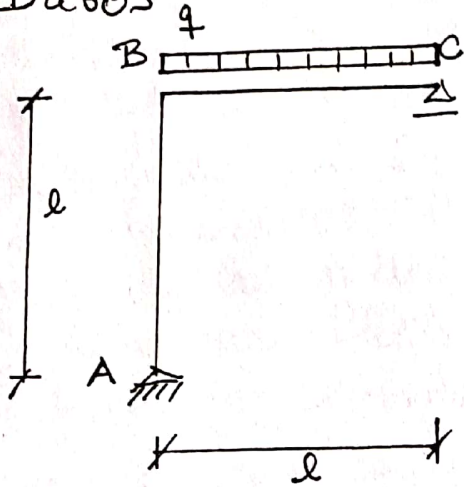


Ejemplos Método de los Desplazamientos (10)

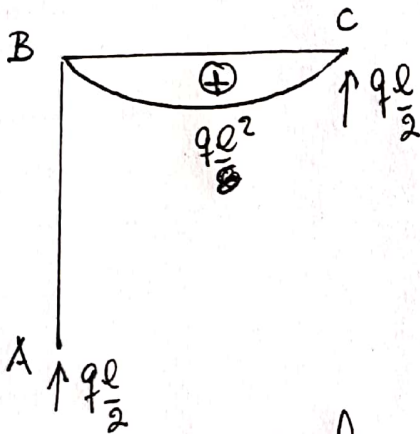
1. Pórtico isostático.

1.1. Datos

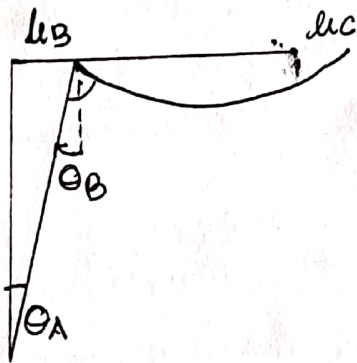


$EI = cte$

1.2 Diagrama de Momentos

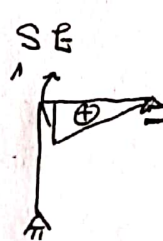


1.3 Elástica de deformación



$$\theta_A = \theta_B \quad ll_B = \theta_A l = ll_C$$

Cálculo de θ_B mediante TV.



$$\theta_B \bar{M} = \int \bar{M} \Delta =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{8} \frac{l}{EI} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$ll_B = \theta_A l = \frac{ql^4}{24EI}$$

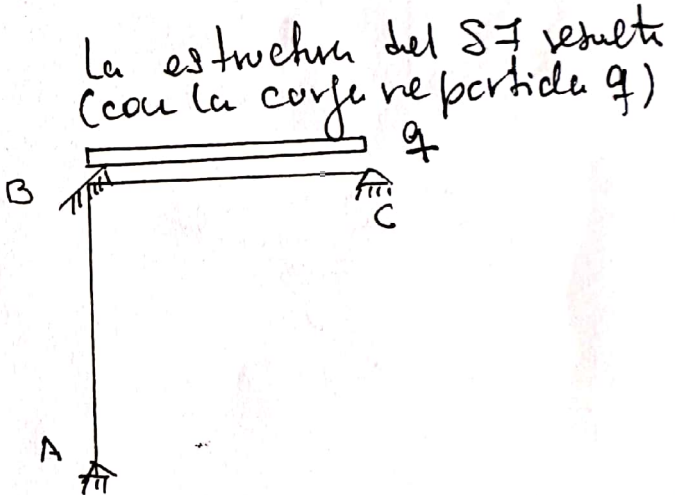
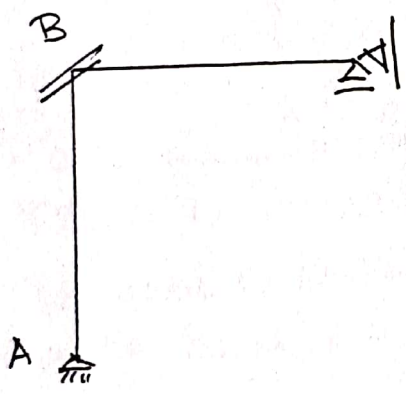
2. Resolución Pórtico isostático mediante MD

2.1 Sistema Fundamental

Se deben identificar las variables cinemáticas independientes. En este caso θ_B y Δ_B . Es decir un giro nodal y un desplazamiento de piso. Son las magnitudes X_1 y X_2 .

