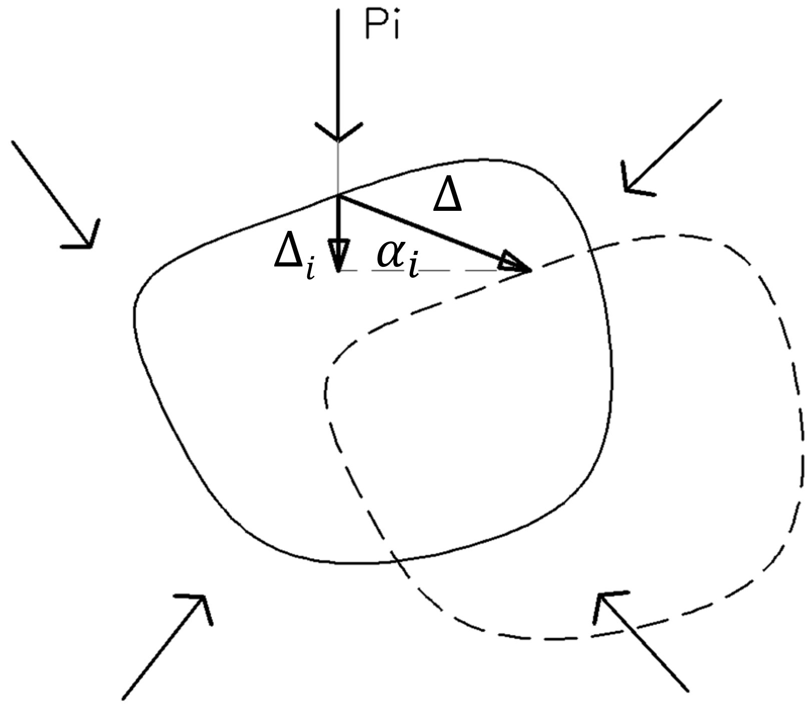
Traslación

$$W_i = P_i \ \Delta_i = P_i \, \Delta \cos \alpha_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} P_i \, \Delta \cos \alpha_i$$

$$W = \Delta \sum_{i=1}^{n} P_i \cos \alpha_i$$

$$W = 0$$



Trabajo de un sistema equilibrado en un movimiento rígido

El trabajo de un sistema de acciones en equilibrio, que actúan sobre un sólido rígido, es nulo en todo desplazamiento virtual del mismo.

Rotación

$$W_i = P_i\ \Delta_i = P_i\,\Delta\cos\alpha_i$$

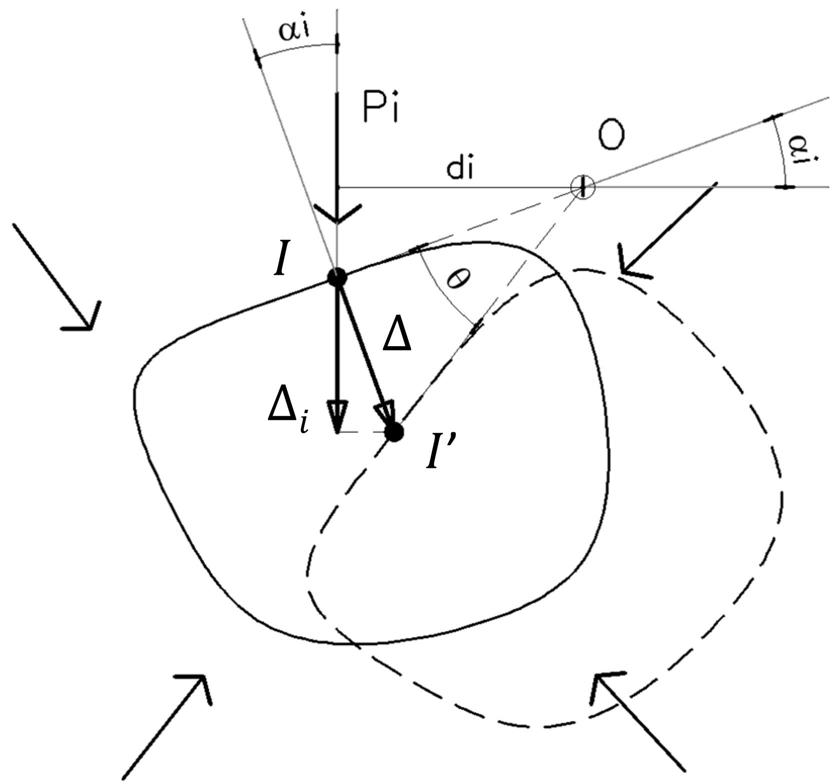
$$\Delta = \theta\ OI$$

$$W_i = P_i\ \theta\ OI\cos\alpha_i$$

$$W_i = P_i\ \theta\ d_i$$

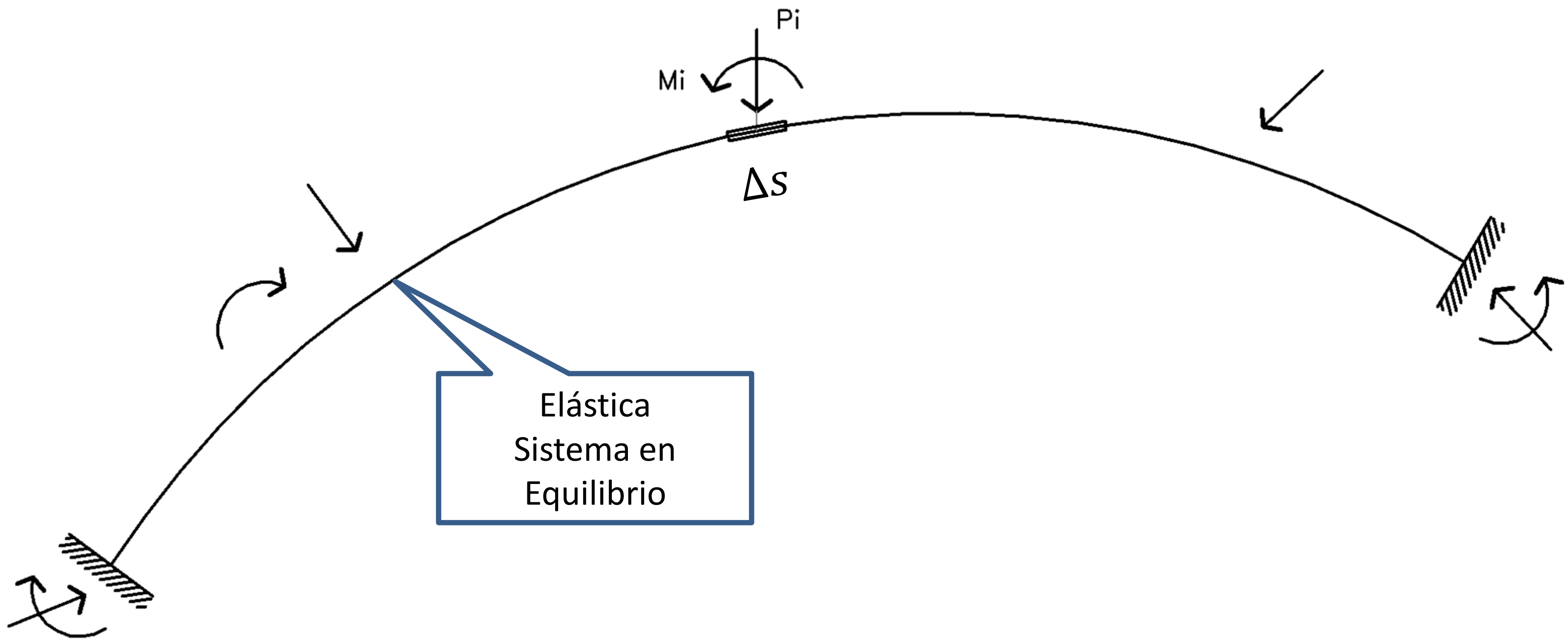
$$W = \theta\sum_{i=1}^{n} P_i\ d_i$$

$$W = 0$$



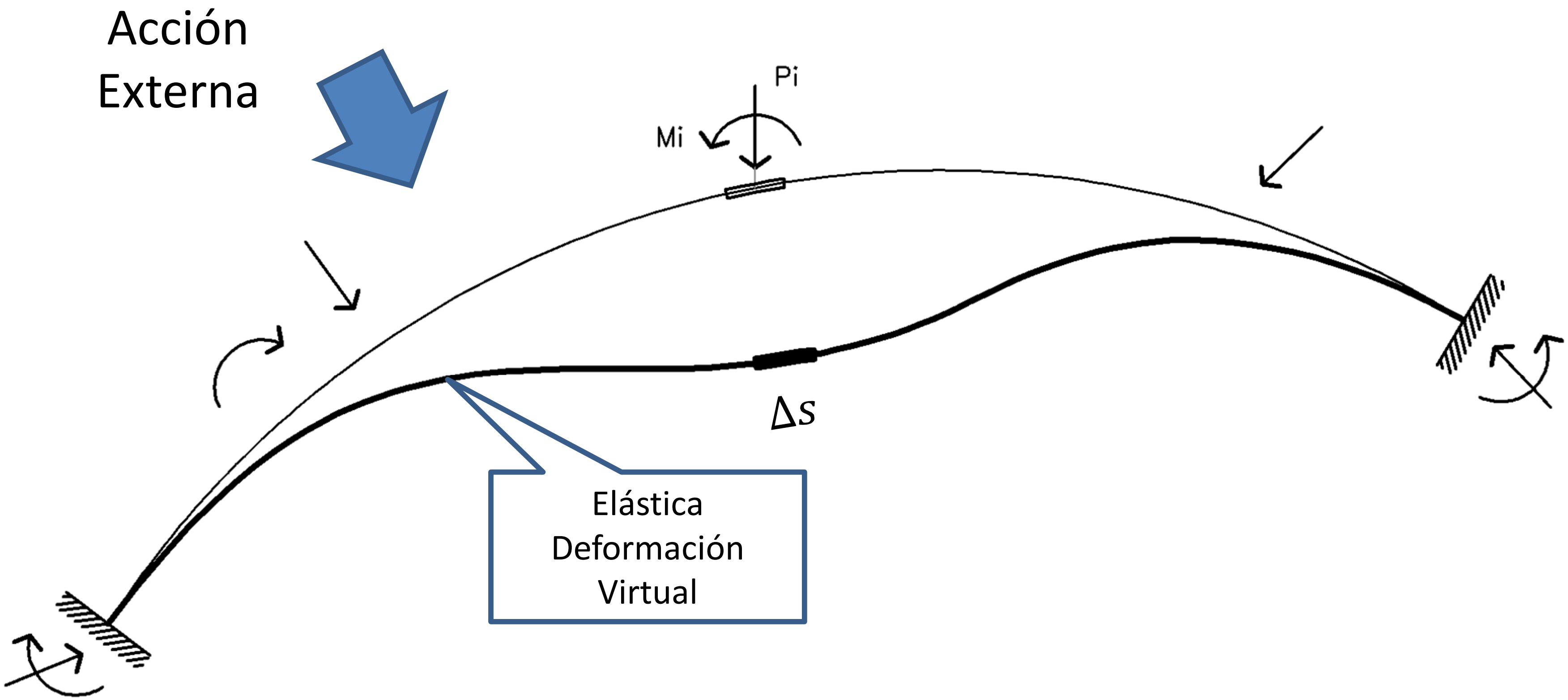
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



TEOREMAS ENERGETICOS

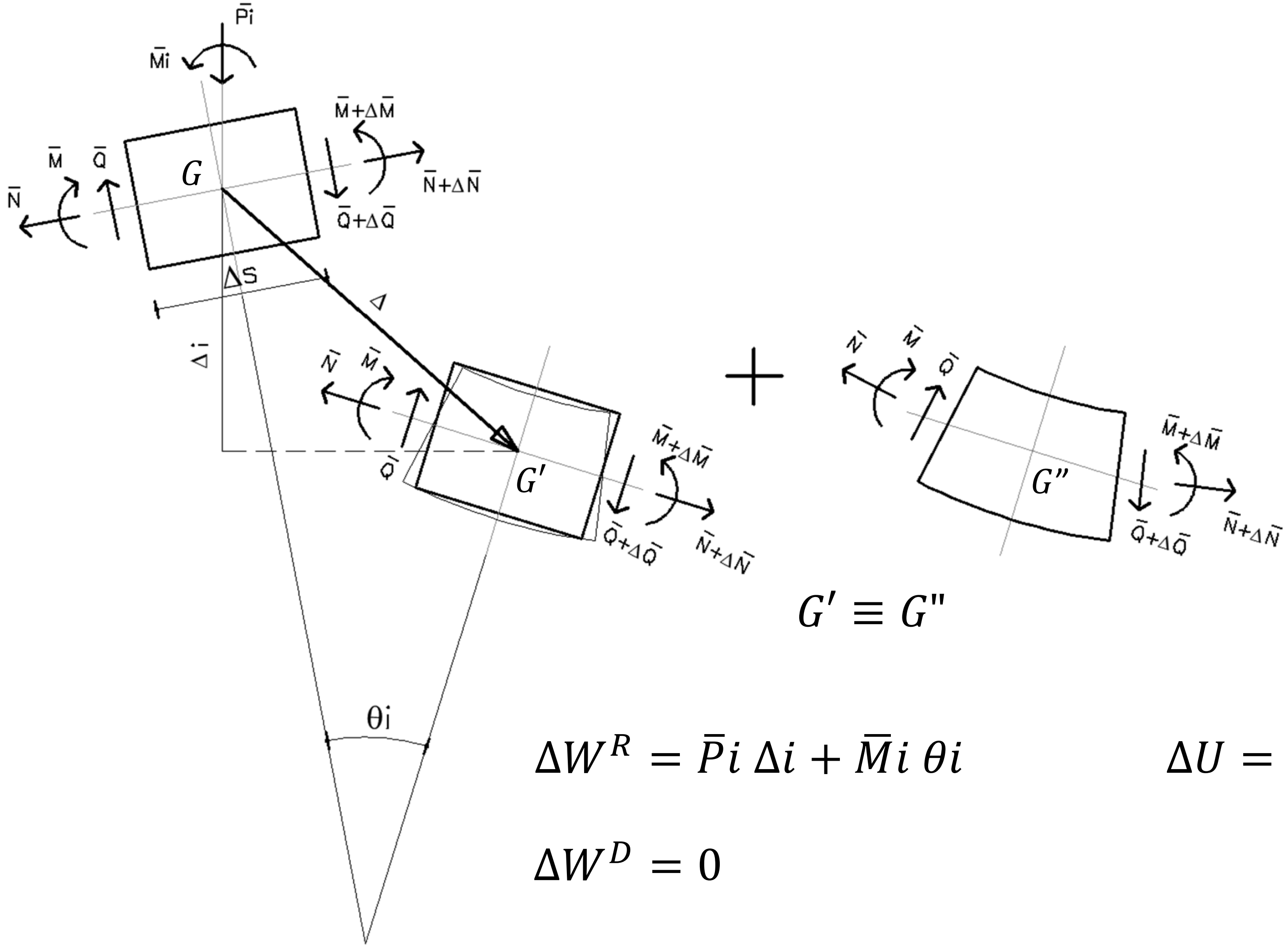
Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$Elástica\ Deformación\ Virtual \Rightarrow Mov.Rígido + Deformación$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$G' \equiv G''$$

