



ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 2: TEOREMAS ENERGÉTICOS y CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS

Material de estudio preparado por:

Dr. Ing. Carlos García Garino - Prof. Titular

Giuliano Colombo - Adscripto Ad Honorem

CONTENIDO

1. Trabajo y Energía	5
1.1. Introducción	5
1.2. Comportamiento elástico lineal	6
1.3. Energía de deformación en flexión	6
1.4. Cálculo de giros y desplazamientos a través de la energía de deformación	9
1.4.1 Viga empotrada con una carga P en su extremo libre	9
1.4.2 Viga empotrada con un par M en su extremo libre	10
2. Elástica de deformación	11
2.1. Introducción y Conceptos	11
2.2. Ecuación diferencial de la elástica.	12
2.3. Cálculo de la Elástica de Deformación debido a acciones mecánicas	13
2.3.1 Viga empotrada con una carga P en su extremo libre	13
2.3.2 Viga empotrada con un par M en su extremo libre.	15
2.3.3 Viga doblemente empotrada con una carga distribuida constante q	16
2.4. Cálculo de la Elástica de Deformación debido a acciones térmicas	19
2.4.1 Dilataciones y Giros causados por acciones térmicas	19
2.4.2 Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada debido a acción térmica no uniforme	21
2.4.3 Elástica de deformación de una viga Gerber debido a acción térmica no uniforme	23
3. Teoremas Energéticos.....	26

3.1 Teorema de Clapeyron.....	26
3.2 Teoremas de Castigliano.....	26
3.2.1 Primer Teorema de Castigliano.....	26
3.2.2 Segundo Teorema de Castigliano	26
3.3 Teorema de Betti.....	27
3.4 Teorema de Maxwell	27
4. Teorema de Trabajos Virtuales (TTV)	28
4.1 Noción de Trabajo Virtual	28
4.1.1 Sistema Equilibrado	28
4.1.2 Deformación Virtual	29
4.1.3 Términos Complementarios de Trabajo.....	29
4.1.4 Noción de Trabajos Virtuales, Trabajo Virtual Externo y Trabajo Virtual Interno.	30
4.2 Teorema de Trabajos Virtuales para sólidos rígidos.....	30
4.3 Teorema de Trabajos Virtuales para sólidos deformables.	32
4.4 Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para Teoría de Estructuras.....	37
4.5. Empleo del TTV para calcular desplazamientos y giros debidos a cargas.	39
4.5.1 Cálculo del desplazamiento del extremo libre de una Viga empotrada con una carga P en su extremo libre.....	39
4.5.2 Cálculo de la rotación del extremo libre de una Viga empotrada con una carga P en su extremo libre.	40
4.6 Empleo del TTV para calcular desplazamientos y giros debidos a acciones térmicas.	41
4.6.1 Cálculo de desplazamientos de una viga simplemente apoyada debido a la acción térmica no uniforme.....	42
5. Bibliografía	45
6. Apéndice: Tabla para el cálculo de las integrales	
.....	46

1. Trabajo y Energía

1.1. Introducción

Para el desarrollo del tema se considera un sólido sometido a una carga puntual de intensidad máxima P . Esta carga es del tipo *CuasiEstático*, que se aplica lentamente para que no sucedan efectos dinámicos o inerciales.

Durante el proceso de carga, que se gráfica en la Figura 1, se genera un desplazamiento u , a través del cual P se mueve con lentitud y efectúa un trabajo de deformación W .

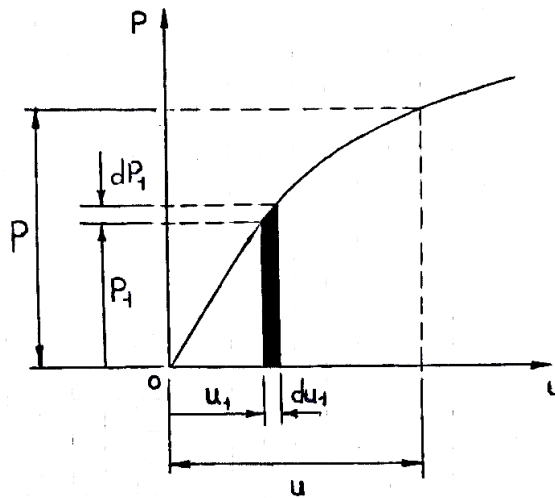


Figura 1: Trabajo de deformación en un proceso cuasiestático

La fuerza varía desde cero a su máximo valor, siendo P_1 un valor intermedio entre 0 y P , y u_1 el desplazamiento correspondiente a P_1 . Si posteriormente se aplica un incremento de carga dP_1 se producirá un desplazamiento du_1 y un trabajo igual a $P_1 \cdot du_1$. El *Trabajo Total* W es entonces la suma de todos los incrementos:

$$W = \int_0^u P_1 \cdot du_1$$

Por el *Principio de Conservación de la Energía*, la Energía de Deformación Interna U es igual al trabajo entregado por P :

$$U = W = \int_0^u P_1 \cdot du_1$$

1.2. Comportamiento elástico lineal

Una de las hipótesis de la asignatura planteada en la Unidad 1, propone que los materiales obedecen la *Ley de Hooke*. Luego, la curva Fuerza – Desplazamiento es una línea recta, como se muestra en la figura 2.

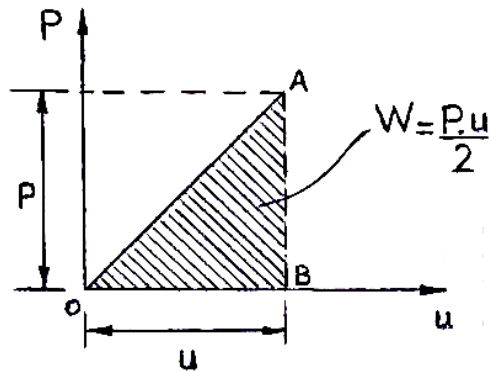


Figura 2: Trabajo de deformación para el caso de linealidad del material.

La energía de deformación y el trabajo externo, se miden por el área bajo la curva (triángulo AOB):

$$U = W = \frac{P \cdot u}{2}$$

1.3. Energía de deformación en flexión

Se considera el caso de la viga simplemente apoyada AB de longitud L sometida a flexión pura:

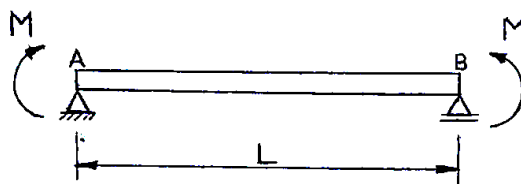


Figura 3: Viga simplemente apoyada sometida a flexión pura.

Para este caso en particular, la curvatura es constante e igual a $\kappa = 1/\rho = M/EI$ y, por hipótesis general de giros y desplazamientos pequeños:

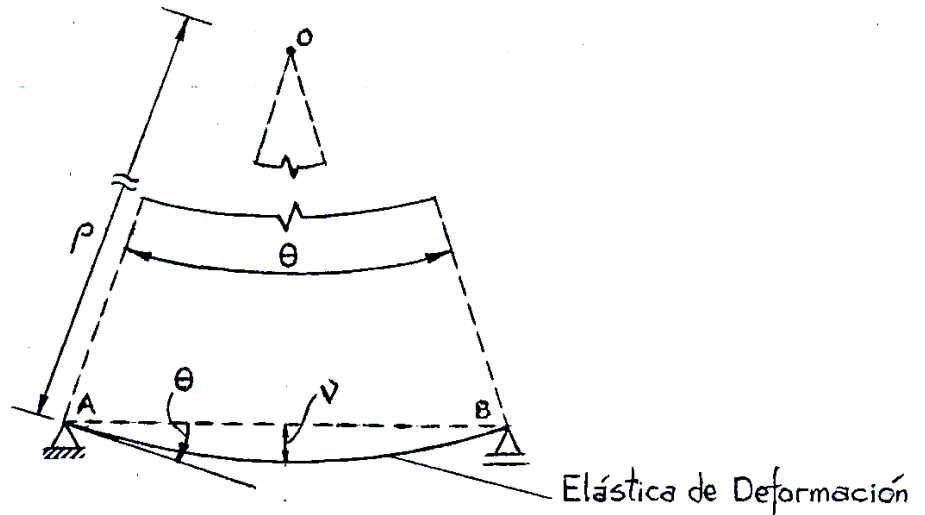


Figura 4: Elástica de deformación para una viga sometida a flexión.

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \kappa \cdot L = \frac{M \cdot L}{EI}$$

Se tiene además que la que relación entre M y θ está representado por:

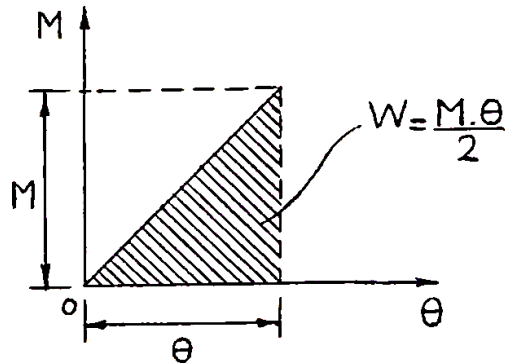


Figura 5: Trabajo de deformación para una viga con material lineal sometida a flexión.

Conforme aumenta M de 0 (cero) a su valor máximo, se efectúa un trabajo W (área bajo la curva) que, por el Principio de Conservación de la Energía, es igual a la energía de deformación U almacenada en la viga:

$$U = W = \frac{M \cdot \theta}{2}$$

Al combinar esta ecuación con la correspondiente a θ se obtienen dos expresiones en función de M o de θ :

$$U = \frac{M^2 \cdot L}{2EI} \quad ; \quad U = \frac{EI \cdot \theta^2}{2L}$$

Si el momento flector interno $M_{(x)}$ varía a lo largo de la viga, aplicamos las ecuaciones a un elemento de viga de longitud dx e integramos:

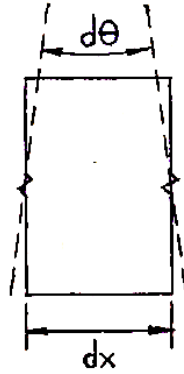


Figura 6: Elástica de deformación para una viga sometida a flexión simple.

$$d\theta = \kappa \cdot dx = \frac{d^2v}{dx^2} \cdot dx$$

El cambio en la energía interna vendrá dado por:

$$dU = \frac{M_{(x)}}{2} \cdot d\theta$$

por lo que reemplazando se obtienen:

$$dU = \frac{M_{(x)}^2}{2EI} \cdot dx \quad ; \quad dU = \frac{EI(d\theta)^2}{2dx} = \frac{EI}{2dx} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \cdot dx \right)^2 = \frac{EI}{2} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \cdot dx$$

Integrando en toda la longitud de la viga obtenemos la Energía de Deformación Total:

$$U = \int \frac{[M_{(x)}]^2}{2EI} dx \quad ; \quad U = \int \frac{EI}{2} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx$$

1.4. Cálculo de giros y desplazamientos a través de la energía de deformación

1.4.1 Viga empotrada con una carga P en su extremo libre

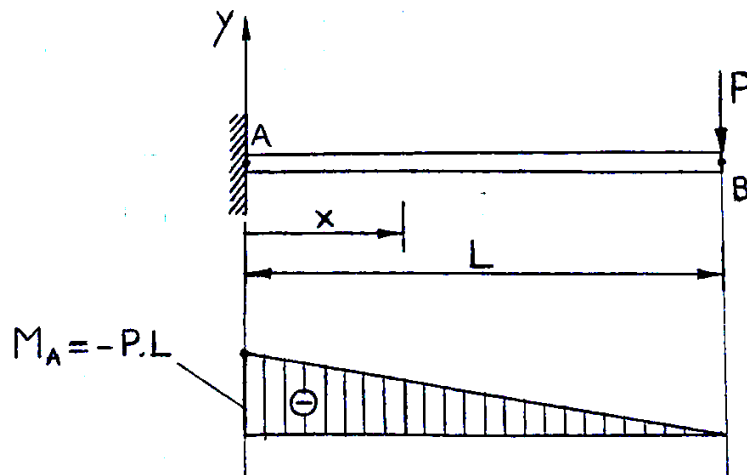


Figura 7: Viga en voladizo con una carga P aplicada en el extremo libre.