Se supone que las barras AB y BC son axialmente indeformables. Podrían bloquearse, además, los giros de los nodos A y C. Sin embargo, dado que el Momento flector vale cero en dichos puntos, no es necesario considerarlos.

Luego se coloca un "empotramiento móvil" en el nodo B y un apoyo móvil horizontal en el punto C.

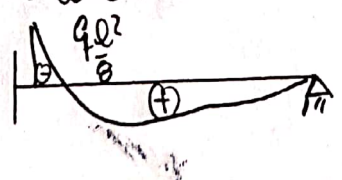


La estructura del SF resulta (con la carga repartida q)

El empotramiento en B del SF surge del empotramiento móvil (impide giros) y de considerar las barras AB y BC axialmente rígidas.

El apoyo fijo en B surge del apoyo móvil vertical (existente) en la estructura, más el apoyo móvil horizontal que se agregó en el punto C para impedir el movimiento del diámetro.

2.2 Debido a la carga repartida q aparece en el apoyo B un momento de valor $\frac{qL^2}{8}$. Dicho valor se obtiene de



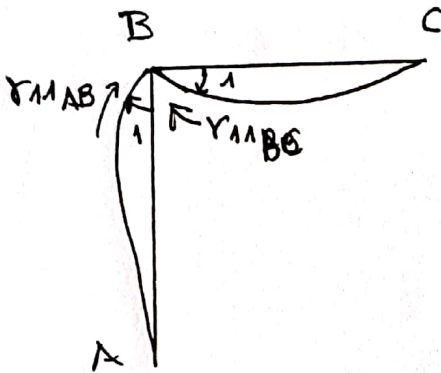
tablas, o bien resolviendo el S.H. mediante el método de las fuerzas.

2.3 Cálculo de rigideces

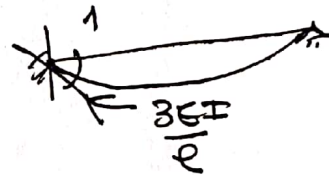
(3)

2.3.1 $\theta_B = 1$. $\bar{X}_1 = 1$

Para calcular las rigideces r_{11} y r_{21} se impone un giro unitario en el punto B, en el Sistema Fundamental. Se deben calcular los pares y es fuerzas de corte que dicho giro causa en las barras AB y BC. La causa, el giro $\theta_B = 1$ en este caso, hace las veces de un descenso de apoyo. Elástica debida a $\theta_B = 1$ $\bar{X}_1 = 1$



El cálculo de r_{11} se debe a la suma de los pares extremos de pieza r_{11BC} y r_{11AB} , respectivamente. De tablas surge que los mismos valores $\frac{3EI}{e}$

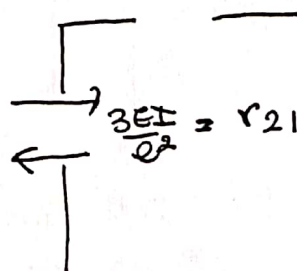
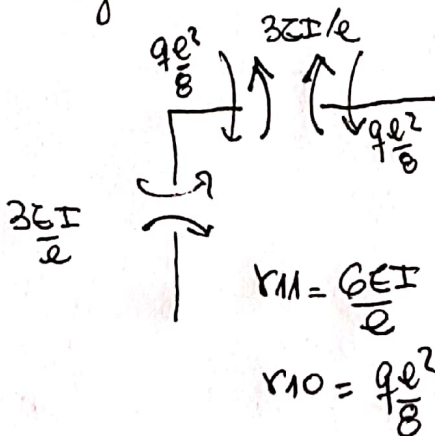