$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$\Delta U^R = -\Delta W^R$$

$$\Delta W^R = \bar{P}i\ \Delta i + \bar{M}i\ \theta i$$

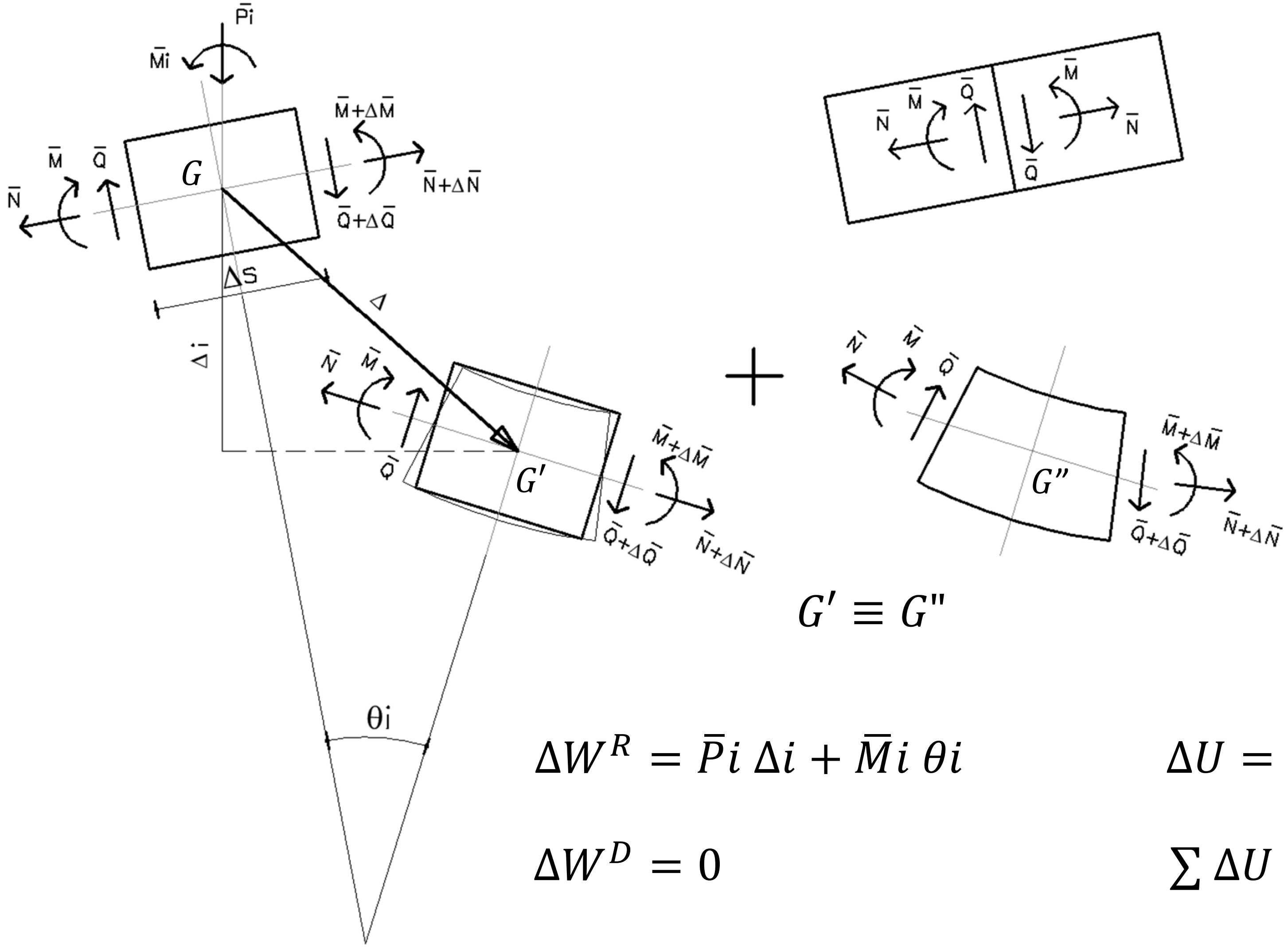
$$\Delta U = -\Delta W^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^D = 0$$

$$\Delta W = \Delta W^R$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV



$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

$$G' \equiv G''$$

$$\Delta W^R = \bar{P}i\,\Delta i + \bar{M}i\,\theta i$$

$$\Delta W^D = 0$$

$$\Delta W = \Delta W^R$$

$$\Delta U = -\Delta W^R + \Delta U^D$$

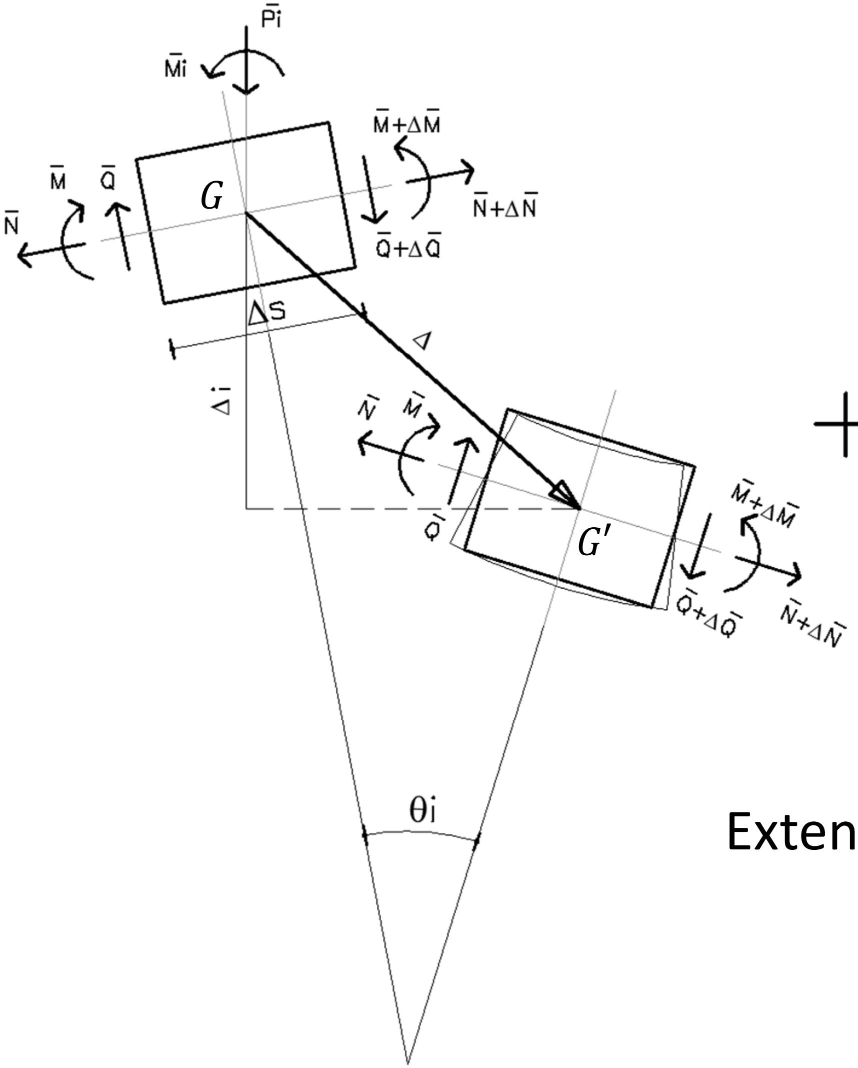
$$\sum \Delta U = -\sum \Delta W^R + \sum \Delta U^D$$

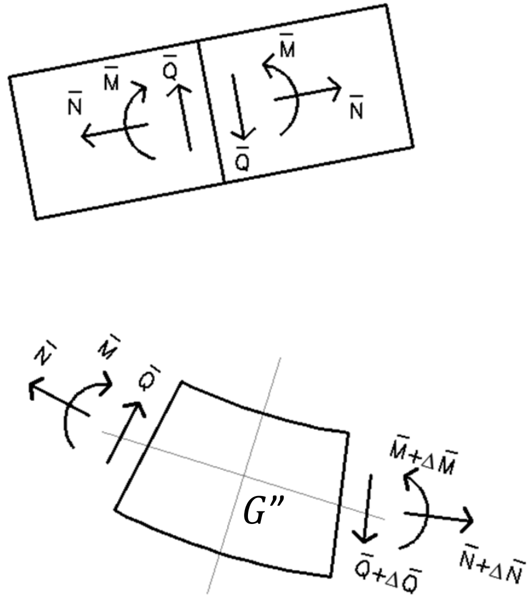
$$\sum \Delta U = 0$$

$$\sum \Delta W^R = \sum \Delta U^D$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV





$$G' \equiv G"$$

$$\Delta W = \Delta W^R + \Delta W^D$$

$$\Delta U = \Delta U^R + \Delta U^D$$

$$\Delta W^R + \Delta U^R = 0$$

Extendido a toda la Estructura

$$\sum \Delta W^R = \sum \Delta U^D$$

$$\boxed{W^R = U^D}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de los Trabajos Virtuales. TTV

En todo sistema equilibrado sujeto a una deformación virtual, el trabajo de las acciones externas es igual a la energía (trabajo) de las acciones internas.

$$\boxed{\begin{gathered} W^R = U^D \\ Te = Ti \end{gathered}}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación TTV

$$\boxed{Te = Ti}$$

$$W^R = Te = \sum \bar{P}i\ \Delta i + \sum \bar{M}i\ \theta i$$

$$dU^D = \bar{N}d\xi + \bar{M}d\theta + \bar{Q}d\eta$$

$$U^D = Ti = \int \bar{N}d\xi + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{Q}d\eta$$

Expresión general para cualquier material

$$\boxed{\sum \bar{P}i\ \Delta i + \sum \bar{M}i\ \theta i = \int \bar{N}d\xi + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{Q}d\eta}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación TTV

$$\sum \bar{P}i\ \Delta i + \sum \bar{M}i\ \theta i = \int \bar{N} d\xi + \int \bar{M} d\theta + \int \bar{Q} d\eta$$

Para material elástico

$$d\xi = \frac{N}{EA} ds \qquad d\theta = \frac{M}{EI} ds \qquad d\eta = \psi \frac{Q}{GA} ds$$

$$d\xi = \alpha\ \Delta T ds$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha\ (\Delta T_i + \Delta T_s) ds}{2} \qquad d\theta = \frac{\alpha\ (\Delta T_i - \Delta T_s) ds}{h}$$

$$d\xi_c = \frac{\alpha\ (\Delta T_i\ h1 + \Delta T_s\ h2) ds}{h}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación TTV

Expresión General de aplicación de TTV. Material elástico

$$\sum \bar{P}i\,\Delta i + \sum \bar{M}i\,\theta i = \int \bar{N}\frac{N}{EA}ds + \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds + \psi\int \bar{Q}\frac{Q}{GA}ds +$$

$$+\int \bar{N}\frac{\alpha\,(\Delta T_i\,h1 + \Delta T_s\,h2)}{h}ds + \int \bar{M}\frac{\alpha\,(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}ds + \int \overline{Mt}\frac{Mt}{GJt}ds$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Método de la Carga Unitaria

Se consideran dos sistemas:

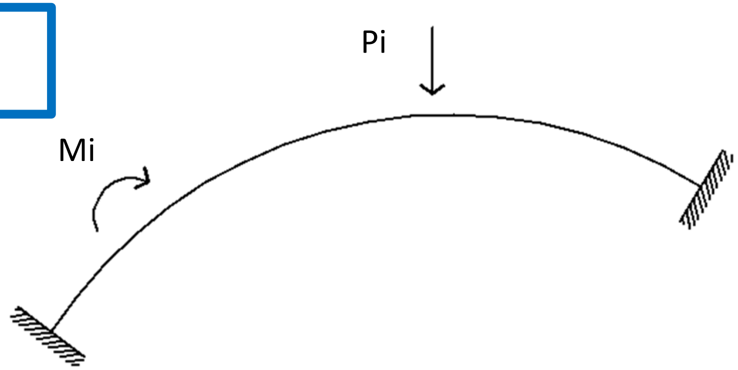
- La estructura real, con su geometría, materiales, cargas y vínculos. **SD**
- La misma estructura, sobre la que actúa una sola carga unitaria en la dirección del desplazamiento que se desea calcular. Es una carga ficticia o virtual. **SE**

El término desplazamiento es general, pude ser:

- Corrimiento de un punto.
- La rotación de una sección (eje miembro estructural).
- El corrimiento relativo entre dos puntos.
- El giro relativo entre dos secciones.

