



ANALISIS ESTRUCTURAL I

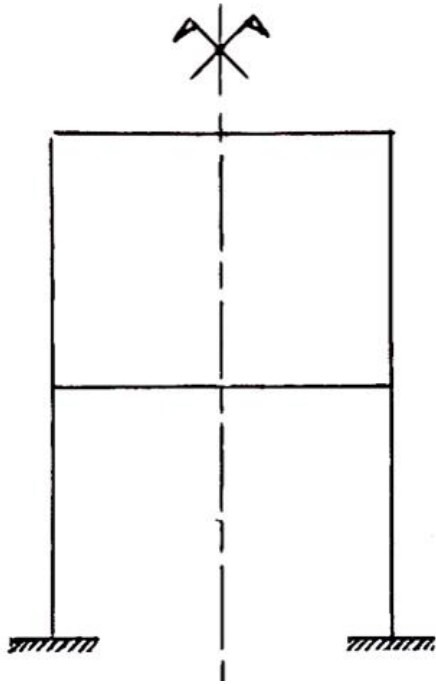
Unidad 3: Método de las Fuerzas Problemas de Simetría

Dr. Ing. Carlos García Garino

Carrera de Ingeniería Civil,
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Abril de 2022

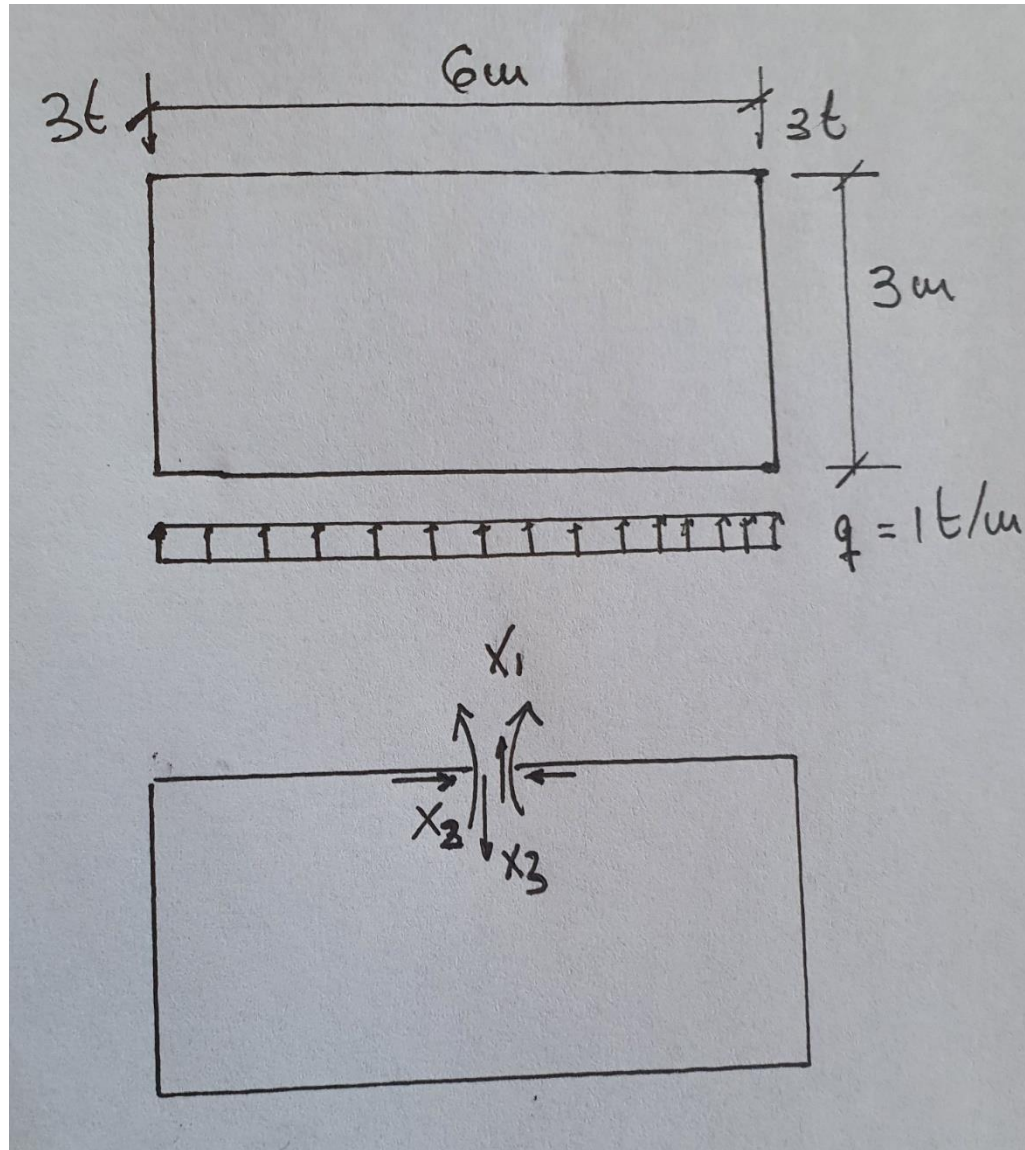
Simetría y Antisimetría. Guía de Cálculo.