La variación de momento flector interno viene dada por:

$$M_{(x)} = -P \cdot (L - x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

Integrando, se obtiene la energía de deformación según:

$$U = \int \frac{[M_{(x)}]^2}{2EI} dx$$
$$U = \int_0^L \frac{[-P \cdot (L - x)]^2}{2EI} dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L (L^2 - 2Lx + x^2) dx$$
$$U = \frac{P^2 \cdot L^3}{6EI}$$

Dado que el trabajo W resulta $U = P \cdot v/2$, igualando la Energía Interna U debido a la flexión con dicho trabajo, se puede obtener el desplazamiento en el punto B de aplicación de la carga P como:

$$U = \frac{P^2 \cdot L^3}{6EI} = P \cdot \frac{v}{2}$$

$$v_B^P = -\frac{P \cdot L^3}{3EI} \quad ; \quad (\text{Hacia abajo según el sentido de la carga P})$$

1.4.2 Viga empotrada con un par M en su extremo libre

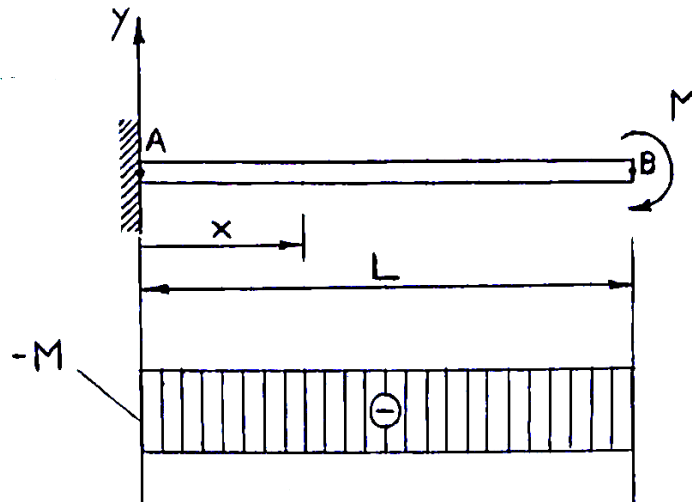


Figura 8: Viga en voladizo con un par M aplicado en el extremo libre.

Teniendo que el momento flector M es constante, para el intervalo de interés:

$$M_{(x)} = -M \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

la energía de deformación se obtiene nuevamente mediante:

$$U = \int_0^L \frac{[-M]^2}{2EI} dx = \frac{M^2 \cdot L}{2EI}$$

Teniendo en cuenta que el trabajo de deformación por flexión $W = M \cdot \theta / 2$, podemos obtener el giro en el punto B de aplicación del par M (giro máximo) siguiendo el procedimiento del ejercicio anterior. Resulta:

$$U = \frac{M^2 \cdot L}{2EI} = M \cdot \frac{\theta}{2}$$

$$\theta_B^M = -\frac{M \cdot L}{EI} \quad ; \quad (\text{Horario según el sentido del par})$$

2. Elástica de deformación

2.1. Introducción y Conceptos

Cuando las cargas actúan de forma perpendicular al eje longitudinal de un elemento estructural (como por ejemplo una viga) ocasionan que ésta se flexione, con lo que dicho eje, antes recto, se deforma en una curva. Dicha curva es denominada *Elástica de Deformación* (o curva de deflexión) y representa, para las estructuras sometidas a flexión, los movimientos perpendiculares al eje de la pieza considerada.

Considerando por ejemplo una viga AB de longitud L en voladizo sometida a una carga P en su extremo libre:

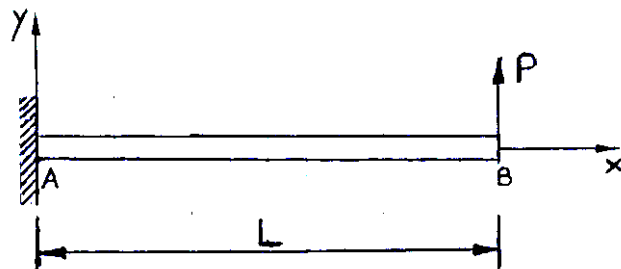


Figura 9: Viga en voladizo con una carga P aplicada en el extremo libre.

La elástica de deformación toma la siguiente forma:

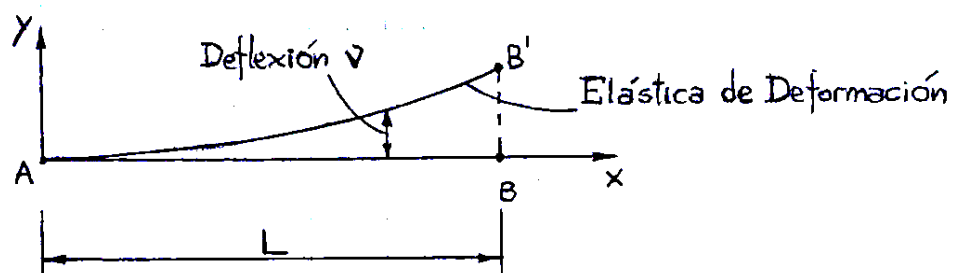


Figura 9: Elástica de deformación para una viga en voladizo con una carga P aplicada en el extremo libre.

2.2. Ecuación diferencial de la elástica.

Se considera una viga simplemente apoyada sometida a flexión pura, como se observa en la Figura 10.

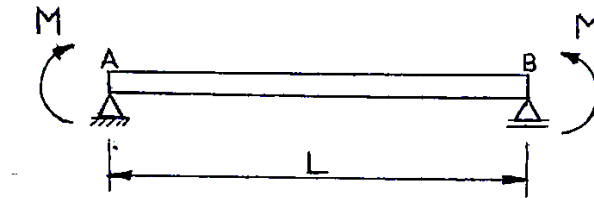


Figura 10: Viga simplemente apoyada sometida a flexión pura.

La elástica de deformación, como ya se ha visto en el apartado 1.3 Energía de Deformación en flexión, posee el *Centro de Curvatura O*, con *Radio de Curvatura ρ* :

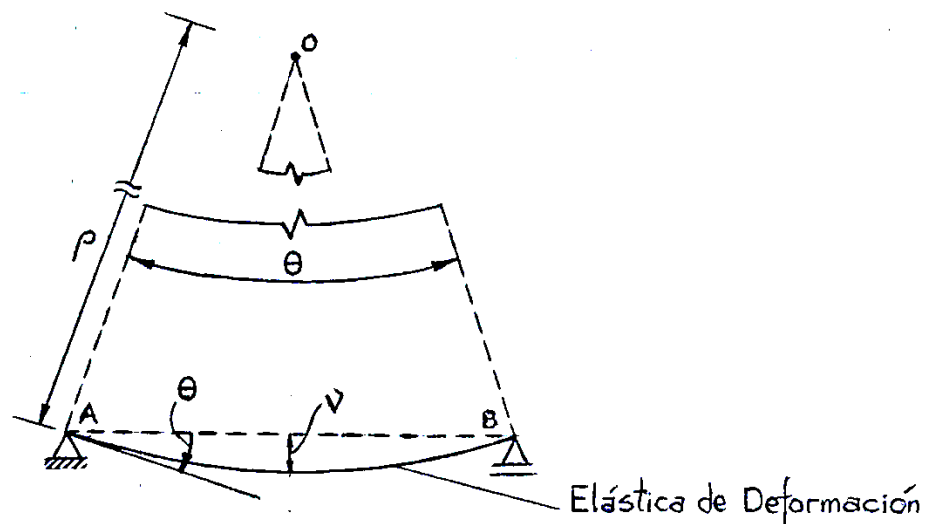


Figura 11: Esquema de la elástica de deformación.

La Curvatura κ , como se ha definido en la sección 1.3 se define como:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

donde I es el Momento de Inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro de la misma y E es el Módulo de Elasticidad del material.

Es importante relacionar al momento flector M con la Tasa de Cambio de Giro $d\theta/dx$ y con la tasa de cambio de los desplazamientos perpendiculares al eje de la pieza dv/dx . Por geometría se tiene que:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} ; \quad \theta = \frac{dv}{dx}$$

Relacionando estas variables se obtiene la *Ecuación Diferencial de la Elástica de Deformación*:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

2.3. Cálculo de la Elástica de Deformación debido a acciones mecánicas

La expresión de la elástica puede integrarse analíticamente para ciertos algunos sencillos. Se resolverán a continuación ejemplos presentados anteriormente para métodos energéticos, comparando procedimientos y resultados.

2.3.1 Viga empotrada con una carga P en su extremo libre

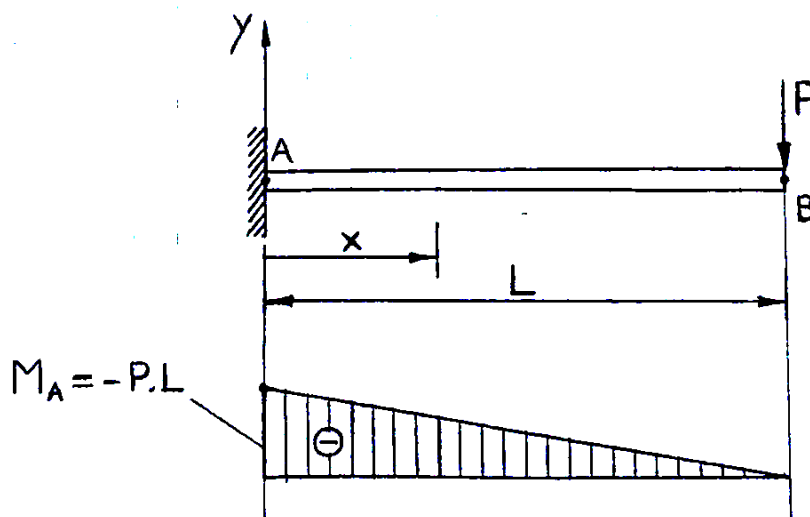


Figura 12: Viga en voladizo con una carga P aplicada en el extremo libre y diagrama de Momentos flectores.

Teniendo que la variación de momento flector interno viene dada por:

$$M_{(x)} = -P \cdot (L - x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

utilizamos la Relación Momento – Curvatura e integramos para obtener la expresión del giro en función de x:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI} = \frac{-P \cdot (L - x)}{EI}$$

$$\theta_{(x)} = \int \frac{-P \cdot (L - x)}{EI} dx = -\frac{P}{EI} \cdot \left(L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(0)} = 0$, se obtiene $C_1 = 0$ y así:

$$\theta_{(x)} = -\frac{P}{EI} \cdot \left(L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right)$$

negativo por girar en sentido horario.

- El *giro máximo* se produce en $x = L$ y es igual a:

$$\theta_B^P = \theta_{\text{máx}} = \theta_{(L)} = -\frac{P \cdot L^2}{2EI} \quad ; \quad (\text{Horario})$$

La expresión de la elástica se obtiene aplicando la relación:

$$\frac{dv}{dx} = \theta_{(x)}$$

e integrando:

$$v_{(x)} = \int \frac{P}{EI} \cdot \left(L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{P}{EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

Aplicando la condición de borde $v_{(0)} = 0$, se obtiene $C_2 = 0$ y así la Ecuación de la Elástica queda expresada como:

$$v_{(x)} = -\frac{P}{EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

negativa por estar orientada hacia abajo.

