UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

ANALISIS ESTRUCTURAL I

UNIDAD 5

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Curso 2.024

Mg. Ing. DANIEL E. LÓPEZ

INTRODUCCIÓN

Estructuras Discretas y Continuas

Estructura Discretas

- Las estructuras discretas son las que están conformadas por un conjunto de elementos perfectamente diferenciados entre sí, que se encuentran unidos entre ellos por una serie de puntos.
- En las estructuras discretas se puede definir su configuración deformada en forma completa y exacta si conocemos los movimientos independientes de un conjunto finito de puntos de esa estructura.
- La solución del problema estructural implica resolver un SEL.

Estructura Continuas

- No es posible distinguir un conjunto finito de elementos estructurales para conformar una estructura continua.
- En las estructuras continuas no es posible definir en forma analítica, su configuración deformada en forma completa y exacta salvo para algunos casos particulares.
- La solución del problema estructural implica resolver un conjunto de ED.

INTRODUCCIÓN

Estructuras Discretas. Ejemplos

INTRODUCCIÓN

Estructuras Continuas. Ejemplos

INTRODUCCIÓN

Estructuras Discretas y Continuas

- Vemos que en principio la diferencia entre estructuras discretas y continuas está relacionada a la geometría de estas.
- Mientras que las primeras están compuestas por un conjunto de elementos estructurales, en las segundas no es posible distinguir esos elementos.
- Pero en ambos casos necesitamos conocer los movimientos de sus puntos (configuración deformada) para poder resolver el problema estructural.
- Las estructuras continuas tienen infinitos puntos con movimientos desconocidos, por lo que tienen infinitos grados de libertad.
- Las estructuras continuas solo se pueden resolver analíticamente en casos de geometrías muy sencillas para condiciones de contorno simples. Implica resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales.
- Para resolver el problema se pueden usar técnicas de diferencias finitas.
- También se puede abordar el problema de manera aproximada mediante MEF.

INTRODUCCIÓN

MEF

- Un precursor de MEF fue Courant, quien propuso el uso de funciones continuas para aproximar un campo desconocido en problemas de torsión, Argyris y Kelsey (Alemania 1955) también son precursores del método.
- MEF nace en la industria aeronáutica, para resolver problemas prácticos de elementos bidimensionales, Turner, Clough, Martin y Topp (Boeing 1956)
- Clough introduce el termino elemento finito por primera vez en 1960.
- Desde entonces MEF ha experimentado un gran desarrollo, y se ha establecido como una técnica numérica general para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, sujetas a condiciones de contorno e iniciales conocidas.
- Con el desarrollo de las computadoras, el método, ahora se ubica en una posición única, como una técnica de solución para un gran número de problemas complejos de ingeniería.

INTRODUCCIÓN

MEF

- Desde el punto de vista de la ingeniería, la característica más atractiva del método y posiblemente la más peligrosa está dada por el hecho de que es aproximado.
- En manos de un ingeniero experimentado y cuidadoso puede ser una herramienta muy poderosa para abordar problemas de ingeniería (estructuras) qué de otra manera, pueden ser de muy difícil solución.
- **En muchas ocasiones MEF no es usado apropiadamente**.

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

- Una estructura continua tiene infinitos puntos materiales, por lo tanto, tiene infinitas formas de desplazarse. Esto se debe a que cada punto pude desplazarse mantenidos fijos (en su posición) un número finito de los puntos restantes de la estructura. Por lo que tenemos infinitas incógnitas.

$$U = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

- Este vector es una función de la ubicación del punto. Si cumple las condiciones de contorno puede ser una solución del problema planteado mediante ecuaciones diferenciales.
- No puede asegurarse que U tenga una expresión analítica, ni que pueda calcularse.

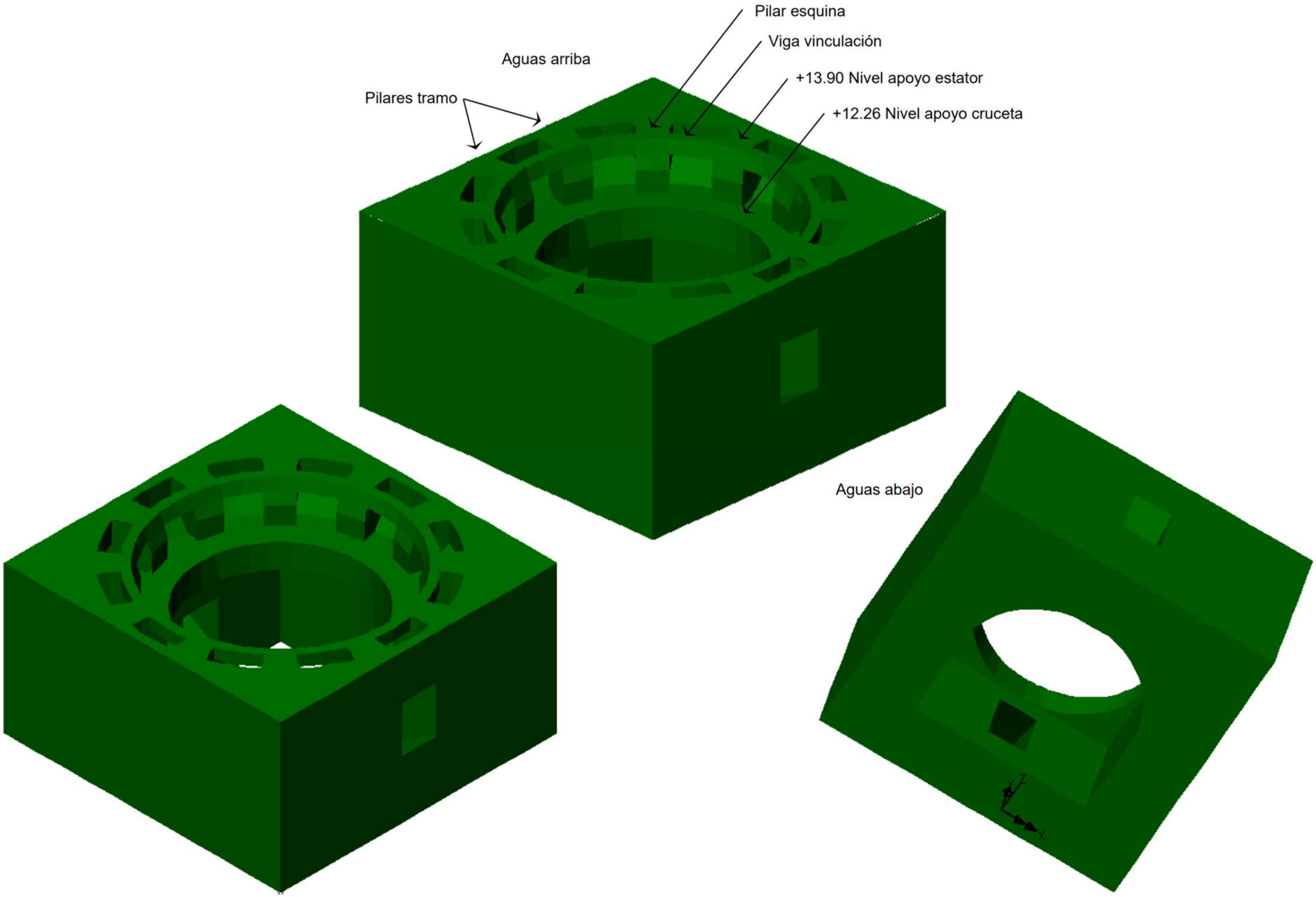
METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. EJEMPLOS

CAPILLA DE BOSJES, WITZENBERG, SUDÁFRICA.

TWA FLIGHT CENTER, NY, USA.

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. EJEMPLOS

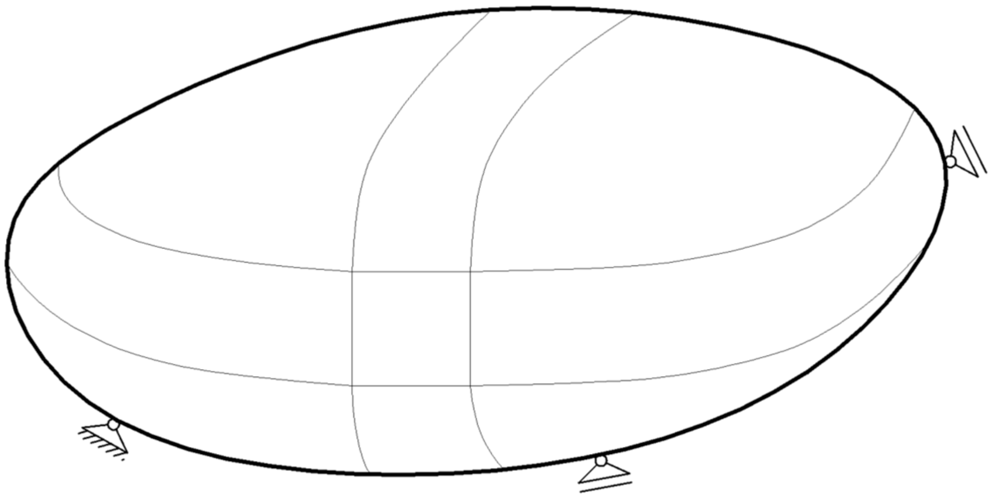
ESTRUCTURA DE FUNDACIÓN GENERADOR HIDROELECTRICO.