En primer lugar conviene repasar el procedimiento para calcular una estructura hiperestática mediante el método de las fuerzas, cuando se verifican las condiciones de simetría



1. Identificar el eje de simetría estructural
2. Analizar el estado de cargas y, si corresponde descomponer las cargas en un estado simétrico, más otro antisimétrico.
3. Imponer las condiciones de simetría que corresponda y analizar el GH de la media estructura resultante (para ambos casos: simétrico y antisimétrico)
4. Determinar las incógnitas hiperestáticas y trazar los diagramas de momentos finales.
5. Extender los diagramas de momento a la media estructura restante. Para ello se lleva a cabo una reflexión en el caso simétrico y una reflexión, seguida de una multiplicación por -1 , para el caso antisimétrico.
6. Sumar los diagramas finales simétrico y antisimétrico. Trazar los diagramas de esfuerzo de corte y esfuerzo normal.

Datos y planteo del problema.

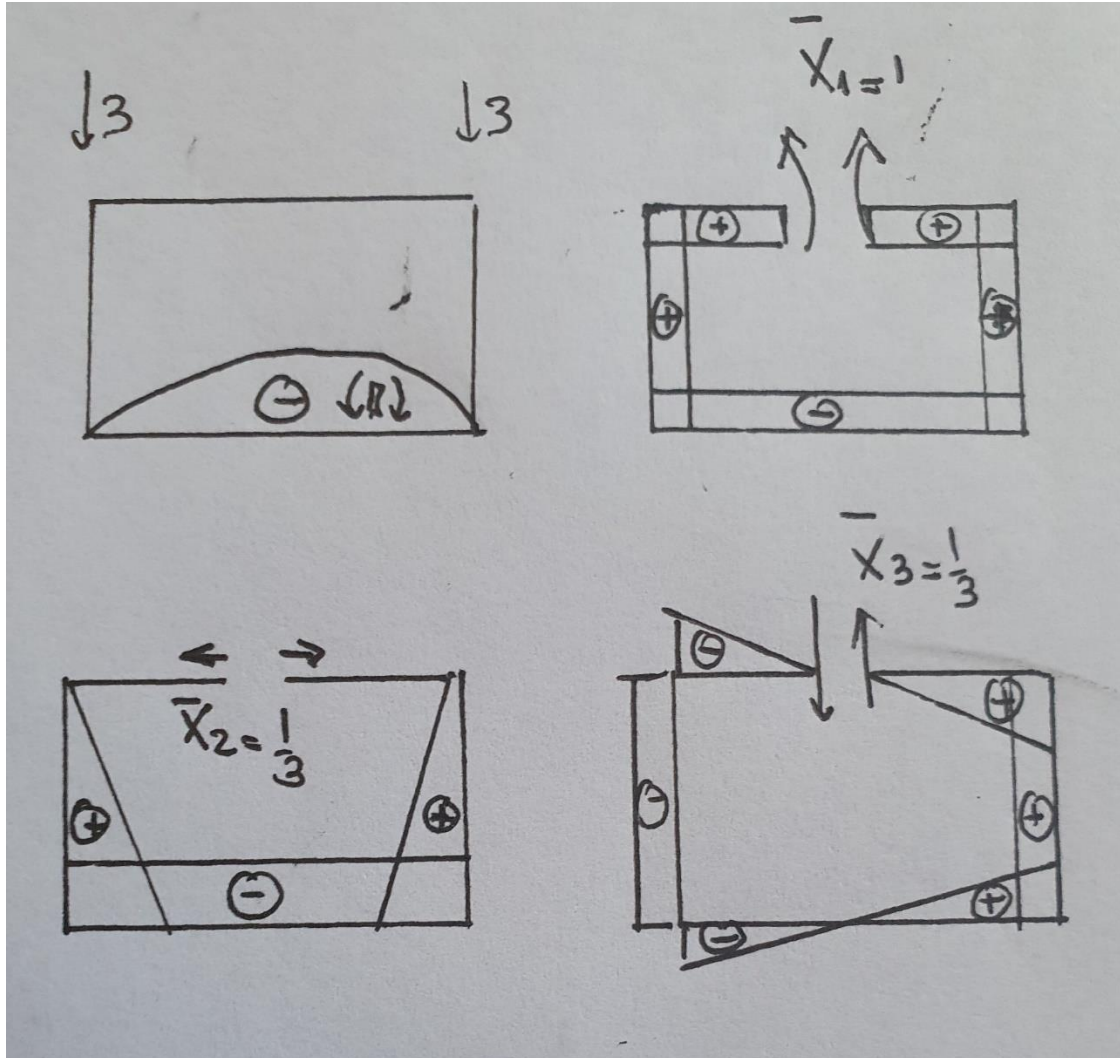


En la figura se observa un marco cerrado, $GH=3$, sometido a un estado de cargas en equilibrio. Por ese motivo no se muestran los vínculos.

Se abre el marco cerrado en la intersección del eje de simetría y la viga superior.

Se ponen en evidencia las incógnitas X_1 , X_2 y X_3 . Las dos primeras representan el momento flector y el esfuerzo normal, luego son simétricas. La última representa el esfuerzo de Corte y es antisimétrico.

