Elementos Finitos
Complemento de Teoría
Curso 2022 - Análisis Estructural II

1. Comentarios acerca de las funciones de forma

a) Al discretizar de manera espacial el dominio de interés, en este caso la barra 1D, se agregan más puntos de control. Hay más información y, en este sentido es importante destacar que se enriquece la aproximación. Sin embargo se mantienen las funciones simples. El inconveniente es que aumenta el tamaño del sistema de ecuaciones lineales.

b) Es importante definir las funciones de forma o funciones de aproximación, de manera que las mismas valgan 0 o 1 en los nodos. De esta forma los coeficientes a_i cobran sentido físico. Para el caso de la barra dan el desplazamiento en los nodos.

c) Es valioso que las funciones de forma son de soporte compacto, es decir que son no nulas para un elemento dado y nulas para el resto y son las mismas para todos los elementos similares. De esta forma surge naturalmente la idea de automatizar el cálculo.

d) Construcción y orden de las funciones de forma.

Cabe preguntarse si las funciones de forma deben ser siempre lineales. La respuesta es no. El orden es arbitrario. En la práctica se utilizan funciones de forma lineales y cuadráticas.
Conviene identificar algún esquema matemático que permita construir funciones de forma con facilidad, e insistir con las ventajas que aporta imponer valor 1 o 0 en los nodos.

2. Polinomios de Lagrange

Estos polinomios son útiles para representar funciones de forma. La expresión general está dada por:

$$P_i = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{m} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

2.1 Caso $m=2$ (Polinomios de primer orden)

La formula general permite definir dos polinomios lineales P_1 y P_2

$$P_1 = \prod_{j=1,\ j\neq 1}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)} = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$P_2 = \prod_{j=1,\ j\neq 2}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_2-x_j)} = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$$

Para el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ resulta, para $x_1=-1$, $x_2=1$

$$P_1 = \frac{x-1}{-1-1} = \frac{1}{2}(1-x)$$

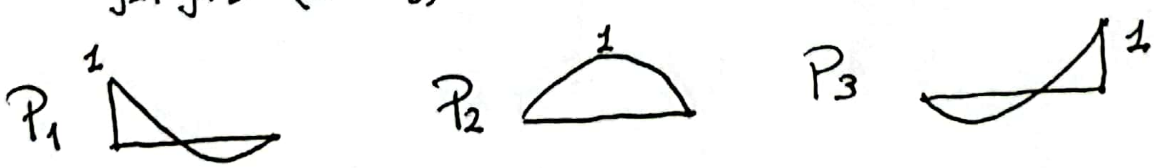
$$P_2 = \frac{(x-(-1))}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1+x)$$

2.2 Para $m=3$ se obtienen los Polinomios P_1, P_2 y P_3, de segundo grado. En este caso $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=1$

$$P_1 = \prod_{j=1,\ j\neq 1}^{3} \frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)} = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x\,.\,(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

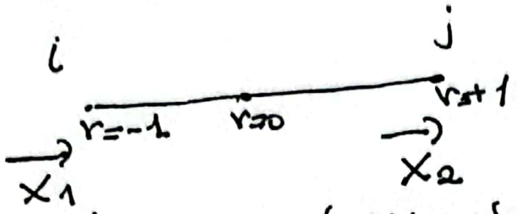
$$P_2 = \prod_{j=1,\ j\neq 2}^{3} \frac{(x-x_j)}{(x_2-x_j)} = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(+1)(-1)} = (1-x).(1+x) = 1-x^2$$

$$P_3 = \prod_{j=1,\ j\neq 3}^{3} \frac{(x-x_j)}{(x_3-x_j)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)\,x}{2} = \frac{1}{2}x(1+x)$$



3. Coordenadas Naturales

Para independizar al elemento de referencia o elemento patrón del sistema de coordenadas que se utiliza para definir la geometría del sólido de interés, se introduce el concepto de "Coordenadas Naturales" r



La geometría, en el espacio de coordenadas naturales puede interpolarse de manera semejante a los desplazamientos. Para el caso de dos nudos, utilizando los polinomios de Lagrange P_1 y P_2 para definir N_1 y N_2:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-r) \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1+r)$$

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1-r)x_1 + \frac{1}{2}(1+r)x_2$$

Ahora se puede calcular la derivada $\frac{\partial x}{\partial r}$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{l}{2}$$

Donde l es la longitud del elemento. La derivada $\frac{\partial x}{\partial r}$ se denomina Jacobiano de la transformación de coordenadas x a r

Los elementos "isoparamétricos" interpolan desplazamientos y coordenadas de la misma manera.