- El desplazamiento máximo o *flecha* se produce en $x = L$ y es igual a:

$$v_B^P = v_{\text{máx}} = v_{(L)} = -\frac{P \cdot L^3}{3EI} \quad ; \quad (\text{Hacia abajo})$$

2.3.2 Viga empotrada con un par M en su extremo libre.

Para la viga de la figura 13, la variación de momento flector viene resulta:

$$M_{(x)} = -M \quad ; \quad 0 \leq x \leq L$$

los giros y los desplazamientos se obtienen a partir de:

$$\theta_{(x)} = -\frac{M}{EI} \cdot x \quad ; \quad v_{(x)} = -\frac{M}{2EI} \cdot x^2$$

ambas ecuaciones con un signo negativo por girar en sentido horario y por orientarse hacia abajo respectivamente.

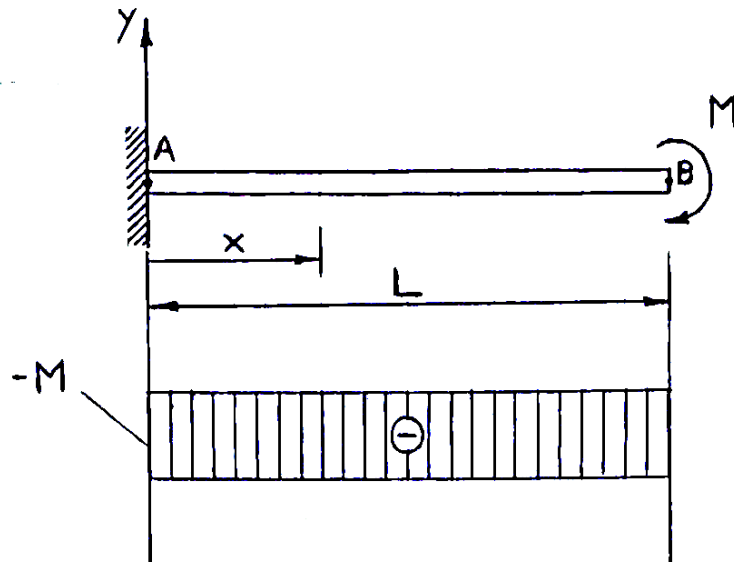


Figura 13: Viga en voladizo con un par M aplicado en el extremo libre y diagrama de Momentos flectores.

- El giro y el desplazamiento máximos se encuentran en el extremo libre B y vienen dados por:

$$\theta_B^M = -\frac{M \cdot L}{EI} \quad ; \quad (\text{Horario})$$

$$v_B^M = -\frac{M \cdot L^2}{2EI} \quad ; \quad (\text{Hacia abajo})$$

Observación: Si se comparan v_B^M con θ_B^P , y si se imponen acciones unitarias $M = P = 1$, resulta que el desplazamiento en el punto B debido a un par unitario es igual al giro en dicho punto debido a una carga unitaria, resultado que se debe a los Teoremas de Betti y Maxwell, que se enunciarán más adelante.

$$v_B^M = \theta_B^P = \frac{L^2}{2EI}$$

2.3.3 Viga doblemente empotrada con una carga distribuida constante q

En este ejemplo, para ilustrar la generalidad del procedimiento, se estudia la elástica de una viga doblemente empotrada, como se observa en la figura 14. Este caso es la primera estructura hiperestática que se analiza en el curso.

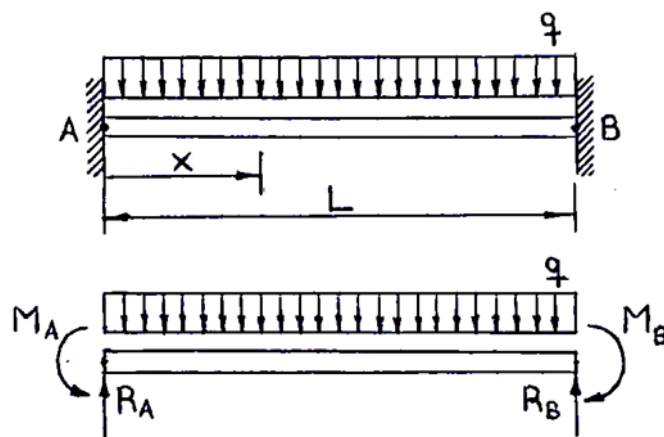


Figura 14: Viga doblemente empotrada sometida a una carga repartida uniforme.

Por razones de simetría las reacciones de vínculo verticales son iguales:

$$R_A = R_B = q \cdot \frac{L}{2}$$

Lo mismo sucede con los momentos de empotramiento de los puntos A y B, que son incógnitas del problema: $M_A = M_B = X_1$.

Para plantear la función del momento flector, se escoge una sección arbitraria a una distancia x a la derecha del punto A. Calculando el momento flector en dicho punto resulta:

$$M_{(x)} = -X_1 + q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

Por relación momento – curvatura obtenemos:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{(x)}}{EI}$$

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI} \cdot \int \left(-X_1 + q \cdot \frac{L}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI} \cdot \left(-X_1 \cdot x + q \cdot \frac{L}{4} \cdot x^2 - q \cdot \frac{x^3}{6} \right) + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(0)} = 0$, se obtiene $C_1 = 0$ y así:

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI} \cdot \left(-X_1 \cdot x + q \cdot \frac{L}{4} \cdot x^2 - q \cdot \frac{x^3}{6} \right)$$

Por razones de simetría se tiene que $\theta_{(L/2)} = 0$:

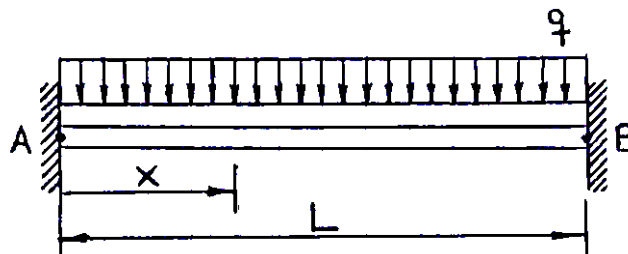
$$\theta_{(L/2)} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-X_1 \cdot \frac{L}{2} + q \cdot \frac{L}{4} \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{q}{6} \cdot \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right] = 0$$

$$-X_1 \cdot \frac{L}{2} + q \cdot \frac{L^3}{24} = 0$$

$$X_1 = M_A = M_B = q \cdot \frac{L^2}{12}$$

El signo positivo obtenido para el par X_1 indica que el sentido supuesto es el correcto.

El diagrama de momento flector interno viene dado entonces por:



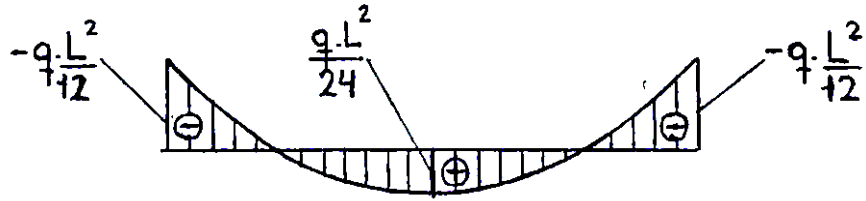


Figura 14: Diagrama de Momentos flectores para la viga doblemente empotrada sometida a una carga repartida uniforme.

- La ecuación de la elástica entonces es la siguiente:

$$\frac{dv}{dx} = \theta_{(x)}$$

$$v_{(x)} = \frac{1}{EI} \cdot \int \left(-X_1 \cdot x + q \cdot \frac{L}{4} \cdot x^2 - q \cdot \frac{x^3}{6} \right) dx$$

$$v_{(x)} = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{X_1}{2} \cdot x^2 + \frac{q \cdot L}{12} \cdot x^3 - \frac{q}{24} x^4 \right) + C_2$$

Aplicando la condición de borde $v_{(0)} = 0$, se obtiene $C_2 = 0$ y así la Ecuación de la Elástica queda expresada como:

$$v_{(x)} = \frac{1}{EI} \cdot \left(-q \cdot \frac{L^2}{24} \cdot x^2 + \frac{q \cdot L}{12} \cdot x^3 - \frac{q}{24} x^4 \right)$$

donde su valor máximo se presenta en $x = L/2$:

$$v_{\text{máx}} = v_{(L/2)} = -\frac{q \cdot L^4}{384EI} ; \text{ (Hacia abajo)}$$

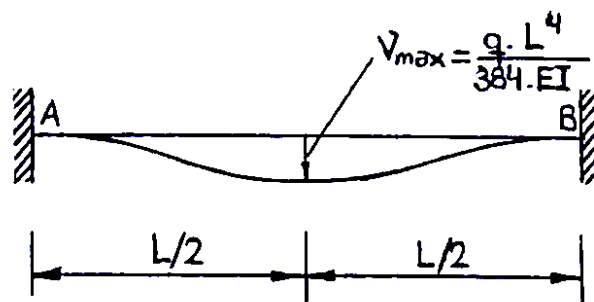


Figura 15: Elástica de deformación de la viga doblemente empotrada sometida a una carga repartida uniforme.

2.4. Cálculo de la Elástica de Deformación debido a acciones térmicas

En muchos casos de interés hay que analizar la respuesta de las estructuras debida a las llamadas *Acciones Térmicas*. Por ejemplo, si una estructura de hormigón se construye en noviembre, el hormigón habrá fraguado para unas condiciones de temperatura y humedad dadas. En pleno invierno, para temperaturas mucho más bajas, la diferencia de temperatura respecto de la época de la construcción provocará dilataciones y giros en los componentes de las estructuras y, dependiendo del tipo de estructura considerada también pueden originarse esfuerzos, como es el caso de las estructuras hiperestáticas.

Para calcular los desplazamientos generalizados y, si corresponde, los esfuerzos en una barra sometida a la acción térmica es necesario calcular la expresión de la dilatación y el giro de una sección y de sus tasas de cambio.

2.4.1 Dilataciones y Giros causados por acciones térmicas

Para simplificar el análisis, consideramos una viga simplemente apoyada sometida a una *acción térmica t uniforme* en toda su longitud:

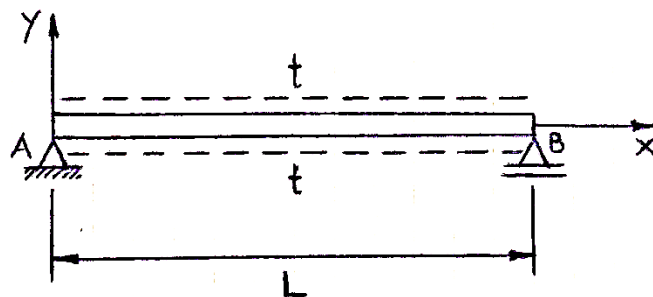


Figura 16: Viga simplemente apoyada sometida a una acción térmica uniforme.

Consideramos ahora un trozo de dicha viga de longitud dx y lo analizamos:

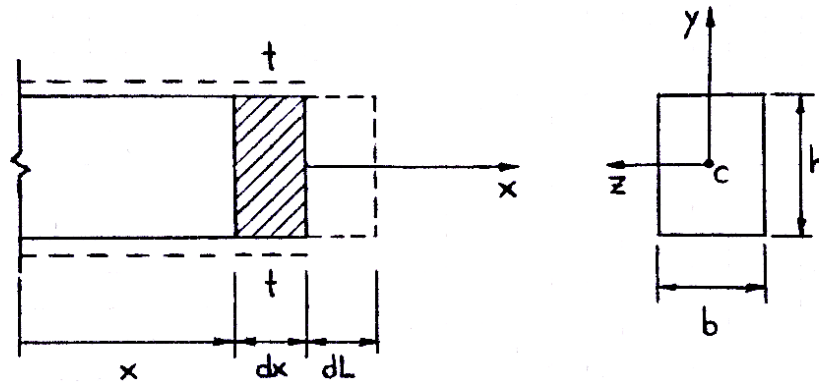


Figura 17: Análisis de un elemento diferencial de una viga simplemente apoyada sometida a una acción térmica uniforme.