Diagramas de Momento debidos a la carga e incógnitas.



En la figura superior izquierda se muestra el diagrama de momentos debido a la carga distribuida. En la figura superior derecha el diagrama de momentos debido a $X_1 = 1$ y en las figuras inferiores los diagramas debidos a X_2 y X_3 , respectivamente.

De la observación de los diagramas surge que todos son simétricos, excepto el debido a X_3 .

La integración del diagrama debido a X_3 con los diagramas debidos a las cargas y a las otras dos incógnitas es nulo.

Para ellos simplemente puede observarse que en las vigas se integra un diagrama simétrico con otro antisimétrico y en las columnas se integran diagramas con distinto signo.

Cálculo de término de cargas y flexibilidades. Sistema de Ecuaciones Lineales.

$$EI (\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3) = 0$$

$$EI (\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3) = 0$$

$$EI (\delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3) = 0$$

Aplicando el TTV se obtiene:

$$EI \delta_{10} = 18; EI \delta_{20} = 18; EI \delta_{30} = 0$$

$$EI \delta_{11} = 18; EI \delta_{22} = 8; EI \delta_{12} = 9$$

$$EI \delta_{13} = 0; EI \delta_{23} = 0$$

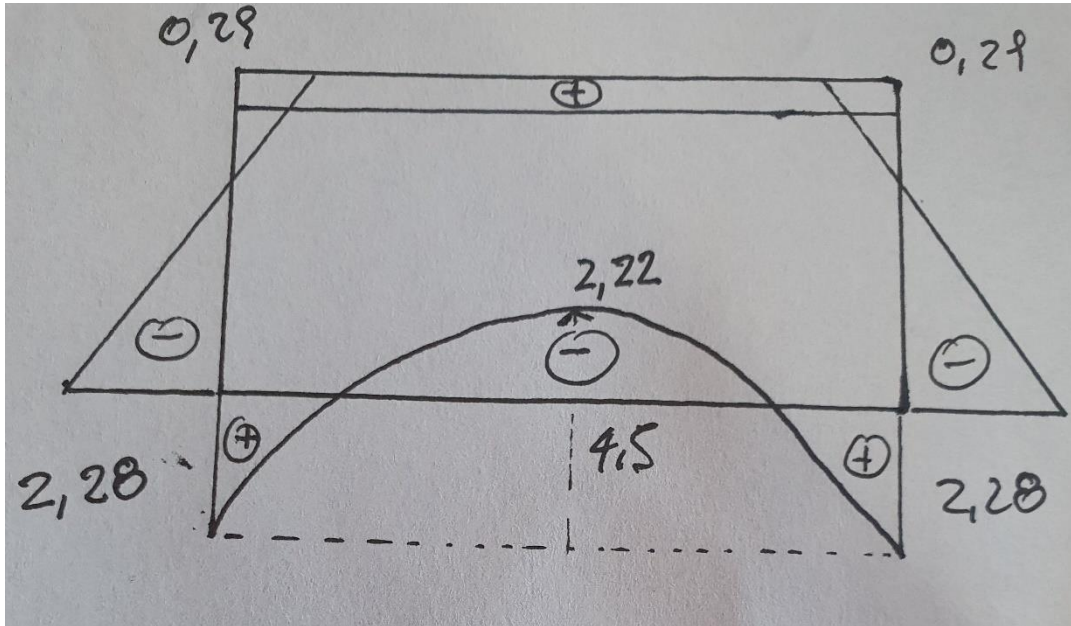
Luego, el Sistema de Ecuaciones Lineales, resulta:

$$18 + 18 X_1 + 9 X_2 + 0 X_3 = 0 \text{ De las dos primeras } X_1 = 0,29$$

$$18 + 9 X_1 + 8 X_2 + 0 X_3 = 0 \text{ ecuaciones surge: } X_2 = -2,57$$

$$0 + 0 X_1 + 0 X_2 + 10 X_3 = 0 \rightarrow X_3 = 0$$

Diagramas de Momentos final.



El diagrama de momento final se obtiene, de la misma forma que en los otros ejemplos del Método de las Fuerzas: combinando linealmente los diagramas de momentos en el Sistema Fundamental debidos a las cargas a X_1 y a X_2 . Cabe señalar que se debe multiplicar, para los casos en que se haya escogido una incógnita no unitaria, el diagrama del SF por el valor de la incógnita correspondiente.

Hay casos que conviene escoger incógnitas con valor distinto al unitario, para obtener diagramas de momentos en el SF con valor unitario, más fáciles para multiplicar y sumar.

Anexo: cálculo de términos de carga y flexibilidades mediante el TTV.

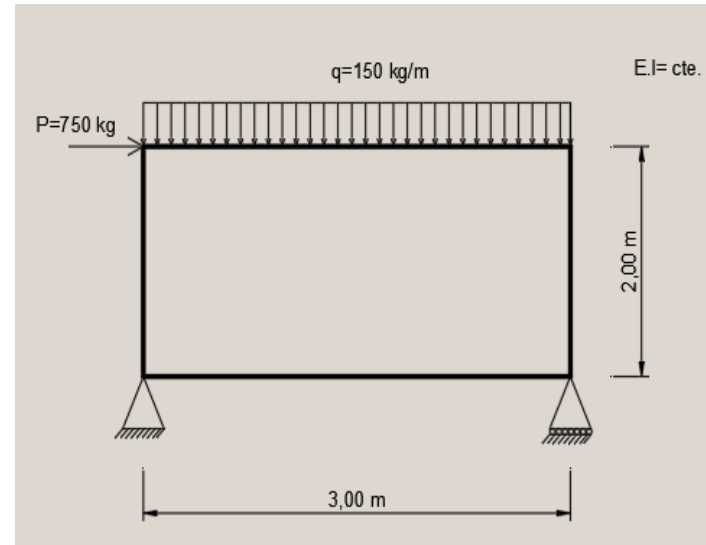
$$EI S_{11} = \underbrace{\boxed{\oplus}}_3 \underbrace{\boxed{\oplus}}_3 + \underbrace{\boxed{\opl�}}_3 \underbrace{\boxed{\opl�}}_3 + \underbrace{\boxed{\opl�}}_6 \underbrace{\boxed{\opl�}}_6 + \underbrace{\boxed{\omin�}}_6 \underbrace{\boxed{\omin�}}_6 = 18$$

$$EI S_{22} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 6 = 8 \quad \triangle \triangle + \triangle \triangle + \boxed{\omin�} \boxed{\omin�}$$

$$EI S_{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 6 = 9 = EI S_{21}$$

