



# ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

---

## UNIDAD 6: ESTRUCTURAS SOMETIDAS A ACCIONES HORIZONTALES

Material de estudio preparado por:

Dr. Ing. Carlos García Garino - Prof. Titular

Giuliano Colombo - Adscripto Ad Honorem

# ÍNDICE

1. Estructuras sometidas a acciones horizontales.....	3
1.1 ACCIONES SÍSMICAS Y ACCIONES DE VIENTO .....	3
1.1.1. VIENTO.....	3
1.1.2. SISMO .....	3
1.2. MÉTODOS DE ANÁLISIS Y CÁLCULO .....	3
2. Distribución de Fuerzas Sísmicas .....	3
2.1. MÉTODO ESTÁTICO .....	3
2.1.1. PRINCIPIOS BÁSICOS .....	3
2.1.2. HIPÓTESIS DEL MÉTODO.....	4
2.2. DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS SÍSMICAS EN PLANTA .....	5
2.2.1. GRADOS DE LIBERTAD .....	5
2.2.2. CINEMÁTICA .....	6
2.2.3. CENTRO DE RIGIDEZ .....	11
2.2.4. DISTRIBUCIÓN EN PLANTA .....	13
3. Rigidez a Desplazamientos Horizontales.....	15
3.1. ESTRUCTURAS AISLADAS Y PÓRTICOS SIMPLES .....	16
3.2. PÓRTICOS CON MAMPOSTERÍA.....	16
3.3. CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ.....	18

# 1. Estructuras sometidas a acciones horizontales

## 1.1 ACCIONES SÍSMICAS Y ACCIONES DE VIENTO

Las *Acciones Horizontales* que generan sollicitaciones en las estructuras se originan a partir de dos fenómenos principalmente, el viento o el sismo.

### 1.1.1. VIENTO

El viento suele afectar en mayor medida a estructuras livianas (como naves industriales, cubiertas metálicas, etc.) y cobra relevancia en zonas donde alcanza velocidades altas.

### 1.1.2. SISMO

El sismo, por el contrario, afecta principalmente a estructuras cuyo peso es considerable. Esto se debe a que, ante los movimientos sísmicos acelerados del suelo, el peso propio de la estructura genera *Acciones Sísmicas* (originalmente dinámicas) para mantener su estado de movimiento. Dado esto, vemos que los efectos sísmicos son *Efectos Inerciales*.

## 1.2. MÉTODOS DE ANÁLISIS Y CÁLCULO

Para llevar a cabo el análisis y cálculo de estructuras sometidas a acciones sísmicas o de viento, podemos efectuar un *Análisis Dinámico* mediante simulación numérica, o un *Análisis Estático* aproximado (válido para estructuras simples y regulares).

# 2. Distribución de Fuerzas Sísmicas

## 2.1. MÉTODO ESTÁTICO

### 2.1.1. PRINCIPIOS BÁSICOS

El *Método Estático* es un análisis simplificado que supone una hipotética *Fuerza Sísmica*  $F_S$  horizontal y proporcional al peso total  $W$  de dicha estructura:

$$F_S = C \cdot W$$

Esta proporcionalidad se logra mediante el *Coefficiente Sísmico*  $C$ , obtenido como resultado de la combinación de otros coeficientes que tienen en cuenta el lugar de emplazamiento de la estructura y sus características de respuesta dinámica, las características del suelo portante, etc. Por otro lado, el peso  $W$  es el peso de la construcción que probablemente esté presente durante el terremoto de diseño, por lo que está compuesto por el *peso propio* de los elementos estructurales más la *sobrecarga*.

Dicha fuerza sísmica total será distribuida en la altura de la estructura, afectando un porcentaje de ella a cada nivel o piso en función de su masa. La fuerza que afecta a cada nivel será entonces distribuida entre los elementos estructurales que sostienen al nivel en cuestión, en función de su *Rigidez a Desplazamientos Horizontales*.

Finalmente, la resolución consistirá en determinar la fracción de esa fuerza total que recibirá cada elemento para luego, en caso de realizar un dimensionamiento, verificar si los mismos son capaces de resistirla.

Cabe destacar que la distribución de fuerzas sísmicas horizontales corresponde a la resolución de un *sistema hiperestático*, cuya mayor o menor complejidad dependerá de la cantidad de elementos estructurales presentes.

### 2.1.2. HIPÓTESIS DEL MÉTODO

Para poder aplicar el método estático al análisis y cálculo de estructuras sometidas a acciones sísmicas, consideramos válidas las siguientes hipótesis:

- I. La distribución real de la masa de toda la estructura se sustituye por un *sistema de masas discretas* (concentradas en cada nivel o planta) y se consideran vinculadas por los elementos estructurales verticales supuestos sin masa.
- II. Dada una *Fuerza A* (equivalente a la fuerza o acción sísmica  $F_S$ ) conocida a nivel de planta, esta puede descomponerse en dos componentes  $A_x$  y  $A_y$  según ejes convenientes.
- III. Se suponen conocidas todas las rigideces de los elementos estructurales que concurren a la planta considerada.
- IV. A nivel de planta existe una losa rígida o *Diafragma Horizontal Rígido*, indeformable en su plano, cuya función es recolectar las fuerzas horizontales concurrentes al nivel en el cual se encuentra y distribuirlas a los elementos verticales del sistema que resisten lateralmente (muros, pórticos, tabiques, etc.).
- V. Dado que esta losa concentra la mayoría del peso correspondiente al nivel analizado, y que el análisis se basa en su movimiento, la fuerza sísmica se considera aplicada en su *centro de masa CM*.