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Método de la Carga Unitaria

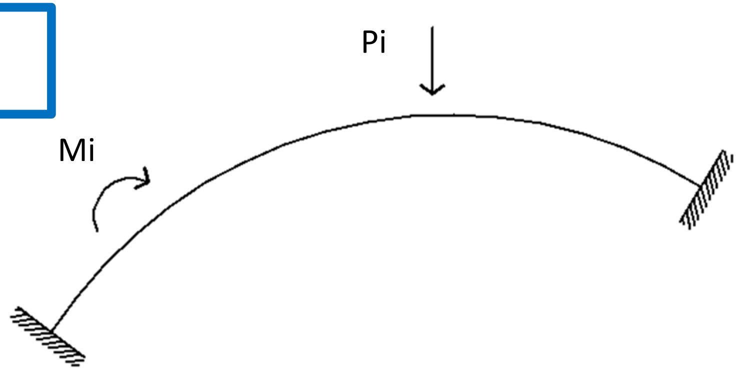
SD



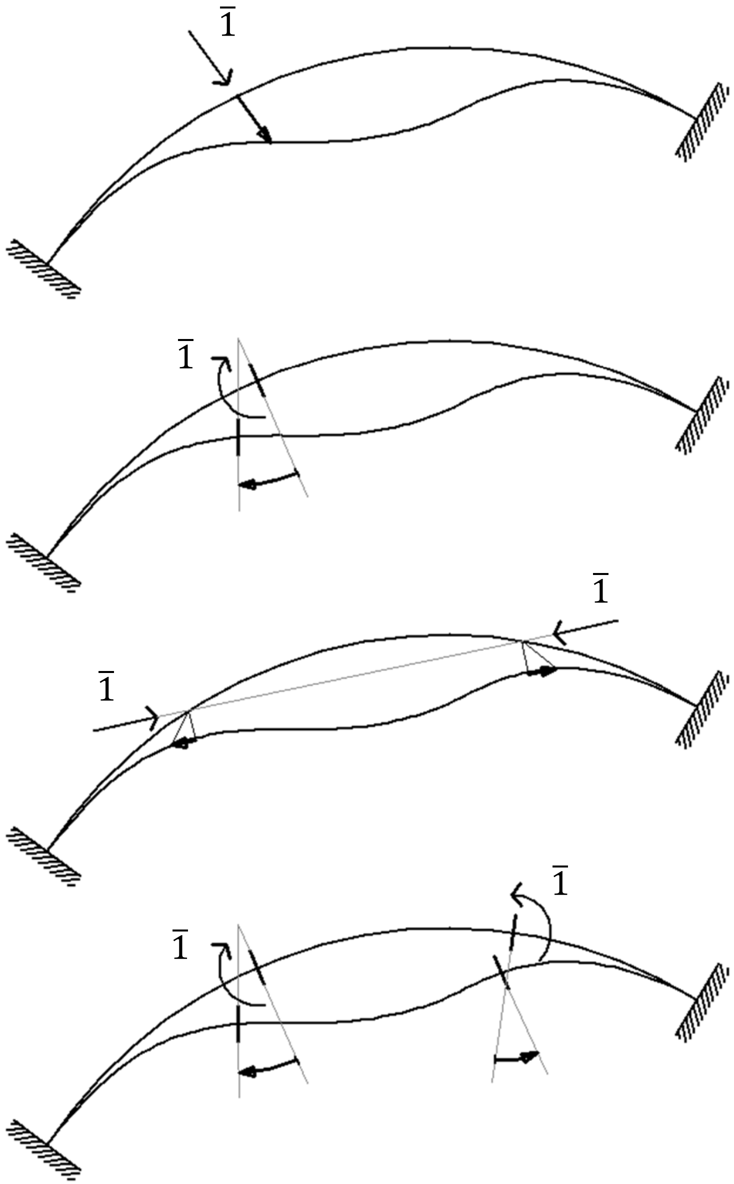
TEOREMAS ENERGETICOS

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Método de la Carga Unitaria

SD



SE



Corrimiento

Giro

Corrimiento relativo

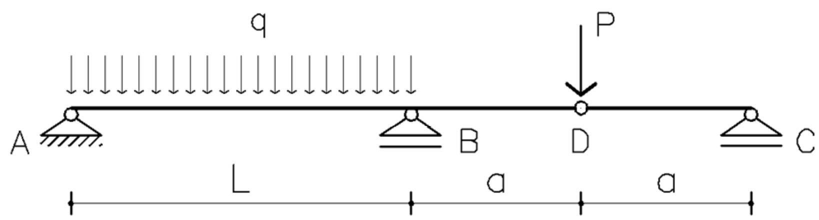
Giro relativo

La carga $\overline{1}$ se aplica con sentido arbitrario.

Luego de realizar los cálculos, si el signo resultante para el corrimiento es positivo, el sentido supuesto para $\overline{1}$ coincide con el sentido del corrimiento.

Si el signo resultante para el corrimiento es negativo, el sentido del corrimiento es opuesto al de $\overline{1}$.

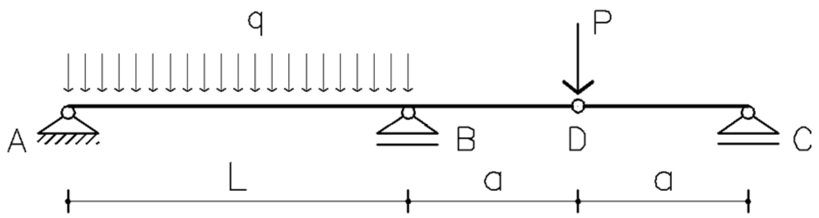
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



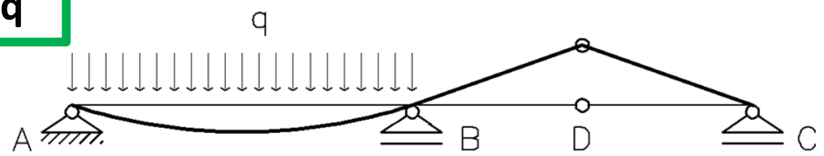
1. Calcular el corrimiento vertical del punto D.
2. Calcular el giro relativo de las secciones en D.

TEOREMAS ENERGETICOS

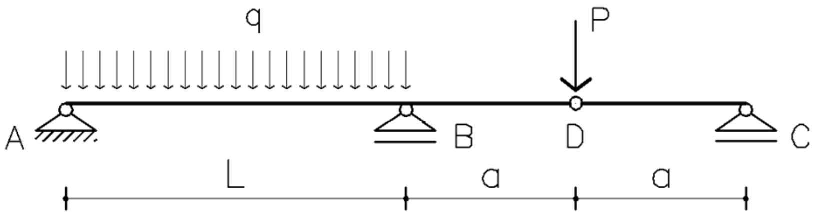
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



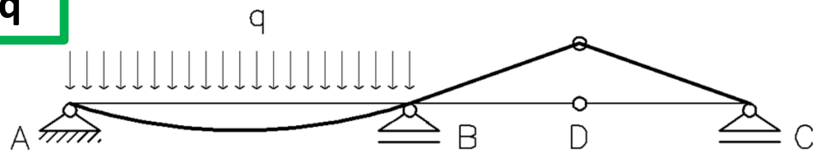
EL q



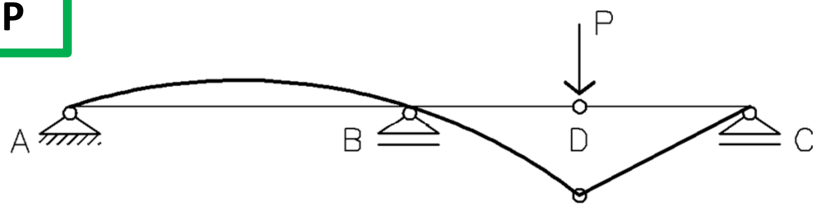
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



EL q

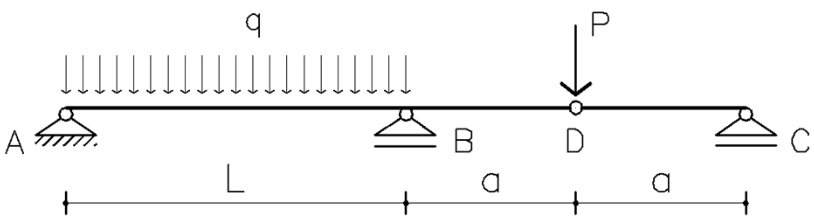


EL P

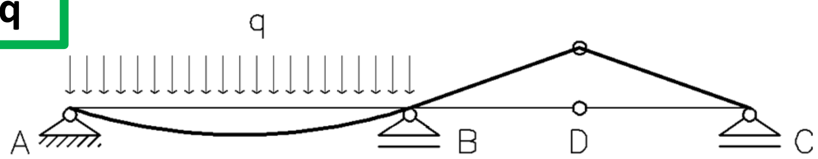


TEOREMAS ENERGETICOS

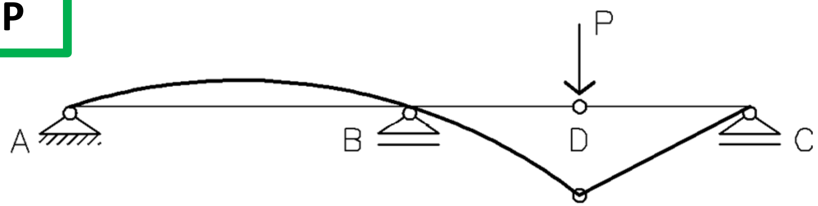
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones



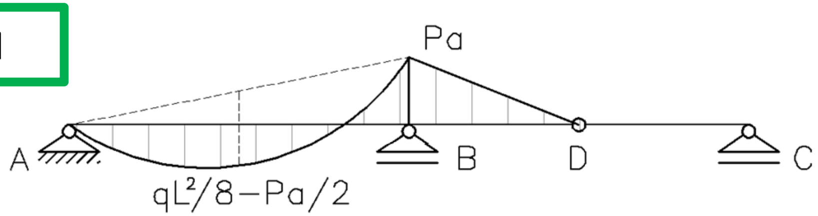
EL q



EL P

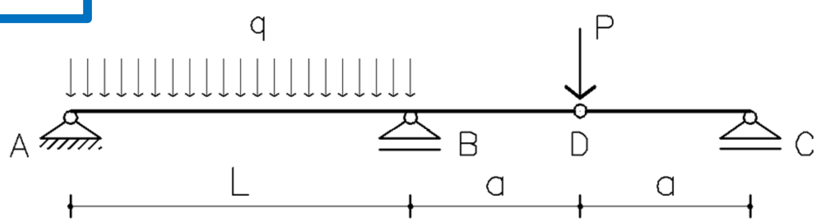


M

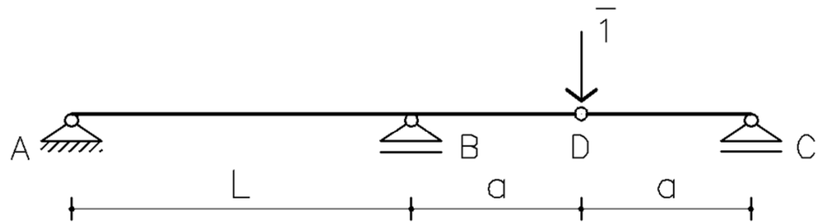


Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

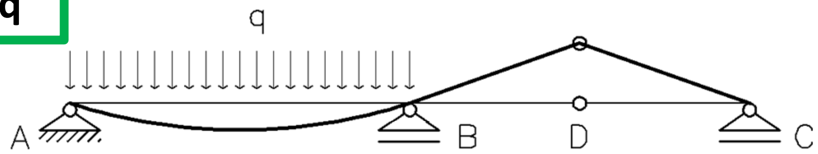
SD



SE

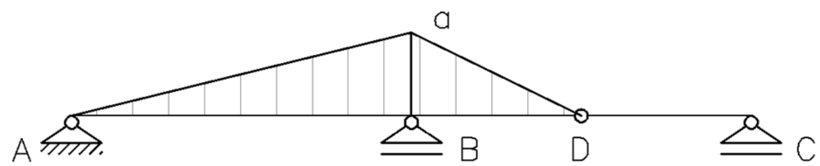


EL q

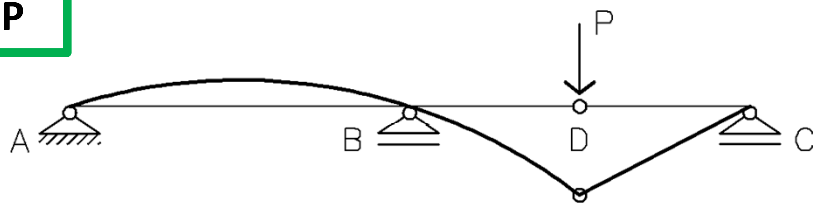


Corrimiento

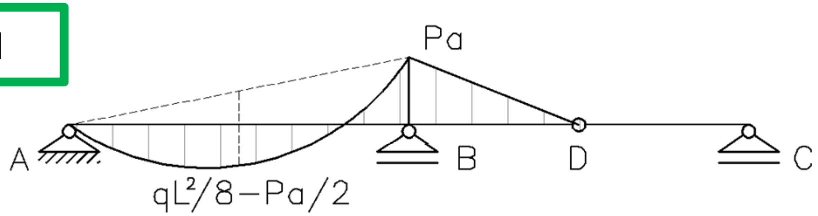
$\overline{M}$



EL P



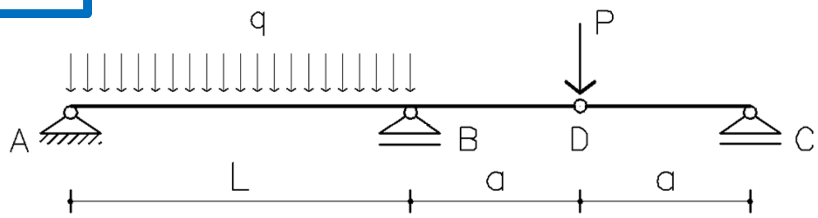
M



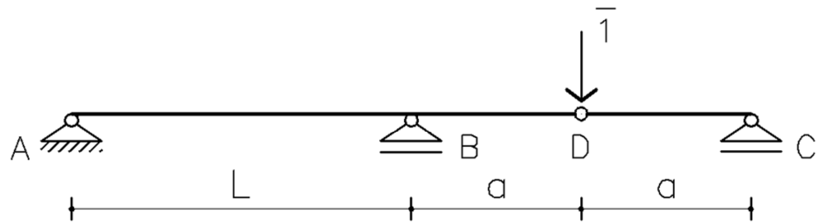
TEOREMAS ENERGETICOS

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

SD

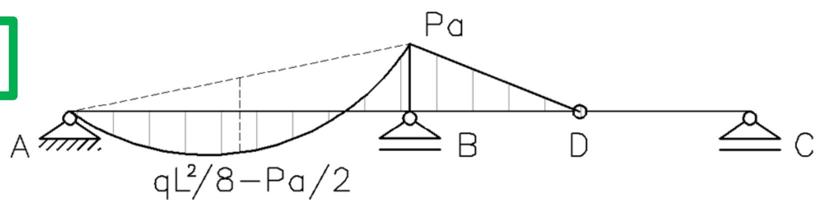


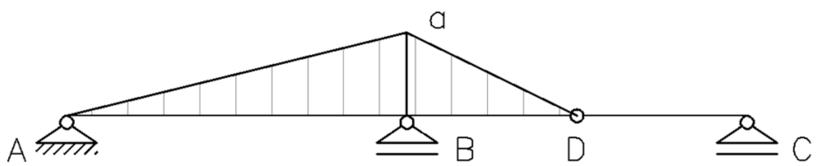
SE



Corrimiento

M





$\overline{M}$

$$\sum \bar{P}i\,\Delta i + \sum \bar{M}i\,\theta i = \int \bar{N}\frac{N}{EA}ds + \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds + \psi\int \bar{Q}\frac{Q}{GA}ds + \int \bar{N}\frac{\alpha\,(\Delta T_i\,h1 + \Delta T_s\,h2)}{h}ds + \int \bar{M}\frac{\alpha\,(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}ds + \int \overline{Mt}\frac{Mt}{GJt}ds$$

$$\sum \bar{P}i\,\Delta i = \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds$$