$$EI S_{33} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 10$$

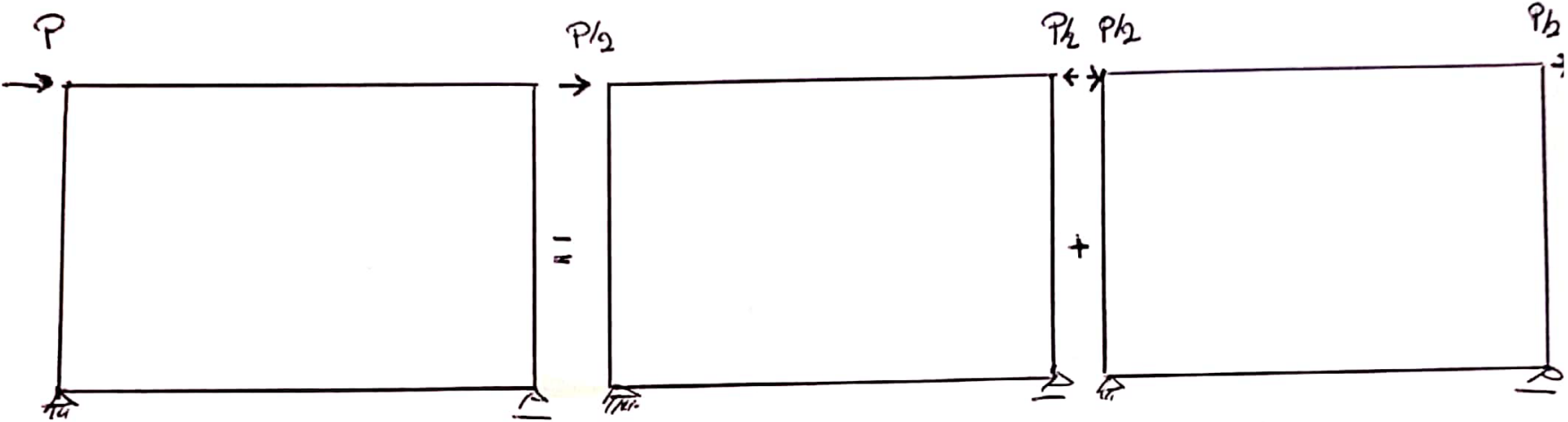
Cálculo del Problema 8 II



La estructura es un marco cerrado, luego el grado de hiperestaticidad es 3. Posee dos ejes de simetría geométrico, uno vertical y uno horizontal. Hay simetría de vínculos respecto del eje de simetría vertical. La carga repartida uniforme es simétrica. Sin embargo la carga concentrada P no es ni simétrica ni antisimétrica. Hay que descomponer a la carga P en dos estados de carga, uno simétrico, otro antisimétrico.

Cálculo del Problema 8 II

La carga concentrada P se descompone en otros dos estados de carga, uno simétrico, más otro antisimétrico.



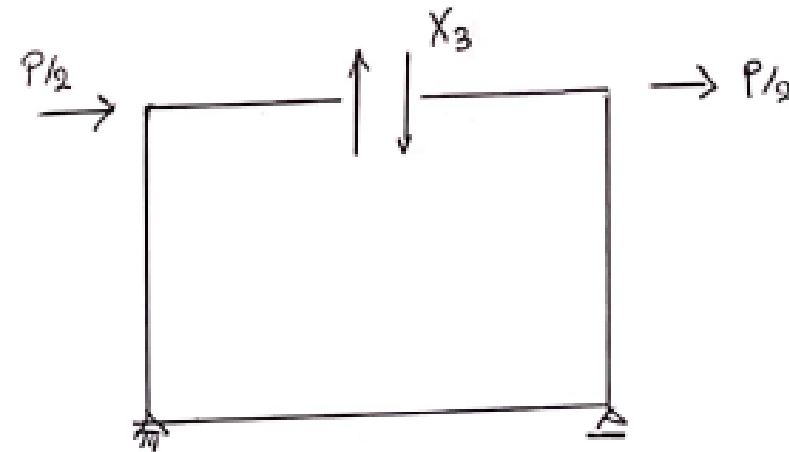
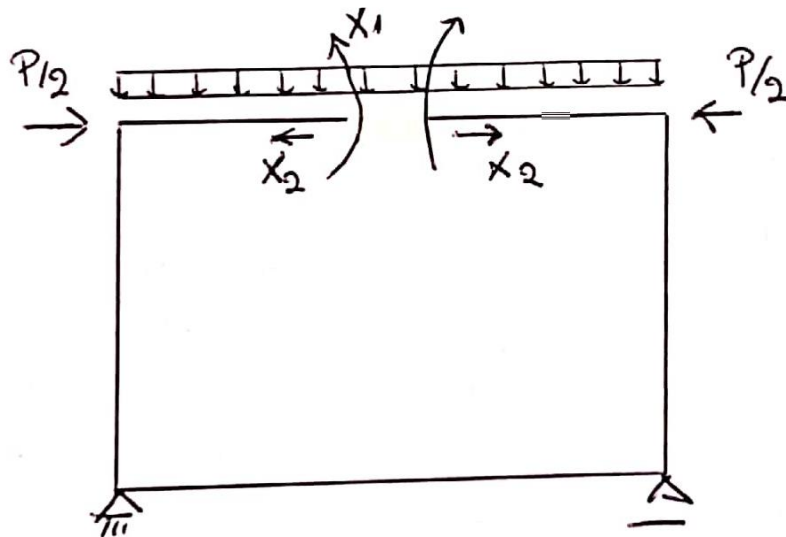
Cálculo del Problema 8 II – Casos Simétrico y Antisimétrico

