

ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

Unidad 4 - Curso 2022

Problema 11: Calcular el pórtico de la figura, con las cargas y dimensiones indicadas en la misma, mediante el método de los desplazamientos. Suponga que la barra BC es axialmente rígida. Exprese los resultados en función de los valores genéricos.

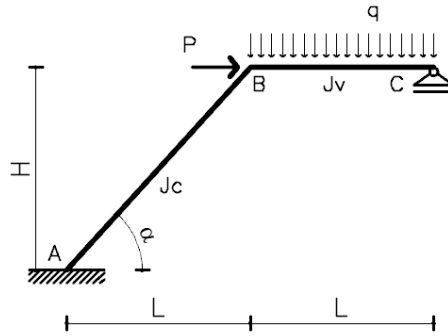


Figura 1: Geometría y datos de la estructura

2. Sistema Fundamental e Incógnitas

En este caso es relativa simple identificar las incógnitas del problema. La primera es el giro nodal X_1 y la segunda el desplazamiento de piso X_2

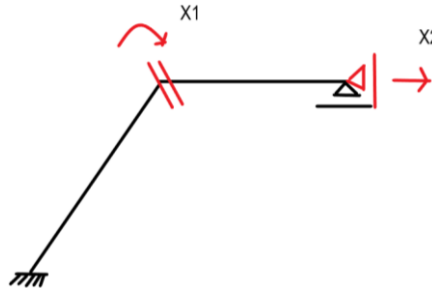


Figura 2: Sistema Fundamental e incógnitas cinemáticas

2. Cálculo de las rigideces r_{11} y r_{21}

Para calcular las rigideces se impone un giro unitario $\bar{X}_1 = 1$ como se indica en la figura

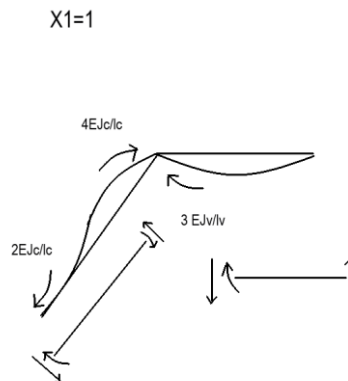


Figura 2: Elástica y esfuerzos extremos de pieza para $\bar{X}_1 = 1$

De la observación del esquema de la figura 2 surge:

$$r_{11} = \frac{4 E J_c}{l_c} + \frac{3 E J_v}{l_v}$$

El cálculo de la rigidez r_{21} es más laborioso. Hay que calcular la reacción en la dirección del apoyo móvil ficticio debido al giro unitario $\bar{X}_1 = 1$. Para ello primero se deben calcular los esfuerzos de corte en la columna inclinada y en la viga, Q_c y Q_v , respectivamente.

A partir de los momentos extremos de pieza, que se muestran en el esquema de figura 2, se obtienen los cortes extremos de pieza:

$$Q_c = \frac{1}{l_c} \left(\frac{4 E J_c}{l_c} + \frac{2 E J_c}{l_c} \right) = \frac{6 E J_c}{l_c^2}$$

$$Q_v = \frac{1}{l_v} \left(\frac{3 E J_v}{l_v} \right) = \frac{3 E J_v}{l_v^2}$$

El cálculo de r_{21} se obtiene a partir del equilibrio del nudo a la traslación. Para ello se tiene en cuenta el esquema de la figura 3:

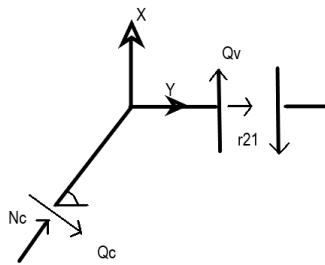


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre del Nudo para $\bar{X}_1 = 1$.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_c \cos \alpha + Q_c \sin \alpha + r_{21} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_c \sin \alpha - Q_c \cos \alpha + Q_v = 0$$

De la segunda ecuación resulta:

$$N_c = \frac{1}{\sin \alpha} (Q_c \cos \alpha - Q_v)$$

Reemplazando N_c en la segunda ecuación queda:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (Q_c \cos \alpha - Q_v) + Q_c \sin \alpha + r_{21} = 0$$