El elemento sufre entonces un alargamiento (suponiendo que el cambio de temperatura corresponde a un aumento) en la dirección del eje de la pieza igual a:

$$\frac{dL}{dx} = \alpha \cdot t \quad ; \quad (\text{Deformación térmica})$$

$$dL = \alpha \cdot t \cdot dx \quad ; \quad (\text{Alargamiento Térmico})$$

en donde α es el *Coefficiente de Dilatación Térmica*, que es una propiedad del material considerado y para el caso de aceros y hormigones resulta $\alpha = 10^{-5}$.

Si en cambio ahora consideramos que el *incremento en la temperatura es distinto en la parte inferior t_i de la viga con respecto a la parte superior t_s* , como se observa en la figura, entonces el alargamiento no será uniforme y vendrá acompañado de un *giro* de la sección.

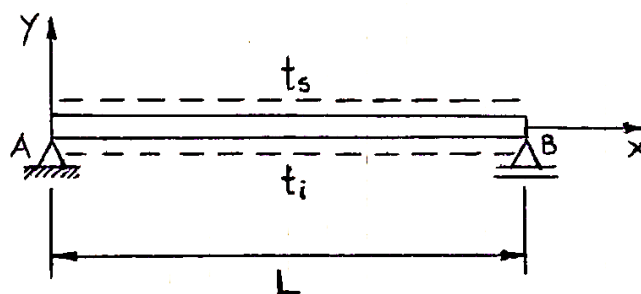


Figura 18: Viga simplemente apoyada sometida a una carga térmica variable linealmente en el espesor.

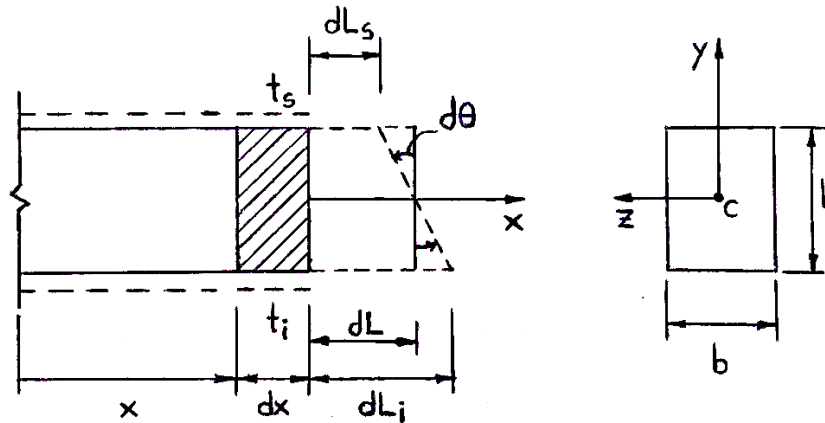


Figura 19: Análisis de un elemento diferencial de una viga simplemente apoyada sometida a una carga térmica que varía linealmente en el espesor.

Suponiendo que el incremento t_i de temperatura en la parte inferior es mayor que el correspondiente a la parte superior t_s , la parte inferior se alarga en mayor medida. El alargamiento del elemento dx entonces viene dado por el promedio:

$$dL = \frac{dL_i + dL_s}{2} = \alpha \cdot \left(\frac{t_i + t_s}{2} \right) \cdot dx \quad ; \quad (\text{Alargamiento Térmico})$$

La viga adquiere de esta forma una curvatura positiva, donde el eje gira una cantidad $d\theta$ igual a:

$$d\theta = \frac{dL_i - dL_s}{h} = \alpha \cdot \left(\frac{t_i - t_s}{h} \right) \cdot dx$$

por lo que la Curvatura debida a la acción térmica resulta:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha \cdot \left(\frac{t_i - t_s}{h} \right)$$

Esta curvatura juega el mismo rol, para la carga térmica, que la obtenida en las secciones 1.3 y 2.2 para las cargas mecánicas.

2.4.2 Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada debido a acción térmica no uniforme

Como ejemplo tomamos el caso de la viga simplemente apoyada con un incremento de temperatura t_i en la parte inferior y una disminución en la temperatura $t_s = -t_i$ en la parte superior (ambas iguales en módulo):

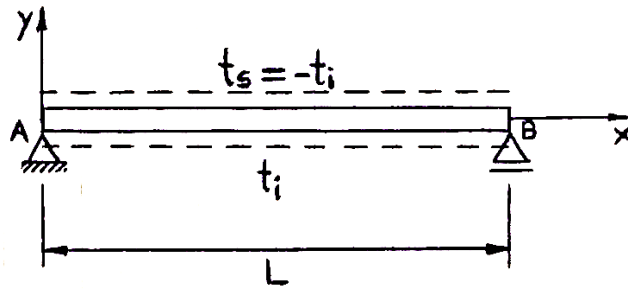


Figura 20: Viga simplemente apoyada sometida a una carga térmica que varía linealmente en el espesor.

La curva de deflexión adquiere la forma siguiente:

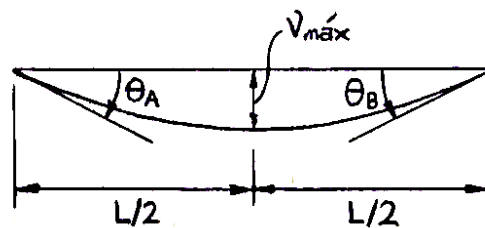


Figura 21: Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada sometida a una carga térmica no uniforme.

Considerando los giros positivos tienen sentido anti horario, tenemos que:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha \cdot \left(\frac{t_i + t_i}{h} \right) = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h}$$

$$\theta_{(x)} = \int \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} dx = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot x + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(L/2)} = 0$ obtenemos:

$$\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot \left(\frac{L}{2} \right) + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h}$$

$$\theta_{(x)} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot x - \frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h} = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} \cdot (2x - L)$$

Si calculamos los giros en A y en B obtenemos entonces:

$$\theta_A = \theta_{(0)} = -\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h} \quad ; \quad (\text{Horario})$$

$$\theta_B = \theta_{(L)} = \frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h} \quad ; \quad (\text{Antihorario})$$

Considerando ahora positivos los desplazamientos en el sentido del eje y (hacia arriba):

$$\frac{dv}{dx} = \theta = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} \cdot (2x - L)$$

$$v_{(x)} = \int \frac{\alpha \cdot t_i}{h} (2x - L) dx = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} (x^2 - L \cdot x) + C_2$$

Aplicando la condición de borde $v_{(0)} = 0$ obtenemos que $C_2 = 0$ y:

$$v_{(x)} = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} (x^2 - L \cdot x)$$

La deflexión máxima se produce en $x = L/2$:

$$v_{\max} = v_{(L/2)} = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{L^2}{2} \right] = -\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L^2}{4 \cdot h} \quad ; \quad (\text{Hacia abajo})$$

2.4.3 Elástica de deformación de una viga Gerber debido a acción térmica no uniforme

Consideramos ahora una viga Gerber sometida a una acción térmica en el tramo AC de longitud L como se muestra en la figura siguiente:

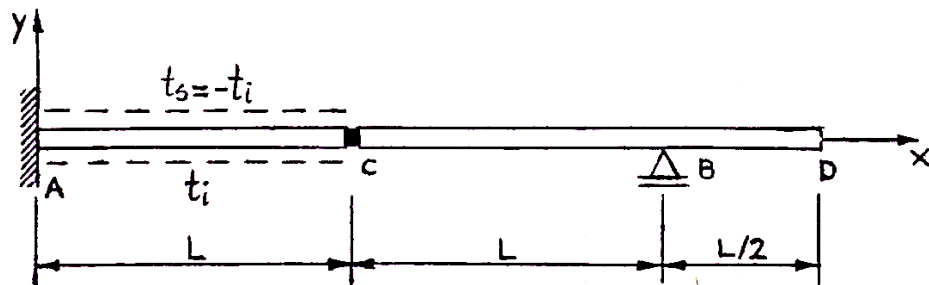


Figura 22: Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada sometida a una carga térmica no uniforme.

Considerando los giros positivos en sentido antihorario, tenemos que:

$$\frac{d\theta}{dx} = \alpha \cdot \left(\frac{t_i + t_i}{h} \right) = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h}$$

$$\theta_{(x)} = \int \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} dx = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot x + C_1$$

Aplicando la condición de borde $\theta_{(0)} = 0$ se obtiene $C_1 = 0$ y así:

$$\theta_{(x)} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot x$$

donde dicha *variación es válida solo para el tramo AC* ($0 \leq x \leq L$), que es donde está presente la acción térmica.

- Si calculamos el *giro a la izquierda del punto C* (donde se encuentra la articulación) obtenemos:

$$\theta_C^{izq} = \theta_{(L)} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i \cdot L}{h} ; \text{ (Antihorario)}$$

Considerando ahora positivos los desplazamientos en el sentido del eje y (hacia arriba):

$$\frac{dv}{dx} = \theta = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot x$$

$$v_{(x)} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \cdot \int x dx = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} \cdot x^2 + C_2$$

Aplicando la condición de borde $v_{(0)} = 0$ obtenemos que $C_2 = 0$ y:

$$v_{(x)} = \frac{\alpha \cdot t_i}{h} \cdot x^2$$

también válida solo para el tramo AC ($0 \leq x \leq L$).

- El *desplazamiento del punto C* viene entonces dada por:

$$v_C = v_{(L)} = \frac{\alpha \cdot t_i \cdot L^2}{h} ; \text{ (Hacia arriba)}$$

Ahora, si bien no podemos aplicar las ecuaciones obtenidas anteriormente para $x \geq L$, podemos obtener fácilmente valores de desplazamientos y giros en otros puntos de la viga aplicando *relaciones geométricas*, como se observa en la figura 23, que muestra la elástica de deformación aproximada:

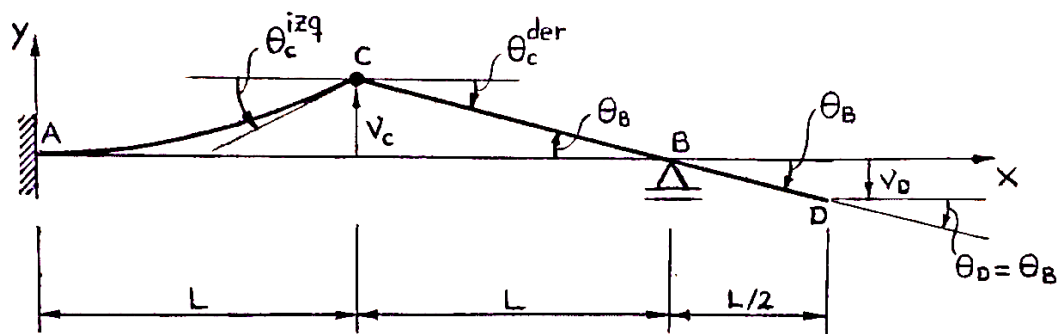


Figura 23: Elástica de deformación de una viga simplemente apoyada sometida a una carga térmica no uniforme.