$$\hat{u} = N_1 a_1 + N_2 a_2 = \underset{\sim}{N_i}\,\underset{\sim}{a_i}$$

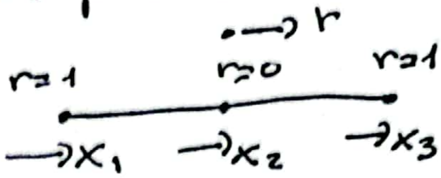
$$\varepsilon = \frac{d\hat{u}}{dx} = \frac{d\underset{\sim}{N_i}}{dx}\underset{\sim}{a_i} = \left[\frac{dN_i}{dr}\frac{dr}{dx}\right] a_i = J^{-1}\left[\frac{dN_i}{dr}\right] a_i$$

$$B = J^{-1}\left[\frac{dN_i}{dr}\right] = \frac{2}{l}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right]$$

Es decir que se obtiene el mismo resultado que el deducido anteriormente.

4. Deducción del elemento de barra 1D de 3 nodos.

4.1 Funciones de forma e interpolación



$$N_1 = \frac{1}{2} r (r-1)$$

$$N_2 = 1 - r^2$$

$$N_3 = \frac{1}{2} r (r+1)$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

$$x = \frac{1}{2} r (r-1) x_1 + (1-r^2) x_2 + \frac{1}{2} r (r+1) x_3$$

El Jacobiano del cambio de coordenadas $J = \frac{\partial x}{\partial r}$ resulta:

$$J = \frac{dx}{dr} = \left(r - \frac{1}{2}\right) x_1 + (-2r) x_2 + \left(r + \frac{1}{2}\right) x_3 =$$

$$= 2r \left(\frac{x_1}{2} - x_2 + \frac{x_3}{2}\right) + \frac{(x_3 - x_1)}{2} = \frac{l}{2} + 2r \frac{(x_1 + x_3 - 2x_2)}{2}$$

Solamente $J = \frac{l}{2}$ cuando $x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$, es decir cuando el nodo intermedio esté ubicado en el centro del elemento: $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$. Esta condición no siempre se cumple y entonces es preferible emplear integración numérica (Ver apéndice). Por simplicidad se supone que $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ y $J = \frac{l}{2}$.

4.2 Matriz de rigidez y Término de carga

$$\Pi = \frac{EA}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d\hat{u}}{dx}\right)^2 - \int_{-1}^{1} q \hat{u} \, dx - \sum P_i u_i$$

Calculando la minimización de Π como es habitual y aproximando $\hat{u} = \sum N_i a_i$, resulta:

$$K = EA \int_{-1}^{1} B^T B \, J(r) \, dr \quad ; \quad f = \int_{-1}^{1} N^T q \, dr$$

$$B_i = \frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{dr} \frac{dr}{dx} = J^{-1} \frac{dN_i}{dr}$$

4.3 Cálculo de la matriz K y el vector f

Suponiendo $J = \frac{l}{2}$ queda

$$B = \frac{2}{l}\left[\left(r-\frac{1}{2}\right); -2r; \left(r+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$K = EA\int_{0}^{1} B^T B\, J(r)\,dr = EA\,\frac{2}{l}\,\frac{2}{l}\,\frac{l}{2}\int_{-1}^{1} B^T B\,dr =$$

$$= \frac{2EA}{l}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} r-\frac{1}{2} \\ -2r \\ r+\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r-\frac{1}{2} & -2r & r+\frac{1}{2}\end{bmatrix}dr = \frac{2EA}{l}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}(r-\frac{1}{2})^2 & (r-2r)^2 & (r^2-\frac{1}{4}) \\ & 4r^2 & (r-2r^2) \\ & & (r+\frac{1}{2})^2\end{bmatrix}dr$$

Que integrada queda:

$$K = \frac{EA}{6l}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14\end{bmatrix}$$

El término independiente resulta:

$$f = \int_{-1}^{1} q N^T J(r)\,dr = \frac{ql}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}r(r-1) \\ 1-r^2 \\ \frac{1}{2}r(r+1)\end{bmatrix}dr = \frac{ql}{6}\begin{bmatrix}1 \\ 4 \\ 1\end{bmatrix}$$

4.4 Integración de los términos de la matriz K y el vector f.

Se calcula el término K_{11}, los demás son similares.
Primero se realiza el cálculo en forma analítica:

$$K_{11} = \frac{2EA}{l}\int_{-1}^{1}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 dr = \frac{2EA}{l}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2} + \frac{r}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2EA}{l}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right)\right) = \frac{2EA}{l}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{14}{6}\frac{EA}{l}$$