Para calcular la rigidez r_{21} en la dirección de X_2 se debe calcular el corte en la barra AB

$$\frac{3EI}{2} \leftarrow \frac{3EI}{2}$$

$$\rightarrow \frac{3EI}{2}$$

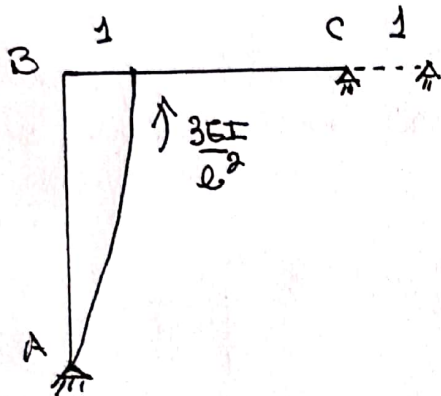
Eguilibrio de nodos B (a la rotación y traslación)



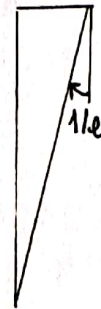
2.3.2 Cálculo de r_{12} y r_{22} $l_B=1$ $\bar{X}_2=1$ (4)

En este caso se impone un movimiento unitario horizontal en el nudo. La viga no se deforma pero si aparecen deformaciones y esfuerzos en la columna AB. Se deben calcular la rigidez r_{22} , es decir la fuerza en la dirección de X_2 que causa $\bar{X}_2=1$ (es decir $l_B=l_C=1$) y el par r_{12} en el nudo B.

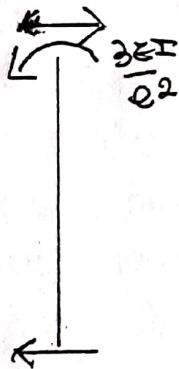
Elasticidad de deformación en el SF.



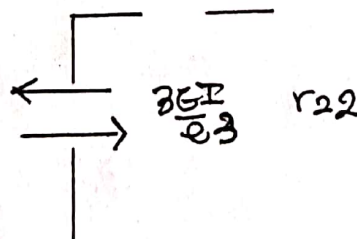
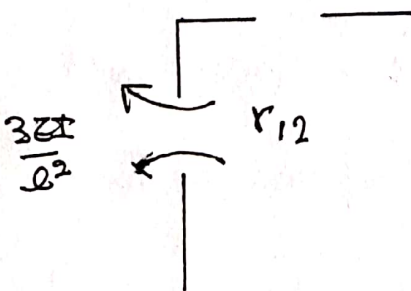
$$r_{21} = \frac{3EI}{e} \frac{1}{e} = \frac{3EI}{e^2}$$



Para calcular r_{22} en la columna AB se obtiene el corte (por equilibrio)



Equilibrio del nudo B (a la rotación y a la traslación)



Sentidos: siempre son positivos los de r_{22} y r_{11} . Luego r_{12} y r_{21} tiene sentido negativo. Observemos que se verifica que $r_{12} = r_{21}$

2.3.3 Ecuaciones de equilibrio

Los apoyos "ficticios" que se utilizaron para bloquear los movimientos θ_B y δ_B no existen! Luego en la estructura real las reacciones de dichos apoyos deben ser nulas.

$$M_B = 0 \Rightarrow -q \frac{l^2}{8} + \frac{6EI}{l} X_1 - \frac{3EI}{l^2} X_2 = 0$$

$$R_B = R_c = 0 \Rightarrow 0 - \frac{3EI}{l^2} X_1 + \frac{3EI}{l^3} X_2 = 0$$

que resulta un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con dos incógnitas. En forma matricial queda

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 6 & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{3}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \frac{l^2}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

de la segunda ecuación surge $X_1 = X_2$ reemplazando que ya conocíamos de resolver el isotático. El mismo expresa que el desplazamiento horizontal del punto X_2 , incógnita del problema, depende de X_1 .

Resolviendo se obtiene $X_1 = \frac{q l^3}{24 EI}$ exactamente el mismo resultado obtenido por TTV en el sistema isotático.