Por ejemplo, sabemos que por relación de triángulos, ver figura 23, el valor del desplazamiento del punto D se relacionará (en valor absoluto) con el correspondiente al punto C de la siguiente manera:

$$\frac{v_C}{L} = \frac{v_D}{(L/2)}$$

Al estar el punto D ubicado al otro lado del apoyo simple (punto B) y al ser la curvatura nula en todo el tramo CD (debido a que no está afectado por la acción térmica), si el desplazamiento del punto C tiene sentido hacia arriba (positivo), el desplazamiento de D tendrá sentido hacia abajo (negativo). Por consiguiente:

$$v_D = -\frac{v_C}{2} = -\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L^2}{2h} ; \text{ (Hacia abajo)}$$

Además, al ser desplazamientos y giros pequeños, podemos calcular el giro en el punto D como:

$$\theta_D = \frac{v_D}{(L/2)} = -\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h} ; \text{ (Horario)}$$

donde podemos visualizar fácilmente que, por geometría:

$$\theta_D = \theta_B = \theta_C^{\text{der}} = -\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h} ; \text{ (Horario)}$$

Por último, podemos calcular también el giro relativo de las secciones a la izquierda y a la derecha de C como:

$$\Delta\theta_C = \theta_C^{\text{der}} - \theta_C^{\text{izq}} = \left(-\frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h}\right) - \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i \cdot L}{h}\right) = -\frac{3 \cdot \alpha \cdot t_i \cdot L}{h}$$

3. Teoremas Energéticos

En los enunciados de estos teoremas, la letra δ se emplea para designar de manera genérica a los desplazamientos. Es decir que se incluyen tanto los desplazamientos u (o v en el caso de deflexiones) propiamente dichos así como los giros θ . Por otro lado, por cargas P y Q nos referimos a magnitudes estáticas en general (fuerzas y pares).

3.1 Teorema de Clapeyron

Enuncia que el trabajo de deformación de un sólido sometido a una carga puntual P , que produce un desplazamiento δ en el punto de aplicación de la misma resulta:

$$W = \frac{P \cdot \delta}{2}$$

siempre que el sistema sea lineal y no haya variaciones térmicas o inerciales.

En el caso en que exista un número n de cargas P_i que causen n desplazamientos δ_i correspondientes, el trabajo total viene dado por:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i$$

3.2 Teoremas de Castigliano

3.2.1 Primer Teorema de Castigliano

La derivada parcial de la energía de deformación U de una estructura con respecto a cualquier desplazamiento δ_i del punto de aplicación de una carga genérica P_i , da el valor de dicha carga:

$$\frac{\partial U_{(P_1; P_2; \dots; P_i; \dots; P_n)}}{\partial \delta_i} = P_i$$

donde la derivada parcial se debe a que U es función de todas las cargas del sistema.

3.2.2 Segundo Teorema de Castigliano

La derivada parcial de la energía de deformación U de una estructura con respecto a cualquier carga P_i es igual al valor del desplazamiento δ_i correspondiente a dicha carga en su punto de aplicación:

$$\frac{\partial U_{(P_1; P_2; \dots; P_i; \dots; P_n)}}{\partial P_i} = \delta_i$$

A partir de este teorema se puede deducir el Método de la Fuerza Unitaria para el cálculo de desplazamientos.

3.3 Teorema de Betti

Dado un sólido sometido a la acción de dos sistemas de carga P y Q. Si se denomina δ_{PQ} al desplazamiento en la dirección de P producido por Q; y δ_{QP} al desplazamiento en la dirección de Q producido por P, el trabajo recíproco es igual:

$$W_{\delta_{PQ}} = W_{\delta_{QP}}$$

Tomando el caso de la viga empotrada libre:

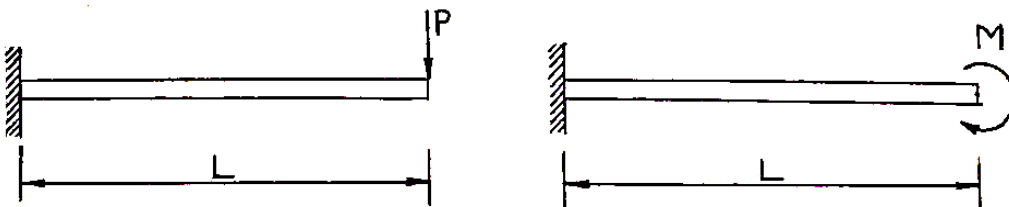


Figura 24: Ejemplo de aplicación del Teorema de Betti. Caso de una viga en voladizo sometida a dos sistemas de cargas diferentes: Una carga P y un par M, ambas en el extremo libre.

$$\delta_{MP} = \theta_B^P = \frac{P \cdot L^2}{2EI} \quad ; \quad \delta_{PM} = v_B^M = \frac{M \cdot L^2}{2EI}$$

$$W_{\delta_{MP}} = M \cdot \left(\frac{P \cdot L^2}{2EI} \right) \quad ; \quad W_{\delta_{PM}} = P \cdot \left(\frac{M \cdot L^2}{2EI} \right)$$

3.4 Teorema de Maxwell

Es un caso particular del Teorema de Betti en donde las cargas P y Q son unitarias:

$$\delta_{PQ} = \delta_{QP}$$

Tomando el caso de la viga empotrada libre:

$$\delta_{MP} = \theta_B^P = \frac{L^2}{2EI} = v_B^M = \delta_{PM}$$

4. Teorema de Trabajos Virtuales (TTV)

Algunos autores se refieren al enunciado como *Principio de los Trabajos Virtuales* y otros como *Teorema de los Trabajos Virtuales* (TTV). Cabe recordar que un principio no requiere una demostración mientras que un teorema sí. La elección de una u otra opción depende básicamente de dos criterios:

- Si se considera válida la *Ley del Paralelogramo* para la suma de vectores de fuerzas, entonces se parte de la noción de equilibrio y se puede demostrar el Teorema de los Trabajos Virtuales. La demostración es posible tanto para sólidos rígidos como deformables.
- En cambio, si se acepta la validez del Principio de los Trabajos Virtuales, se debe probar el equilibrio.

En la asignatura se escoge el primer criterio y entonces puede demostrarse el teorema.

4.1 Noción de Trabajo Virtual

Para definir la idea o noción de Trabajos Virtuales deben definirse algunos conceptos previos, muy importantes y que juegan un rol muy importante en la práctica:

4.1.1 Sistema Equilibrado

Un *Sistema Equilibrado* SE, simplemente es un sistema que está en equilibrio, es la única exigencia que tiene.

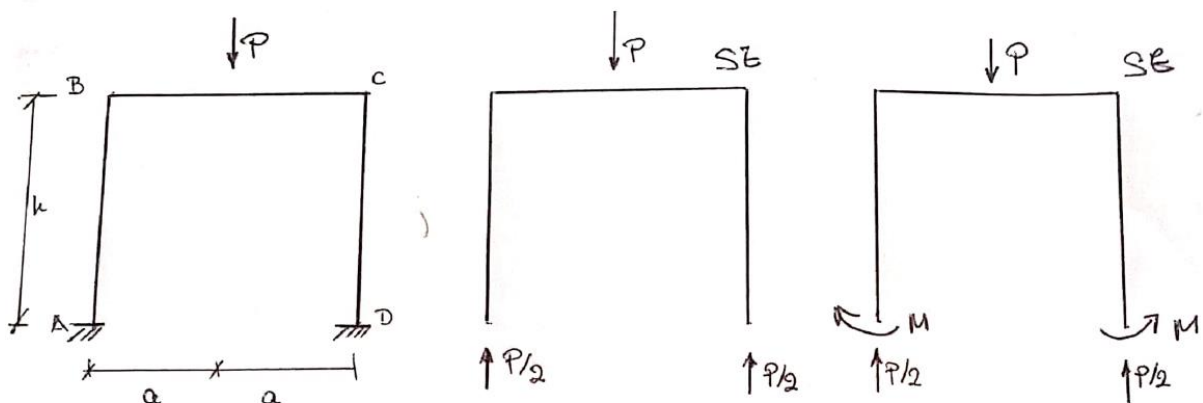


Figura 24: Ejemplos de Sistema Equilibrado

4.1.2 Deformación Virtual

Se denomina *Deformación Virtual DV* a un conjunto de desplazamientos (de un sólido) *pequeños y compatibles con los vínculos* (externos e internos).

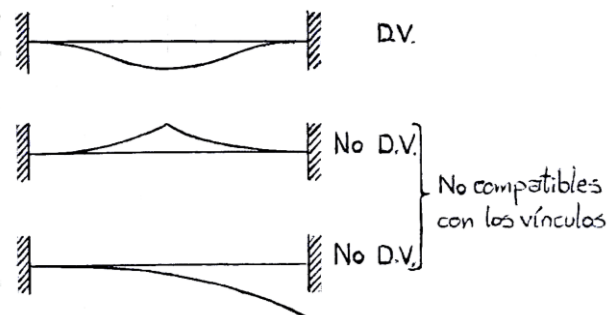


Figura 25: Ejemplos de deformaciones que satisfacen el requisito de DV y otras que no lo cumplen.

La Deformación Virtual es arbitraria, puede ser una deformación real de la estructura u otra de interés. Luego es independiente de la carga.

4.1.3 Términos Complementarios de Trabajo

En primer lugar, se debe recordar la noción de desplazamientos o deformaciones complementarias de trabajo. Por ejemplo, el término complementario de trabajo de una fuerza F es un desplazamiento propiamente dicho, en la dirección de la Fuerza. Análogamente el término complementario de trabajo de un par M es una rotación, aplicados ambos en el mismo punto.

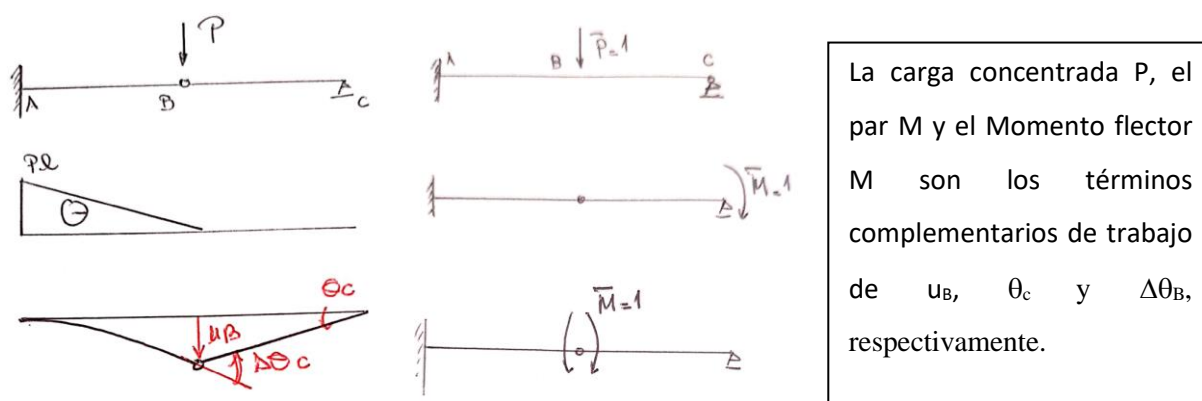


Figura 26: Ejemplos de términos complementarios de trabajo.

Además, cabe indicar otras posibilidades menos intuitivas. Por ejemplo, para el caso de un par de pares (iguales y de sentido contrario), que responden a la definición de Momento Flector en una sección de una barra, el término complementario de trabajo es el giro relativo de las partes

de la barra que aparecen al introducir una articulación, necesaria para poner en evidencia el Momento Flector en una sección de una barra.

4.1.4 Noción de Trabajos Virtuales, Trabajo Virtual Externo y Trabajo Virtual Interno.

Dado un sólido de interés que está en equilibrio, luego cumple con las condiciones de Sistema Equilibrado SE, al cual se le superpone una Deformación Virtual DV, entonces se denomina Trabajo Virtual δW al trabajo que realizan las acciones y sollicitaciones del Sistema Equilibrado con los desplazamientos y deformaciones de la deformación virtual. En particular se habla de Trabajo Virtual de las Fuerzas exteriores δW_E al que realizan las cargas del Sistema Equilibrado con el movimiento de sus puntos de aplicación definidos en la Deformación Virtual. Análogamente se introduce la noción de Trabajo Virtual de las fuerzas interiores δW_I al que realizan las sollicitaciones del Sistema Equilibrado con las deformaciones complementarias de trabajo propias de la deformación virtual.