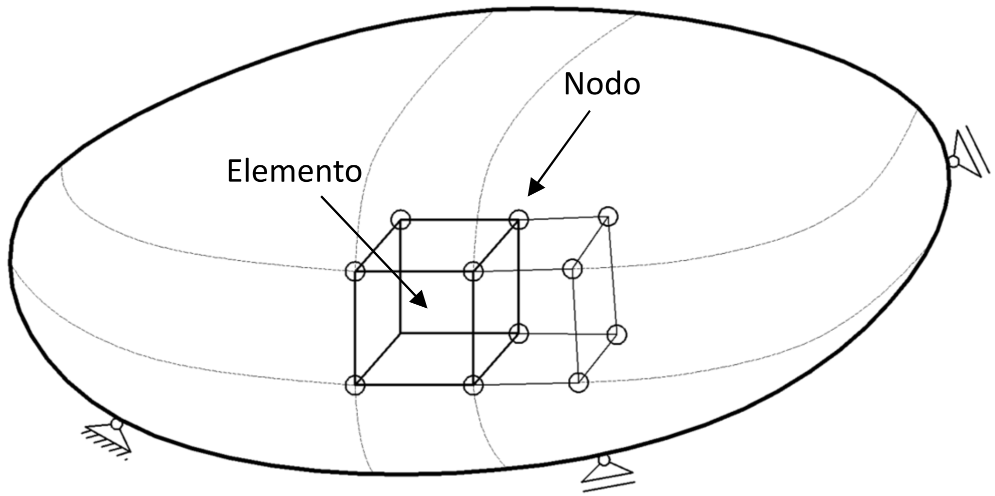


METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

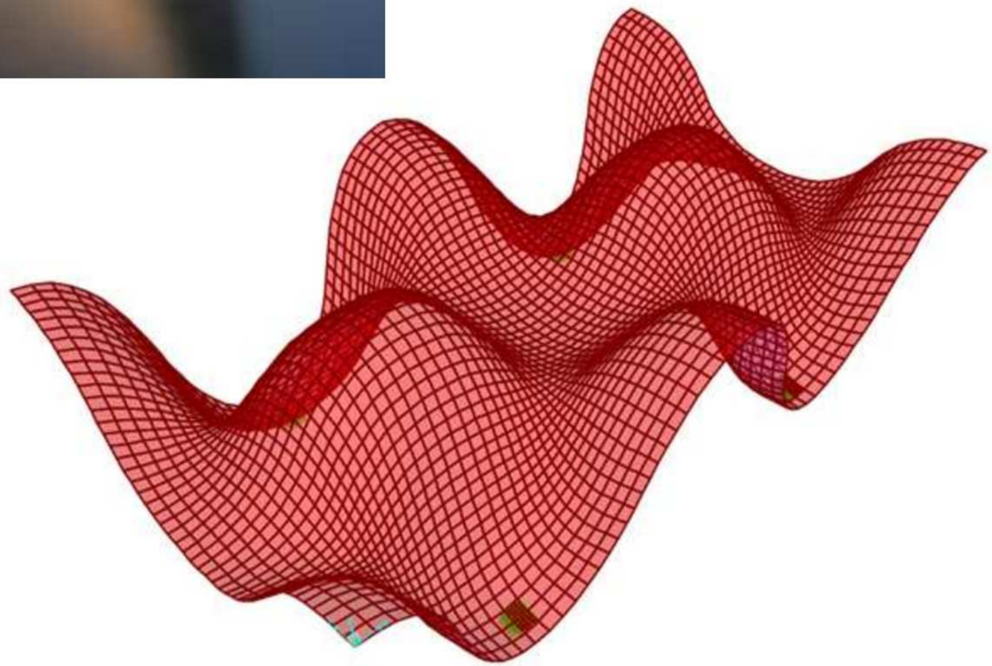
- El planteo general del método consiste en dividir la estructura mediante líneas o superficies imaginarias en un conjunto de regiones contiguas, sin superposiciones ni huecos, que llamamos elementos.
- Esos elementos están conectados unos con otros mediante un numero finito de puntos, donde cada uno de esos puntos pertenece a uno o más elementos. Estos puntos se llaman nodos (o nudos).
- De esta forma hemos discretizado la geometría de la estructura.





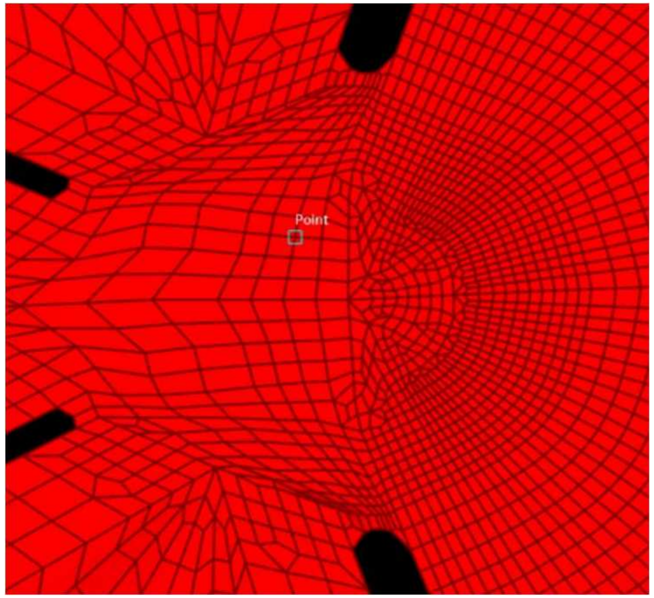
MEF. DISCRETIZACIÓN GEOMÉTRICA

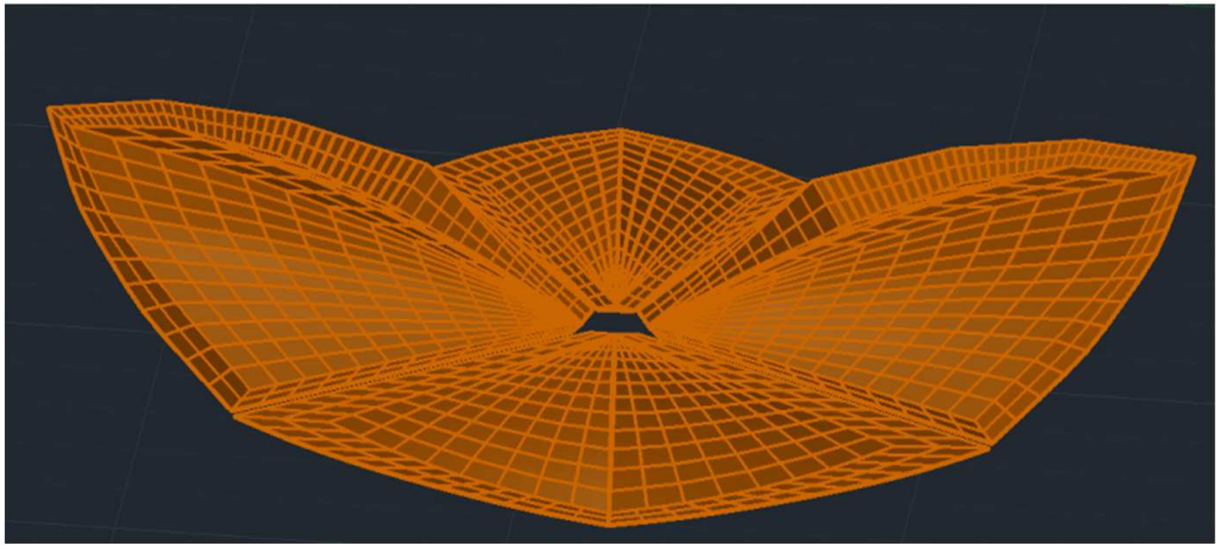
CAPILLA DE BOSJES, WITZENBERG, SUDÁFRICA. Mussi, Torres y López (ELAM 2023)

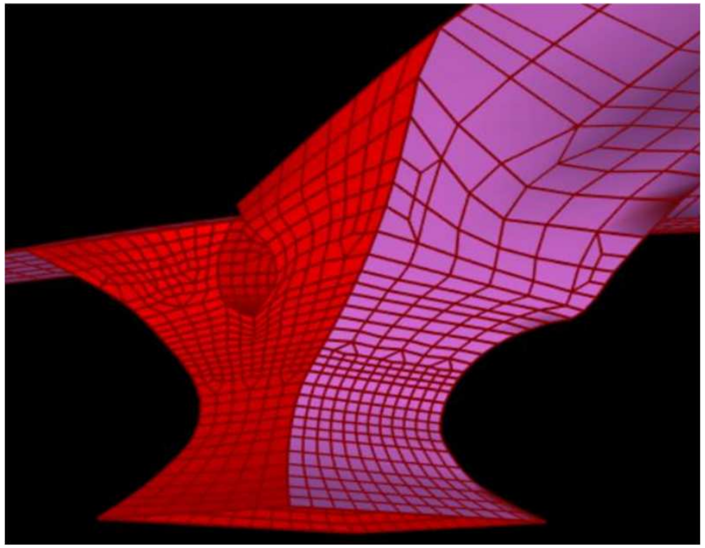


MEF. DISCRETIZACIÓN GEOMÉTRICA

TWA FLIGHT CENTER NY. Arenas, Zera, Canatella y Gómez (ELAM 2022)