El estado de cargas simétrico resultante consiste en la carga repartida más un sistema nulo de valor $P/2$ en el dintel superior. Este sistema nulo solamente causa esfuerzo normal en el dintel superior.

Para el caso general, se debe hacer un corte en el marco cerrado y considerar tres incógnitas. Para el caso simétrico se consideran solamente las incógnitas simétricas: Momento Flector y Esfuerzo Normal P en la sección donde se produce el corte.

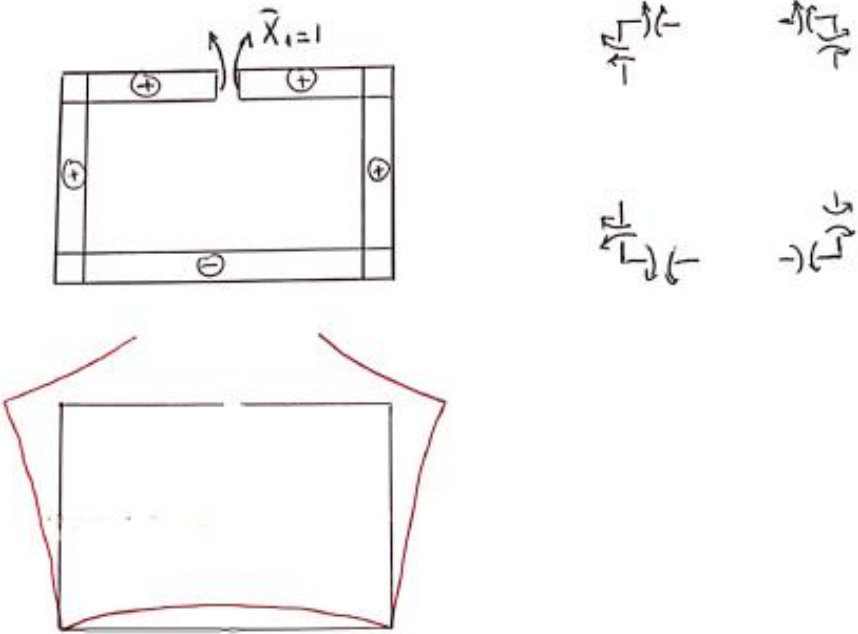
Para el caso antisimétrico la acción consiste en dos cargas concentradas iguales de valor $P/2$ y hay una sola incógnita en la sección del corte, justamente el esfuerzo de corte.

En la figura izquierda y derecha se muestran los SIE para los casos simétrico y antisimétrico, respectivamente



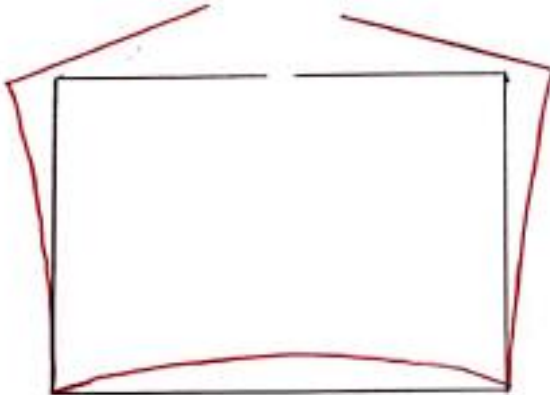
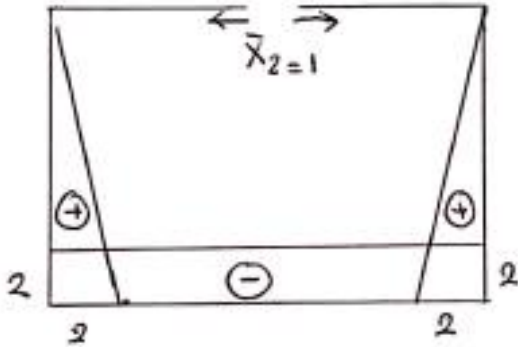
Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso simétrico

Para calcular las flexibilidades se deben calcular los diagramas de momento debidos a las incógnitas. En este caso se muestran el diagrama de Momentos para $X_1=1$ y la elástica correspondiente.