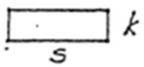
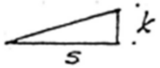
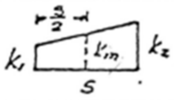
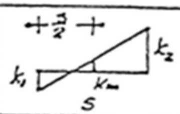
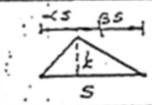
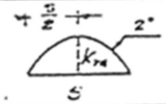
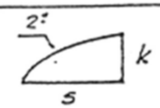
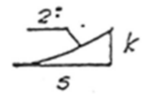
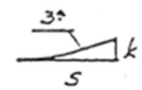
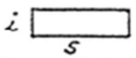
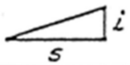
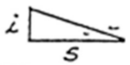
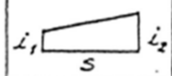
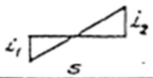
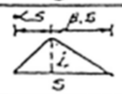
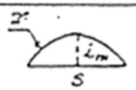
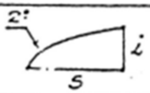
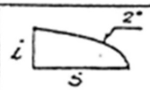
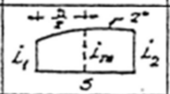
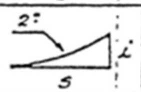
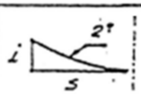
$$\Delta D = \frac{1}{EI}\int \overline{M}\,M\,ds$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

	$\bar{M}$	$\bar{M}_B$	$\bar{M}_A$ $\bar{M}_B$	par. 2º grau $\bar{M}_m$	par. 2º grau $\bar{M}_B$ tang. horiz.	par. 2º grau $\bar{M}_B$ tang. horiz.	$\bar{M}$ αl βl
M	$l' M\bar{M}$	$\frac{1}{2} l' M\bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M(\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{2}{3} l' M\bar{M}_m$	$\frac{2}{3} l' M\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M\bar{M}$
M_B	$\frac{1}{2} l' M_B\bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_B(\bar{M}_A+2\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar{M}_m$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l'(1+\alpha) M_B\bar{M}$
M_A	$\frac{1}{2} l' M_A\bar{M}$	$\frac{1}{6} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_A(2\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_A\bar{M}_m$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l'(1+\beta) M_A\bar{M}$
M_A M_B	$\frac{1}{2} l'(M_A+M_B)\bar{M}$	$\frac{1}{6} l'(M_A+2M_B)\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l'[\bar{M}_A(2M_A+M_B)+\bar{M}_B(2M_B+M_A)]$	$\frac{1}{3} l'(M_A+M_B)\bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l'(3M_A+5M_B)\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l'(M_A+3M_B)\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l'\bar{M}[M_A(1+\beta)+M_B(1+\alpha)]$
par. 2º grau M_m	$\frac{2}{3} l' M_m\bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_m\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M_m(\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{8}{15} l' M_m\bar{M}_m$	$\frac{7}{15} l' M_m\bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_m\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l'(1+\alpha\beta)M_m\bar{M}$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_B\bar{M}$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(3\bar{M}_A+5\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_B\bar{M}_m$	$\frac{8}{15} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l'(5-\beta-\beta^2)\times M_B\bar{M}$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_A\bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(5\bar{M}_A+3\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_A\bar{M}_m$	$\frac{11}{30} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l'(5-\alpha-\alpha^2)\times M_A\bar{M}$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_B\bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(\bar{M}_A+3\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar{M}_m$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\alpha+\alpha^2)\times M_B\bar{M}$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_A\bar{M}$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(3\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_A\bar{M}_m$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{30} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\beta+\beta^2)\times M_A\bar{M}$
M αl βl	$\frac{1}{2} l' M\bar{M}$	$\frac{1}{6} l'(1+\alpha)\bar{M}_B M$	$\frac{1}{6} l' M[(1+\beta)\bar{M}_A+(1+\alpha)\bar{M}_B]$	$\frac{1}{3} l'(1+\alpha\beta)M\bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l'(5-\beta-\beta^2)\times M\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l'(1+\alpha+\alpha^2)\times M\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar{M}$

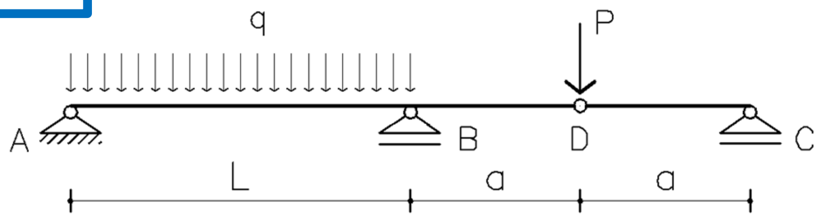
Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

											
1		iks	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{2}i(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}i(k_2-k_1)s$	$\frac{1}{2}iks$	$\frac{2}{3}ik_ms$	$\frac{2}{3}iks$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	1
2		$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{6}i(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}i(2k_2-k_1)s$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)iks$	$\frac{1}{3}ik_ms$	$\frac{5}{12}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{5}iks$	2
3		$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}iks$	$\frac{1}{6}i(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}i(k_2-2k_1)s$	$\frac{1}{6}(1+\beta)iks$	$\frac{1}{3}ik_ms$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}iks$	$\frac{1}{20}iks$	3
4		$\frac{1}{2}(i_1+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(i_1+2i_2)ks$	$\frac{1}{6}(2i_1k_1+i_1k_2+$ $+i_2k_1+2i_2k_2)s$	$\frac{1}{6}[(2i_2+i_1)k_2-$ $-(i_2+2i_1)k_1]s$	$\frac{1}{6}[(1+\beta)i_1+$ $+(1+\alpha)i_2]ks$	$\frac{1}{3}(i_1+i_2)k_ms$	$\frac{1}{12}(3i_1+5i_2)ks$	$\frac{1}{12}(i_1+3i_2)ks$	$\frac{1}{20}(i_1+4i_2)ks$	4
5		$\frac{1}{2}(i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{6}(2i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{6}[i_2(2k_2+k_1)-$ $-(k_2+2k_1)i_1]s$	$\frac{1}{6}[(2i_1-i_2)k_1+$ $+(2i_2-i_1)k_2]s$	$\frac{1}{6}[i_2(1+\alpha)-$ $i_1(1+\beta)]ks$	$\frac{1}{3}(i_2-i_1)k_ms$	$\frac{1}{12}(5i_2-3i_1)ks$	$\frac{1}{12}(3i_2-i_1)ks$	$\frac{1}{20}(4i_2-i_1)ks$	5
6		$\frac{1}{2}iks$	$\frac{1}{6}(1+\alpha)iks$	$\frac{1}{6}i[(1+\beta)k_1+$ $+(1+\alpha)k_2]s$	$\frac{1}{6}[k_2(1+\alpha)-$ $-k_1(1+\beta)]is$	$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta)ik_ms$	$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2)iks$	$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2)iks$	$\frac{1}{20}(1+\alpha)(1+\beta)^2iks$	6
7		$\frac{2}{3}i_mks$	$\frac{1}{3}i_mks$	$\frac{1}{3}i_m(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{3}i_m(k_2-k_1)s$	$\frac{1}{3}(1+\alpha\beta)i_mks$	$\frac{8}{15}i_mk_ms$	$\frac{7}{15}i_mks$	$\frac{1}{5}i_mks$	$\frac{2}{15}iks$	7
8		$\frac{2}{3}iks$	$\frac{5}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+5k_2)s$	$\frac{1}{12}i(5k_2-3k_1)s$	$\frac{1}{12}(5-\beta-\beta^2)iks$	$\frac{7}{15}ik_ms$	$\frac{8}{15}iks$	$\frac{3}{10}iks$	$\frac{7}{30}iks$	8
9		$\frac{2}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(5k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-5k_1)s$	$\frac{1}{12}(5-\alpha-\alpha^2)iks$	$\frac{7}{15}ik_ms$	$\frac{11}{30}iks$	$\frac{2}{15}iks$	$\frac{1}{12}iks$	9
10		$\frac{1}{6}(i_1+4i_m+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(2i_m+i_2)ks$	$\frac{1}{6}(i_1k_1+4i_mk_m+$ $+i_2k_2)s$	$\frac{1}{6}(i_2k_2+4i_mk_m-$ $-i_1k_1)s$	$\frac{1}{6}[i_1\beta^2+2i_m(1+\alpha\beta)$ $+i_2\alpha^2]ks$	$\frac{1}{15}(i_1+8i_m+$ $+i_2)k_ms$	$\frac{1}{60}(i_1+28i_m+$ $+11i_2)ks$	$\frac{1}{60}(12i_m+9i_2-$ $-i_1)ks$	$\frac{1}{60}[8(i_m+i_2)$ $-i_1]ks$	10
11		$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{4}iks$	$\frac{1}{12}i(k_1+3k_2)s$	$\frac{1}{12}i(3k_2-k_1)s$	$\frac{1}{12}(1+\alpha+\alpha^2)iks$	$\frac{1}{5}ik_ms$	$\frac{3}{10}iks$	$\frac{1}{5}iks$	$\frac{1}{6}iks$	11
12		$\frac{1}{3}iks$	$\frac{1}{12}iks$	$\frac{1}{12}i(3k_1+k_2)s$	$\frac{1}{12}i(k_2-3k_1)s$	$\frac{1}{12}(1+\beta+\beta^2)iks$	$\frac{1}{5}ik_ms$	$\frac{2}{15}iks$	$\frac{1}{30}iks$	$\frac{1}{60}iks$	12

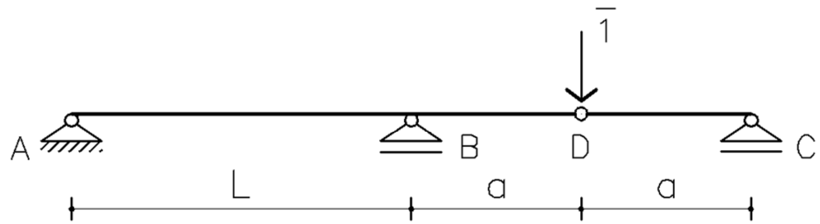
TEOREMAS ENERGETICOS

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

SD

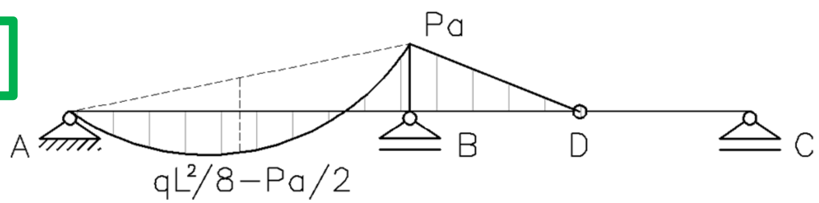


SE

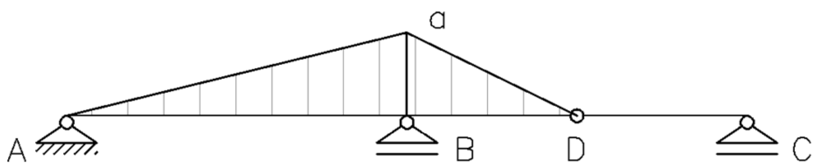


Corrimiento

M



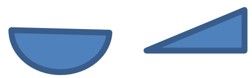
$\overline{M}$



$$\sum \bar{P}i\,\Delta i + \sum \bar{M}i\,\theta i = \int \bar{N}\frac{N}{EA}ds + \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds + \psi\int \bar{Q}\frac{Q}{GA}ds + \int \bar{N}\frac{\alpha\,(\Delta T_i\,h1 + \Delta T_s\,h2)}{h}ds + \int \bar{M}\frac{\alpha\,(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}ds + \int \overline{Mt}\frac{Mt}{GJt}ds$$

$$\sum \bar{P}i\,\Delta i = \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds$$

$$\Delta D = \frac{1}{EI}\int \overline{M}\,M\,ds =$$

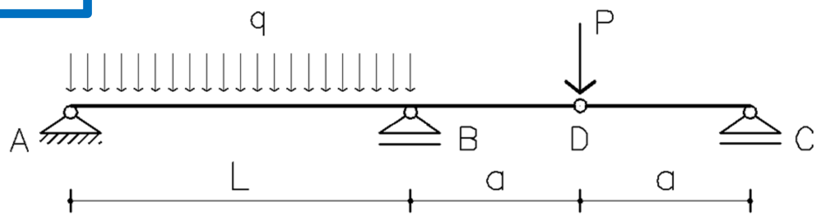
−  **+**  **+** 

$$\frac{1}{3}\,\frac{qL^2}{8}\,a\,L \qquad \frac{1}{3}Pa\,a\,L \qquad \frac{1}{3}Pa\,a\,a$$