## 2.2. DISTRIBUCIÓN DE FUERZAS SÍSMICAS EN PLANTA

### 2.2.1. GRADOS DE LIBERTAD

Comenzaremos considerando una estructura de un solo nivel en el cual se encuentra una losa coincidente con un denominado plano x-y, sometida a una fuerza sísmica horizontal A:

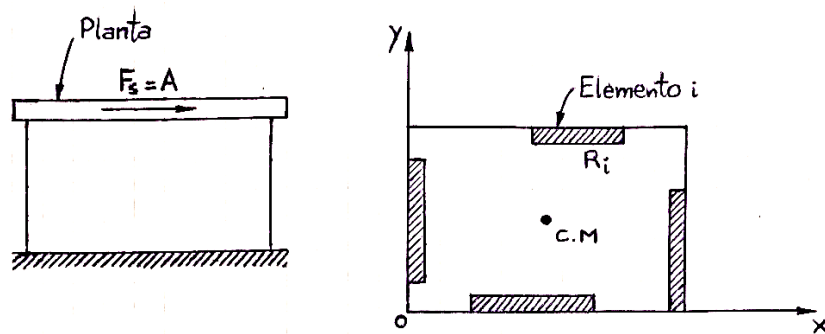


Figura 1: Diafragma rígido a nivel de planta.

Ahora, tenemos por hipótesis que la losa considerada es un diafragma rígido, por lo que los movimientos relativos entre los extremos superiores de los elementos que concurren a ella son nulos. Esto quiere decir que seas cual sea la cantidad de elementos presentes, el sistema quedará determinado si se establece la posición deformada del plano horizontal de la losa, lo que nos permite modelar al problema con *3 grados de libertad*:

- I. Un desplazamiento traslacional en la dirección x, denominado  $X_0$ .
- II. Un desplazamiento traslacional en la dirección y, denominado  $Y_0$ .
- III. Una rotación alrededor del eje z (perpendicular al plano de la losa), denominada Z.

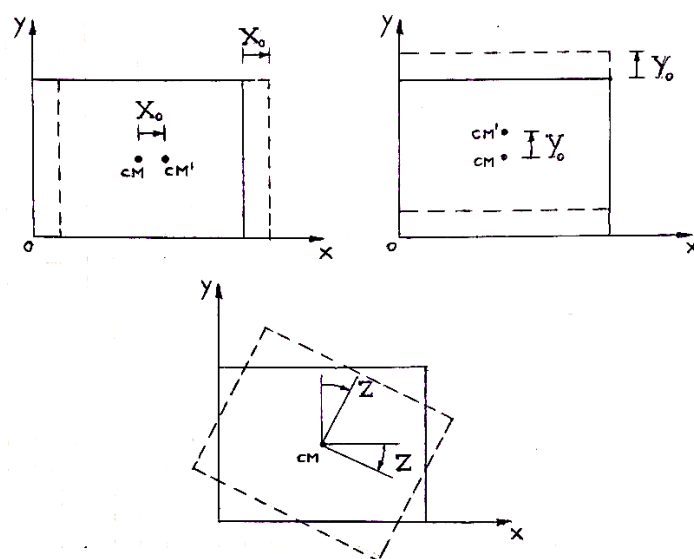


Figura 2: Grados de libertad del problema.

Dichos grados de libertad (movimientos de rotación y traslación) componen entonces el *campo incógnita* del problema.

### 2.2.2. CINEMÁTICA

Tomaremos el caso de una planta referida a un sistema de ejes según las direcciones principales  $x$  e  $y$ , a la cual concurren  $n$  elementos estructurales (para facilitar la comprensión, no se muestran en la figura 3) orientados según dichos ejes. Para el desarrollo de la cinemática del problema, consideraremos solo un *elemento genérico  $i$*  con rigideces  $R_{xi}$  y  $R_{yi}$  en cada una de las direcciones principales:

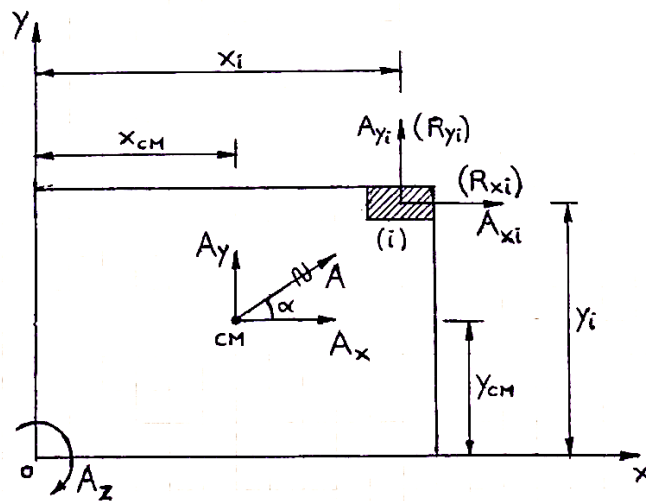


Figura 3: Planta en el plano  $x$ - $y$  sometida a una fuerza  $A$ .

Ahora bien, al estar el elemento estructural  $i$  vinculado a la losa, sufrirá desplazamientos traslacionales  $X_0$  e  $Y_0$  iguales a los de dicha losa (por tratarse de un diafragma rígido):

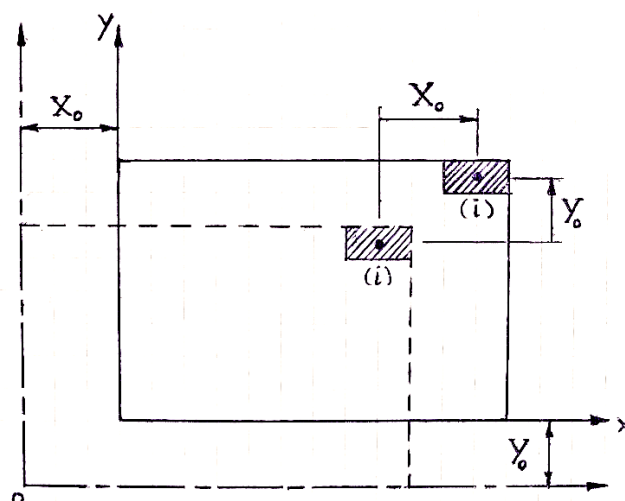


Figura 4: Desplazamientos del elemento  $i$  por traslación de la losa.

