

**FORMULACION MIXTA DE
ELEMENTOS FINITOS**

Daniel E. López
Ingeniero Civil

FORMULACION MIXTA DE ELEMENTOS FINITOS

INTRODUCCION:

En las secciones precedentes se ha presentado el Método de los Elementos Finitos Basado en Desplazamientos (MEFBD). El campo de desplazamientos asumido cumplía las condiciones de continuidad y compatibilidad (derivabilidad) y el elemento formulado a partir de él debía ser completo. Satisfechas estas condiciones la energía de deformación en la solución calculada converge monotónicamente a la solución exacta [1]. La condición de continuidad puede ser satisfecha, en general, con relativa facilidad. La condición de compatibilidad se puede satisfacer sin mayores dificultades en problemas de continuidad C^0 , es el caso de los problemas de tensión o deformación plana. En problemas mas complejos donde se utilizan varios tipos de elementos para distintas regiones del medio en estudio o en el análisis de placas, la condición de compatibilidad es prácticamente imposible de cumplir. Sin embargo la experiencia ha mostrado que aunque las condiciones de compatibilidad sean violadas frecuentemente se pueden obtener muy buenos resultados.

Además se ha observado que en la formulación de elementos finitos basada en desplazamientos no es adecuada para algunos tipos de análisis, por ejemplo en el análisis de medios incompresibles.

En este contexto se han realizado muchos esfuerzos en la formulación de elementos que permiten atacar los problemas mencionados, y consecuentemente existe un volumen muy grande de información al respecto. No se presentaran en detalle las formulaciones resultantes de dichos estudios, sino simplemente las ideas principales y algún ejemplo de aplicación.

MODELOS BASADOS EN DESPLAZAMIENTOS INCOMPATIBLES:

Cuando en el campo de desplazamientos asumido para formular un elemento los desplazamientos o sus derivadas no son continuas al grado necesario para satisfacer las condiciones de compatibilidad inter-elemento designamos a estos elementos como incompatibles o no-conformes [2]. En este caso el potencial total del sistema no es necesariamente un limite superior de la energía potencial total exacta del sistema, por lo tanto la convergencia monotónica no esta asegurada. Habiendo relajado la condición de convergencia, es necesario establecer condiciones que aseguren al menos la convergencia no monotónica.

El elemento formulado siempre debe ser completo y no debe ser afectado por su dimensión. Recordamos que físicamente el concepto de elemento completo representa la capacidad del elemento para reproducir los modos de cuerpo rígido (sin valores propios nulos espurios) y los estados de deformación constante.

La condición de compatibilidad en cambio puede relajarse, a expensas de la no convergencia monotónica. Se debe notar que esta relajación no impide que elemento sea completo. Cuando un elemento no conforme forma parte de una malla (con elementos de cualquier dimensión) el conjunto debe ser capaz de reproducir estados de deformación constante.

FORMULACIÓN MIXTA:

El conjunto de ecuaciones diferenciales desde el que se inicia el proceso de discretización determina si nos referimos a la formulación como *mixta* o *irreducible*. Si las ecuaciones que gobiernan un problema contienen varias variables independientes u y

ninguna de sus componentes puede eliminarse dejando el problema bien definido, entonces la formulación se llamará *irreducible*. En caso contrario se llamará *mixta*.

Para formular elementos finitos basados en desplazamientos habíamos invocado la estacionalidad de la energía potencial total, la teoría básica usada se puede resumir como sigue (por simplicidad se omiten las deformaciones y tensiones iniciales):

$$\pi_p = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} dV - \int_{S_t} \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} dS \quad (1)$$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}_{su} - \mathbf{u}_p &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde:

\mathbf{L} : operador diferencial que aplicado a \mathbf{u} permite obtener las componentes de deformación.

\mathbf{u}_p : vector de desplazamientos prescritos.

\mathbf{u}_{su} : desplazamientos correspondientes de \mathbf{u} .

Para el caso tridimensional tenemos:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Invocando la estacionalidad de π_p se obtiene:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} dV - \int_{S_t} \delta \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} dS \quad (3)$$

Es importante observar que en la solución del problema presentado las únicas variables son los desplazamientos, que una vez calculados permiten obtener las otras variables de interés en forma directa.

En la práctica la formulación basada en desplazamientos es la mas usada, sin embargo existen otras que también pueden ser empleadas con éxito y que en algunos casos resultan mucho mas efectivas.

Se pueden obtener formulaciones de elementos finitos muy generales usando principios variacionales que pueden interpretarse como extensión del principio de estacionalidad del potencial total. Estos principios variacionales tienen como variables básicas no solo

desplazamientos, sino también deformaciones y/o tensiones. Este tipo de formulación es conocido como *Formulación Mixta de Elementos Finitos*.