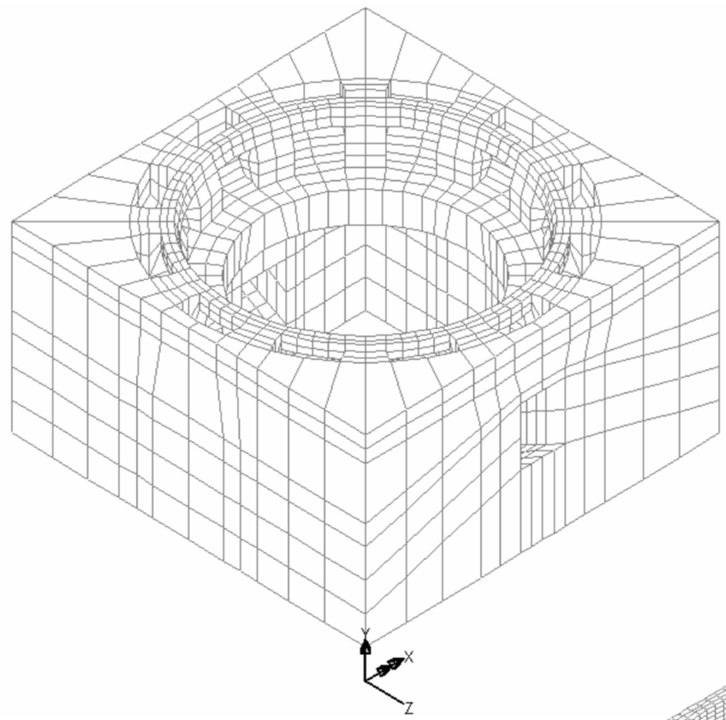


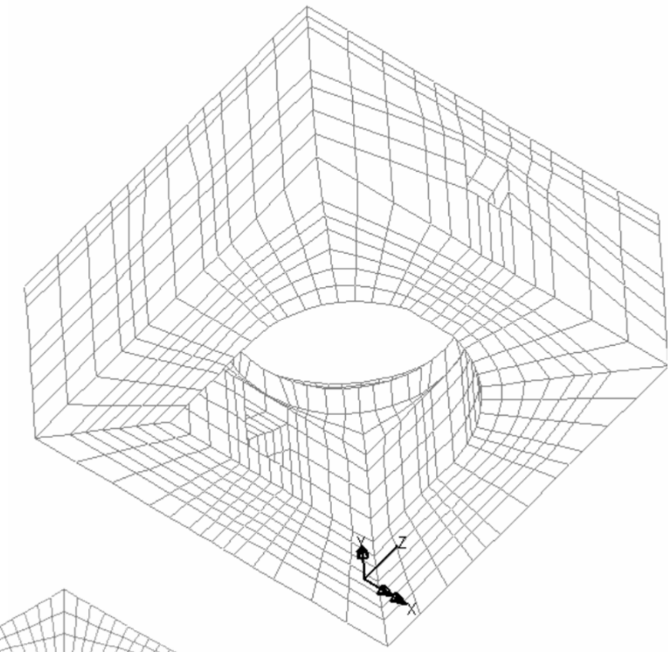


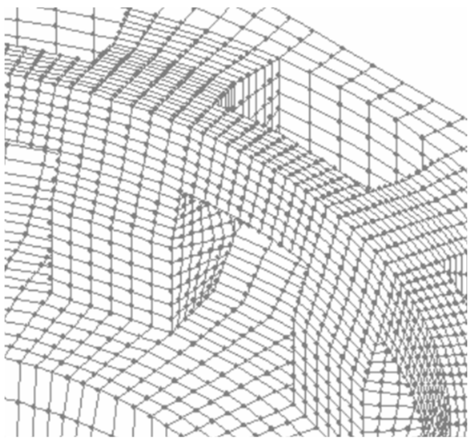


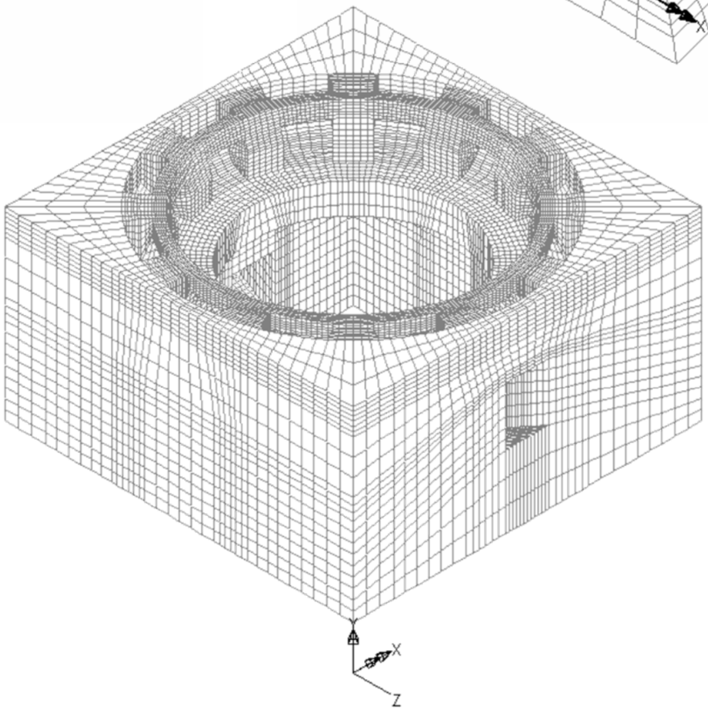
MEF. DISCRETIZACIÓN GEOMÉTRICA

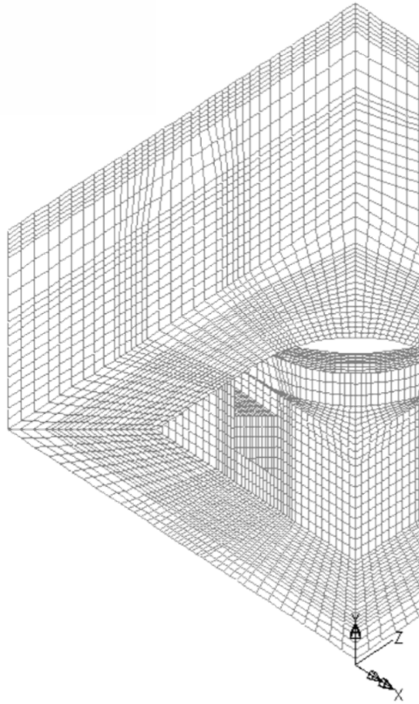
ESTRUCTURA DE FUNDACIÓN GENERADOR HIDROELECTRICO. (LOPEZSCOC 2007)







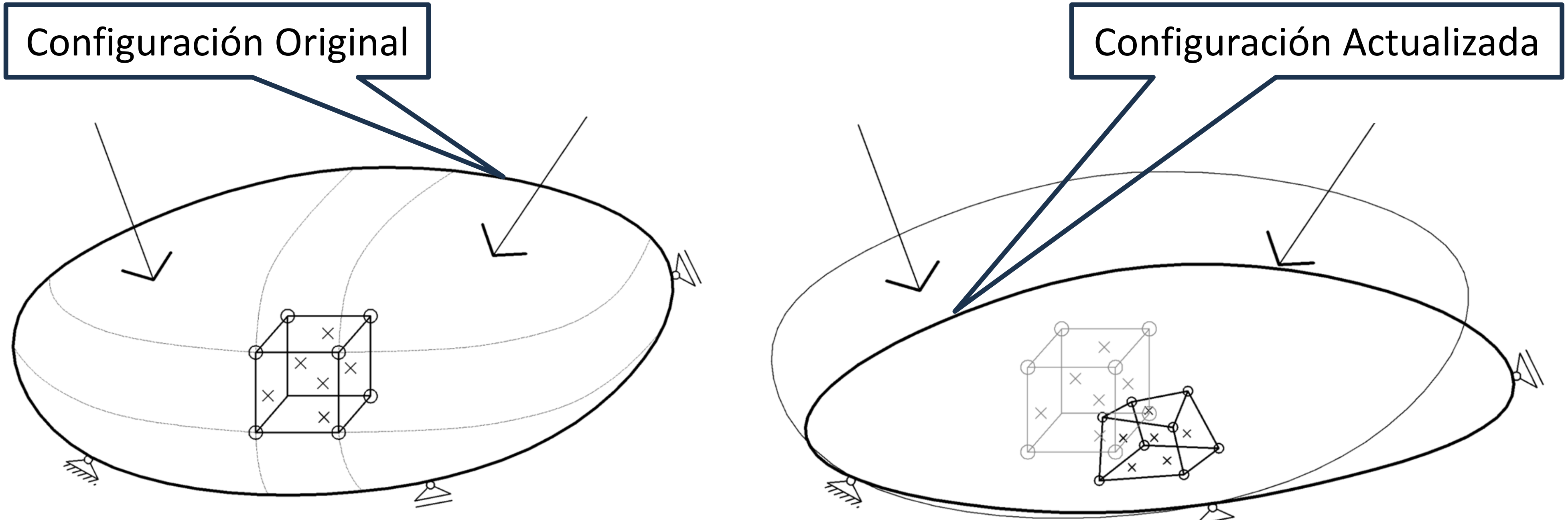




METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

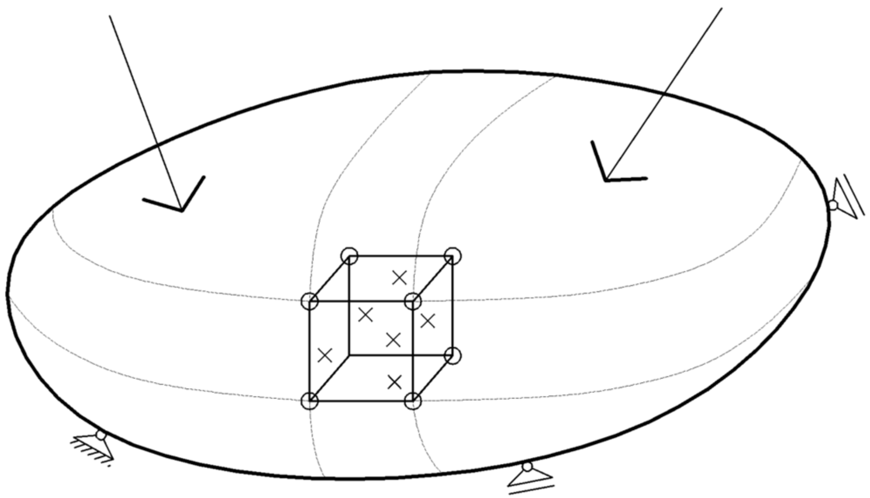
- Pretendemos calcular de forma aproximada los desplazamientos de los infinitos puntos de la estructura, conociendo los desplazamientos (independientes entre sí) de los nodos.
- Los desplazamientos nodales son las incógnitas del problema, y con ellos se puede determinar la configuración deformada de la estructura.