Sin embargo, la rotación  $Z$  del diafragma generará desplazamientos adicionales producto de la torsión. Para comprender mejor esto, analizamos la siguiente figura:

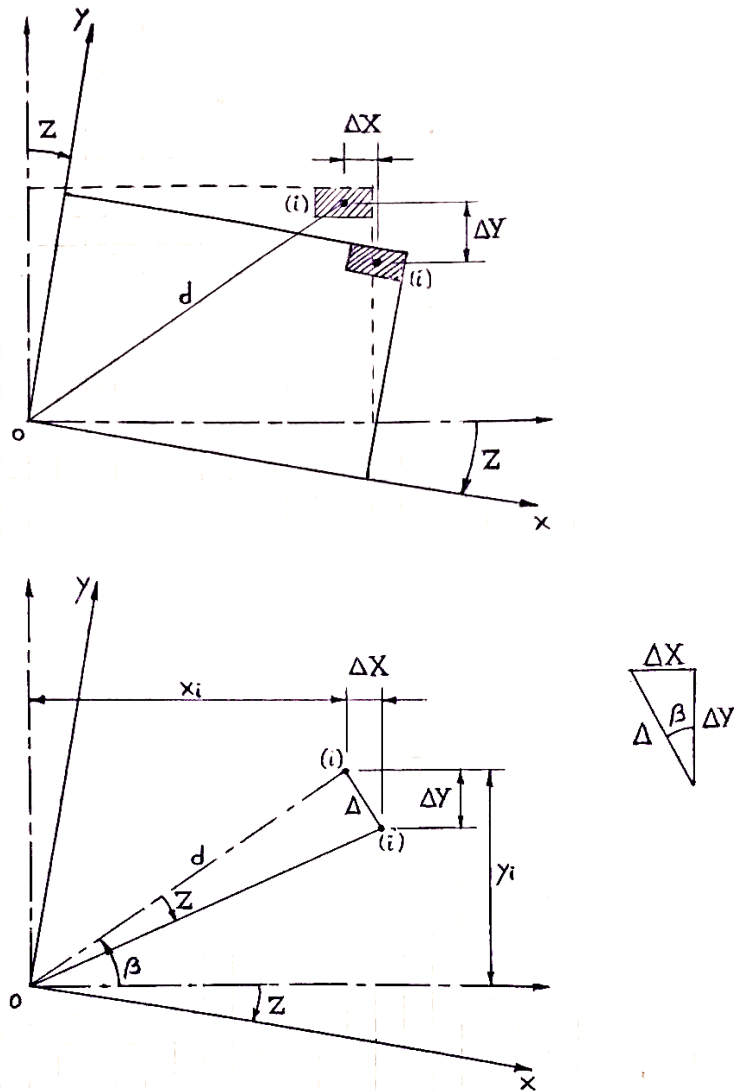


Figura 5: Desplazamientos del elemento  $i$  debidos a la rotación  $Z$ .

Al ser  $Z$  un ángulo muy pequeño, vemos que:

$$\tan Z = \frac{\Delta}{d} \cong Z$$

$$\Delta = d \cdot Z$$

Tenemos entonces por ley de paralelogramo que:

$$\Delta X = \Delta \cdot \sin \beta = d \cdot Z \cdot \sin \beta$$

$$\Delta Y = \Delta \cdot \cos \beta = -d \cdot Z \cdot \cos \beta$$

y así:

$$\Delta X = y_i \cdot Z$$

$$\Delta Y = -x_i \cdot Z$$

en donde  $x_i$  e  $y_i$  son las coordenadas del baricentro del elemento  $i$  con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ . Vemos entonces que los *Desplazamientos del Elemento  $i$*  en ambas direcciones vienen dados por:

$$u_{xi} = X_0 + \Delta X = X_0 + y_i \cdot Z$$

$$u_{yi} = Y_0 + \Delta Y = Y_0 - x_i \cdot Z$$

donde los signos corresponden con el ejemplo de las figuras, pudiendo cambiar dependiendo del caso que se analice.

Analizaremos ahora como se comporta dicho elemento ante la fuerza  $A$ . Las componentes que toma el elemento con respecto a las dos direcciones  $x$  e  $y$  viene dadas por el producto de la rigidez  $R_i$  de dicho elemento y el desplazamiento del mismo, en la dirección que corresponda:

$$A_{xi} = R_{xi} \cdot u_{xi}$$

$$A_{yi} = R_{yi} \cdot u_{yi}$$

Reemplazando las expresiones de los desplazamientos:

$$A_{xi} = R_{xi} \cdot (X_0 + y_i \cdot Z)$$

$$A_{yi} = R_{yi} \cdot (Y_0 - x_i \cdot Z)$$

Considerando ahora una cantidad  $n$  de elementos estructurales  $i$ , la *Acción Total en Planta* viene dada para ambas direcciones por las sumatorias correspondientes:

$$A_x = \sum_{i=1}^n A_{xi} = \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot (X_0 + y_i \cdot Z)$$

$$A_y = \sum_{i=1}^n A_{yi} = \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot (Y_0 - x_i \cdot Z)$$



Debido a que tanto  $X_0$ ,  $Y_0$  cómo  $Z$  son independientes del elemento que se considere, salen de la sumatoria:

$$A_x = \sum_{i=1}^n A_{xi} = X_0 \cdot \sum_{i=1}^n R_{xi} + Z \cdot \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i$$

$$A_y = \sum_{i=1}^n A_{yi} = Y_0 \cdot \sum_{i=1}^n R_{yi} - Z \cdot \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i$$