En la literatura se proponen una gran variedad de formulaciones mixtas (ver por ejemplo H. Kardenstuncer y D.H. Norrie [3] y F. Brezzi y M. Fortin [4]), aquí solo se presentaran los conceptos básicos generales que serán usados para formular algunas soluciones.

Se puede arribar a un principio variacional muy general y poderoso, haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange, podemos escribir (1) en la forma:

$$\pi^* = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} . dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} . dV - \int_{St} \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} \cdot dS - \int_V \lambda_\varepsilon^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot dV - \int_{Su} \lambda_u^T (\mathbf{u}_{su} - \mathbf{u}_p) \cdot dS \quad (4)$$

donde:

\mathbf{u}_p : desplazamientos prescritos

Su: región donde los desplazamientos están prescritos

Los multiplicadores λ_ε y λ_u se introducen para forzar las condiciones (2). Las variables en (4) son \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, λ_ε y λ_u . Se pueden identificar λ_ε y λ_u con las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y las tracciones \mathbf{t}_{su} actuando en Su respectivamente (porque son dimensionalmente consistentes) la (4) se puede escribir como:

$$\pi_{HW} = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} . dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} . dV - \int_{St} \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} \cdot dS - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot dV - \int_{Su} \mathbf{t}_{su}^T (\mathbf{u}_{su} - \mathbf{u}_p) \cdot dS \quad (5)$$

Este es el Funcional de Hu-Washizu [5-6], cuyas variables independientes son \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{t}_{su} . El mismo puede ser usado para derivar numerosos funcionales, entre ellos el de Hellinger - Reisner [7-8-1] y el de la mínima energía complementaria, y además esta relacionado con numerosas formulaciones (ver H. Kardenstuncer y D.H. Norrie [3], T.H.H. Pian y P. Tong [9]).

El primer sumando de la (5) representa la energía interna de deformación, el tercero y quinto las condiciones de compatibilidad en el contorno, el cuarto las condiciones de compatibilidad interna y el segundo el trabajo de las fuerzas de origen másico.

Invocando la estacionalidad de π_{HW} con respecto a \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{t}_{su} , tenemos:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} . dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} . dV - \int_{St} \delta \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} \cdot dS - \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^T (\delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L}\delta \mathbf{u}) \cdot dV - \int_{Su} \delta \mathbf{t}_{su}^T (\mathbf{u}_{su} - \mathbf{u}_p) \cdot dS - \int_{Su} \mathbf{t}_{su}^T \delta \mathbf{u}_{su} \cdot dS = 0 \quad (6)$$

Se observa que en la formulación variacional de Hu-Washizu se han relajado las condiciones desplazamientos en el contorno y las de compatibilidad de las deformaciones, pero han sido impuestas por los multiplicadores de Lagrange. Este principio es en realidad una descripción válida y más general de las condiciones estáticas y cinemáticas del cuerpo en estudio.

El principio variacional de Hu-Washizu y otros derivados de él pueden ser usados para derivar diversas discretizaciones de elementos finitos, en estos casos los requerimientos de compatibilidad y continuidad inter-elemento y en el contorno deben ser satisfechas ya sea directamente o estar impuestas por multiplicadores de Lagrange. Es claro que estos principios variacionales agregan flexibilidad a la formulación de elementos finitos y se puede obtener un gran número de discretizaciones dependiendo de cual principio se use como base de la formulación, del tipo de interpolación que empleemos y de cual requisito de continuidad sea impuesto.

LA FORMA MIXTA u-ε:

Invocando la estacionalidad del principio variacional de Hu-Washizu, respecto de las variables \mathbf{u} y $\boldsymbol{\varepsilon}$, se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} . dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \mathbf{L} \mathbf{u} . dV = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \mathbf{u}} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \delta(\mathbf{L} \mathbf{u}) . dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} . dV - \int_{St} \delta \mathbf{u}_{st}^T \mathbf{t}_{st} . dS = 0 \quad (8)$$

aproximando independientemente las variables \mathbf{u} y $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (10)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \approx \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{N}_\varepsilon^T \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{u}^T \approx \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \quad (12)$$

reemplazando en (7) y (8):

$$- \int_V \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} . dV + \int_V \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} . dV = 0 \quad (13)$$

$$\int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{N}_u \delta \hat{\mathbf{u}} . dV - \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{F} . dV - \int_{St} \delta \hat{\mathbf{u}}_{st}^T \mathbf{t}_{st} . dS = 0 \quad (14)$$

ordenando las (13) y (14):