4.2 Teorema de Trabajos Virtuales para sólidos rígidos.

Para cualquier sólido rígido sometido a la acción de un *sistema de fuerzas en equilibrio* (SE), el Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas es nulo:

$$\delta W_E = 0$$

Para demostrar este teorema consideramos un sólido rígido en el plano xy , al cual se le aplican una carga puntual P_i en A, a una distancia x_i de un punto pivote y un par M_j :

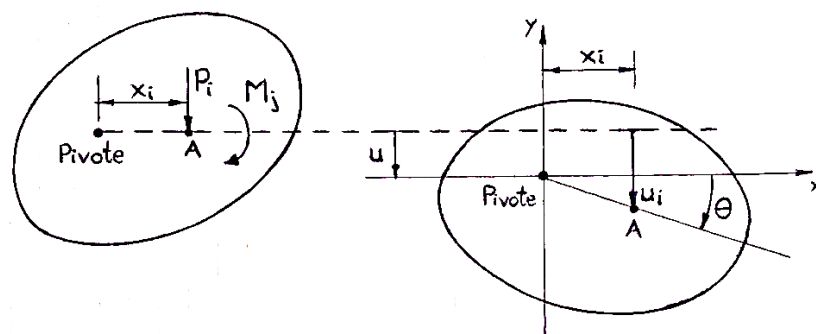


Figura 27: Movimiento de Sólido Rígido

La Deformación Virtual que puede imponerse al sólido de interés, al ser *indeformable*, se reduce a una rototraslación, es decir a la suma de un desplazamiento de sólido rígido u , más una rotación de sólido rígido θ . Es importante recordar que en este caso no cambia la distancia

relativa entre los distintos puntos del sólido y, luego, las deformaciones correspondientes a este caso son nulas.

Como puede observarse en la figura 26, existe un punto al cual se refiere el movimiento rígido y hace las veces de *pivote*. Puede considerarse que el sólido se desplaza y gira sobre el pivote considerado. Luego el movimiento de punto genérico A, es la suma de dos desplazamientos verticales. El desplazamiento total u_i se obtiene como la suma del desplazamiento vertical del pivote u , igual para todo el sólido, más otro desplazamiento u' debido a la rotación θ y que depende de la posición del punto A. El desplazamiento u' se obtiene partiendo de la hipótesis general de pequeños giros y desplazamientos, a partir de la cual es válido establecer que:

$$\tan\theta = \frac{u'}{x_i} \cong \theta$$

con lo cual:

$$u_i = u + \theta \cdot x_i$$

Ahora, el trabajo virtual externo viene dado entonces por el trabajo de las cargas P_i y los pares M_j del sistema equilibrado con sus correspondientes términos complementarios de trabajo:

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \sum_{i=1}^n P_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot \theta \\ \delta W_E &= \sum_{i=1}^n P_i \cdot (u + \theta \cdot x_i) + \sum_{j=1}^m M_j \cdot \theta \end{aligned}$$

Reordenando los términos e igualando a cero tenemos:

$$\delta W_E = \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) \cdot u + \left[\left(\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i \right) + \sum_{j=1}^m M_j \right] \cdot \theta = 0$$

lo cual conduce a dos posibles soluciones:

- Si $u = \theta = 0$ obtenemos la solución trivial, la cual implica que no hay DV y no es de utilidad.
- Si $\sum \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n P_i = 0$ y $\sum \mathbf{M} = \left(\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i \right) + \sum_{j=1}^m M_j = 0$, el sistema está en equilibrio.

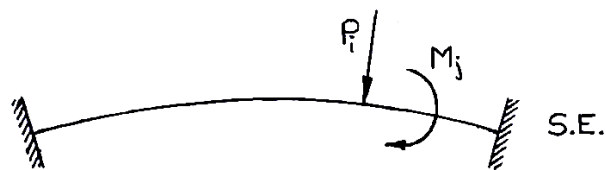
Es importante resaltar que la segunda condición es la de interés. La misma expresa que el sistema de fuerzas está en equilibrio y, por lo tanto se cumple con la condición de SE, la cual se ha obtenido imponiendo la nulidad de δW_E . La demostración es una *doble implicación* ya que, si se impone a priori que *el sistema está equilibrado* ($\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$), se obtendrá $\delta W_E = 0$.

4.3 Teorema de Trabajos Virtuales para sólidos deformables.

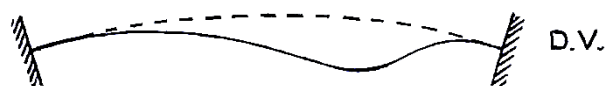
Dado un *Sistema Equilibrado (SE)* al cual se le superpone una *Deformación Virtual (DV)*, se debe cumplir que el Trabajo Virtual de las Fuerzas Internas δW_I debe ser igual al Trabajo Virtual de las Fuerzas Externas δW_E :

$$\delta W_E = \delta W_I$$

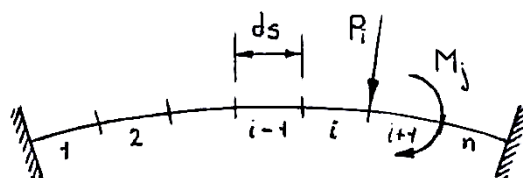
Para demostrar este teorema consideramos un Sistema Equilibrado (SE):



al cual se le superpone una Deformación Virtual (DV):

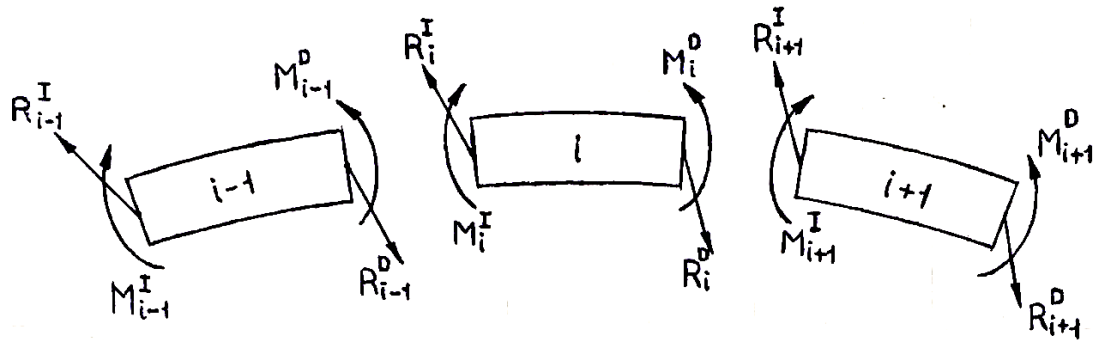


Luego cortamos la estructura en un conjunto suficientemente grande de n partes de longitud diferencial ds :



Por comodidad se hacen coincidir los cortes con los puntos de aplicación de P_i y M_j (lo que no quiere decir que en cada corte haya un P_i o un M_j).

Consideramos en una primera instancia tres trozos de la estructura denominados $i-1$, i e $i+1$, los separamos y analizamos las resultantes de fuerzas y momentos en los cortes:



donde los superíndices D e I indican las caras derecha e izquierda, respectivamente, de cada trozo.

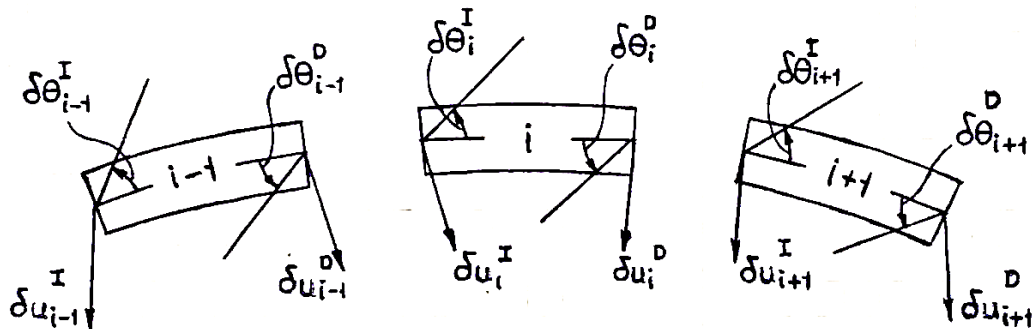
Por ser un sistema equilibrado, en los cortes se cumple que:

$$M_{i-1}^D = M_i^I \quad ; \quad M_i^D = M_{i+1}^I$$

$$R_{i-1}^D = R_i^I \quad ; \quad R_i^D = R_{i+1}^I$$

en módulo, pero de sentido contrario.

Analizando ahora los desplazamientos y giros en los cortes se tienen:



donde el prefijo δ indica que se trata de desplazamientos y giros virtuales y muy pequeños (no confundir con la notación utilizada para desplazamientos en los enunciados de teoremas energéticos anteriores).

Al tratarse entonces de *Deformaciones Virtuales* muy pequeñas y compatibles con los vínculos externos e internos, se cumple que:

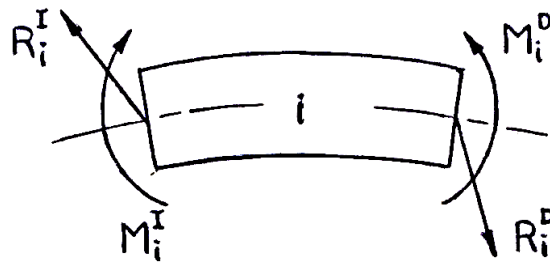
$$\delta\theta_{i-1}^D = \delta\theta_i^I \quad ; \quad \delta\theta_i^D = \delta\theta_{i+1}^I$$

$$\delta u_{i-1}^D = \delta u_i^I \quad ; \quad \delta u_i^D = \delta u_{i+1}^I$$

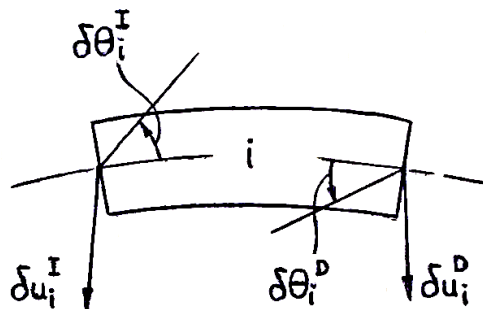
Como consecuencia de las definiciones de Resultante y Momento de Reducción, y por Compatibilidad de Desplazamientos, el trabajo virtual externo de las mismas es nulo. Así, el Trabajo Virtual Externo δW_E corresponde sólo al producido por las cargas P_i y M_j :

$$\delta W_E = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta u_i + \sum_{j=1}^m M_j \cdot \delta \theta_j$$

Para obtener el valor del trabajo virtual interno, consideramos ahora solo un trozo genérico i de la estructura. En una primera instancia ponemos en evidencia las resultantes y pares:



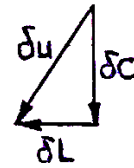
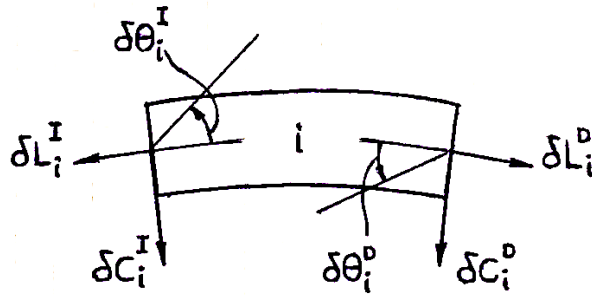
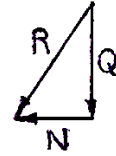
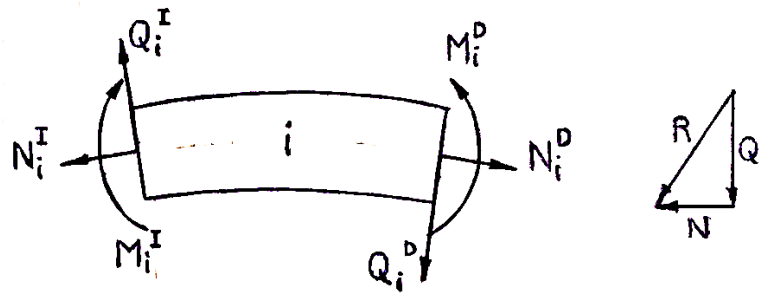
y luego ponemos en evidencia también los desplazamientos y giros:



Obtenemos así que el trabajo virtual interno correspondiente al trozo i es:

$$(\delta W_I)_i = M_i^I \cdot \delta \theta_i^I + M_i^D \cdot \delta \theta_i^D + R_i^I \cdot \delta u_i^I + R_i^D \cdot \delta u_i^D$$

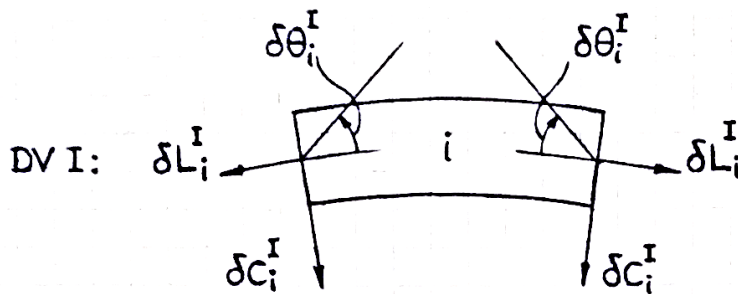
Conviene descomponer resultantes de fuerzas y desplazamientos en sus componentes normal y tangencial a las caras laterales del trozo i (lo que es posible suponiendo válida la ley del paralelogramo):



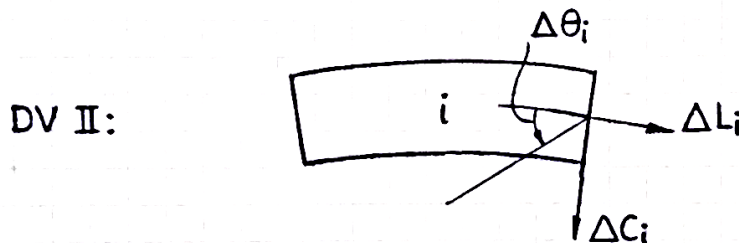
De esta forma obtenemos:

$$(\delta W_I)_i = M_i^I \cdot \delta \theta_i^I + M_i^D \cdot \delta \theta_i^D + N_i^I \cdot \delta L_i^I + N_i^D \cdot \delta L_i^D + Q_i^I \cdot \delta C_i^I + Q_i^D \cdot \delta C_i^D$$

Podemos ahora considerar dos simplificaciones. En la primera descomponemos la DV Total en una DV I y en una DV II:



+



en donde tenemos que:

$$\delta \theta_i^D = \delta \theta_i^I + \Delta \theta_i$$

$$\delta L_i^D = \delta L_i^I + \Delta L_i$$

$$\delta C_i^D = \delta C_i^I + \Delta C_i$$

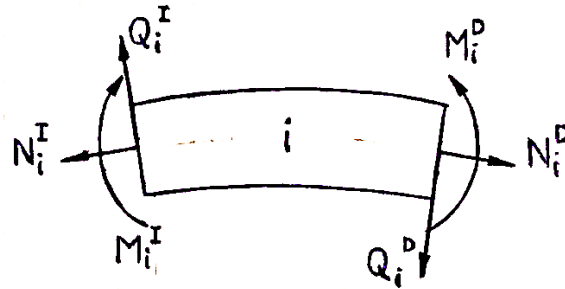
La deformación virtual I (DV I) constituye un movimiento de sólido rígido por lo que el trabajo virtual interno $(\delta W_{I,I})_i$ correspondiente es nulo:

$$(\delta W_{I,I})_i = 0$$

Así, el trabajo virtual interno $(\delta W_I)_i$ en el trozo i será el correspondiente a la DV II:

$$(\delta W_I)_i = (\delta W_{I,II})_i = M_i^D \cdot \Delta\theta_i + N_i^D \cdot \Delta L_i + Q_i^D \cdot \Delta C_i$$

Para la segunda simplificación, volvemos a poner en evidencia las resultantes de fuerzas y de momentos:



y consideramos lo siguiente:

$$M_i^D = M_i^I + \Delta M_i$$

$$N_i^D = N_i^I + \Delta N_i$$

$$Q_i^D = Q_i^I + \Delta Q_i$$

Reemplazando en la ecuación de $(\delta W_I)_i$:

$$(\delta W_I)_i = (M_i^I + \Delta M_i) \cdot \Delta\theta_i + (N_i^I + \Delta N_i) \cdot \Delta L_i + (Q_i^I + \Delta Q_i) \cdot \Delta C_i$$

donde podemos despreciar los productos de incrementos y así:

$$(\delta W_I)_i = M_i^I \cdot \Delta\theta_i + N_i^I \cdot \Delta L_i + Q_i^I \cdot \Delta C_i$$

Obtenemos entonces el Trabajo Virtual Interno δW_I como la suma de los correspondientes a todos los trozos i:

$$\delta W_I = \sum_{i=1}^n (\delta W_I)_i = \sum_{i=1}^n M_i^I \cdot \Delta \theta_i + \sum_{i=1}^n N_i^I \cdot \Delta L_i + \sum_{i=1}^n Q_i^I \cdot \Delta C_i$$

donde al ser trozos de longitud diferencial, si hacemos tender dicha longitud a cero obtenemos:

$$\delta W_I = \int M d\theta + \int N dL + \int Q dC$$

Debido a que tanto el análisis global como el particular a partir de los cuales se obtuvieron δW_E y δW_I respectivamente parten del mismo SE y de la misma DV bajo iguales condiciones, podemos asegurar que la integral del trabajo virtual interno para cada trozo i a lo largo de la estructura considerada es igual al trabajo virtual externo de toda la estructura:

$$\delta W_E = \delta W_I$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta u_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j = \int \bar{M} d\theta + \int \bar{N} dL + \int \bar{Q} dC$$

Donde los términos que se indican con un segmento superior, corresponden al sistema equilibrado SE, para distinguirlos de los demás términos que están asociados a la deformación virtual DV.

La deducción del TTV para sólidos deformables, excepto por las simplificaciones que se introdujeron en la demostración, es general y no depende del material del sólido.

4.4 Aplicación del Teorema de Trabajos Virtuales para Teoría de Estructuras.

Para utilizar el TTV en Teoría de Estructuras caben dos consideraciones importantes:

- a) Los elementos diferenciales $d\theta$, dL y dC son los correspondientes a la *Teoría de Estructuras*, que se definen de manera similar a lo visto en Resistencia de Materiales:

$$d\theta = \frac{M dx}{EI} \quad ; \quad dL = \frac{N dx}{EA} \quad ; \quad dC = \chi \frac{Q dx}{GA}$$

- b) La Deformación Virtual DV coincide con la deformación real de la estructura

Luego el *Teorema de los Trabajos Virtuales para Estructuras de Barras* se expresarse como:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta u_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j = \int \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) + \int \bar{N} \left(\frac{N dx}{EA} \right) + \chi \cdot \int \bar{Q} \left(\frac{Q dx}{GA} \right)$$

en donde χ es un factor de forma de la sección transversal, necesario para evaluar la deformación por corte dC .

Es importante destacar que los términos que están con una línea superior corresponden al SE, que como se ha indicado es arbitrario, pero debe estar en equilibrio y los términos que no tienen la línea superior corresponden a la deformación virtual DV, que para el caso de interés coincide con la deformación real.

Luego, es simple calcular desplazamientos de interés mediante el empleo del Teorema de los Trabajos Virtuales. La única variable que puede fijarse a esta altura es el Sistema Equilibrado, que debe elegirse de manera adecuada.

Si uno desea calcular un movimiento dado, sea un desplazamiento δu_i o una rotación $\delta \theta_j$ recordando el concepto de término complementario de trabajo, debe elegir entonces una carga \bar{P}_i o un par \bar{M}_j que junto con los desplazamientos que se pretende calcular definen el el trabajo externo δW_E . Las cargas $\bar{P} = 1$ o pares $\bar{M} = 1$ se hacen unitarias así las integrales del segundo miembro directamente dan el valor del desplazamiento buscado. Por ejemplo, para calcular un desplazamiento δu_i o un giro $\delta \theta_j$ se plantean, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{P}_i \cdot \delta u_i &= \int \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) + \int \bar{N} \left(\frac{N dx}{EA} \right) + \chi \cdot \int \bar{Q} \left(\frac{Q dx}{GA} \right) \\ \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j &= \int \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) + \int \bar{N} \left(\frac{N dx}{EA} \right) + \chi \cdot \int \bar{Q} \left(\frac{Q dx}{GA} \right) \end{aligned}$$

Además, para el caso de estructuras sometidas preponderantemente a flexión, el trabajo virtual del esfuerzo de corte y del esfuerzo normal pueden despreciarse. Luego los cálculos anteriores se reducen a:

$$\begin{aligned} \bar{P}_i \cdot \delta u_i &= \int \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) \\ \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j &= \int \bar{M} \left(\frac{M dx}{EI} \right) \end{aligned}$$

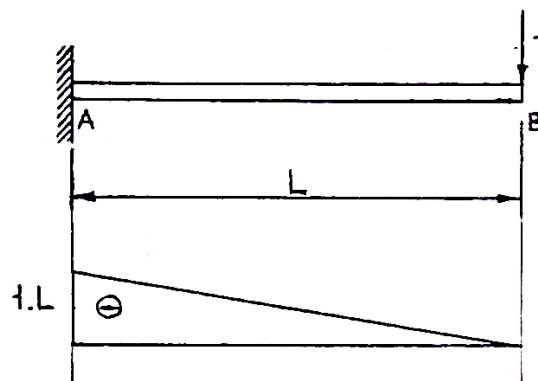
Habitualmente, para casos alternativos de este método, también conocido como de la fuerza unitaria, hay que calcular los polinomios que representan a las funciones de los diagramas de momento M y \bar{M} , calcular su producto y luego integrar. En la práctica es el camino que suele seguirse al aplicar el Segundo Teorema de Castigliano. Sin embargo, existen tablas como la que se adjunta en el apéndice 1 que directamente permiten calcular el valor de la Integral del segundo miembro de manera expeditiva, elección que se adopta en la asignatura. En el próximo apartado se presentan un par de ejemplos sencillos.

4.5. Empleo del TTV para calcular desplazamientos y giros debidos a cargas.

4.5.1 Cálculo del desplazamiento del extremo libre de una viga empotrada con una carga P en su extremo libre

En este problema se ilustra la aplicación del TTV para calcular el desplazamiento v_B (deflexión) del punto B.