Por simplicidad de notación, expresamos a las rigideces totales en las direcciones x e y como:

$$R_{xx} = \sum_{i=1}^n R_{xi}$$

$$R_{yy} = \sum_{i=1}^n R_{yi}$$

Tenemos además que  $R_{xi} \cdot y_i$  y  $R_{yi} \cdot x_i$  son los momentos estáticos de las rigideces del elemento i con respecto los ejes x e y, respectivamente. Así, sus sumatorias para los n elementos nos dan los *Momentos Estáticos de Rigideces de la Losa* respecto a los ejes x e y:

$$S_x = \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i$$

Finalmente, las acciones sísmicas en las direcciones x e y quedan expresadas como:

$$A_x = R_{xx} \cdot X_0 + S_x \cdot Z$$

$$A_y = R_{yy} \cdot Y_0 - S_y \cdot Z$$

Para obtener la acción sísmica en la dirección del eje z analizamos nuevamente la figura 3, en donde se muestran aplicadas las acciones  $A_x$  y  $A_y$  en el *Centro de Masa CM* de la planta. Vemos entonces que  $A_z$  vendrá dada por el *momento torsor total* en dicha planta, producto de la aplicación de  $A_x$  y  $A_y$ :

$$A_z = A_x \cdot y_{CM} - A_y \cdot x_{CM}$$

Podemos expresarla en función de las rigideces correspondientes a los n elementos estructurales mediante la aplicación del *Teorema de Varignon*:

$$A_z = \sum_{i=1}^n A_{xi} \cdot y_i - \sum_{i=1}^n A_{yi} \cdot x_i$$

Trabajando la expresión obtenemos:

$$A_z = \sum_{i=1}^n [R_{xi} \cdot (X_0 + y_i \cdot Z)] \cdot y_i - \sum_{i=1}^n [R_{yi} \cdot (Y_0 - x_i \cdot Z)] \cdot x_i$$

$$A_z = X_0 \cdot \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i + Z \cdot \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i^2 - Y_0 \cdot \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i + Z \cdot \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i^2$$

$$A_z = X_0 \cdot S_x - Y_0 \cdot S_y + Z \cdot \left( \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i^2 + \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i^2 \right)$$

en donde la suma del paréntesis (siempre positiva) corresponde al *Momento Polar de Inercia de Rigidez* de la planta con respecto al eje z. Finalmente, la acción sísmica en la dirección z queda expresada como:

$$A_z = S_x \cdot X_0 - S_y \cdot Y_0 + I_{xy} \cdot Z$$

Para obtener los grados de libertad podemos entonces plantear un sistema de ecuaciones lineales:

$$R_{xx} \cdot X_0 + S_x \cdot Z = A_x$$

$$R_{yy} \cdot Y_0 - S_y \cdot Z = A_y$$

$$S_x \cdot X_0 - S_y \cdot Y_0 + I_{xy} \cdot Z = A_z$$

que puede expresarse en *Forma Matricial* como:

$$\begin{bmatrix} R_{xx} & 0 & S_x \\ 0 & R_{yy} & -S_y \\ S_x & -S_y & I_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

o en notación compacta según:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{A}$$

Podemos notar a partir de este sistema que, para una acción externa dada, los desplazamientos  $X_0$  e  $Y_0$ , y la rotación  $Z$  de la planta dependen tanto de dicha acción, como de las rigideces de sus elementos estructurales ( $R_{xx}$ ,  $R_{yy}$ ) y de la distribución de los mismos en el plano ( $S_x$ ,  $S_y$ ,  $I_{xy}$ ).

En el caso concreto del análisis sismorresistente, la fuerza estática externa  $A$  es equivalente a la fuerza sísmica  $F_s$ , obtenida en función de la masa (peso) de la estructura como se vio en el apartado anterior.

### 2.2.3. CENTRO DE RIGIDEZ

Definimos como *Centro de Rigidez CR* al punto de la planta en el que puede considerarse concentrada toda la rigidez aportada por los elementos estructurales. Por *Teorema de Varignon*, las coordenadas de dicho punto pueden encontrarse a partir de las siguientes expresiones:

$$x_{CR} = \frac{\sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n R_{yi}} = \frac{S_y}{R_{yy}}$$

$$y_{CR} = \frac{\sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n R_{xi}} = \frac{S_x}{R_{xx}}$$

Generalmente, las coordenadas del centro de masa y del centro de rigidez no coinciden ya que, para ello, la planta debería poseer una distribución doblemente simétrica de todos los elementos estructurales. Es por esto que definiremos una distancia entre ambos puntos, denominada *Excentricidad Estática e*, y que puede descomponerse según las direcciones  $x$  e  $y$  como se muestra en la siguiente figura:

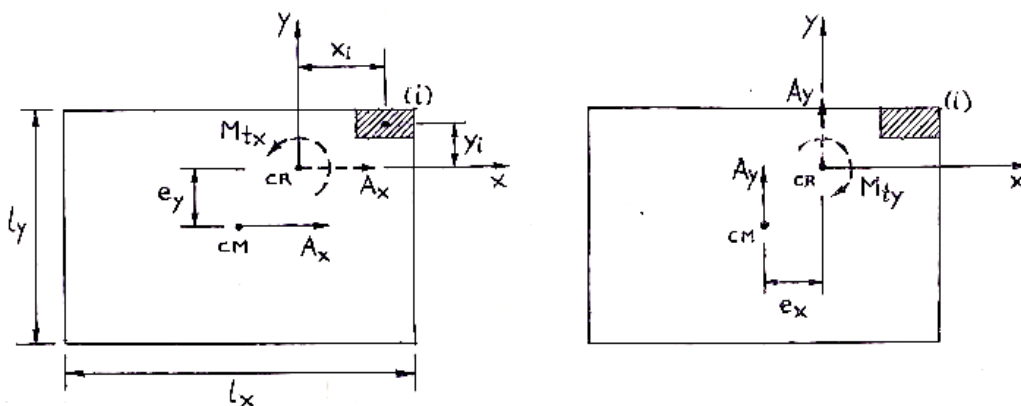


Figura 6: Excentricidades estructurales o estáticas.

Se tiene entonces que:

$$e_x = x_{CM} - x_{CR}$$

$$e_y = y_{CM} - y_{CR}$$

Partiendo de estos conceptos, podemos referir el sistema de coordenadas al centro de rigidez. Esto lleva a que los momentos estáticos de las rigideces sean nulos por estar referidos a los ejes principales de las mismas:

$$S_x = \sum_{i=1}^n R_{yi} \cdot x_i = 0 \quad ; \quad S_y = \sum_{i=1}^n R_{xi} \cdot y_i = 0$$

donde ahora  $x_i$  e  $y_i$  son las coordenadas del elemento genérico  $i$  respecto del centro de rigidez.