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{E} \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} . dV - \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{F} . dV - \int_{St} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{st} . dS \right] + \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left[- \int_V \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} . dV + \int_V \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} . dV \right] = 0 \quad (15)$$

donde:

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{L} \mathbf{N}_u$$

como $\delta \hat{\mathbf{u}}^T$ y $\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$ son arbitrarias, deben anularse las expresiones entre corchetes, llamando:

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = - \int_V \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{N}_\varepsilon . dV \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{u\varepsilon} = \int_V \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{B}_u . dV$$

$$\mathbf{F}1 = 0$$

$$\mathbf{F}2 = \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{F} . dV + \int_{St} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{st} . dS \quad (17)$$

podemos expresar matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} & \mathbf{K}_{u\varepsilon} \\ \mathbf{K}_{u\varepsilon}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}1 \\ \mathbf{F}2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

LA FORMA MIXTA u-σ:

Como extensión de los conceptos expuestos en el apartado precedente se presenta la forma mixta u-σ, en este caso se aproximan:

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (19)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (20)$$

con la condición:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (21)$$

El principio variacional que describe el problema es el de Hellinger - Reissner:

$$\pi_{HR} = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot dV + \int_V \mathbf{u}^T [\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{F}] \cdot dV - \int_{St} \mathbf{u}_{st}^T [\mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{t}_{st}] \cdot dS \quad (22)$$

donde:

$$\mathbf{t} = \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} \quad (23)$$

Invocando la estacionalidad del principio variacional:

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = - \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot dV + \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L} \mathbf{u} \cdot dV = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \mathbf{u}} = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{E} : \delta(\mathbf{L} \mathbf{u}) \cdot dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \cdot dV - \int_{St} \delta \mathbf{u}_{st}^T \mathbf{t}_{st} \cdot dS = 0 \quad (25)$$

a partir del cual podemos escribir matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\sigma\sigma} & \mathbf{K}_{u\sigma} \\ \mathbf{K}_{u\sigma}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F1} \\ \mathbf{F2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde:

$$\mathbf{K}_{\sigma\sigma} = - \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \cdot dV \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_{u\sigma} = \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_u \cdot dV$$

$$\mathbf{F1} = 0$$

$$\mathbf{F2} = \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{F} \cdot dV + \int_{St} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{st} \cdot dS \quad (28)$$

LA FORMA MIXTA u-ε-σ:

Como extensión de los conceptos expuestos se presenta la forma mixta u-ε-σ:

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{N}_\sigma \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{N}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (30)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (31)$$

con la condición:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (33)$$

El principio variacional en este caso es el de Hu - Washizu:

$$\pi_{HW} = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L} \mathbf{u}] dV - \int_{St} \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} dS \quad (34)$$

Invocando la estacionalidad del principio variacional:

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = - \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T [\mathbf{L} \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}] dV = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}] dV = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial \pi_{HW}}{\partial \mathbf{u}} = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta (\mathbf{L} \mathbf{u}) dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV - \int_{St} \delta \mathbf{u}_{st}^T \mathbf{t}_{st} dS = 0 \quad (37)$$

a partir del cual podemos escribir matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} & \mathbf{K}_{\varepsilon\sigma} & 0 \\ \mathbf{K}_{\varepsilon\sigma}^T & 0 & \mathbf{K}_{\sigma u} \\ 0 & \mathbf{K}_{\sigma u}^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F1} \\ \mathbf{F2} \\ \mathbf{F3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

donde:

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = \int_V \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{E} \mathbf{N}_\varepsilon dV$$

$$\mathbf{K}_{\sigma u} = \int_V \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B}_u dV \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\sigma} = - \int_V \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{N}_\sigma dV$$

$$\mathbf{F1} = \mathbf{F2} = 0$$

$$\mathbf{F3} = \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{F} dV + \int_{St} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{st} dS \quad (40)$$

ESTABILIDAD DE LA APROXIMACION MIXTA:

Como consecuencia de la relajación en los requisitos de las funciones de forma, para ciertas elecciones particulares de ellas pueden presentarse resultados sin sentido, esta limitación es mucho mas severa que en el caso de formulaciones irreducibles. Las razones matemáticas de la limitación mencionada fueron esta establecidas por Babuska y Brezzi, quienes formularon un criterio bastante complejo para describirla. Sin embargo el origen de alguna de las dificultades se puede identificar a través de razonamientos simples.