Luego la rigidez r_{21} se expresa como:

$$r_{21} = (Q_v - Q_c \cos \alpha) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Q_c \sin \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} [Q_v \cos \alpha - (Q_c \cos^2 \alpha + Q_c \sin^2 \alpha)]$$

$$r_{21} = \frac{1}{\sin \alpha} (Q_v \cos \alpha - Q_c)$$

Reemplazando los valores de Q_v y Q_c en función de los datos de la viga y la columna, queda:

$$r_{21} = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{3 E J_v}{l_v^2} \cos \alpha - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \right)$$

3. Cálculo de las rigideces r_{12} y r_{22}

Para calcular las rigideces r_{12} y r_{22} se impone un desplazamiento unitario $\bar{X}_2 = 1$ como se indica en la figura 4. De la observación de la misma se obtienen las pares y cortes extremos de pieza, expresados en función de los desplazamientos extremos de pieza de la viga y de la columna δ_v y δ_c , respectivamente

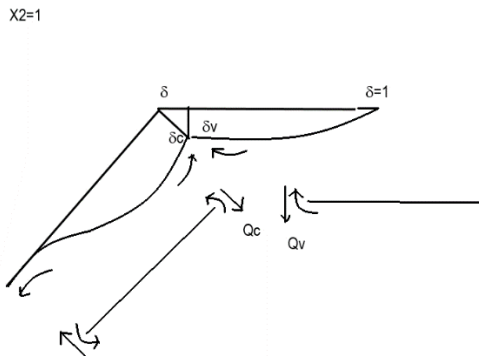


Figura 4: Elástica y esfuerzos extremos de pieza para $\bar{X}_2 = 1$

$$M_v = \frac{3 E J_v \delta_v}{l_v^2} ; Q_v = \frac{3 E J_v \delta_v}{l_v^3}$$

$$M_c = \frac{6 E J_c \delta_c}{l_c^2} ; Q_v = \frac{12 E J_c \delta_c}{l_c^3}$$

En este caso se debe trazar, a manera de figura de análisis, un diagrama de Willot para conocer los movimientos perpendiculares a la columna y a la viga en el extremo de pieza del nudo.

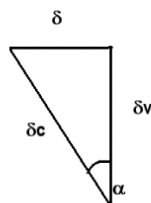


Figura 5: Diagrama de Willot para $\bar{X}_2 = 1$

Del diagrama de Willot surge que los movimientos extremos de pieza de la columna inclinada y de la viga, δ_c y δ_v respectivamente, resultan para un valor $\bar{X}_2 = 1 = \delta$

$$\delta_c = \frac{\delta}{\sin \alpha}$$

$$\delta_v = \delta \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

La rigidez r_{12} se obtiene directamente como la suma de los pares extremos de pieza de la columna y de la viga, que tienen sentidos opuestos, como se observa en la Figura 4.

$$r_{12} = \frac{3 E J_v \delta_v}{l_v^2} - \frac{6 E J_c \delta_c}{l_c^2} = \frac{3 E J_v}{l_v^2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$r_{12} = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{3 E J_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6 E J_c}{l_c^2} \right)$$

Es importante señalar que r_{12} tiene el mismo valor que el obtenido para r_{21} .

El cálculo de la rigidez r_{22} se realiza de manera similar al de la rigidez r_{21} . También en este caso es necesario recurrir al equilibrio a la traslación del nudo, cuyo esquema se observa en la figura 6:

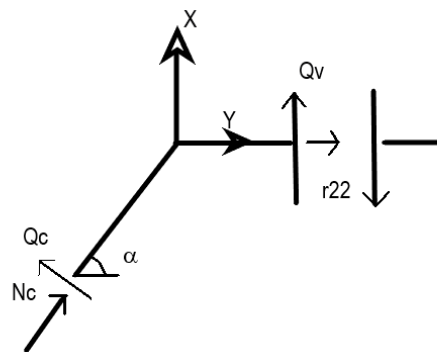


Figura 6: Diagrama de cuerpo libre del Nudo para $\bar{X}_2 = 1$.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_c \cos \alpha - Q_c \sin \alpha + r_{22} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_c \sin \alpha + Q_c \cos \alpha + Q_v = 0$$

De la segunda ecuación resulta:

$$N_c = - \frac{1}{\sin \alpha} (Q_c \cos \alpha + Q_v)$$

Reemplazando N_c en la segunda ecuación queda:

$$- \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (Q_c \cos \alpha + Q_v) - Q_c \sin \alpha + r_{22} = 0$$