2.3.4. Cálculo de pandeo extremos de puentes

$$M_{BC}(\text{viga}) = +q \frac{l^2}{8} + \frac{3EI}{l} \frac{q l^3}{24 EI} = 0$$

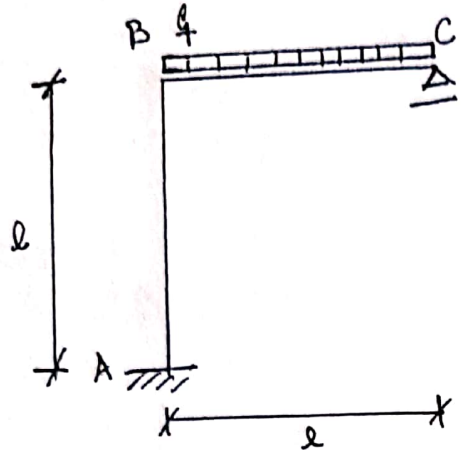
$$M_{BA}(\text{columna}) = -\frac{3EI}{l^2} \frac{q l^3}{24 EI} + \frac{3EI}{l^3} \frac{q l^3}{24 EI} = 0$$

Luego el resultado es exactamente el mismo que el obtenido al resolver el isotático.

3. Resolución de un Sistema Hiperestático.

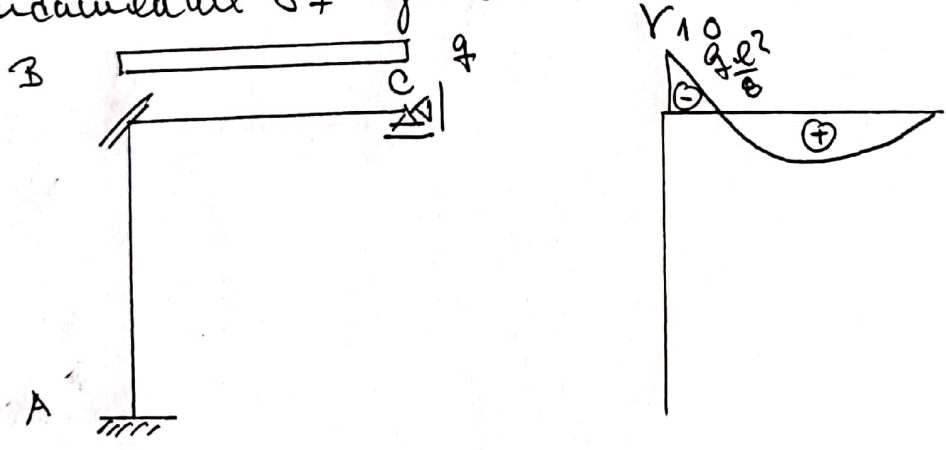
(6)

Se elige el mismo pórtico de los problemas 1 y 2, solo que ahora el punto A tiene un empotramiento.



3.1 Sistema Fundamental

Los incógnitas cinemáticas son, también en este caso θ_B y $u_B = u_C$. Respectivamente el giro en el nodo B y el desplazamiento horizontal de la viga BC. Dichos movimientos son las incógnitas X_1 y X_2 del problema. Para impedir los mismos se agregan un "empotramiento móvil" y un apoyo horizontal de primera especie (apoyo móvil) en los puntos B y C respectivamente. El sistema fundamental SF queda:

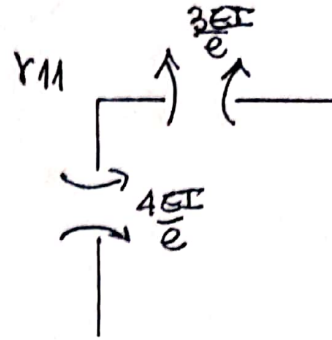
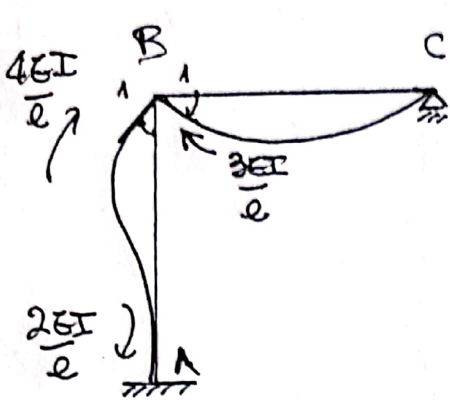


3.2 Cálculo de las rigideces.

Para calcular las rigideces r_{11} y r_{21} se aplica un giro $\bar{X}_1 = 1$ ($\theta_B = 1$) en el apoyo B. Análogamente, para calcular r_{12} y r_{22} se le pone $u_B = u_C = \bar{X}_2 = 1$