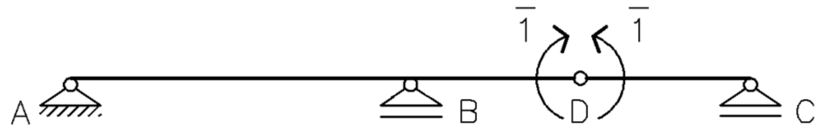
TEOREMAS ENERGETICOS

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

SD

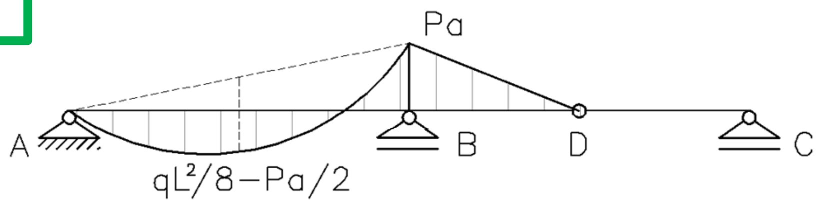


SE

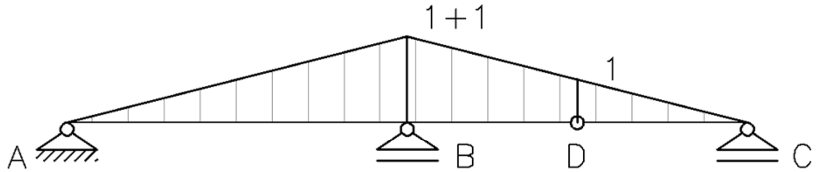


Giro relativo

M



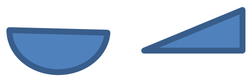
$\overline{\text{M}}$



$$\sum \bar{M}i\;\theta i = \int \bar{M}\,\frac{M}{EI}\,ds$$

$$\theta D = \frac{1}{EI}\int \overline{M}\;M\;ds =$$

−



$\frac{1}{3}\;\frac{qL^2}{8}\;2\;L$

+

$\frac{1}{3}Pa\;2\;L$

+

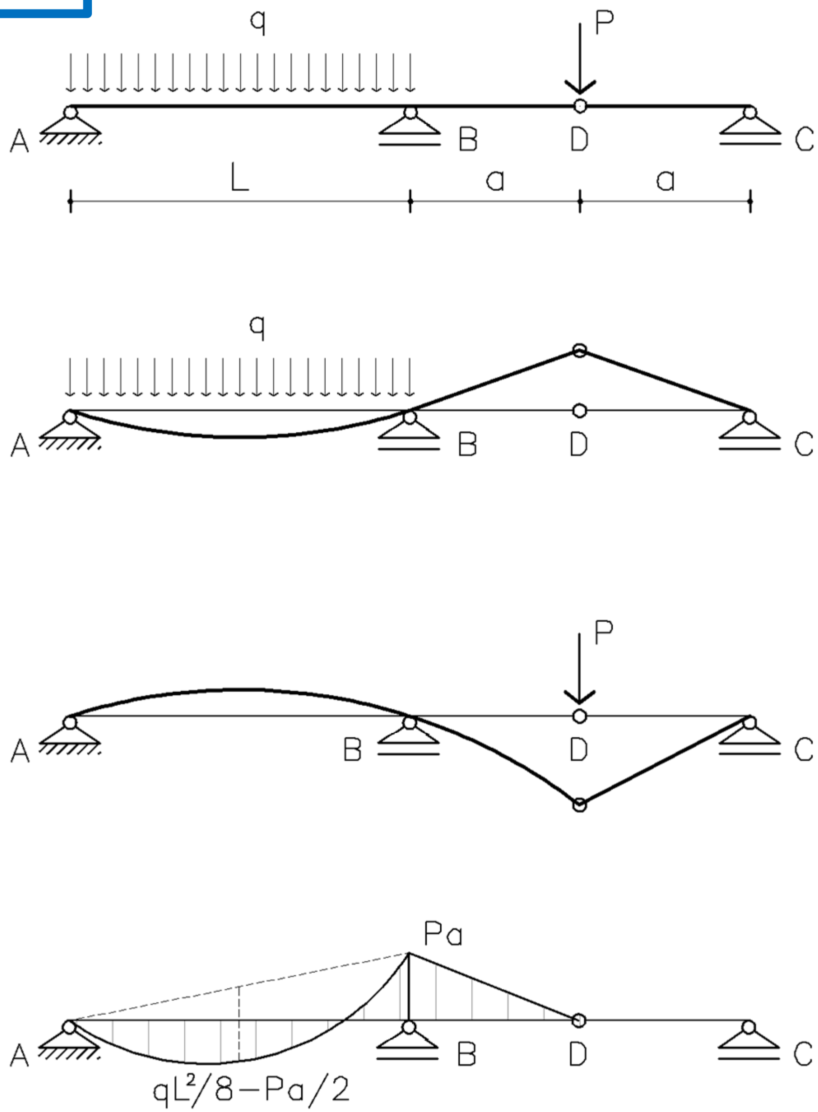
$\frac{1}{2}Pa\;1\;a$

+

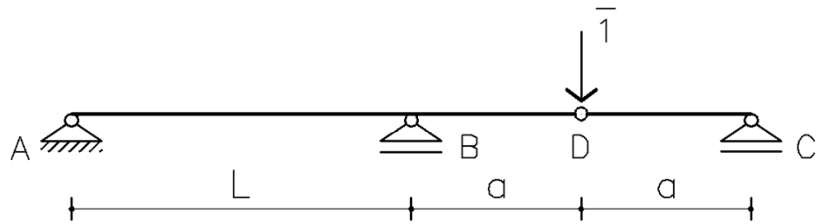
$\frac{1}{3}Pa\;1\;a$

Cálculo de Desplazamientos mediante TTV. Aplicaciones

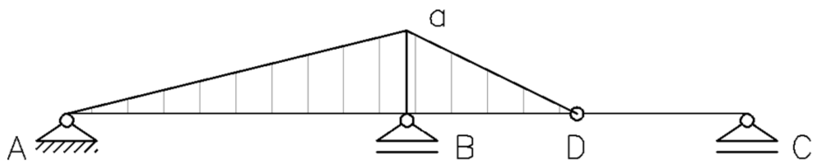
SD

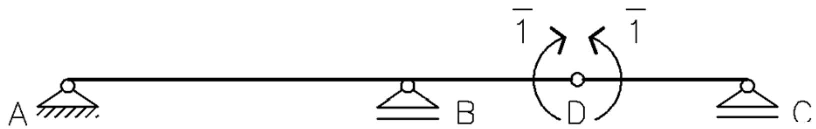


SE

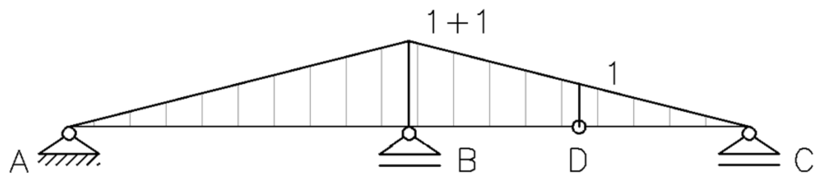


Corrimiento





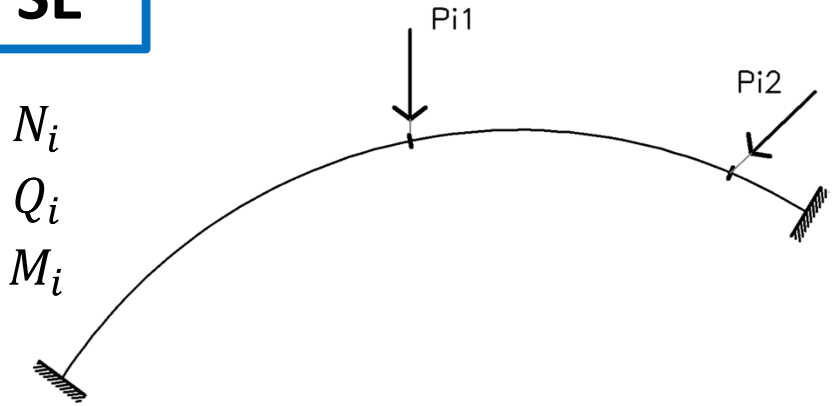
Giro relativo



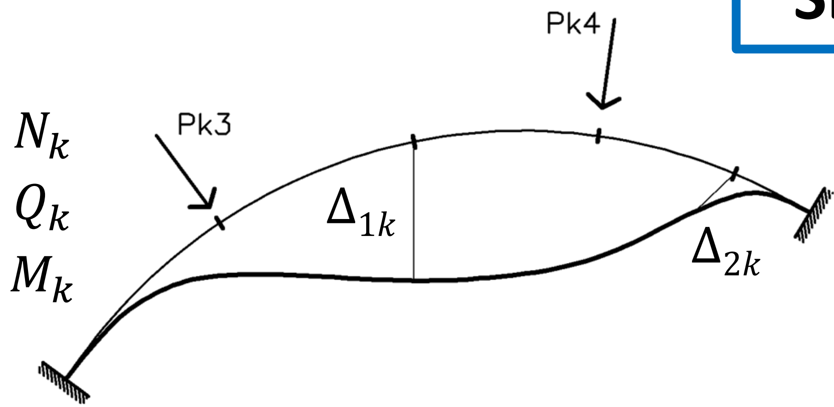
TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Betti

SE



SD



$$\sum P_i \Delta ik = \int N_i \frac{N_k}{EA} ds + \int M_i \frac{M_k}{EI} ds + \psi \int Q_i \frac{Q_k}{GA} ds$$

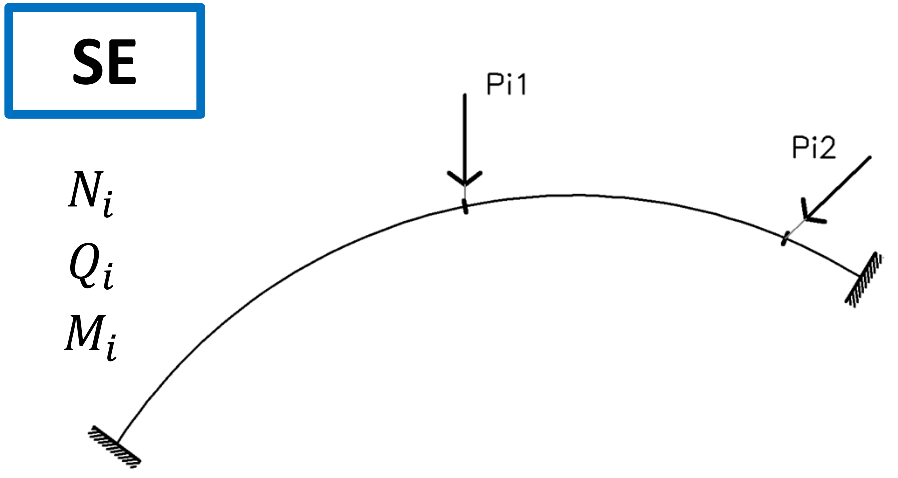
$$\sum P_k \Delta ki = \int N_k \frac{N_i}{EA} ds + \int M_k \frac{M_i}{EI} ds + \psi \int Q_k \frac{Q_i}{GA} ds$$

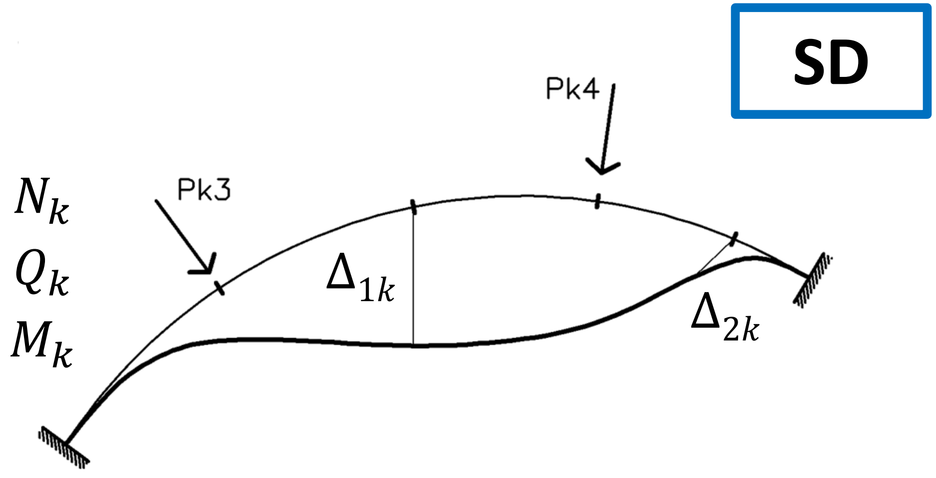
$$\sum P_i \Delta_{ik} = \sum P_k \Delta_{ki}$$

$$\boxed{Wik = Wki}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Betti



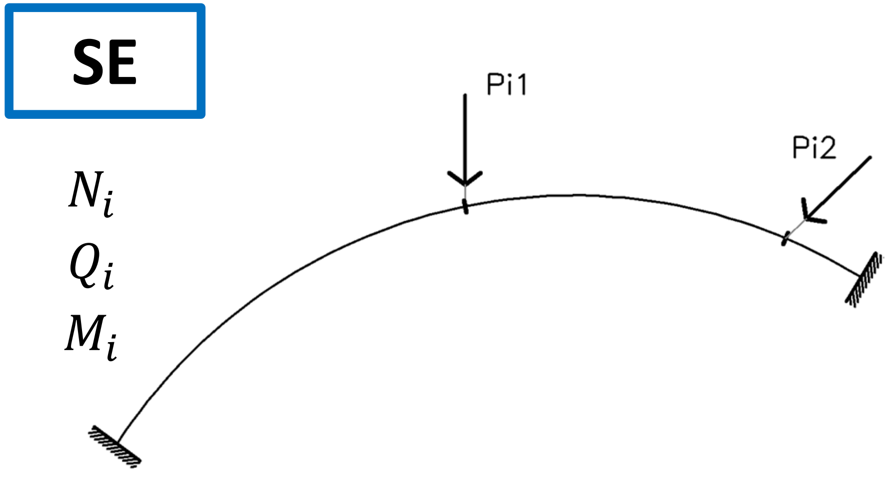


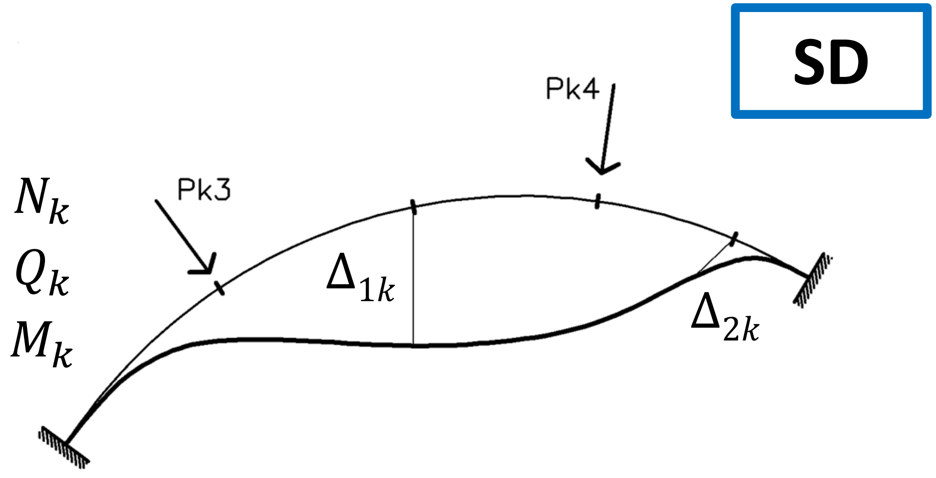
El trabajo virtual de sistema de fuerzas P_i en la deformación virtual debida a otro sistema de fuerzas P_k, es igual el trabajo de P_k en las deformaciones virtuales provocadas por P_i.

$$Wik = Wki$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell





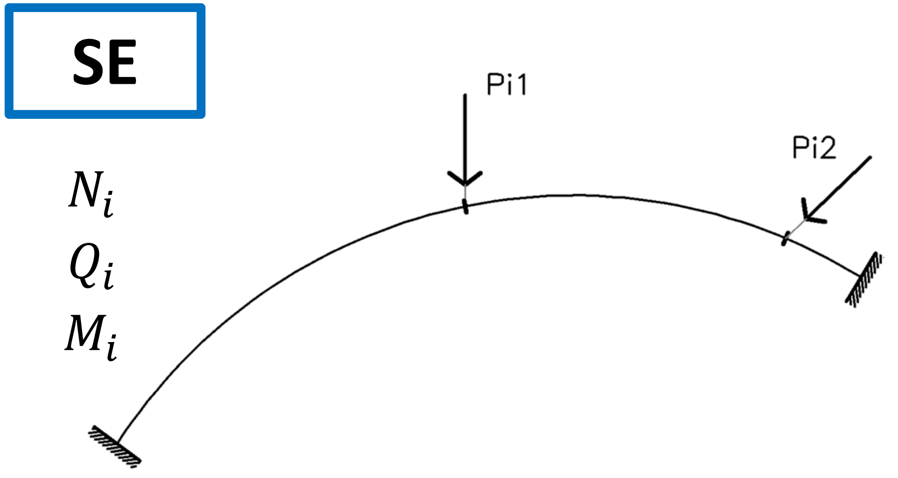
$$\sum P_i \Delta_{ik} = \sum P_k \Delta_{ki}$$