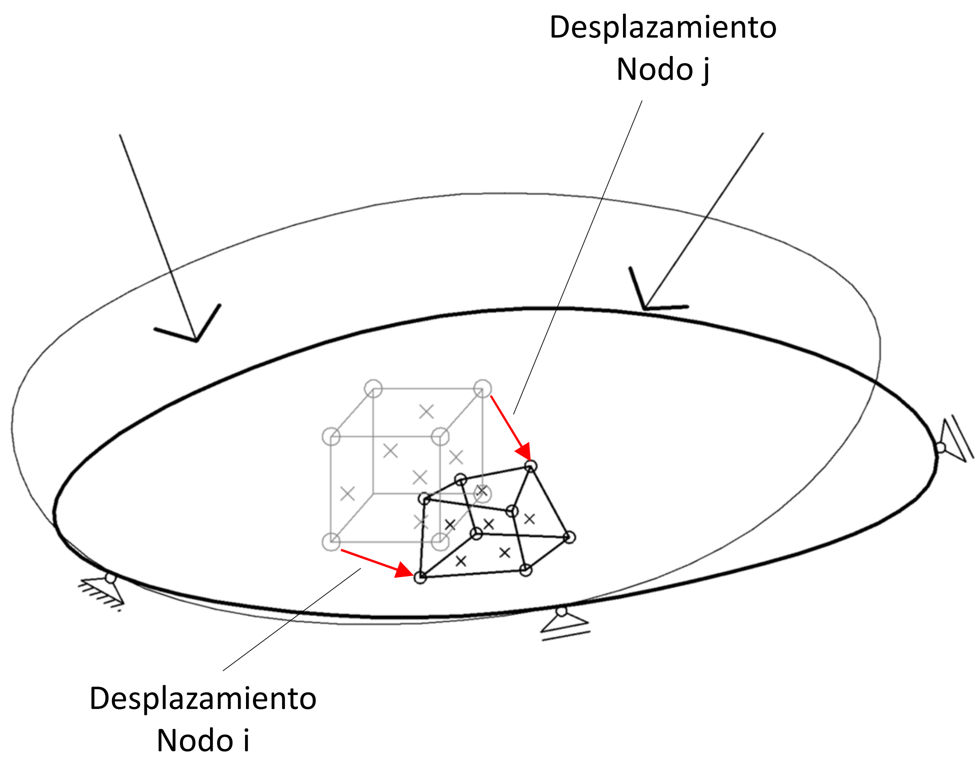


METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

- Los desplazamientos de un punto cualquiera de la estructura queda definido por los desplazamientos de los nodos de la discretización geométrica.
- Para ello se necesitan funciones de interpolación que permiten calcular los desplazamientos de cualquier punto interior de un elemento, conociendo los desplazamientos de sus nodos.





METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

Corrimientos puntos. Estructura continua.

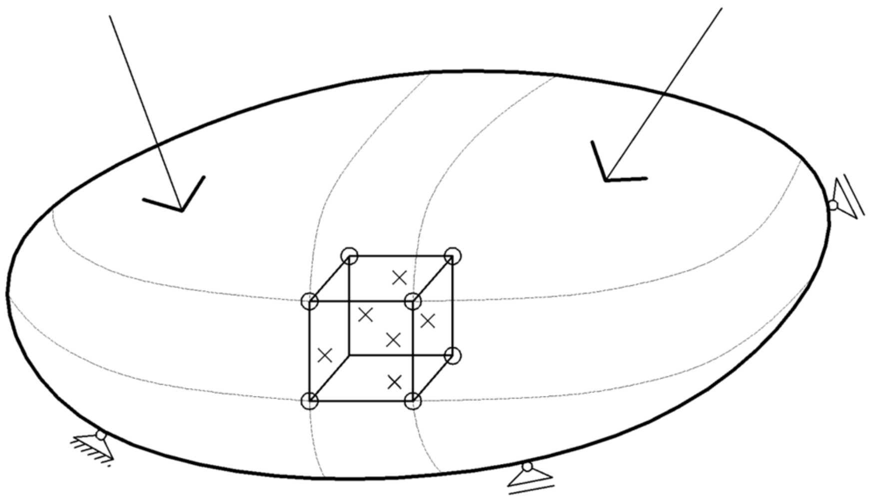
$$U = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w\underbrace{(x,y,z)}_{\text{Pto. Cualquiera}} \end{bmatrix}$$

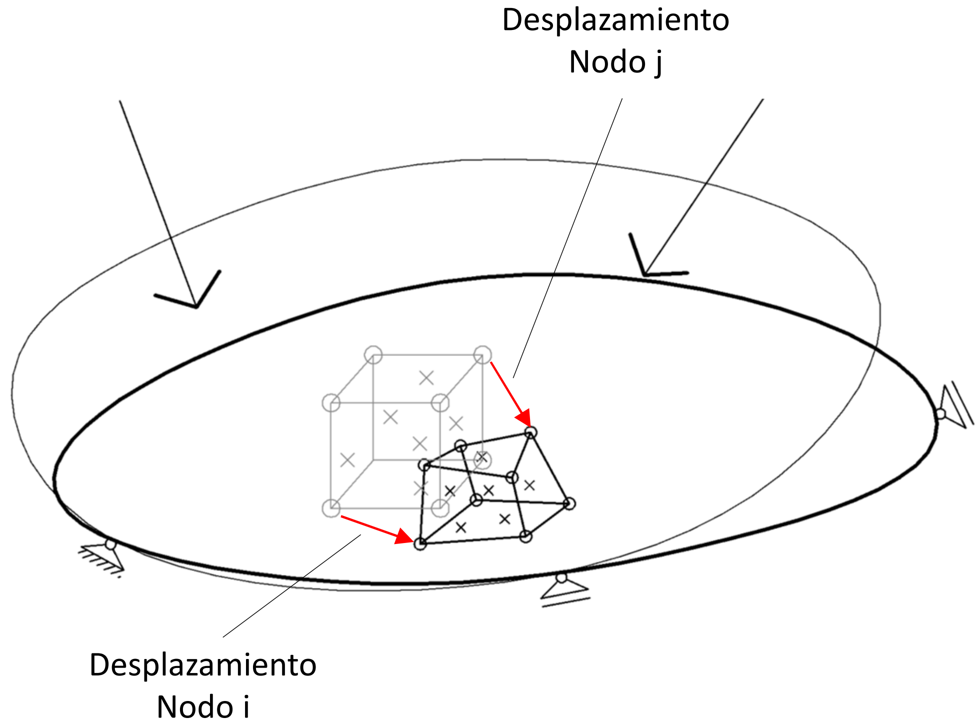
Corrimientos nodos. Estructura discreta.

$$D = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w\underbrace{(x,y,z)}_{\text{Coord. Nodos}} \end{bmatrix}$$

Corrimientos aproximados puntos. Estructura discreta.

$$\hat{U} = N\ D = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w\underbrace{(x,y,z)}_{\text{Pto. Cualquiera}} \end{bmatrix}$$





METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

Corrimientos puntos. Estructura continua.

$$U = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Corrimientos nodos. Estructura discreta.

$$D = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

Corrimientos aproximados en puntos. Estructura discreta.

$$\widehat{U} = N\ D = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

U: Vector corrimientos de cualquier punto de la estructura

D: Vector corrimientos de los nodos de la discretización geométrica

N: Función de interpolación o FUNCION DE FORMA

$\widehat{U}$: Vector corrimientos aproximados en cualquier punto de la estructura discretizada.

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

- Los desplazamientos nodales junto con las funciones de aproximación definen las deformaciones unitarias en el interior de un elemento.
- Las ecuaciones constitutivas junto con las deformaciones unitarias definen el estado de tensiones en el interior del elemento.
- En cada elemento existe un conjunto de fuerzas concentradas en los nodos que equilibran a las tensiones internas y las fuerzas que actúen sobre el elemento.

CONSECUENCIAS DE LAS HIPÓTESIS PLANTEADAS

- La función U se puede aproximar en forma independiente en cada elemento. Debiendo cumplirse ciertas condiciones de compatibilidad en el contorno de cada elemento.
- En el interior de cada elemento la solución se aproxima mediante un numero finito de parámetros, que son los valores de las funciones de interpolación en los nodos del elemento.

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PLANTEO

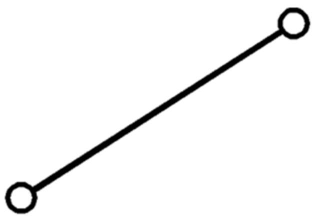
- El proceso de discretización descripto se puede justificar intuitivamente.
- También se puede justificar formalmente mediante la **minimización de la energía potencial total**.
- El campo de deformaciones para la minimización del potencial total depende el tipo de elemento utilizado en la discretización.

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

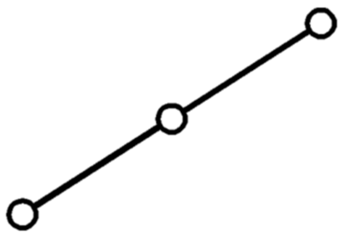
PLANTEO

- El proceso de discretización descripto se puede justificar intuitivamente.
- También se puede justificar formalmente mediante la **minimización de la energía potencial total**.
- El campo de deformaciones para la minimización del potencial total depende el tipo de elemento utilizado en la discretización.