3.2.1 Cálculo de r_{11} y r_{21} ($\bar{X}_1=1$)

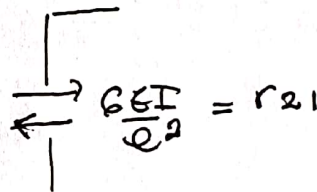
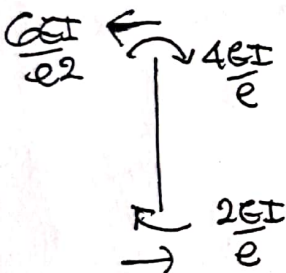
Elastica y pares extremos de pieza



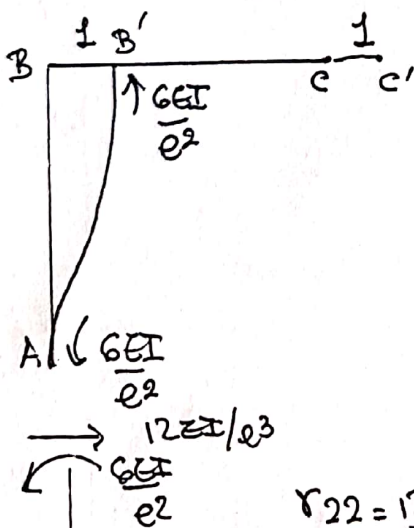
Notemos que la rigidez en el nudo (suma de las rigideces de cada barra) es opuesta en sentido al término independiente

Cálculo de r_{21}

Se debe calcular el esfuerzo de corte en la columna AB debido a $\bar{X}_1=1$, que induce las rigideces $4EI/e$ y $2EI/e$

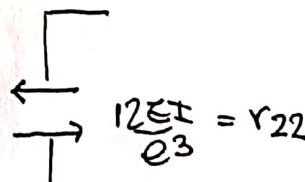


3.2.2 Cálculo de r_{22} y r_{12} ($\bar{X}_2=1$)



$r_{12} = -\frac{6EI}{e^2}$
(sentido opuesto a r_{11})

$$r_{22} = \frac{12EI}{e^3}$$



notese que r_{22} tiene entonces sentido opuesto a r_{21} .

3.2.3 Ecuaciones de Equilibrio

(8)

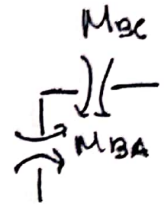
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -\frac{q l^2}{8} + \frac{4EI}{l} X_1 - \frac{6EI}{l^2} X_2 = 0$$

$$\sum R_B = 0 \Rightarrow 0 - \frac{6EI}{l^2} + \frac{12EI}{l^3} X_2 = 0$$

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q l^2}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= \frac{q l^3}{32 EI} \\ X_2 &= \frac{X_1 l}{2} = \frac{q l^4}{64 EI} \end{aligned}$$

3.2.4 Cálculo de Momentos en el nudo B.
Trazado de diagrama de M.

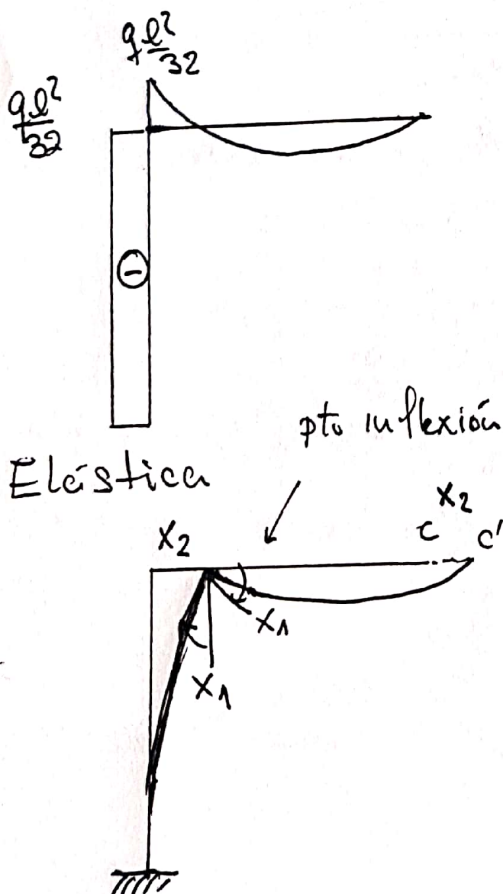
$$M_{BC}(\text{viga}) = -\frac{q l^2}{8} + \frac{3EI}{l} \frac{q l^3}{32 EI} = -\frac{q l^2}{32}$$



$$M_{BA}(\text{columna}) = \frac{4EI}{l} \cdot \frac{q l^3}{32 EI} - \frac{6EI}{l^2} \frac{q l^4}{64 EI} = \frac{q l^2}{32}$$