El sistema de ecuaciones lineales viene dado ahora por:

$$\begin{bmatrix} R_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & R_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

lo cual facilita la resolución del problema debido a que este nuevo sistema consta de tres ecuaciones desacopladas:

$$X_R = \frac{A_x}{R_{xx}} \quad ; \quad Y_R = \frac{A_y}{R_{yy}} \quad ; \quad Z = \frac{A_z}{I_{xy}}$$

Además, la acción en la dirección de  $z$  (momento torsor) pasa a estar dada por:

$$A_z = \pm A_x \cdot e_y \pm A_y \cdot e_x$$

$$A_z = \pm M_{tx} \pm M_{ty}$$

donde los signos dependerán de la ubicación del centro de masa con respecto al centro de rigidez. Para el ejemplo de la figura 6 se tiene que:

$$A_z = -A_x \cdot e_y + A_y \cdot e_x$$

Cabe mencionar que todas las cantidades involucradas en el cálculo (al igual que se vio en el caso de los momentos estáticos) ahora se encuentran referenciadas respecto al centro de rigidez, por lo que deberán ser calculadas bajo este concepto.

#### 2.2.4. DISTRIBUCIÓN EN PLANTA

Consideremos una planta a la que concurren  $n$  elementos estructurales orientados según las direcciones principales  $x$  e  $y$ :

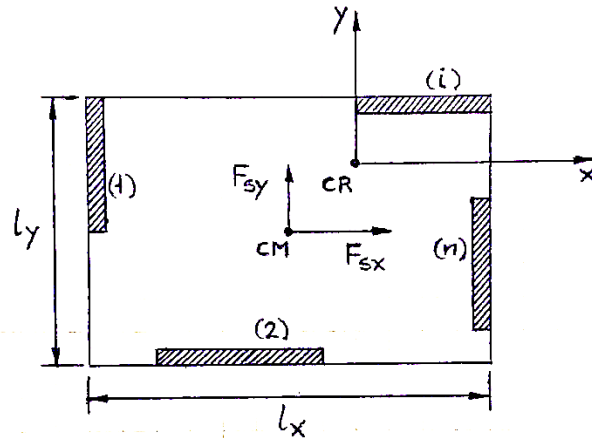


Figura 7: Planta con  $n$  elementos estructurales.

Consideramos que los planos estructurales resisten cargas horizontales solo en la dirección en la que están orientados y no en la dirección perpendicular (debido a que la rigidez en dicha dirección es mucho menor). Por lo tanto, aquellos elementos orientados en dirección  $x$  tendrán rigidez a desplazamientos horizontales solo en dicha dirección y lo mismo para los elementos orientados según  $y$ .

Se tiene entonces que las acciones actuantes ahora son fuerzas sísmicas:

$$A_x = F_{sx} \quad ; \quad A_y = F_{sy}$$

determinadas según lo desarrollado en el inciso 2.1.1.

Conociendo las ubicaciones del centro de masa y del centro de rigidez, podemos obtener, como se vio anteriormente, los valores de las excentricidades estáticas  $e_x$  y  $e_y$ . Sin embargo, el *Reglamento Argentino para Construcciones Sismorresistentes IMPRES-CIRSOC 103 Parte I* (Cap. 6.2.4.2) impone una *Excentricidad Accidental* adicional igual al  $\pm 5\%$  de la longitud mayor de la planta en la dirección correspondiente. Definimos así:

$$E_x = e_x \pm 0,05 \cdot L_x$$

$$E_y = e_y \pm 0,05 \cdot L_y$$

Esta excentricidad adicional contempla un aumento en la torsión debido distintas causas: la posible falta de homogeneidad de la planta debida a variaciones inevitables de rigideces y

masas por diferencias entre las dimensiones teóricas y las reales (lo que provocaría que el centro de masa se encuentre en una posición distinta a la obtenida por simple aplicación del Teorema de Varignon), movimientos torsionales del suelo, amplificaciones dinámicas de excentricidad, etc. Tenemos entonces que podrán darse cuatro posibles casos de momentos torsores:

$$M_{tx,1} = \pm F_{sx} \cdot E_{y1} = \pm F_{sx} \cdot (e_y + 0,05 \cdot L_y)$$

$$M_{tx,2} = \pm F_{sx} \cdot E_{y2} = \pm F_{sx} \cdot (e_y - 0,05 \cdot L_y)$$

$$M_{ty,1} = \pm F_{sy} \cdot E_{x1} = \pm F_{sy} \cdot (e_x + 0,05 \cdot L_x)$$

$$M_{ty,2} = \pm F_{sy} \cdot E_{x2} = \pm F_{sy} \cdot (e_x - 0,05 \cdot L_x)$$

cuyo signo dependerá únicamente del sentido de giro (horario o antihorario) con respecto al CR, nunca del producto de signos de la fuerza y de la excentricidad.

Cabe mencionar que estos cuatro casos son propios del análisis considerado, en el cual las fuerzas sísmicas  $F_{sx}$  y  $F_{sy}$  tienen un solo sentido. En la práctica, deben considerarse tanto estos sentidos como los opuestos, por lo que se obtendrían en realidad 8 casos de momentos torsores.

Tenemos entonces que para un elemento orientado según el eje x, la fuerza sísmica vendrá dada por:

$$A_{xi} = R_{xi} \cdot u_{xi} = R_{xi} \cdot (X_R + y_i \cdot Z)$$

con lo cual, reemplazando los valores obtenidos de  $X_R$  y  $Z$ :

$$A_{xi} = F_{sx} \frac{R_{xi}}{R_{xx}} \pm \frac{R_{xi} \cdot y_i \cdot F_{sx} \cdot E_y}{I_{xy}}$$

Recordando que  $S_{xi} = R_{xi} \cdot y_i$ :

$$A_{xi} = F_{sx} \frac{R_{xi}}{R_{xx}} \pm F_{sx} \cdot E_y \frac{S_{xi}}{I_{xy}}$$

y teniendo que  $M_{tx} = F_{sx} \cdot E_y$  obtenemos finalmente la expresión:

$$A_{xi} = F_{sx} \frac{R_{xi}}{R_{xx}} \pm M_{tx} \frac{S_{xi}}{I_{xy}}$$

donde al primer término se lo define como *Acción por Corte Directo*  $A_{QD}$  y al segundo término como *Acción por Torsión Directa*  $A_{TD}$ .