Integración numérica del término K_{11}

i) Un punto de Gauss $r=0$ $W=2$

$$K_{11}(0) = \frac{2EA}{l}\int_{-1}^{1}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2 dr \simeq \frac{2EA}{l}\cdot 2\,\frac{1}{4} = \frac{EA}{l}$$

ii) Dos puntos de Gauss $r_i = \pm 0{,}577$ $W_1 = W_2 = 1$

$$K_{11}(\pm 1) \simeq \frac{2EA}{l}\left[\left(0{,}577-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1 + \left(-0{,}577-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1\right] =$$

$$= \frac{2EA}{l}\left(0{,}077^2 + 1{,}077^2\right) = 2{,}34\,\frac{EA}{l}$$

iii) Tres puntos de Gauss: $r_1 = 0{,}7746$, $r_2 = 0$, $r_3 = -0{,}7746$,
$W_1 = 0{,}5556$, $W_2 = 0{,}8889$; $W_3 = 0{,}5556$

$$K_{11} \simeq \frac{2EA}{l}\left[\left(0{,}7746-\frac{1}{2}\right)^2 0{,}5556 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2 0{,}8889 + \left(-0{,}7746-\frac{1}{2}\right)^2 0{,}5556\right] =$$

$$= 2{,}3356\,\frac{EA}{l}$$

El resultado analítico $\frac{14}{6} = 2{,}333\ldots$

Los demás términos se calculan de manera similar

Cálculo del vector de términos independientes f.

$$f = \int_{-1}^{1} q N^T J(r)\,dr = q\frac{l}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}r(r-1)\\ 1-r^2\\ \frac{1}{2}r(r+1)\end{bmatrix}dr = q\frac{l}{2}\begin{bmatrix}\frac{r^3}{6}-\frac{r^2}{4}\\ r-\frac{r^3}{3}\\ \frac{r^3}{6}+\frac{r^2}{4}\end{bmatrix}_{-1}^{1} =$$

$$= q\frac{l}{2}\begin{bmatrix}2/6\\ 4/3\\ 2/6\end{bmatrix} = q\frac{l}{6}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$$

5. Problema de Ejemplo

Se resuelve una viga sometida a una carga repartida q, de longitud l, propiedades EA y una carga concentrada P aplicada en el extremo libre ($x=l$). La barra está soportada en $x=0$ ($u=0$). Este problema se estudió al comienzo y luego se resolvió mediante Rayleigh Ritz y también con elementos finitos de 2 nodos.

Se dispone solamente un elemento. El problema $Ka = f$

Se reduce a

$$\frac{EA}{6l}\begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{ql}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + P\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_1 = 0$ (por condiciones de contorno)

$$a_2 = \frac{1}{EA}\left(\frac{Pl}{2} + \frac{3}{8}\, q\frac{l}{2}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{EA}\left(Pl + q\frac{l^2}{2}\right)$$

Que coinciden con los resultados analíticos

$$u = \frac{1}{EA}\left[Px + q\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)\right] \qquad u(l/2) = \frac{1}{EA}\left(\frac{Pl}{2} + \frac{3}{8} q l^2\right)$$

$$u(l) = \frac{1}{EA}\left(Pl + q\frac{l^2}{2}\right)$$

El método de Gauss consiste en reemplazar la integración cuadrática por una ponderación de la función evaluada en algunos puntos.

En general:

$$I \simeq \sum_{i=1}^{n} f(r_i) W(r_i)$$

donde r_i es la coordenada del punto de evaluación o muestreo de la función.

Para un punto $r=0$ $W=2$

Para dos puntos $r=\pm 0{,}577$ $W=1$

Para tres puntos $r_1=0{,}7746$ $W_1=0{,}5556$

$r_2=0$ $W_2=0{,}8881$.

$r_3=-0{,}7746$ $W_3=0{,}5556$

Ejemplo: Integrar $y=\frac{1}{2}(1-x)$ en el intervalo $-1\leq x\leq 1$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=1$$

Numéricamente

a) $x=0$ $W=2 \Rightarrow I_{(0)}\simeq\frac{1}{2}(1-0)2=1$

b) $x=\pm 0{,}5777$ $W=\pm 1 \Rightarrow I_{(1)}=\frac{1}{2}(1+0{,}5777)1+\frac{1}{2}(1-0{,}5777)1=1$

Al ser una función lineal es suficiente emplear un punto de integración de Gauss. En la práctica, para funciones más generales deben utilizarse 2 o 3 puntos de integración de Gauss.