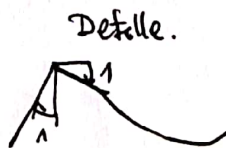
$$M_{AB}(\text{columna}) = \frac{2EI}{l} \frac{q l^3}{32 EI} - \frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{q l^4}{64 EI} = -\frac{q l^2}{32}$$

Diagrama de Momentos



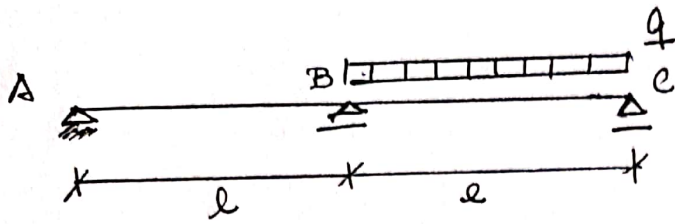
Comentarios:

1. Compare este diagrama con el del pórtico hiperestático. ¿Hay diferencias hay?
2. El momento en la columna AB es constante. ¿Es correcto? ¿Por qué? Justifique!



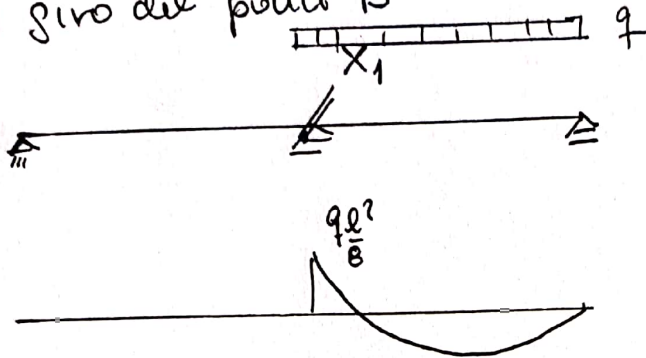
4. Cálculo de una viga continua

9

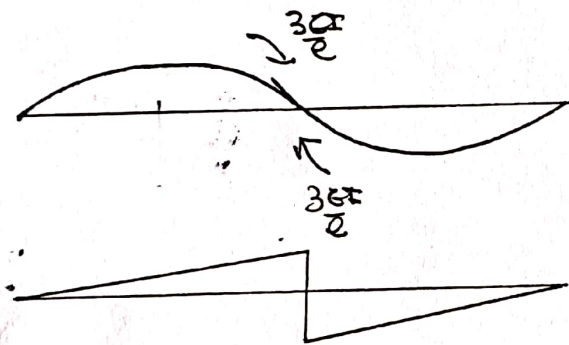


4.1 Sistema Fundamental

La viga es indeformable. La única incógnita, X_1 , es el giro del punto B

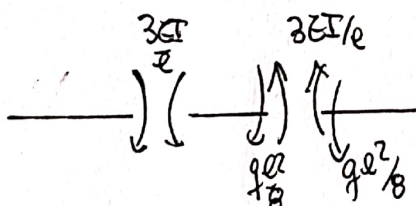


4.2 rigidez r_{11}



Observamos que el diagrama de momentos debido a $X_1 = 1$ es desequilibrado!

4.3 Ecuación de equilibrio



$$-\frac{qe^2}{8} + \frac{6EI}{e} X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{qe^3}{48EI}$$

$$M_{BC} = -\frac{qe^2}{8} + \frac{3EI}{e} \frac{qe^3}{48EI} = -\frac{qe^2}{16}$$

$$M_{BA} = -\frac{3EI}{e} X_1 = -\frac{3EI}{e} \frac{qe^3}{48EI} = -\frac{qe^2}{16}$$