Como se explicó anteriormente, para una fuerza sísmica en un solo sentido, tendremos dos valores de  $M_{Tx}$ , de los cuales elegimos siempre el *mayor valor positivo* de ambos, asegurándonos así de estar considerando el caso más desfavorable en el cual se produzca un aumento en  $A_{xi}$  debido a  $M_{Tx}$  y no una disminución. El signo de  $A_{TD}$  vendrá dado por el sentido que tendrá dicha fuerza sobre el elemento  $i$  en consideración, y no por el producto de signos de  $M_{Tx}$  y  $S_{xi}$ .

Ahora, existe también una *Acción por Torsión Indirecta*  $A_{TI}$ , debida a  $M_{Ty}$ , que afecta también a los elementos orientados según  $x$ . Dicha acción deberá compararse con  $A_{xi}$  *en valor absoluto*, debiéndose cumplir siempre que  $A_{xi}$  sea mayor que  $A_{TI}$  o de lo contrario nos encontraríamos frente a un mal diseño estructural en el cual la fuerza sísmica en dirección “y” afecta en mayor medida a elementos diseñados y orientados para resistir en dirección “x”.

Mediante un desarrollo análogo al correspondiente con la obtención de  $A_{xi}$ , para un elemento orientado según el eje  $y$ , la fuerza sísmica vendrá dada por:

$$A_{yi} = F_{sy} \frac{R_{yi}}{R_{yy}} \pm M_{ty} \frac{S_{yi}}{I_{xy}}$$

en donde la acción por torsión directa vendrá dada ahora en función de  $M_{Ty}$  y la indirecta en función de  $M_{Tx}$ .

Finalmente, a modo de verificación, la sumatoria de las  $A_{QD}$  correspondientes a los elementos estructurales en una dirección considerada (sea  $x$  o  $y$ ), debe ser igual a  $F_s$  en dicha dirección para satisfacer el equilibrio. Bajo el mismo principio, la sumatoria de las  $A_{TD}$  debe ser igual a cero.

### 3. Rigidez a Desplazamientos Horizontales

Como vimos anteriormente, en todo sistema hiperestático, cada elemento o plano estructural absorbe una fracción de la fuerza o acción total actuante. Esta fracción viene dada en función de su *Rigidez a Desplazamientos Horizontales*, la cual se define como la fuerza que, aplicada a nivel de planta, provoca un desplazamiento horizontal unitario. Su función es cuantificar la capacidad del elemento en cuestión a resistir dichos desplazamientos horizontales.

La rigidez de un elemento estructural o de una estructura en cuestión, depende tanto de sus dimensiones y tipo de material como de las condiciones de vínculo a las que está sujeta. Veremos a continuación algunos ejemplos.

### 3.1. ESTRUCTURAS AISLADAS Y PÓRTICOS SIMPLES

La rigidez a desplazamientos horizontales en este tipo de estructuras puede calcularse a partir del uso del TTV, del Método de las Fuerzas o de algún programa de computadora. Otra opción sería disponer de la matriz de rigidez.

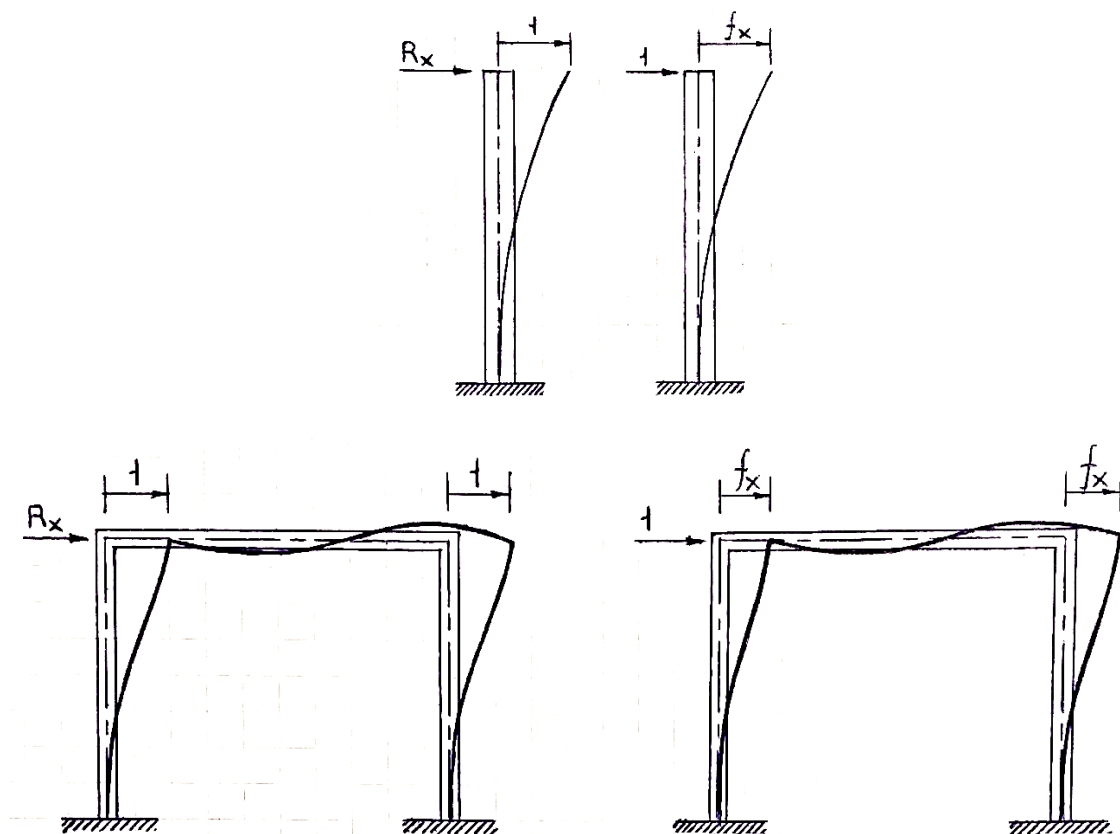


Figura 8: Rigideces y flexibilidades para elementos estructurales simples.