En primer lugar, se define el SE. Para ello, el término complementario de trabajo del desplazamiento v_B a calcular es una carga unitaria $\bar{P} = 1$ aplicada en el punto B:



El diagrama de momentos real de la estructura tiene una forma similar y su valor en la raíz del empotramiento es $P \cdot L$. Luego, se puede aplicar la expresión de cálculo del TTV:

$$1. v_B = \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx$$

$$v_B = \frac{1}{EI} \int \bar{M} \cdot M dx$$

Como ya se ha indicado queda calcular el producto de los diagramas de las integrales, que, según la tabla del apéndice tiene un coeficiente $\frac{1}{3}$ que multiplicado por los valores significativos de ambos diagramas: L y P.L respectivamente y por la longitud L. Luego resulta:

$$v_B = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (-P \cdot L) \cdot (-1 \cdot L) \cdot L \right]$$

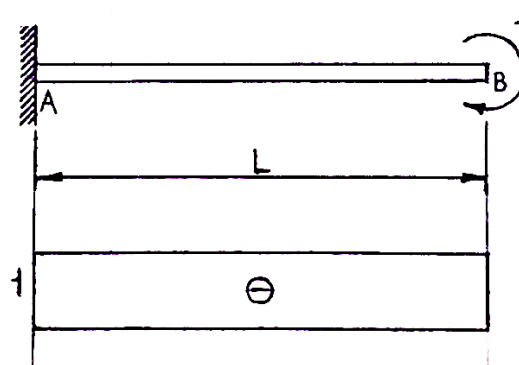
$$v_B = \frac{P \cdot L^3}{3EI}$$

El hecho de que el desplazamiento resulte positivo indica que el sentido del mismo coincide con el de la carga unitaria $\bar{P} = 1$.

El valor del desplazamiento coincide en módulo con el obtenido mediante la utilización de otros métodos antes desarrollados. El signo depende de la convención empleada.

4.5.2 Cálculo de la rotación del extremo libre de una Viga empotrada con una carga P en su extremo libre.

Se trabaja de manera análoga al problema anterior. Luego para definir el Sistema Equilibrado, se impone un par unitario $\bar{M} = 1$ aplicado en el punto B. En este caso el diagrama de Momentos resulta:



De la aplicación del TTV surge:

$$1 \cdot \theta_B = \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx$$

En este caso el diagrama de momentos del SE es constante e igual a 1 y el de la Deformación Virtual DV es un diagrama triangular de valor P.L en la raíz. Teniendo en cuenta que la longitud

es L y que el coeficiente de integración un rectángulo y un triángulo es $\frac{1}{2}$ según la tabla, la rotación buscada resulta:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-P \cdot L) \cdot (-1) \cdot L \right]$$

$$\theta_B = \frac{P \cdot L^2}{2EI}$$

Como el valor es positivo el giro y el par tienen ambos el sentido horario. El módulo de la rotación coincide con el obtenido mediante otros métodos planteados antes. El signo depende de la convención adoptada.

4.6 Empleo del TTV para calcular desplazamientos y giros debidos a acciones térmicas.

En este caso la Deformación Virtual DV se deberá a la acción térmica. Luego, a partir de las consideraciones del apartado 2.4.1 los diferenciales de la dilataciones dL y rotaciones $d\theta$ resultan:

$$dL = \alpha \cdot t \cdot dx \quad ; \quad (\text{Alargamiento Térmica})$$

$$d\theta = \frac{dL_i - dL_s}{h} = \alpha \cdot \left(\frac{t_i - t_s}{h} \right) \cdot dx \quad (\text{Rotación Termica})$$

Las dilataciones y rotaciones definidas de esta manera, se deben emplear en vez de las rotaciones y dilataciones *mecánicas* $d\theta = \frac{Mdx}{EI}$; $dL = \frac{Ndx}{EA}$. Recordemos que las acciones térmicas consideradas no producen deformaciones por corte.

Luego para el caso de Teoría de Estructuras, en presencia de acciones térmicas las integrales de cálculo del TTV resultan:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta u_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j = \int \bar{M} \alpha \cdot \left(\frac{t_i - t_s}{h} \right) \cdot dx + \int \bar{N} \alpha \cdot t \cdot dx$$

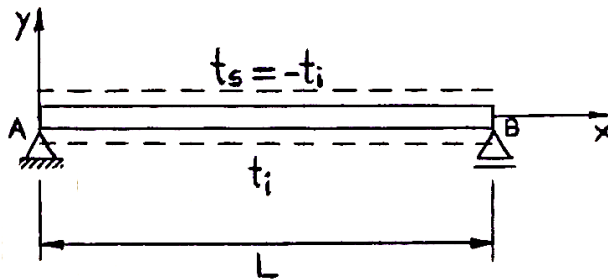
Teniendo en cuenta que los términos relacionados con la temperatura son constantes y salen fuera de la integral queda:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta u_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j = \alpha \cdot \left(\frac{t_i - t_s}{h} \right) \int \bar{M} \cdot dx + \alpha \cdot t \int \bar{N} \cdot dx$$

Luego, en la práctica el cálculo es muy sencillo. Se reduce a calcular los términos asociados a la rotación y a la dilatación, producidos respectivamente por la acción térmica y calcular el área de los diagramas de Momento \bar{M} y Esfuerzo Normal \bar{N} del Sistema Equilibrado.

4.6.1 Cálculo de desplazamientos de una viga simplemente apoyada debido a la acción térmica no uniforme

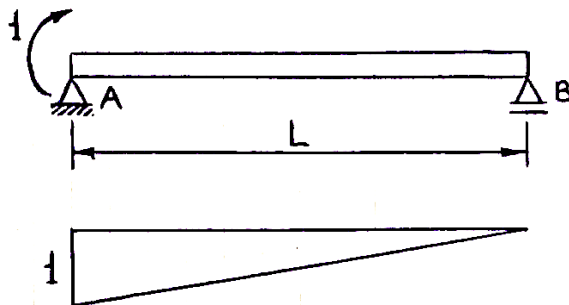
Se estudia el caso de la viga simplemente apoyada con un incremento de temperatura t_i en la parte inferior y una disminución en la temperatura $t_s = -t_i$ en la parte superior (ambas iguales en módulo):



Partiendo de la expresión general deducida en el apartado anterior, observando que la temperatura uniforme resulta nula $t = 0$ y el salto térmico $\Delta t = t_i - t_s = 2t$ resulta:

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \cdot \delta u_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j \cdot \delta \theta_j = \alpha \cdot \frac{2t}{h} \int \bar{M} \cdot dx$$

Para el cálculo del giro θ_A el Sistema Equilibrado



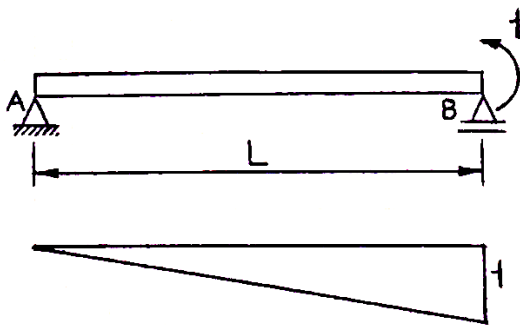
Luego la integral a calcular queda:

$$\theta_A = \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \right) \int \bar{M} dx$$

donde $\int \bar{M} dx$ representa el área del diagrama de Momento Flector del Sistema Equilibrado, en correspondencia con la zona de la viga afectada por el cambio de temperatura. En este caso toda la longitud de la viga. Luego el giro resulta:

$$\theta_A = \frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h}$$

Para calcular θ_B imponemos como SE un par unitario ($\bar{M} = 1$) aplicado en B, dándonos el siguiente diagrama de momento flector:



Reemplazando nuevamente en la fórmula del TTV se obtiene:

$$1. \theta_B = \int \bar{M} \cdot \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \right) dx$$

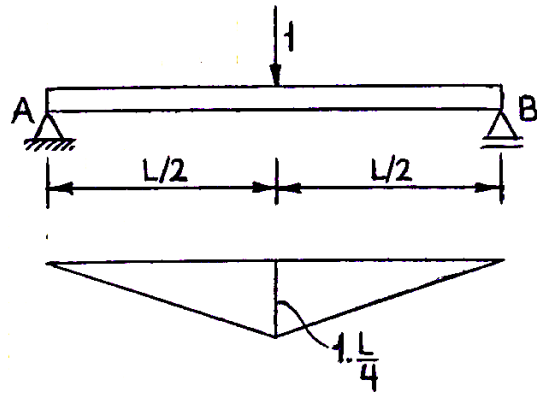
$$\theta_B = \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \right) \int \bar{M} dx$$

Así:

$$\theta_B = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \left(\frac{1 \cdot L}{2} \right)$$

$$\theta_B = \frac{\alpha \cdot t_i \cdot L}{h}$$

Para calcular la deflexión máxima en el centro del vano, imponemos como SE una carga unitaria ($\bar{P} = 1$) aplicada a una distancia $x = L/2$ del apoyo:



Por TTV se tiene:

$$\bar{P}_1 \cdot \delta u_i = \int \bar{M} d\theta$$

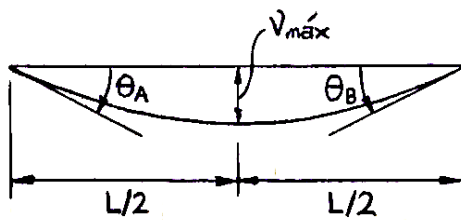
Reemplazando en la fórmula se obtiene:

$$1 \cdot v_{\text{máx}} = \int \bar{M} \cdot \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \right) dx$$

$$v_{\text{máx}} = \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \right) \int \bar{M} dx = \frac{2 \cdot \alpha \cdot t_i}{h} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$v_{\text{máx}} = \frac{\alpha \cdot t_i \cdot L^2}{4h}$$

La elástica de deformación entonces resulta ser:



5. Bibliografía

[1] “TIMOSHENKO – Resistencia de Materiales”, James M. Gere (5ª EDICIÓN)

6. Apéndice: Tabla para el cálculo de las integrales

Tabla 1: Cálculo del producto de integrales $\int \frac{M}{EI} dx$

	$l' M \bar{M}$	$\frac{1}{2} l' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{2}{3} l' M \bar{M}_m$	$\frac{2}{3} l' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M \bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_B (\bar{M}_A + 2\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}_m$	$\frac{5}{12} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{4} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' (1+\alpha) M_B \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{6} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_A (2\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_A \bar{M}_m$	$\frac{1}{4} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' (1+\beta) M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' (M_A + M_B) \bar{M}$	$\frac{1}{6} l' (M_A + 2M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' [M_A (2\bar{M}_A + \bar{M}_B) + \bar{M}_B (2\bar{M}_B + \bar{M}_A)]$	$\frac{1}{3} l' (M_A + M_B) \bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l' (3M_A + 5M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (M_A + 3M_B) \bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' \bar{M} [M_A(1+\beta) + M_B(1+\alpha)]$
	$\frac{2}{3} l' M_m \bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M_m (\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{8}{15} l' M_m \bar{M}_m$	$\frac{7}{15} l' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_m \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' (1+\alpha\beta) M_m \bar{M}$
	$\frac{2}{3} l' M_B \bar{M}$	$\frac{5}{12} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B (3\bar{M}_A + 5\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_B \bar{M}_m$	$\frac{8}{15} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{3}{10} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (5 - \beta - \beta^2) \times M_B \bar{M}$
	$\frac{2}{3} l' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A (5\bar{M}_A + 3\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_A \bar{M}_m$	$\frac{11}{30} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{2}{15} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (5 - \alpha - \alpha^2) \times M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B (\bar{M}_A + 3\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_B \bar{M}_m$	$\frac{3}{10} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_B \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1 + \alpha + \alpha^2) \times M_B \bar{M}$
	$\frac{1}{3} l' M_A \bar{M}$	$\frac{1}{12} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A (3\bar{M}_A + \bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_A \bar{M}_m$	$\frac{2}{15} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{30} l' M_A \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1 + \beta + \beta^2) \times M_A \bar{M}$
	$\frac{1}{2} l' M \bar{M}$	$\frac{1}{6} l' (1 + \alpha) \bar{M}_B M$	$\frac{1}{6} l' M [(1 + \beta) \bar{M}_A + (1 + \alpha) \bar{M}_B]$	$\frac{1}{3} l' (1 + \alpha\beta) \bar{M}_m M$	$\frac{1}{12} l' (5 - \beta - \beta^2) \times M \bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1 + \alpha + \alpha^2) \times M \bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M \bar{M}$