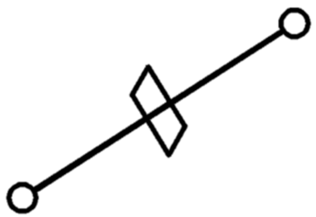
Elementos 1D



Elemento 1D
2 Nodos



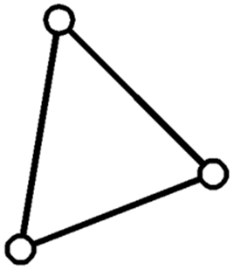
Elemento 1D
3 Nodos



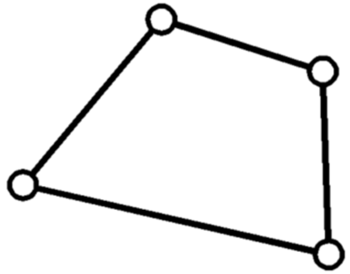
Elemento Viga
2 Nodos

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

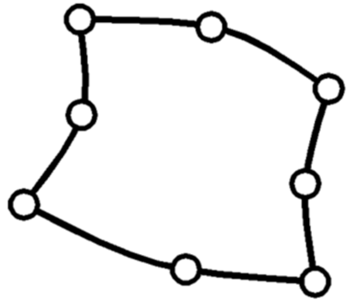
Elementos 2D. Tensión Plana. Deformación Plana



Elemento 2D
3 Nodos

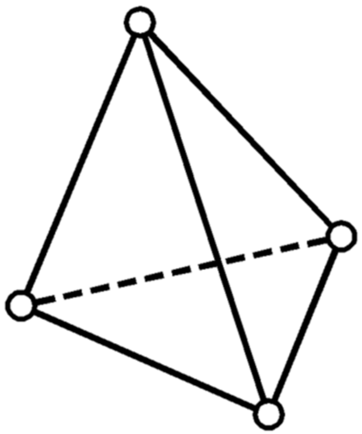


Elemento 2D
4 Nodos

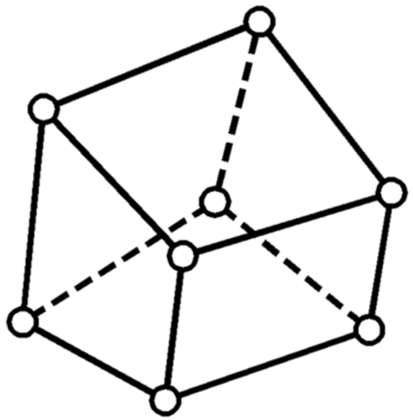


Elemento 2D
8 Nodos

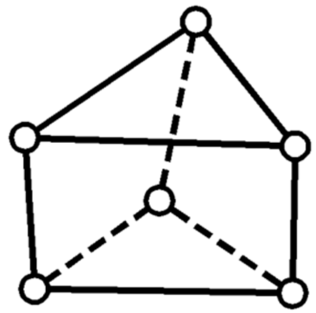
Elementos 3D. Sólidos



Elemento 3D
4 Nodos



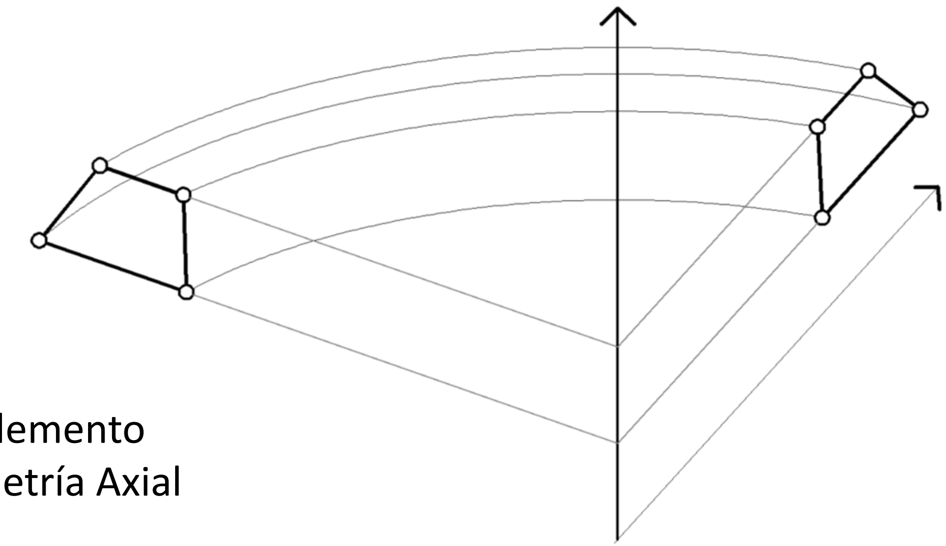
Elemento 3D
8 Nodos



Elemento 3D
6 Nodos

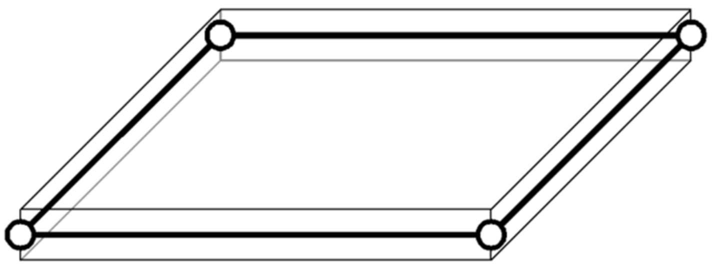
METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Elementos 2D. Simetría Axial

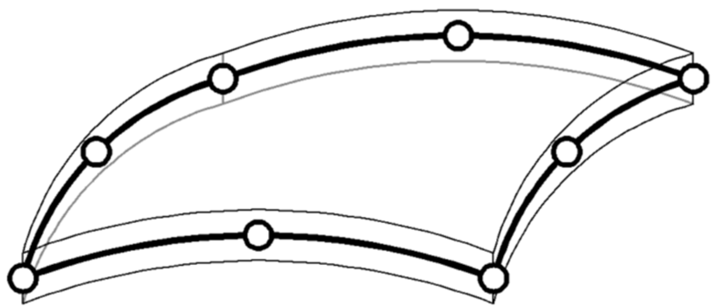


Elemento
Simetría Axial

Elementos 2D. Placas



Elemento Placa
Plana 4 Nodos



Elemento Placa
Curva 8 Nodos

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

MINIMIZACIÓN DEL POTENCIAL TOTAL

$$\pi = U + W$$

U: E. deformación interna

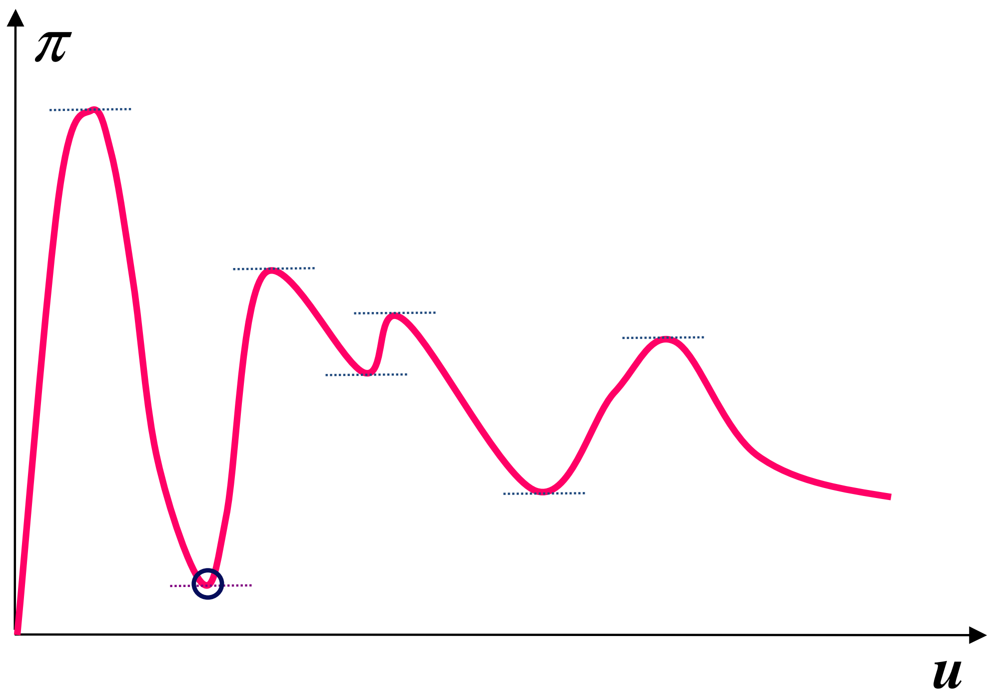
W: T. acciones externas

La potencial total es un escalar que caracteriza a toda la estructura. Representa la energía total en la estructura.

$$\pi = f(u)$$

De todas las configuraciones deformadas, nos interesan las de equilibrio.

Interesa la estacionalidad de la energía potencial respecto de variaciones pequeñas y admisibles de los desplazamientos



El equilibrio debe ser estable, el punto estacionario debe ser un mínimo.

MINIMIZACIÓN DEL POTENCIAL TOTAL

$$\pi = U + W$$

U: E. deformación interna

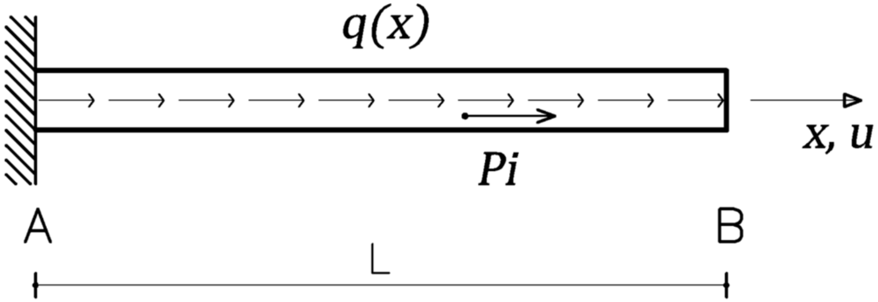
W: T. acciones externas

Definimos: Configuración admisible es toda aquella que no viola las condiciones de compatibilidad interna y ni en el contorno.

Principio de Estacionalidad de la Energía Potencial

De todas las configuraciones admisibles de un sistema conservativo aquellas que satisfacen el equilibrio hacen la energía potencial estacionaria.