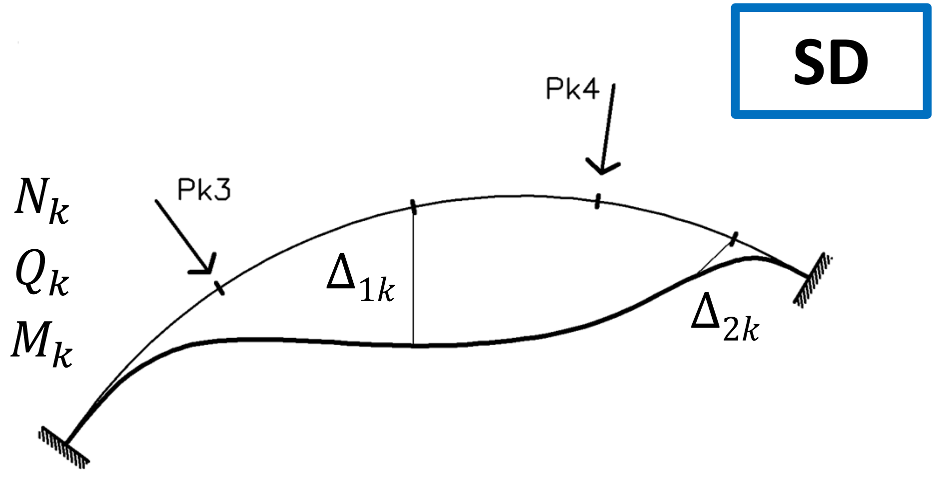
Si P_i es una sola fuerza unitaria y P_k también está formado por una única fuerza unitaria

$$\boxed{\delta_{ik} = \delta_{ki}}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell



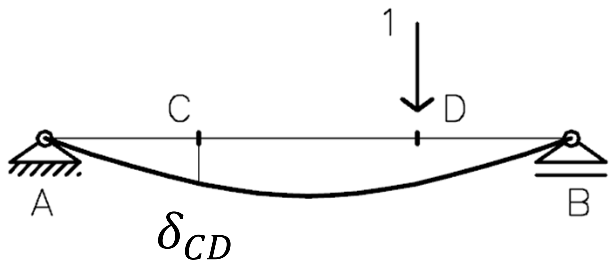


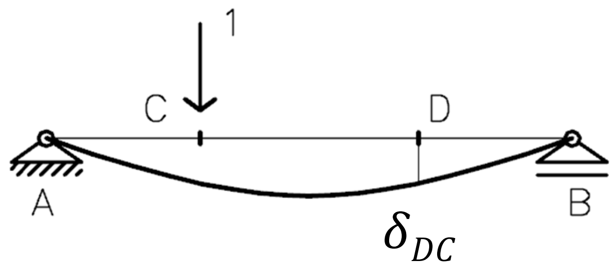
El desplazamiento en la dirección de una acción (fuerza o momento) que actúa en una sección A, debido a una acción unitaria actuando en una sección B, es igual al desplazamiento en B provocado por una acción unitaria actuando en A.

También se denomina Teorema de reciprocidad de deformaciones .

$$\boxed{\delta_{ik} = \delta_{ki}}$$

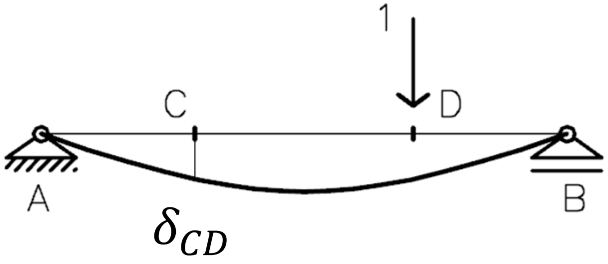
Teorema de Maxwell. Aplicaciones

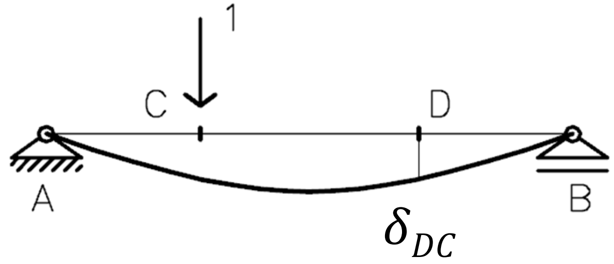




$$\boxed{\delta_{CD} = \delta_{DC}}$$

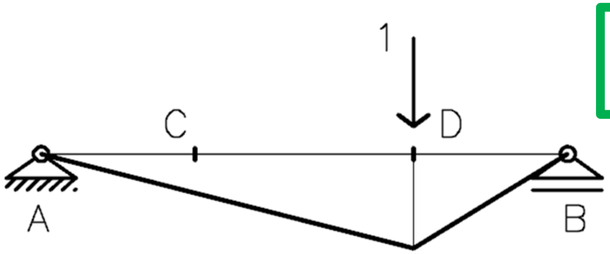
Teorema de Maxwell. Aplicaciones



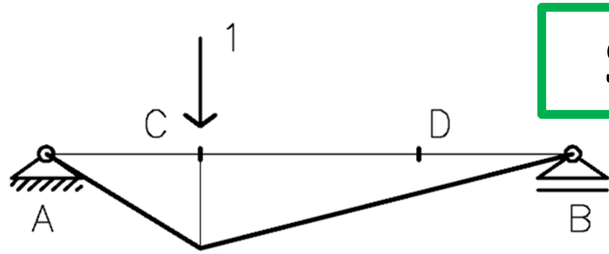


$$\boxed{\delta_{CD} = \delta_{DC}}$$

δ_{CD}

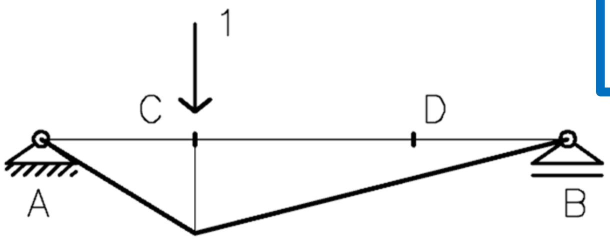


SD

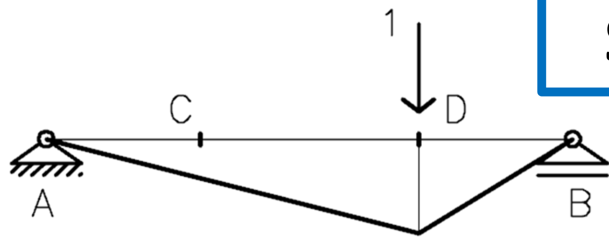


SE

δ_{DC}

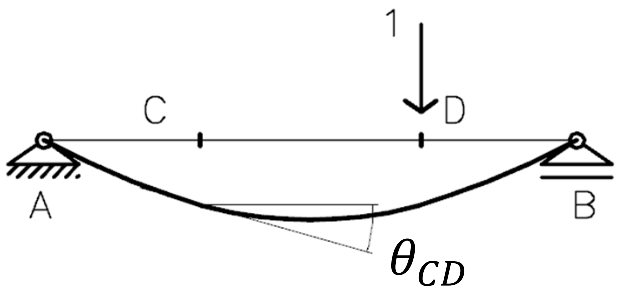


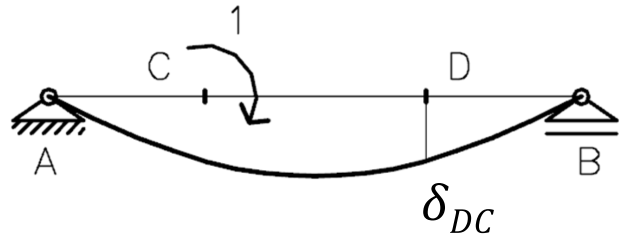
SD



SE

Teorema de Maxwell. Aplicaciones

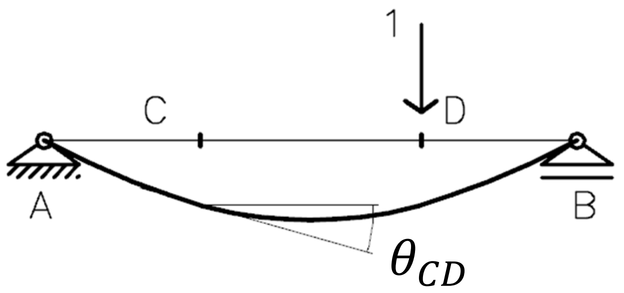


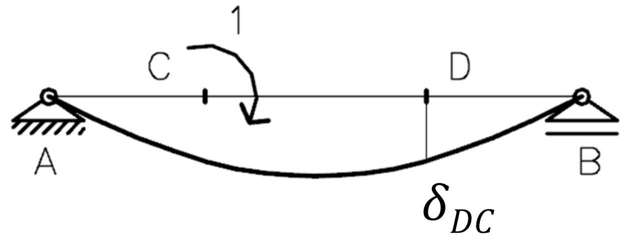


$$\boxed{\theta_{CD} = \delta_{DC}}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Teorema de Maxwell. Aplicaciones

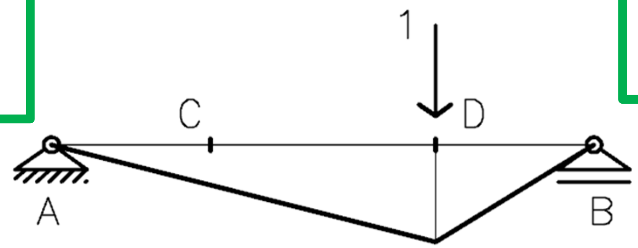




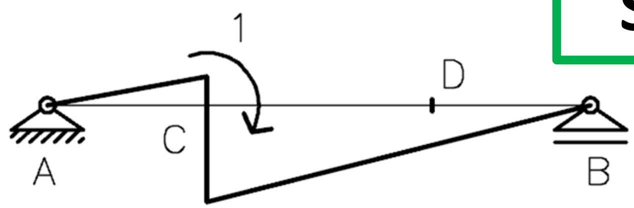
$$\boxed{\theta_{CD} = \delta_{DC}}$$

$\boxed{\theta_{CD}}$

SD

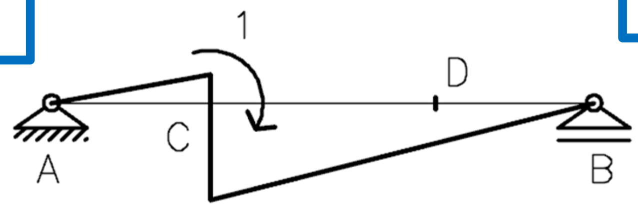


SE

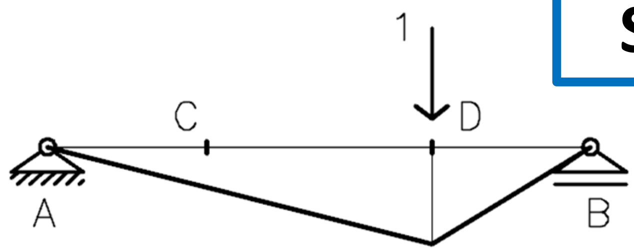


$\boxed{\delta_{DC}}$

SD

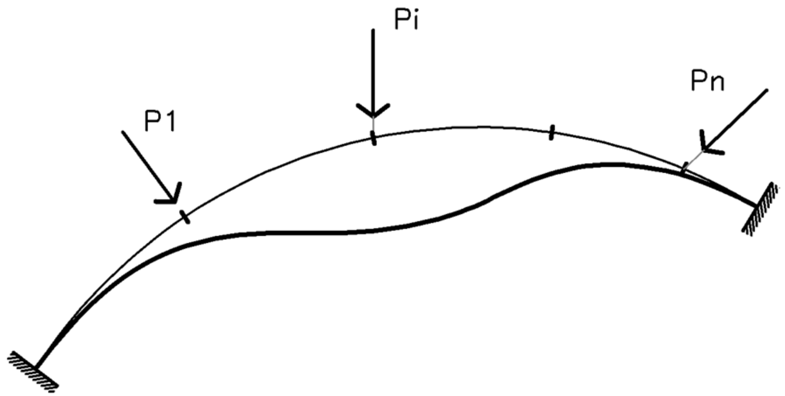


SE



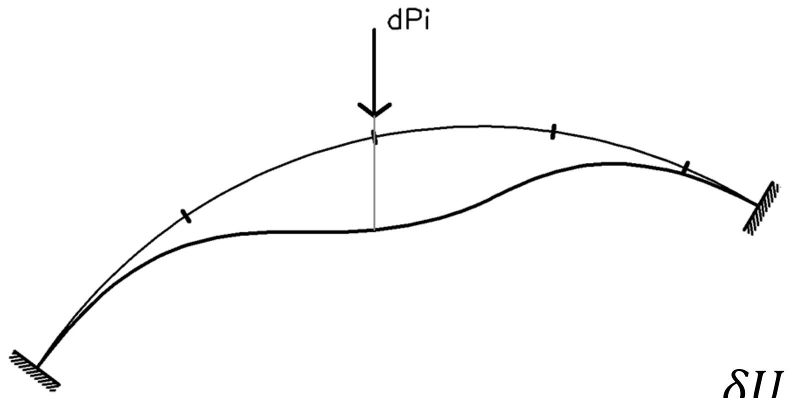
TEOREMAS ENERGETICOS

Teoremas de Castigliano



$U(P_i)$

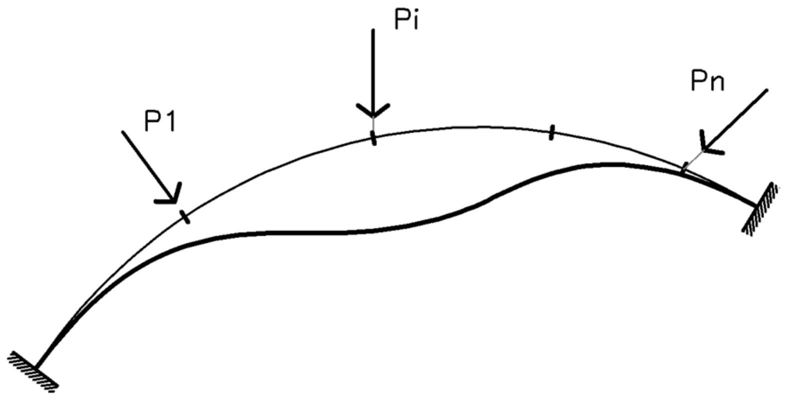
$+ \, dP_i$



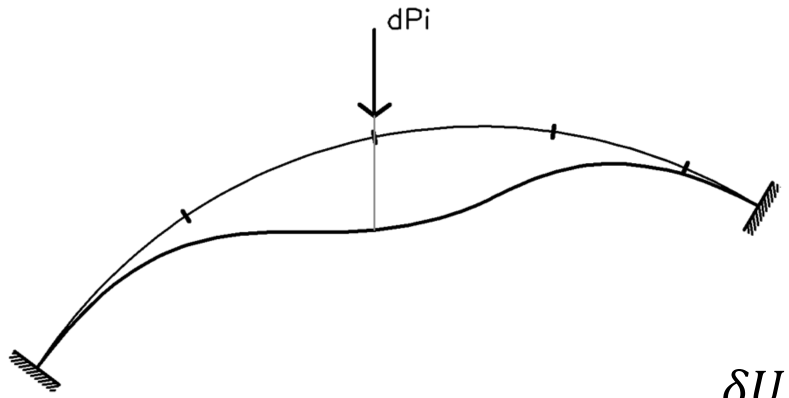
$$U_{total} = U(P_i) + dU = U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i$$

$$\frac{\delta U}{\delta P_i} = \int \left(\frac{N}{EA} \frac{\delta N}{\delta P_i} + \frac{M}{EI} \frac{\delta M}{\delta P_i} + \psi \frac{Q}{GA} \frac{\delta Q}{\delta P_i} \right) ds$$