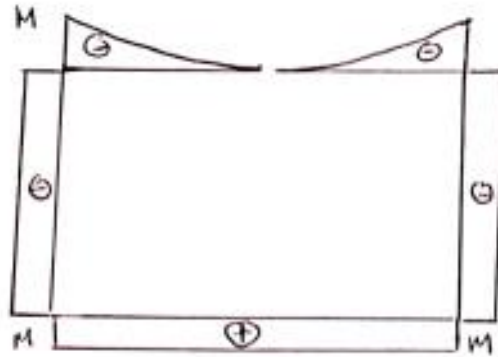
Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso simétrico

Para calcular las flexibilidades se deben calcular los diagramas de momento debidos a las incógnitas. En este caso se muestran el diagrama de Momentos para $X_2=1$ y la elástica correspondiente.

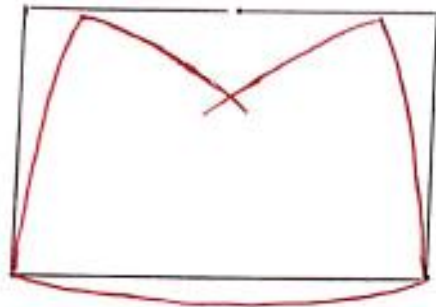


Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso simétrico

Para calcular los términos de cargas se deben trazar el diagrama de Momento debidos a las cargas exteriores. En este caso se muestran el diagrama de Momentos y la elástica correspondiente.



$$M = q \cdot \frac{1,5^2}{2} = 168,75$$



Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso simétrico

Las flexibilidades y términos de cargas se calculan aplicando el TTV, una vez conocidos los diagramas de Momento de las incógnitas unitarias y las cargas.

$$S_{11} = \frac{10}{EI} \quad S_{22} = 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{EI} + 1 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{EI} = \frac{52}{3} \quad S_{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{EI} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 10}{EI}$$

$$\delta_{10} = -2 \cdot \frac{1}{3} \frac{M \cdot 1 \cdot 1,5}{EI} + 2 \cdot \frac{M \cdot 1 \cdot 2}{EI} - \frac{4M \cdot 3}{EI} = -\frac{8M}{EI}$$

$$S_{20} = -2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M \cdot 2 \cdot 2}{EI} - 2 \frac{M \cdot 3}{EI} = -\frac{10M}{EI}$$

Las ecuaciones de compatibilidad y las incógnitas resultan:

$$-\frac{8M}{EI} + \frac{10}{EI} X_1 + \frac{10}{EI} X_2 = 0$$

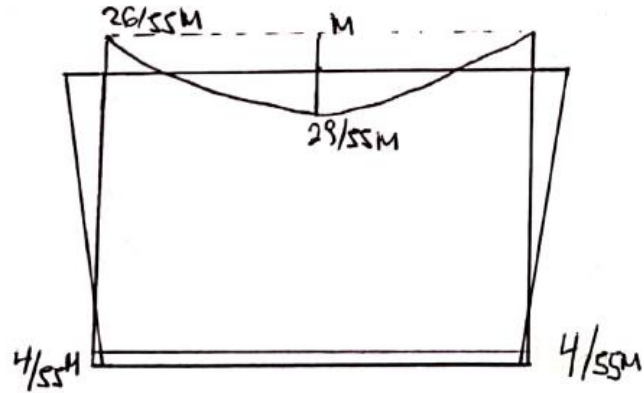
$$X_1 = \frac{20}{13} M$$

$$-\frac{10M}{EI} + \frac{10}{EI} X_1 + \frac{52}{3} X_2 = 0$$

$$X_2 = \frac{3}{11} M$$

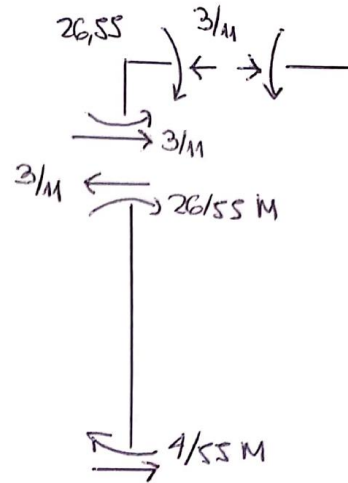
Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso simétrico