MINIMIZACIÓN DEL POTENCIAL TOTAL



U: E. deformación interna

W: T. acciones externas

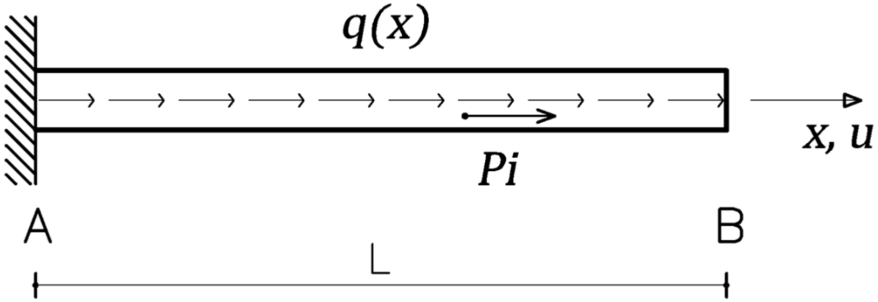
$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\,\varepsilon\,dV$$

$$U = \frac{1}{2}Ku^2 = \frac{1}{2}\,P\,u$$

$$P = \sigma\,A = \int_A \sigma\,dA$$

$$u = \int_L \varepsilon\,dx$$

MINIMIZACIÓN DEL POTENCIAL TOTAL



U: E. deformación interna

W: T. acciones externas

$$U = \frac{1}{2}Ku^2 = \frac{1}{2}\ P\ u$$

$$P = \ \sigma\ A = \int_A \ \sigma\ dA$$

$$u = \int_L \ \varepsilon\ dx$$

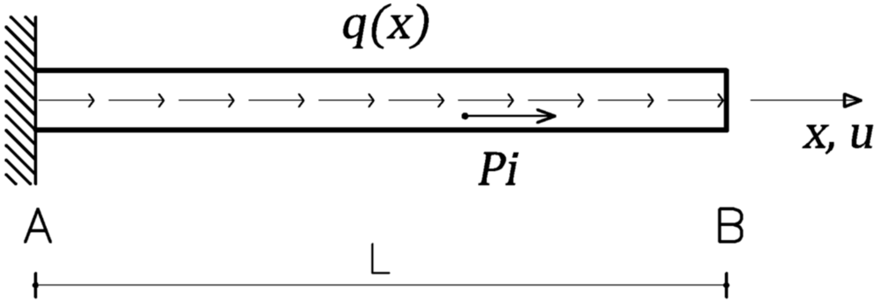
$$U = \frac{1}{2}\int_V \ \sigma\ \varepsilon\ dV = \frac{1}{2}\int_V \ E\ \varepsilon^2\ dV = \frac{EA}{2}\int_L \ \varepsilon^2\ dx$$

$$dW = qdx\ u$$

$$W = \int_L \ q\ u\ dx$$

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

MINIMIZACIÓN DEL POTENCIAL TOTAL



U: E. deformación interna

W: T. acciones externas

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\,\varepsilon\,dV = \frac{1}{2}\int_V E\,\varepsilon^2\,dV = \frac{EA}{2}\int_L \varepsilon^2\,dx$$

$$W = \int_L q\,u\,dx + \sum P_i\,u_i$$

$$\pi = \frac{EA}{2}\int_L \varepsilon^2\,dx - \int_L q\,u\,dx - \sum P_i\,u_i$$

Condición de Equilibrio

$$\frac{d\pi}{du} = 0$$

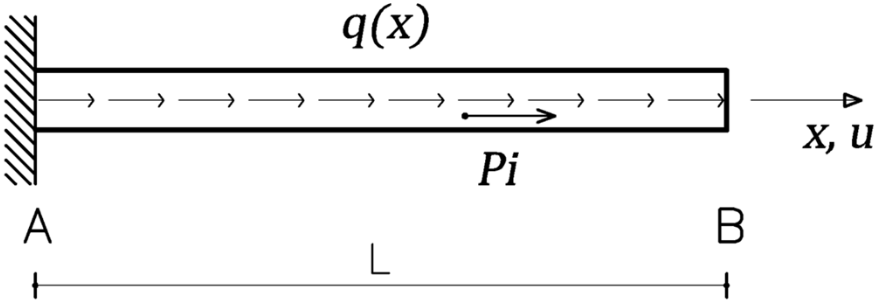
Como determinar u ?

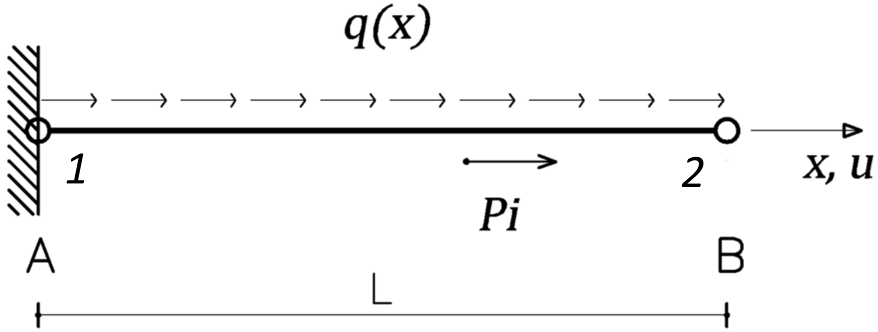
Métodos Variacionales: Rayleigh-Ritz

Método de los Elementos Finitos

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 2 Nodos



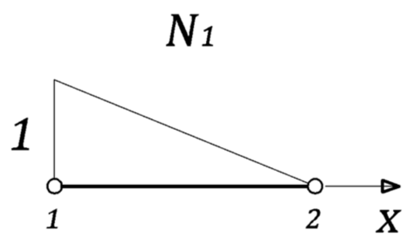


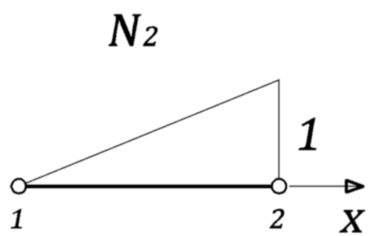
$$\pi = \frac{EA}{2}\int_L \varepsilon^2\, dx - \int_L q\, u\, dx - \sum P_i\, u_i$$

$$\widehat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{D} = u(x) \qquad \widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d} \qquad \boldsymbol{u} \cong \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}$$

$$u(x_j) = \sum_{i=1}^{nnod} N_i(x_j)\, d_i = \sum_{i=1}^{2} N_i\, d_i$$





Condición

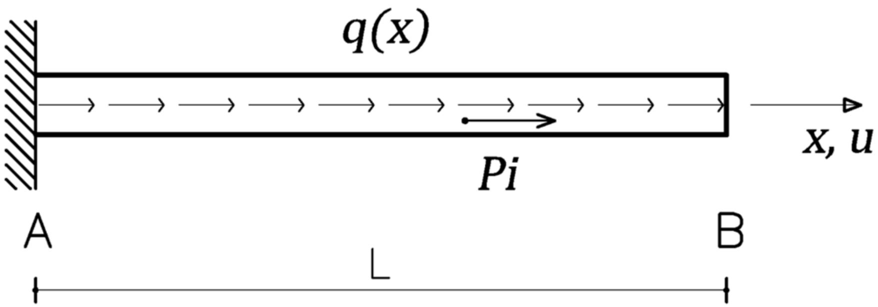
$$\forall i = j \quad N_i = 1$$

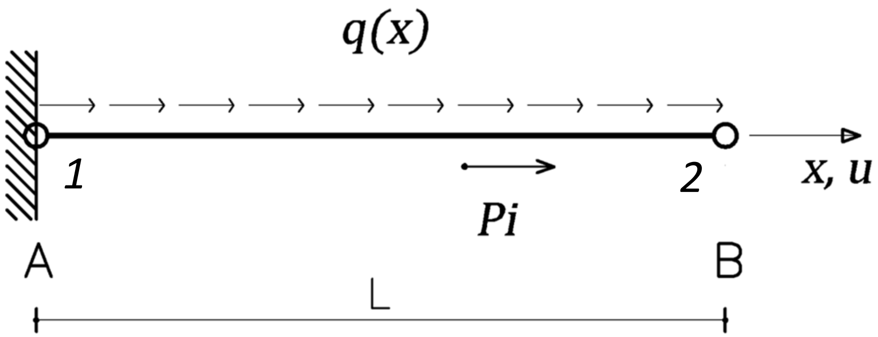
$$\forall i \neq j \quad N_i = 0$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2 = \frac{x}{L}$$

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 2 Nodos





$$\pi = \frac{EA}{2}\int_L \varepsilon^2\, dx - \int_L q\, u\, dx - \sum P_i\, u_i$$

P_i en nodos

$$u = \sum_{i=1}^{2} N_i\, d_i = N_1\, d_1 + N_2\, d_2 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) d_1 + \left(\frac{x}{L}\right) d_2$$

$\boldsymbol{d}$: Desplazamientos nodos

$$\boxed{u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}} \qquad \boldsymbol{N} = [N_1 \quad N_2] \qquad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{N}$: Matriz funciones de forma

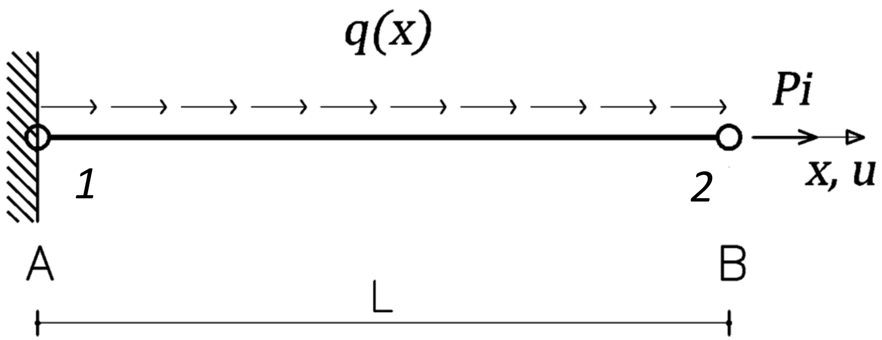
$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \qquad \varepsilon = \frac{d(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d})}{dx} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dx}\boldsymbol{d} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{N}}{dx}$$

$$\boxed{\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_1}{dx} & \dfrac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$: Matriz deformaciones

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 2 Nodos



$$\boxed{u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}}$$

$$\pi = \frac{EA}{2}\int_L \varepsilon^2\,dx - \int_L q\,u\,dx - \sum P_i\,d_i$$

$$\varepsilon^2 = (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^T\,\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d} \qquad u = \boldsymbol{d}^T\,\boldsymbol{N}^T$$