### 3.2. PÓRTICOS CON MAMPOSTERÍA

Como es de esperarse, un pórtico libre no tiene la misma rigidez a desplazamientos horizontales que aquel que enmarca un muro de mampostería. A modo de idealizar el comportamiento de esta estructura, el muro enmarcado por el pórtico puede ser modelado como una *biela* extendida desde un nodo superior hasta un nodo inferior opuesto (figura 9), de manera tal que trabaje únicamente a compresión:



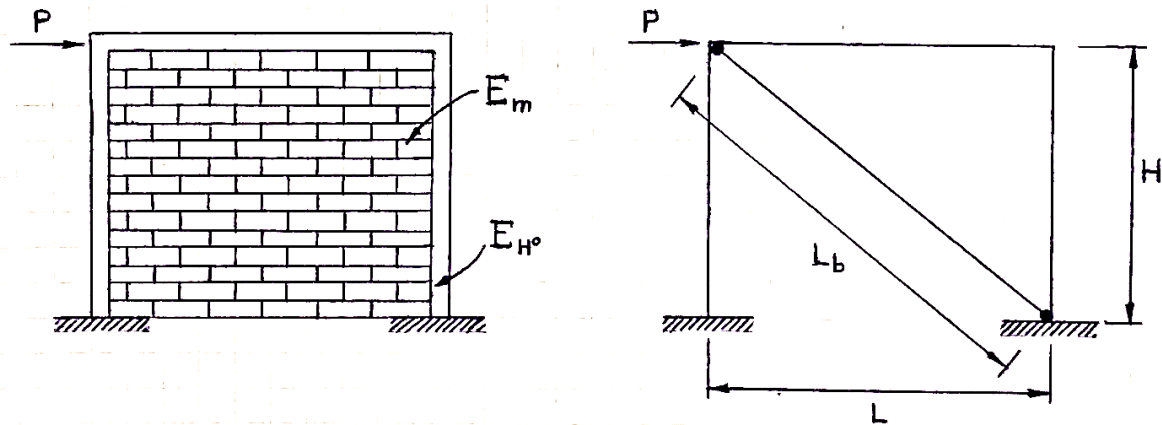


Figura 9: Muro de mampostería modelado a partir de una biela.

Basándonos en lo establecido por el *Reglamento IMPRES-CIRSOC 103 Parte III* (Cap. 1.5) podemos determinar la *Rigidez Axial* de dicha biela si consideramos que posee la siguiente sección transversal:

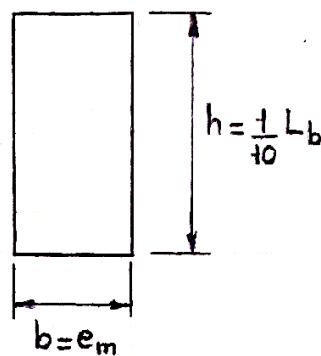


Figura 10: Sección transversal de biela a compresión.

donde la altura  $h$  es igual al 10% de su longitud  $L_b$  y la base  $b$  es igual al espesor  $e_m$  del muro de mampostería original. La rigidez axial vendrá dada entonces por:

$$\frac{E_m \cdot A_b}{L_b}$$

$$\frac{E_m \cdot h \cdot b}{L_b} = E_m \cdot 0,10 \cdot e_m$$

donde  $E_m$  es el módulo de elasticidad de la mampostería.

Ahora, para obtener la rigidez a desplazamientos horizontales del muro, aplicamos un desplazamiento unitario en su nudo superior:

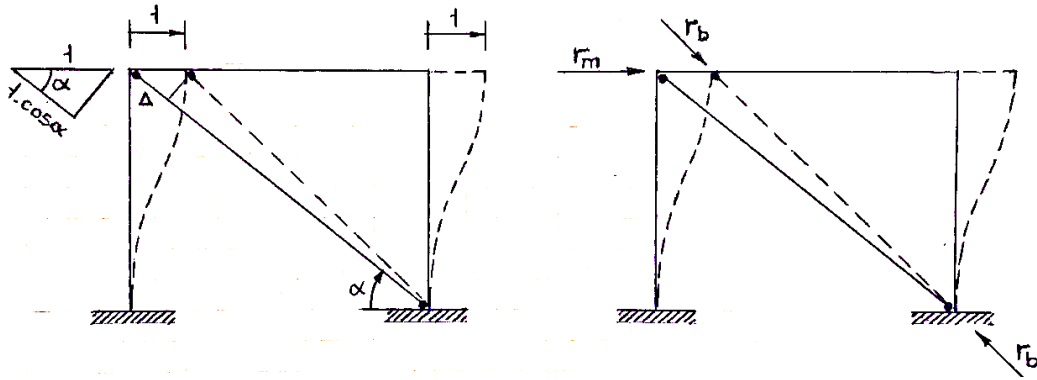


Figura 11: Rigidez a desplazamientos horizontales de un muro de mampostería.

Por geometría vemos que, en la dirección de la biela, la rigidez del muro a dicho desplazamiento puede obtenerse como:

$$r_b = \frac{E_m \cdot A_b}{L_b} \cdot \Delta = (E_m \cdot 0,10 \cdot e_m) \cdot (1 \cdot \cos \alpha)$$

por lo que la *Rigidez a Desplazamientos Horizontales del Muro*  $r_m$  vendrá dada por:

$$r_m = r_b \cdot \cos \alpha = E_m \cdot 0,10 \cdot e_m \cdot \cos^2 \alpha$$

Como comentario cabe mencionar que, si deseáramos obtener la matriz de rigidez de esta estructura, dicha rigidez  $r_m$  del muro se sumaría a la rigidez del pórtico a desplazamientos horizontales (generalmente simbolizada como  $r_{33}$ ).