El diagrama de Momentos Final queda:



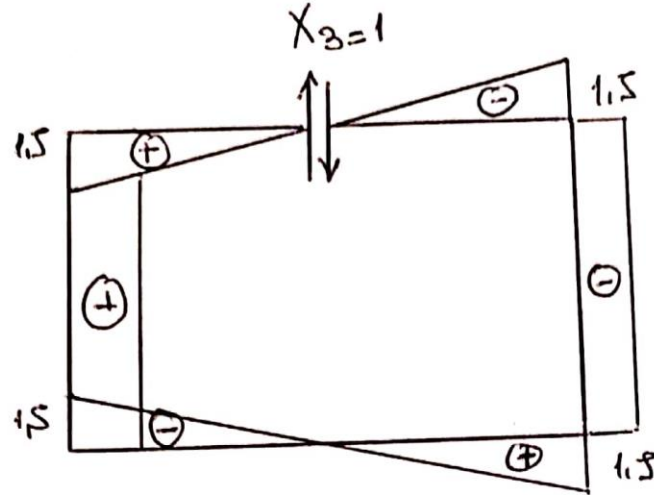
$$k_e = q \left(\frac{e}{2} \right)^2 = q \frac{e^2}{8}$$

$$M_{inf} = -M + \frac{28}{55}M + \frac{26}{55}M = \frac{4}{55}M$$

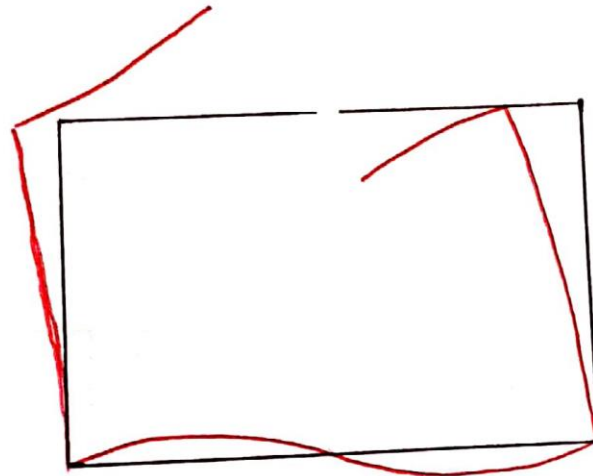


Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso antisimétrico

Para calcular las flexibilidades se deben calcular los diagramas de momento debidos a las incógnitas. En este caso se muestran el diagrama de Momentos para $X_3=1$ y la elástica correspondiente.

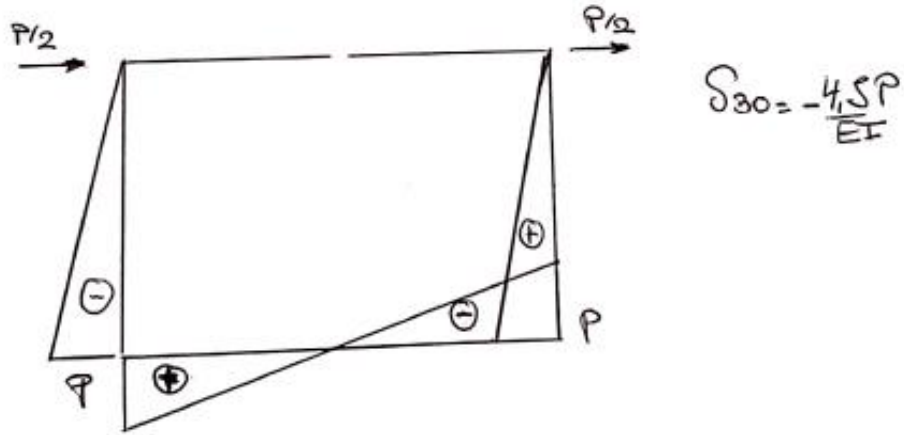


$$S_{33} = \frac{13.5}{EI}$$



Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso antisimétrico

Para calcular los términos de carga se deben calcular los diagramas de momento debidos a las cargas $P/2$.



La ecuación de compatibilidad y la incógnita X_3 resultan:

$$S_{30} + S_{33} X_3 = 0$$

$$X_3 = \frac{4.5P}{13.5P} = \frac{P}{3}$$

Cálculo del Problema 8 II – Solución del caso antisimétrico

El diagrama de Momentos final para el caso antisimétrico, se presenta en la figura.