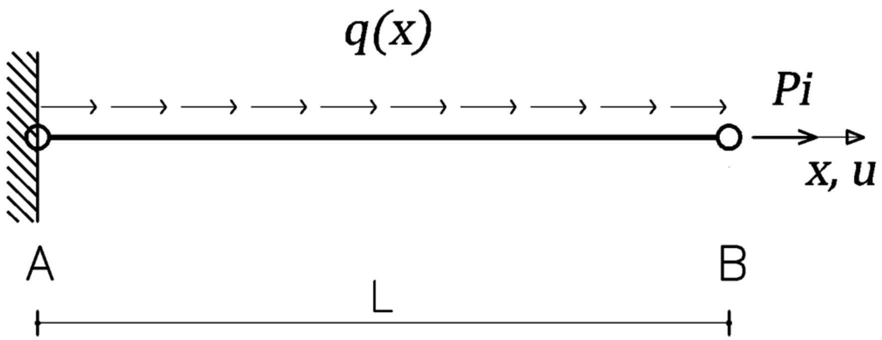
$$\pi = \frac{EA}{2}\int_L \boldsymbol{d}^T\,\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}\,dx - \int_L q\,\boldsymbol{d}^T\,\boldsymbol{N}^T dx - \sum P_i\,d_i$$

$$\frac{d\pi}{d\boldsymbol{d}} = 0 = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}\,dx - \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx - \sum P_i$$

$$\frac{d^2\pi}{d\boldsymbol{d}^2} = \boldsymbol{k}_e = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,dx$$

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 2 Nodos



$$u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}$$

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_e = EA \int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx$$

$$\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV$$

$$\frac{d\pi}{d\boldsymbol{d}} = 0 = EA \int_L \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}\,dx - \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx - \sum P_i$$

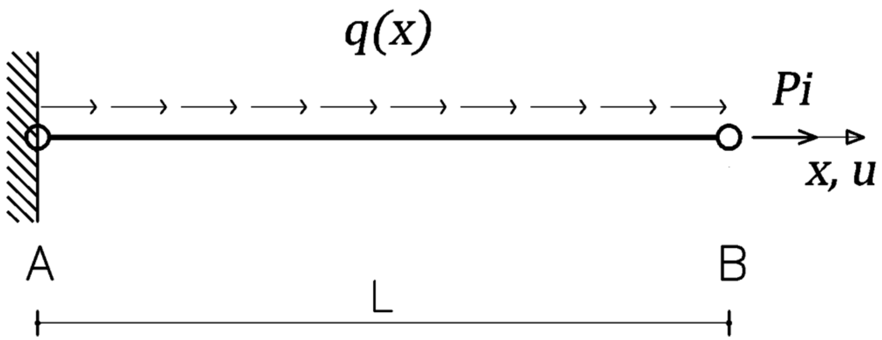
$$\frac{d^2\pi}{d\boldsymbol{d}^2} = \boldsymbol{k}_e = EA \int_L \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B}\,dx$$

$$\boldsymbol{k}_e = EA \int_L \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B}\,dx = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} L$$

$$\boldsymbol{k}_e = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 2 Nodos



$$\frac{d\pi}{d\boldsymbol{d}} = 0 = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}\,dx - \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx - \sum P_i$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx = q\int_L \boldsymbol{N}^T dx$$

$$\boldsymbol{f}_e = q\begin{bmatrix}\frac{L}{2}\\ \frac{L}{2}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}}$$

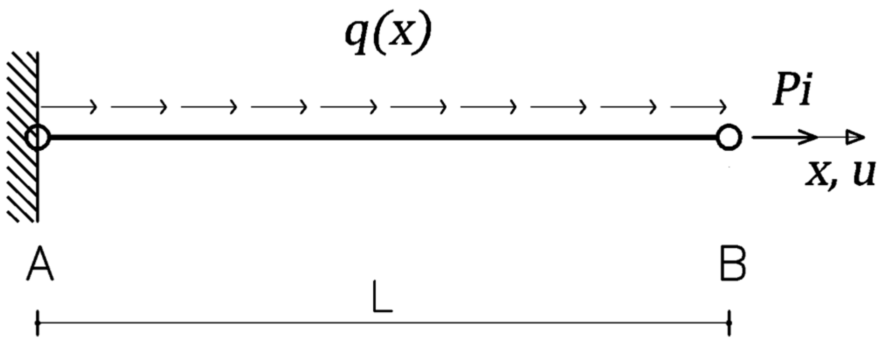
$$\boxed{\boldsymbol{k}_e = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx}$$

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 2 Nodos



$$\frac{d\pi}{d\boldsymbol{d}} = 0 = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}\,dx - \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx - \sum P_i$$

Por condición de equilibrio a nivel elemental

$$\frac{d\pi}{d\boldsymbol{d}} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{k}_e\,\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}_e$$

Condición de equilibrio a nivel estructural

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{K} = \mathbf{E}_{e=1}^{Nelem}\boldsymbol{k}_e \qquad \boldsymbol{P} = \mathbf{E}_{e=1}^{Nelem}\boldsymbol{f}_e + \boldsymbol{P}_i$$

$$\boxed{u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}}$$

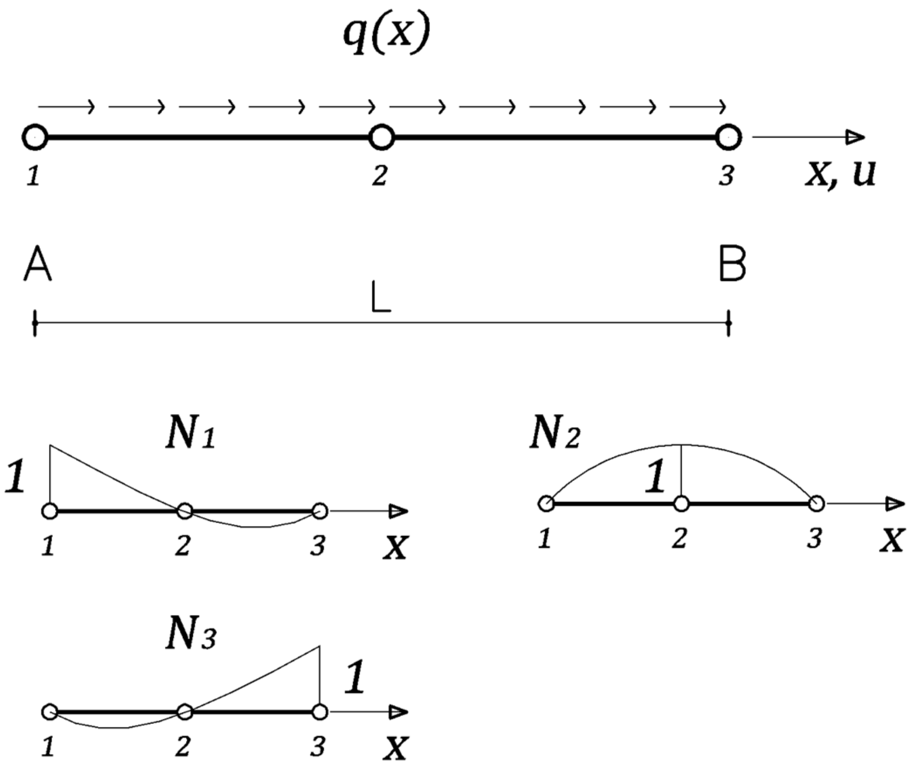
$$\boxed{\boldsymbol{k}_e = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx}$$

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 3 Nodos



$$u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}$$

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV$$

$$\boldsymbol{k}_e = EA\int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx$$

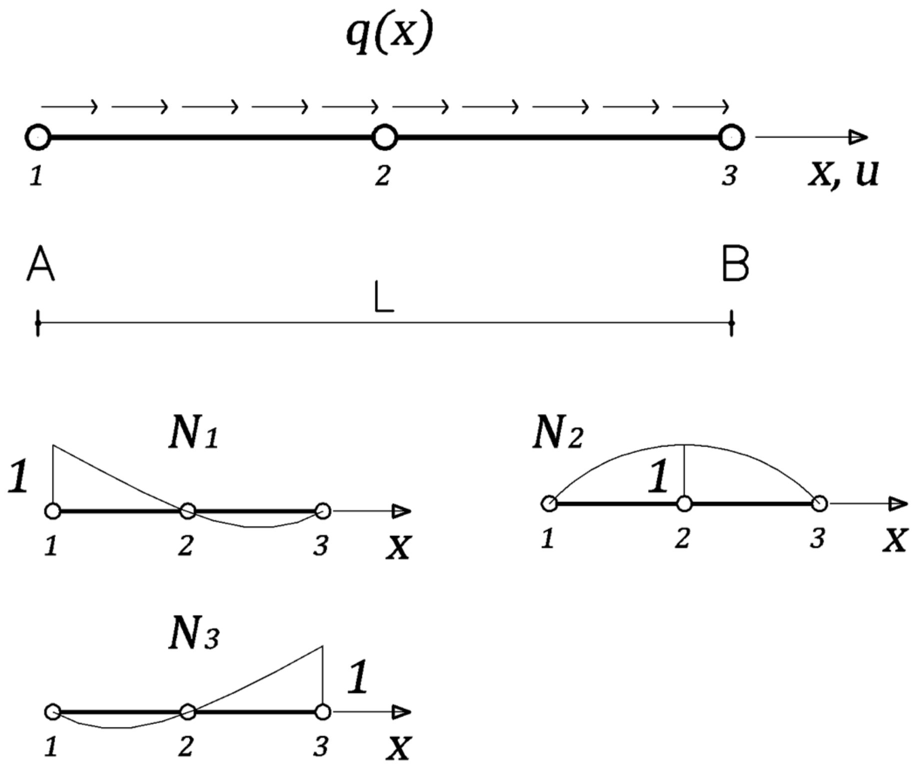
Conceptos

Formulación Paramétrica

Integración Numérica

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 3 Nodos



$$u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}$$

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV$$

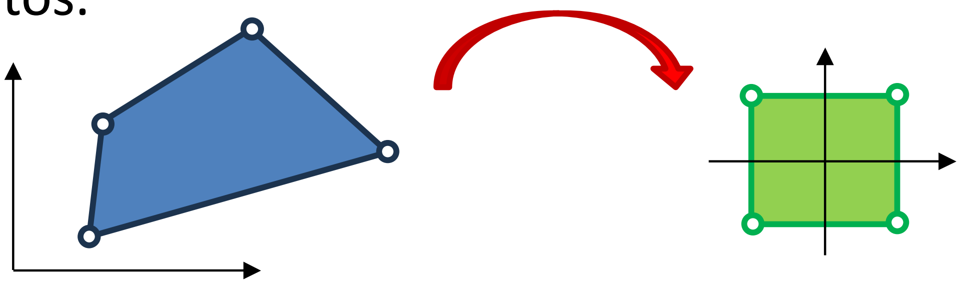
$$\boldsymbol{k}_e = EA \int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx$$

Formulación Paramétrica

Consiste en interpolar la geometría del elemento a partir de las coordenadas de un conjunto de puntos.