Teoremas de Castigliano

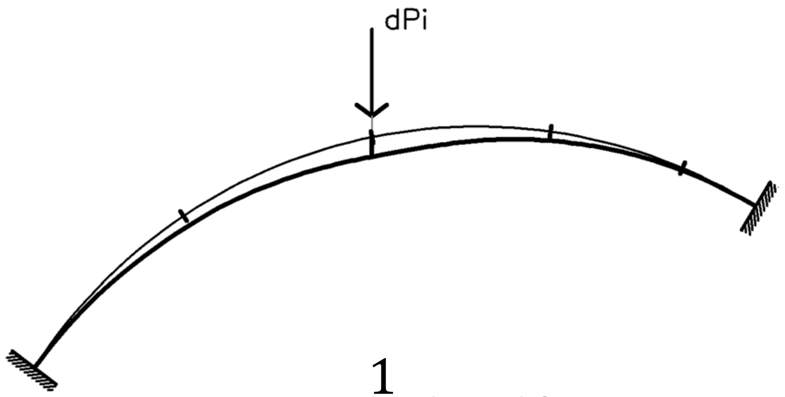


$$+\, dP_i$$

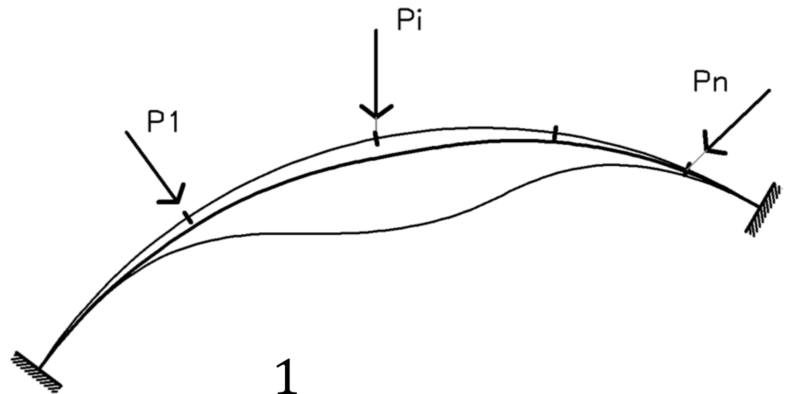


$$U(P_i)$$

$$U_{total} = U(P_i) + dU = U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i$$



$$+\, (P_1 \ldots P_n)$$



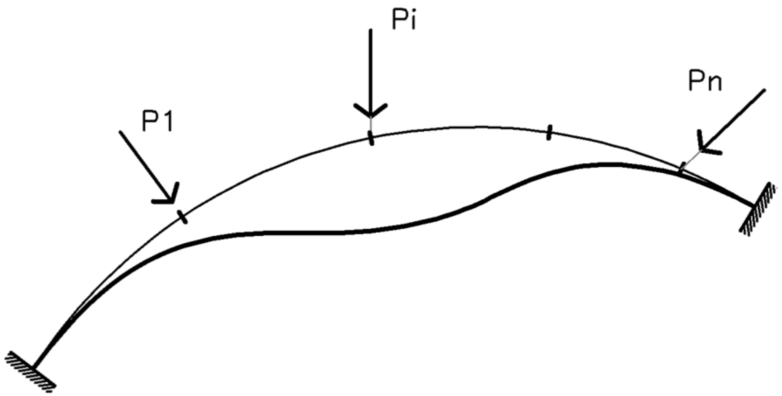
$$U = \frac{1}{2} dP_i \, d\delta_i$$

$$U_{total} = \frac{1}{2} dP_i d\delta_i + U(P_i) + dP_i \delta_i$$

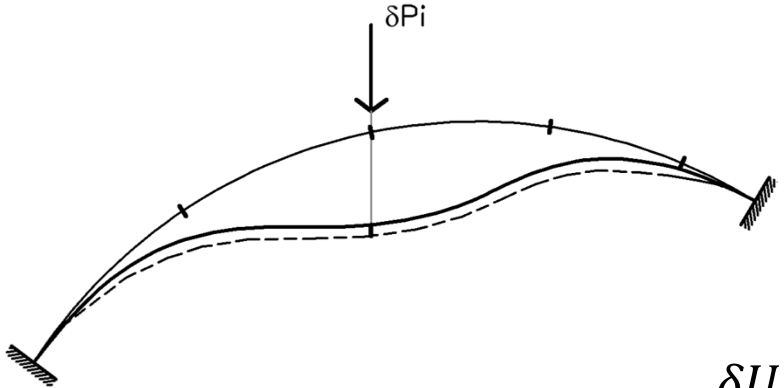
$$U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i = \frac{1}{2} dP_i \, d\delta_i + U(P_i) + dP_i \delta_i$$

$$\frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i = dP_i \delta_i$$

Teoremas de Castigliano

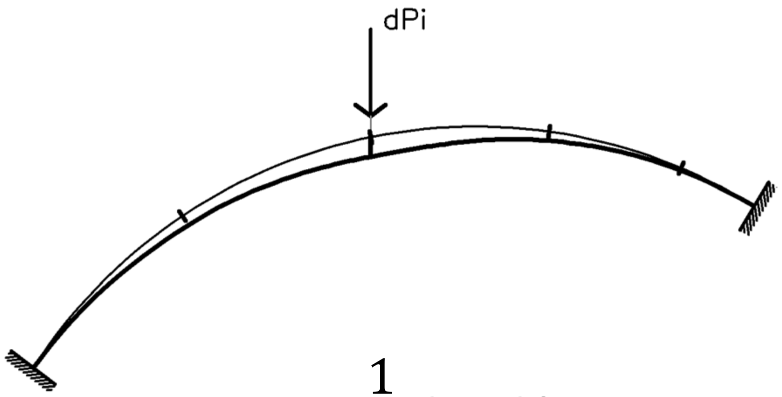


$+ \, dP_i$

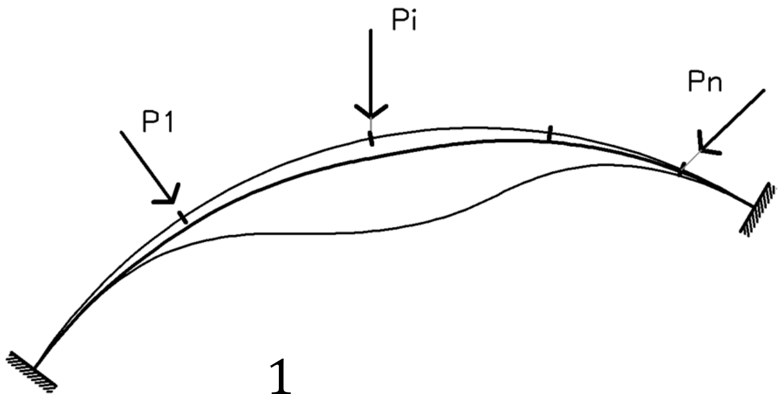


$$U(P_i)$$

$$U_{total} = U(P_i) + dU = U(P_i) + \frac{\delta U}{\delta P_i} dP_i$$



$+ \, (P_1 \ldots P_n)$



$$U = \frac{1}{2} dP_i \, d\delta_i$$

$$U_{total} = \frac{1}{2} dP_i \delta d_i + U(P_i) + dP_i \delta_i$$

$$\boxed{\frac{\delta U}{\delta P_i} = \delta_i}$$

TEOREMAS ENERGETICOS

1° Teorema de Castigliano

La derivada de la energía de deformación de una estructura (sobre la que actúan n cargas) respecto de cualquier desplazamiento es igual a la carga que actúa en la dirección de ese desplazamiento.

$$\boxed{\frac{\delta U}{\delta d_i} = P_i}$$

$$U = U(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

2° Teorema de Castigliano

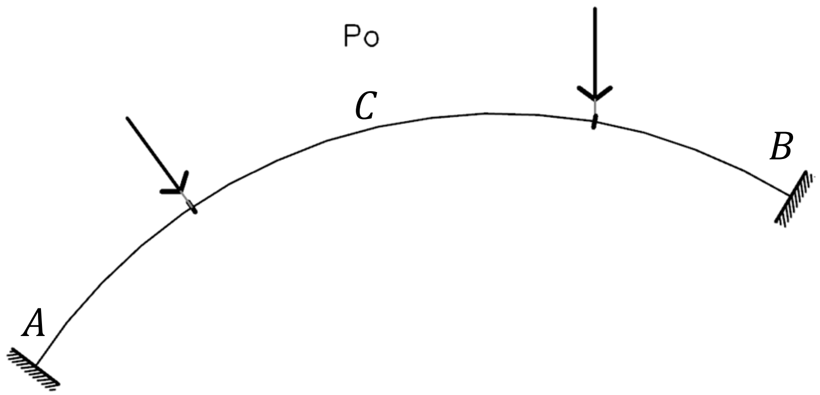
La derivada de la energía de deformación de una estructura (sobre la que actúan n cargas) respecto de cualquier carga es igual al desplazamiento en la dirección de esa carga.

$$\boxed{\frac{\delta U}{\delta P_i} = \delta_i}$$

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

TEOREMAS ENERGETICOS

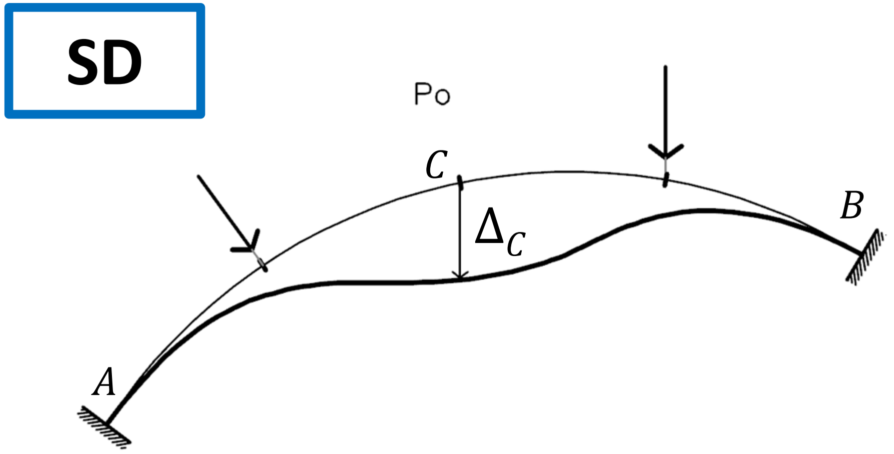
Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

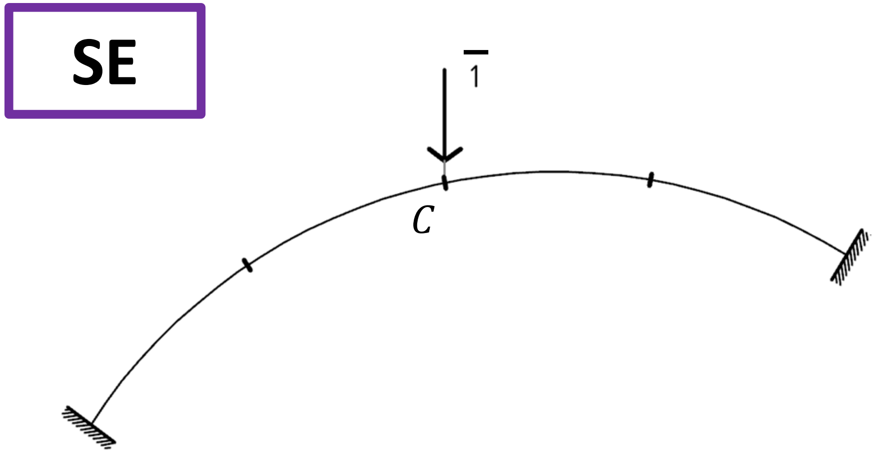


$$\Delta_C^v \ ?$$

TEOREMAS ENERGETICOS

Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas





$$\sum \bar{P}i\ \Delta i = \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds$$

$$\Delta_C = \int \bar{M}\frac{M}{EI}ds$$

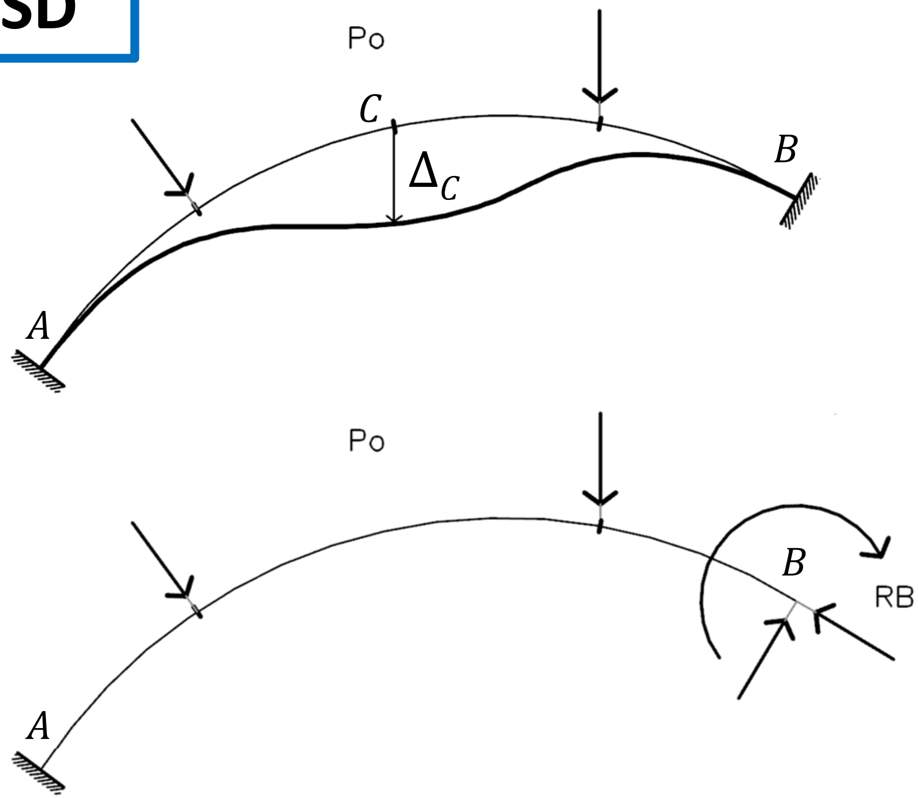
$\bar{M}$ es una ordenada genérica del diagrama de momentos del SE en el hiperestático