### 3.3. CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

La *Condensación Estática* de la matriz de rigidez tiene como objetivo concentrar las rigideces que corresponden a desplazamientos de piso sin despreciar los aportes de las rigideces indirectas debidas a giros, eliminando grados de libertad no deseados.

Para desarrollar el concepto, consideraremos la siguiente estructura:

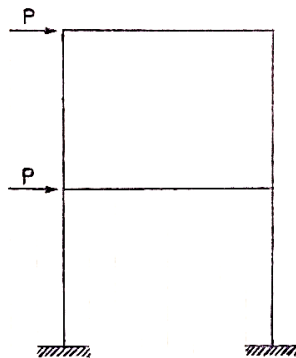


Figura 12: Pórtico biempotrado de dos niveles.

cuyos grados de libertad o incógnitas cinemáticas corresponden a 4 giros nodales y 2 desplazamientos de piso:

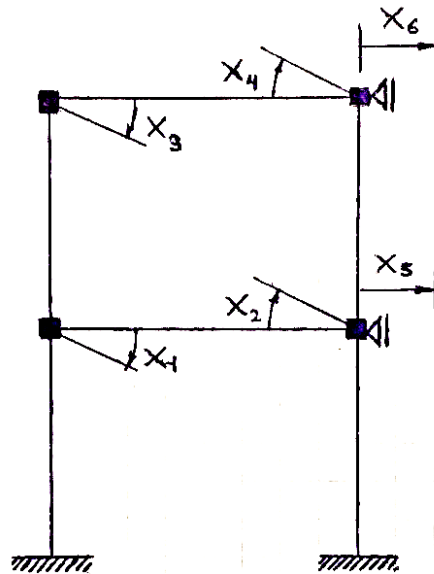


Figura 13: Grado de indeterminación cinemática para un pórtico biempotrado de dos niveles.

A partir de esto, sabemos de antemano que el sistema de ecuaciones lineales que resuelve la estructura es el siguiente:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_{\theta\theta 11} & r_{\theta\theta 12} & r_{\theta\theta 13} & r_{\theta\theta 14} & r_{\theta\delta 15} & r_{\theta\delta 16} \\ \hline r_{\theta\theta 21} & r_{\theta\theta 22} & r_{\theta\theta 23} & r_{\theta\theta 24} & r_{\theta\delta 25} & r_{\theta\delta 26} \\ \hline r_{\theta\theta 31} & r_{\theta\theta 32} & r_{\theta\theta 33} & r_{\theta\theta 34} & r_{\theta\delta 35} & r_{\theta\delta 36} \\ \hline r_{\theta\theta 41} & r_{\theta\theta 42} & r_{\theta\theta 43} & r_{\theta\theta 44} & r_{\theta\delta 45} & r_{\theta\delta 46} \\ \hline r_{\delta\delta 51} & r_{\delta\delta 52} & r_{\delta\delta 53} & r_{\delta\delta 54} & r_{\delta\delta 55} & r_{\delta\delta 56} \\ \hline r_{\delta\delta 61} & r_{\delta\delta 62} & r_{\delta\delta 63} & r_{\delta\delta 64} & r_{\delta\delta 65} & r_{\delta\delta 66} \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline X_{\theta 1} \\ \hline X_{\theta 2} \\ \hline X_{\theta 3} \\ \hline X_{\theta 4} \\ \hline X_{\delta 5} \\ \hline X_{\delta 6} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline P \\ \hline P \\ \hline \end{array}$$

Vemos así que en la matriz de rigidez aparecen sectores donde se agrupan rigideces a giros producto de giros ( $r_{\theta\theta}$ ), rigideces a giros producto de desplazamientos ( $r_{\theta\delta}$ ), rigideces a desplazamientos producto de giros ( $r_{\delta\theta}$ ) y rigideces a desplazamientos producto de desplazamientos ( $r_{\delta\delta}$ ). Estos sectores pueden asociarse a submatrices y entonces expresar el sistema como:

$K_{\theta\theta}$ (4x4)	$K_{\theta\theta}$ (4x2)	*	$X_{\theta}$ (4x1)	=	$0$ (4x1)
$K_{\delta\theta}$ (2x4)	$K_{\theta\theta}$ (2x2)		$X_{\delta}$ (2x1)		$P$ (2x1)

y a su vez podemos expresarlo en notación compacta:

$$[K_{\theta\theta}] * [X_{\theta}] + [K_{\theta\delta}] * [X_{\delta}] = [0]$$

$$[K_{\delta\theta}] * [X_{\theta}] + [K_{\delta\delta}] * [X_{\delta}] = [P]$$

Dado que nos interesa conocer la rigidez a desplazamientos horizontales, despejamos  $X_{\theta}$  de la primera ecuación:

$$[X_{\theta}]_{(4x1)} = -[K_{\theta\theta}]_{(4x4)}^{-1} * [K_{\theta\delta}]_{(4x2)} * [X_{\delta}]_{(2x1)}$$

y reemplazamos lo obtenido en la segunda ecuación para dejar al sistema expresado en función de los desplazamientos de piso horizontales  $X_{\delta}$ :

$$[K_{\delta\theta}] * (-[K_{\theta\theta}]^{-1} * [K_{\theta\delta}] * [X_{\delta}]) + [K_{\delta\delta}] * [X_{\delta}] = [P]$$

$$[[K_{\delta\delta}]_{(2x2)} - ([K_{\delta\theta}] * [K_{\theta\theta}]^{-1} * [K_{\theta\delta}])_{(2x2)}] * [X_{\delta}]_{(2x1)} = [P]_{(2x1)}$$

Finalmente, podemos definir la matriz que representa la *Condensación Estática de la Matriz de Rigidez* de la estructura, denominada  $K_c$ :

$$[K_c] = [K_{\delta\delta}] - ([K_{\delta\theta}] * [K_{\theta\theta}]^{-1} * [K_{\theta\delta}])$$