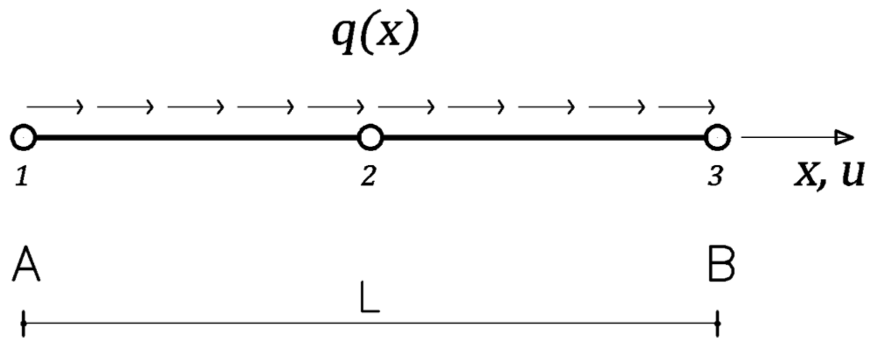
Coordenadas Cartesianas

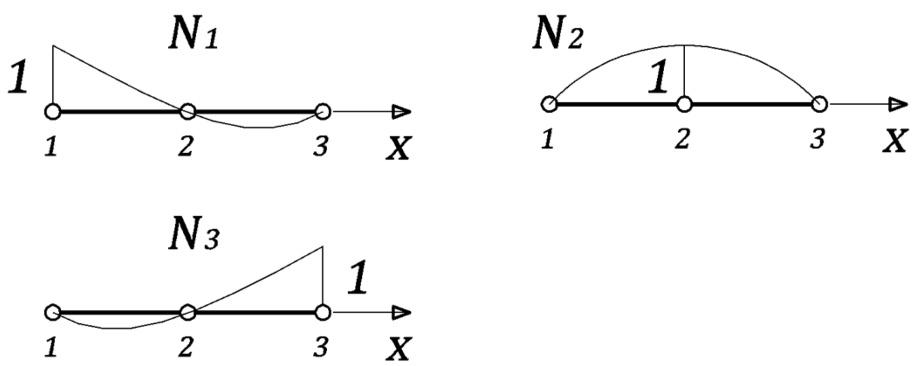


Coordenadas Naturales

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 3 Nodos





$$u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}$$

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV$$

$$\boldsymbol{k}_e = EA \int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx$$

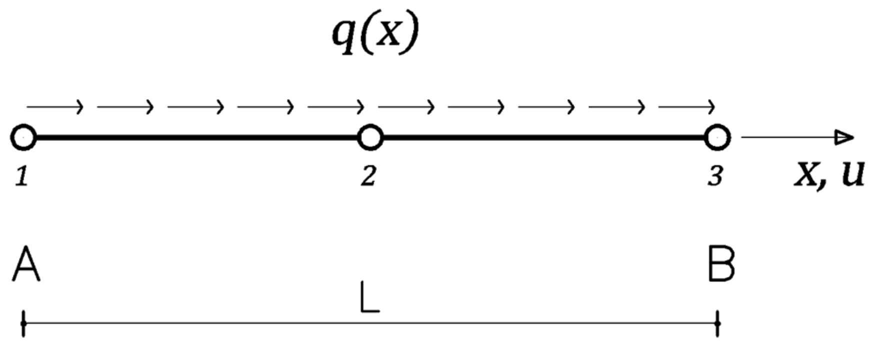
Integración Numérica

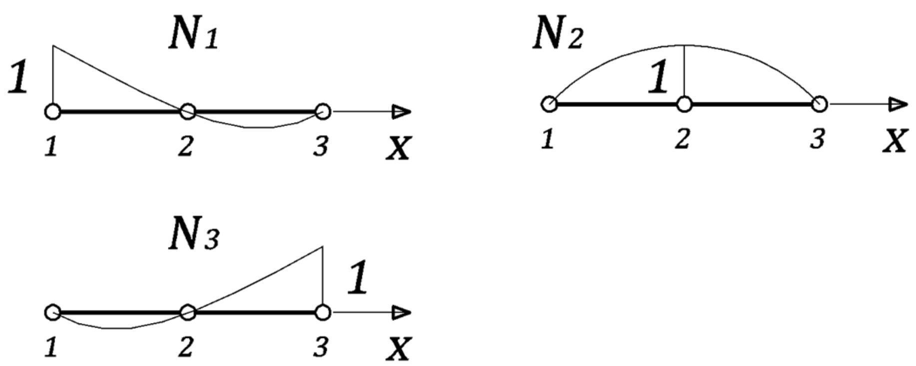
En casos de interés práctico, la integración analítica puede ser inabordable. Se recurre a la integración numérica.

Integrales $\iiint$ → Cuadratura de Gauss → $\sum \; \sum \; \sum$ Sumatorias

FORMULACIÓN ELEMENTOS FINITOS

Elemento 1D de 3 Nodos





$$u = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}$$

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,dV$$

$$\boldsymbol{k}_e = EA \int_L \boldsymbol{B}^T\,\boldsymbol{B}\,dx$$

$$\boldsymbol{f}_e = \int_L q\,\boldsymbol{N}^T dx$$

$$\boldsymbol{k}_e = \frac{EA}{6\,L}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_e = \frac{q\,L}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

MEF ES APROXIMADO !

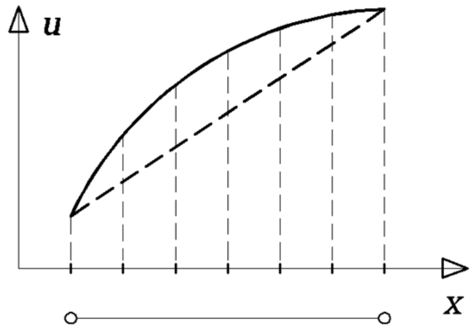
- La geometría de la estructura real se ha discretizado arbitrariamente, obteniendo la malla de elementos finitos que se utiliza en la simulación numérica.
- Los corrimientos, que constituyen el campo incógnita, se aproximan con las funciones de forma, que también se pueden elegir arbitrariamente.
- Las integrales que se deben resolver para obtener la matriz de rigidez del elemento se calculan numéricamente.
- Las integrales que se deben resolver para obtener el vector de cargas nodales del elemento se calculan numéricamente.

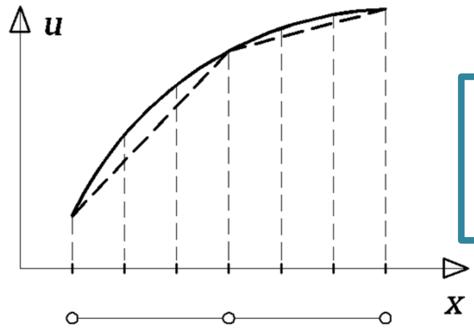
¿ Se puede asegurar que los resultados obtenidos representen el comportamiento de la estructura real?

CONVERGENCIA

- Para asegurar que los resultados obtenidos convergen a la solución teórica se realizan ensayos.
- El ensayo más popular es el **Patch Test**, propuesto por Bruce Irons
- Si el elemento formulado pasa el **Patch Test**, los resultados obtenidos convergen a la solución teórica a medida que se aumenta la densidad de la malla.

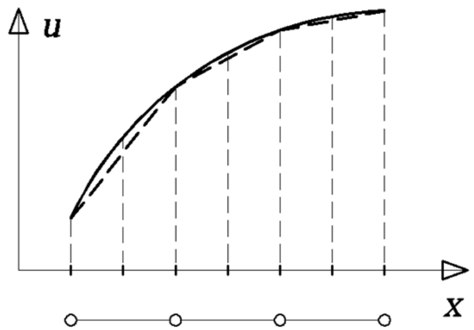
Malla
1 E2N

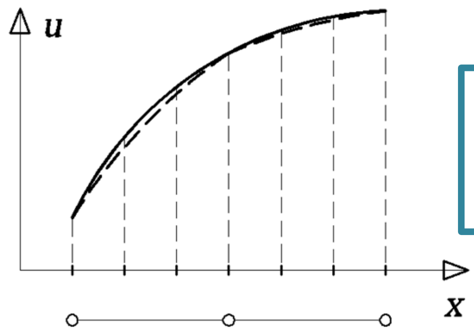




Malla
2 E2N

Malla
3 E2N





Malla
1 E3N

BILIOGRAFÍA

- Oñate, E. “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”. CIMNE. Artes gráficas Torres. Barcelona. España. 1995. ISBN 84-87867-00-6

- Celigüeta Lizarza, J. “Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural” UNICOPIA C.B. San Sebastián. España. 2011. ISBN 84-921970-2-1

- Hinton, E. & Owen, D. “An Introduction to Finite Element Computations” Pineridge Press Limited. Swansea. U.K. 1981. ISBN 0-906674-06-9