M es una ordenada genérica del diagrama de momentos del SD en el hiperestático

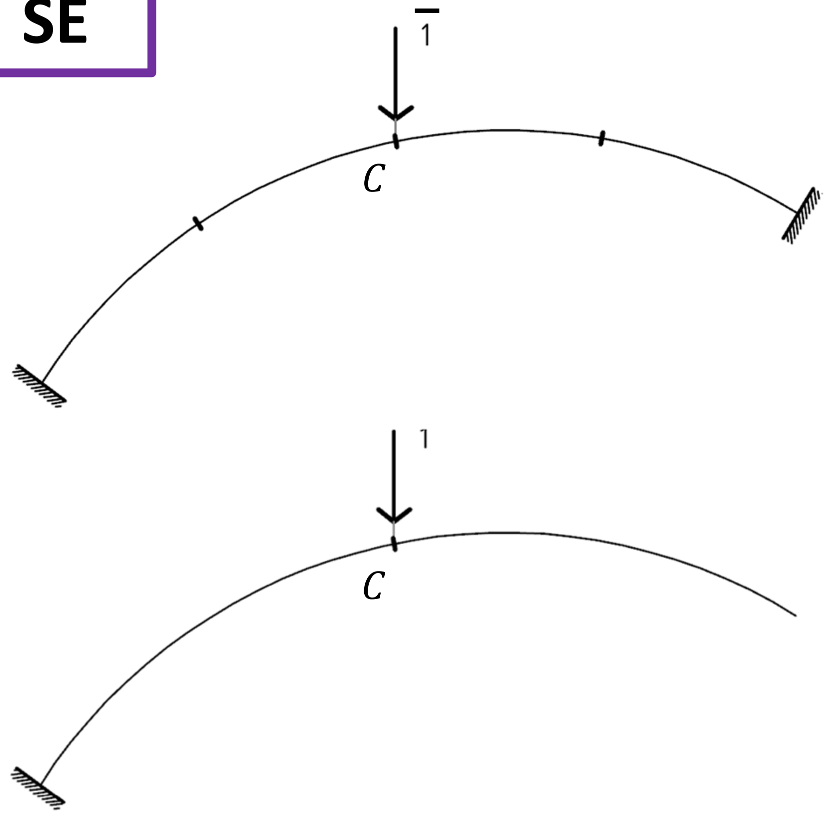
TEOREMAS ENERGETICOS

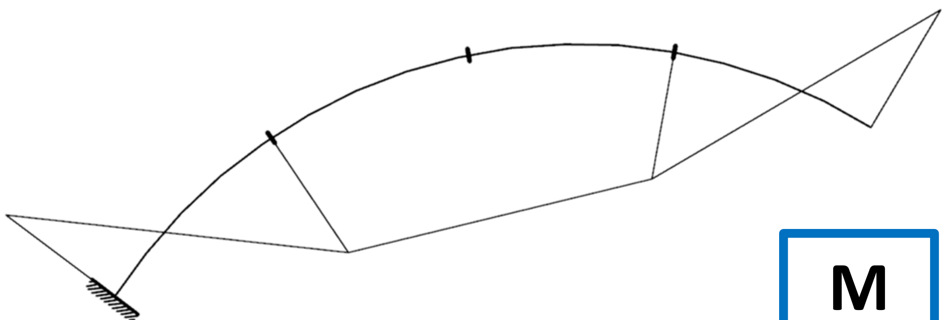
Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

SD

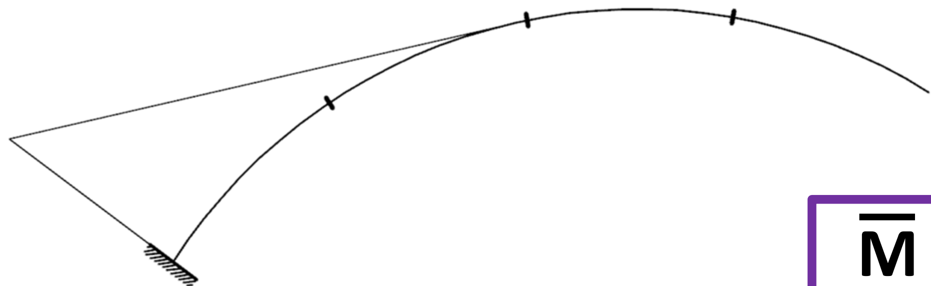


SE





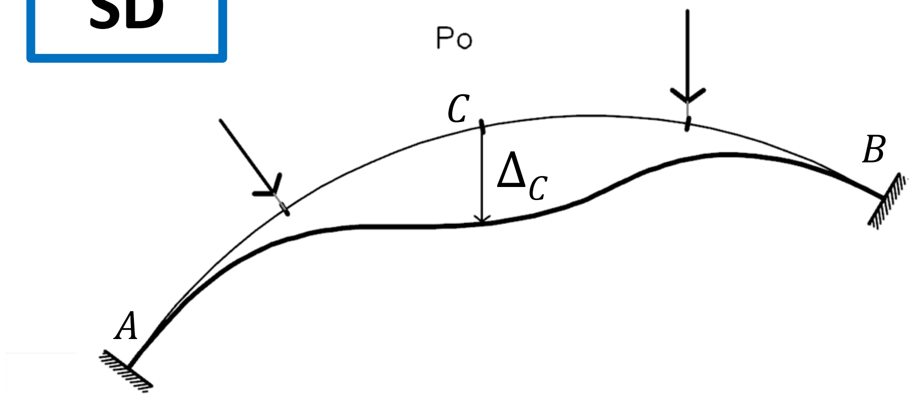
M



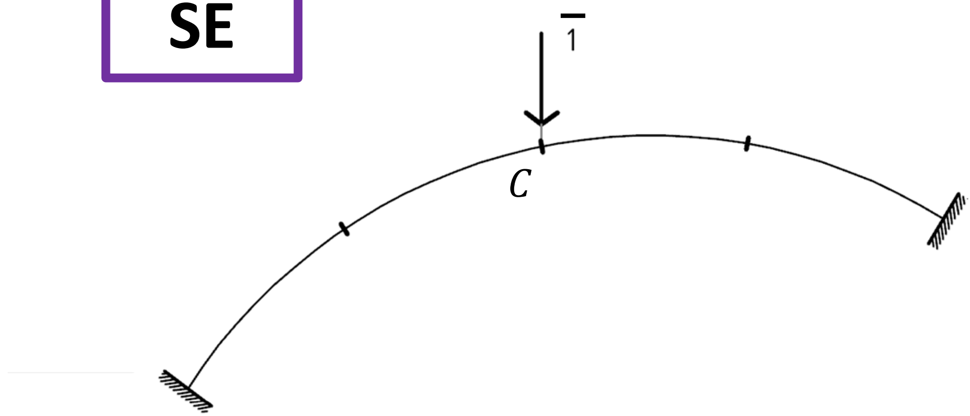
$\overline{\mathbf{M}}$

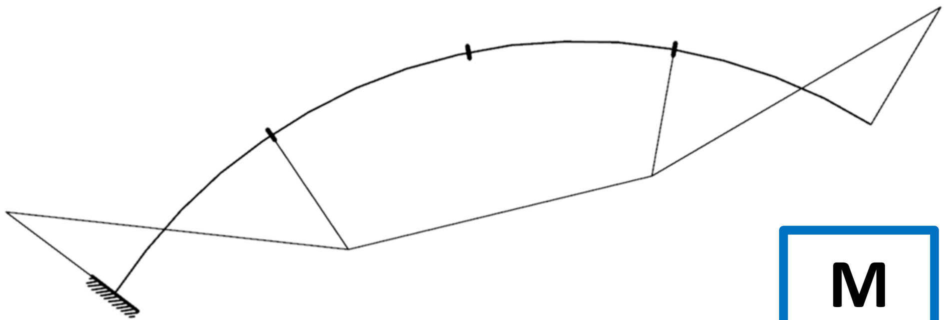
Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

SD

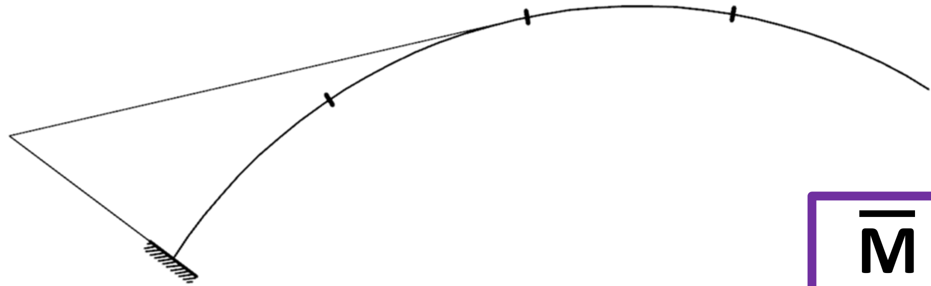


SE





M



$\overline{\mathbf{M}}$

$$\Delta_C = \int \overline{M}^{(Hip)} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds$$

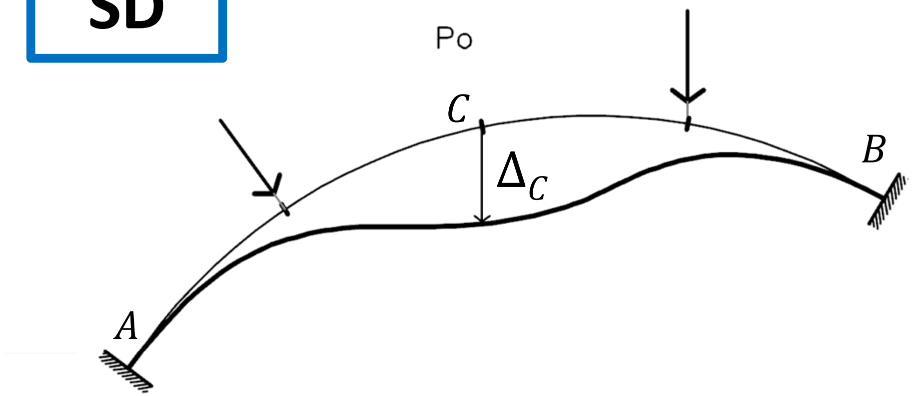
$$\Delta_C = \int \overline{M}^{(Iso)} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds$$

$$\Delta_C = \int \overline{M}^{(Hip)} \frac{M^{(Iso)}}{EI} ds$$

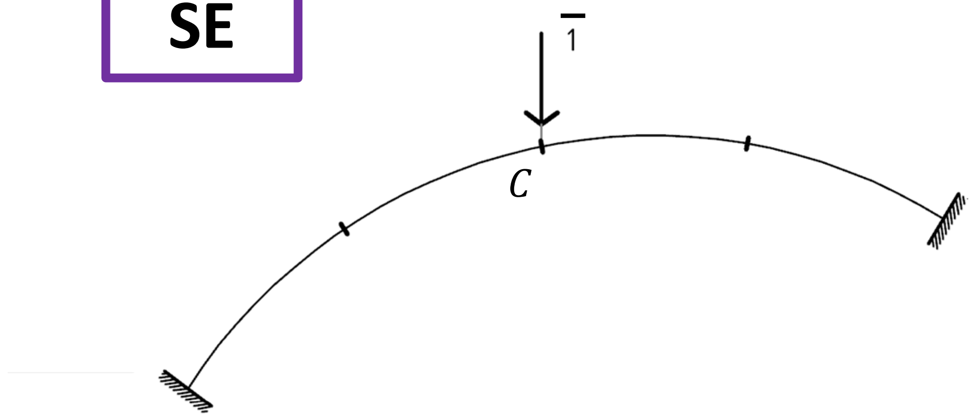
TEOREMAS ENERGETICOS

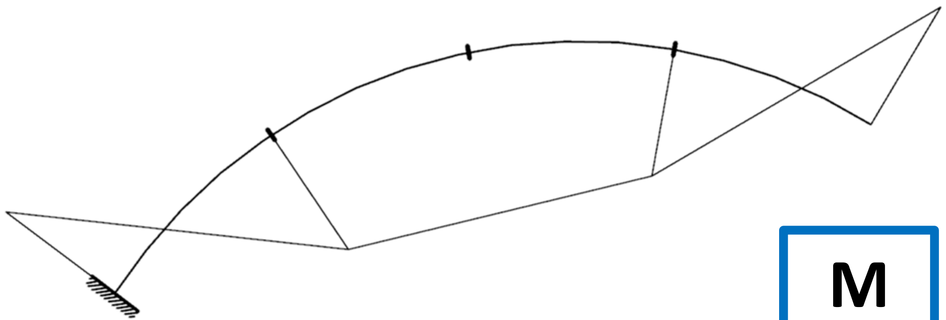
Aplicación de TTV. Estructuras Hiperestáticas

SD

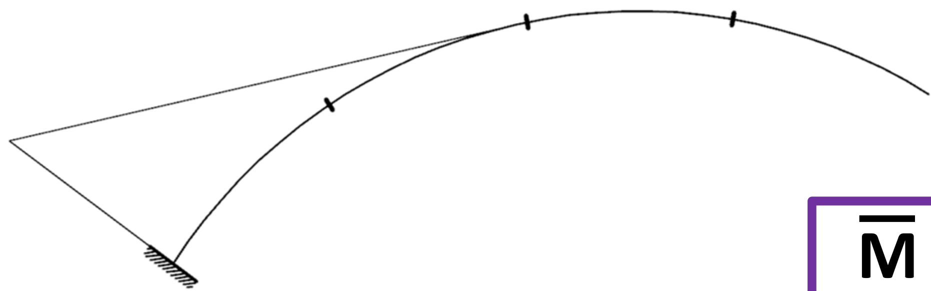


SE





M



$\overline{\mathbf{M}}$

$$\Delta_C = \int \overline{M}^{(Hip)} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds = \int \overline{M}^{(Iso)} \frac{M^{(Hip)}}{EI} ds = \int \overline{M}^{(Hip)} \frac{M^{(Iso)}}{EI} ds$$