Luego r_{22} se escribe como:

$$r_{22} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} [(Q_c \cos^2 \alpha + Q_c \text{sen}^2 \alpha) + Q_v \cos \alpha] = \frac{1}{\text{sen } \alpha} (Q_c + Q_v \cos \alpha)$$

$$r_{22} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} (Q_c + Q_v \cos \alpha)$$

Ahora se puede expresar r_{22} en función de los datos de la estructura y de los movimientos extremos de pieza:

$$r_{22} = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3 E J_v \delta_v}{l_v^3} \cos \alpha + \frac{12 E J_c \delta_c}{l_c^3} \right) = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3 E J_v}{l_v^3} \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} + \frac{12 E J_c}{l_c^3} \frac{1}{\text{sen } \alpha} \right)$$

$$r_{22} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \left(\frac{3 E J_v}{l_v^3} \cos^2 \alpha + \frac{12 E J_c}{l_c^3} \right)$$

4. Términos independientes r_{10} y r_{20}

El término independiente r_{10} es igual al valor del momento de empotramiento, en una viga empotrada articulada, sometida a carga repartida uniforme. Luego:

$$r_{10} = - q \frac{l_v^2}{8}$$

El cálculo de r_{20} requiere de un análisis similar al desarrollado para calcular r_{21} y r_{22} . Recordemos que las cargas, en el Sistema Fundamental del Método de los Desplazamientos se aplican sobre la estructura sin deformar. Dado que en la columna inclinada no actúan cargas, resulta $Q_c = 0$.

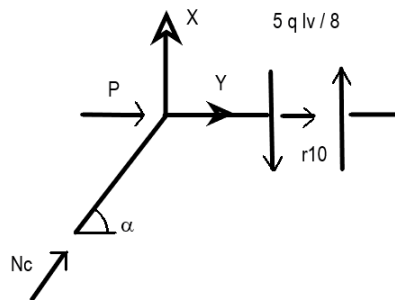


Figura 7: Diagrama de cuerpo libre del Nudo para las cargas de la estructura.

Conviene llamar R_v a la reacción de la viga en el sistema fundamental para facilitar el desarrollo de los cálculos. También en este caso se plantea el equilibrio del nudo a la traslación:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_c \cos \alpha + P + r_{20} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_c \text{sen } \alpha - R_v = 0$$

De la segunda ecuación resulta:

$$N_c = \frac{R_v}{\text{sen } \alpha}$$

Reemplazando el valor de N_c en la primera ecuación y despejando r_{20} queda:

$$r_{20} = - \left(R_v \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} + P \right)$$

5. Ecuaciones de equilibrio

La primera ecuación, que expresa la nulidad de la reacción del empotramiento móvil expresa:

$$-q \frac{l_v^2}{8} + \left(\frac{4EJ_c}{l_c} + \frac{3EJ_v}{l_v} \right) X_1 + \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3EJ_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6EJ_c}{l_c^2} \right) X_2 = 0$$

La segunda ecuación, que expresa la nulidad de la reacción del apoyo móvil queda, expresando $R_v = \frac{5}{8} q l_v$:

$$-\left(\frac{5}{8} q l_v \cotg \alpha + P \right) + \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3EJ_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6EJ_c}{l_c^2} \right) X_1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \left(\frac{3EJ_v}{l_v^3} \cos^2 \alpha + \frac{12EJ_c}{l_c^3} \right) X_2 = 0$$

En forma matricial se expresa como:

$$\begin{pmatrix} -q \frac{l_v^2}{8} + \left(\frac{4EJ_c}{l_c} + \frac{3EJ_v}{l_v} \right) & \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3EJ_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6EJ_c}{l_c^2} \right) \\ -\left(\frac{5}{8} q l_v \cotg \alpha + P \right) + \frac{1}{\text{sen } \alpha} \left(\frac{3EJ_v \cos \alpha}{l_v^2} - \frac{6EJ_c}{l_c^2} \right) & \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \left(\frac{3EJ_v}{l_v^3} \cos^2 \alpha + \frac{12EJ_c}{l_c^3} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

Pueden asignarse valores a los momentos de inercia, longitudes, cargas, etc. para resolver el sistema. Una vez conocidas las incógnitas el trazado de los diagramas de esfuerzos característicos se realiza de la forma vista en clase y en los ejercicios previos.