En el caso de la formulación u-σ, σ̂ es la variable primaria y u la variable de restricción equivalente a un multiplicador de Lagrange. Se puede eliminar σ̂, despejándola de la primera ecuación de las (26) e introduciéndola en la segunda:

$$(\mathbf{K}_{u\sigma}^T \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{K}_{u\sigma}) \hat{u} = -F_2 + \mathbf{K}_{u\sigma}^T \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{-1} F_1 \quad (41)$$

siempre que $\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{-1}$ sea no-singular, además para poder calcular \hat{u} es necesario que $H = (\mathbf{K}_{u\sigma}^T \mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{-1} \mathbf{K}_{u\sigma})$ sea no-singular.

La matriz H será siempre singular si el número de incógnitas del vector σ̂ al que llamamos n_σ es menor que el número de incógnitas n_u, en el vector u. Por lo tanto para evitar la singularidad se necesita que:

$$n_{\sigma} \geq n_u \quad (42)$$

La razón de esto es que el rango de la matriz H, que debe ser n_u, no puede ser mayor que n_σ, esto es el rango de $\mathbf{K}_{\sigma\sigma}^{-1}$.

La misma condición (42) asegura la existencia de soluciones no triviales para σ̂. Si la condición es violada se produce el “bloqueo” o soluciones no convergentes dando soluciones casi nulas para σ̂ (ver O.C. Zienkiewicz [10], ap. 12.3)

Para evaluar el comportamiento de un ensamblaje de elementos mixtos se utiliza el Patch Test (criterio de la parcela) [11]. Si el elemento mixto pasa el Patch Test para un solo elemento la convergencia esta asegurada y producirá resultados idénticos a los de la forma irreducible. Es interesante observar que elementos mixtos que individualmente no pasan el criterio de la parcela, si lo pasan para ensamblajes de dos o mas elementos y, por lo tanto, pueden usarse observando un buen comportamiento en distintas circunstancias. Un ejemplo de este tipo de elementos donde se usa N_σ discontinua y N_u C⁰ continuas se puede observar en la siguiente figura:

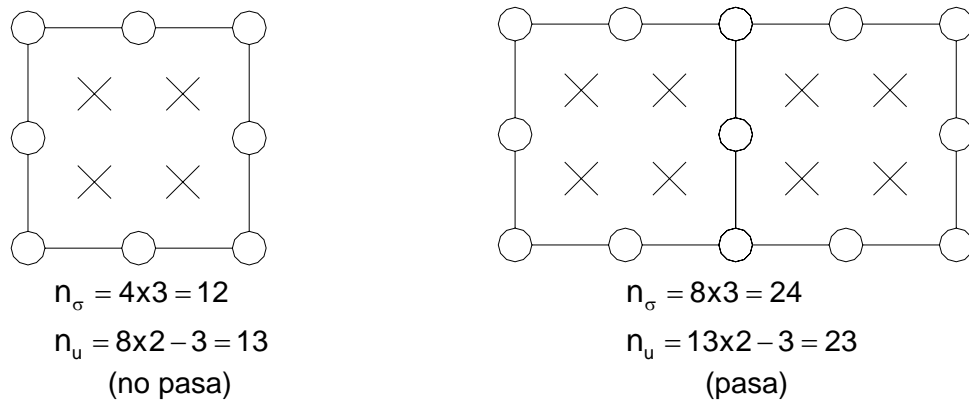


Figura 1

X se refiere a las variables de σ̂
 O se refiere a las variables de ũ

El elemento Q4/8 de la figura 1 es equivalente a usar integración reducida con cuatro puntos de Gauss.

Es interesante notar que si se usa mayor orden de interpolación para σ que para u el test de la parcela se satisface siempre pero en general los resultados no mejoran. Diremos que el uso de interpolaciones de idéntico orden para σ y u son aceptables desde el punto de vista de la estabilidad. Sin embargo la restricción de excesiva continuidad en las tensiones debe evitarse en las zonas de singularidades y superficies de cambio en las propiedades de los materiales. También debemos mencionar que el uso de interpolaciones continuas para las tensiones a menudo produce una importante mejora en la precisión.

OTROS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS:

Modelos de Equilibrio:

Se obtiene a partir del principio de mínima energía potencial complementaria. Estos modelos se basan en campos de tensiones y en los funcionales correspondientes. Puesto que estas formulaciones satisfacen automáticamente las condiciones de equilibrio, se puede obtener la solución minimizando la energía de deformación complementaria. Las incógnitas básicas del problema discreto son las tensiones. También se lo conoce como método de las fuerzas o compatibilidad.

Modelos Híbridos:

En la formulación mixta de elementos finitos se ha supuesto que todas las variables estaban definidas y aproximadas de la misma forma en todo el dominio de análisis. Este concepto se puede abandonar y optar por diferentes formulaciones en distintas porciones del dominio de interés y con algunas variables aproximadas solo en la superficie que unen dichos subdominios. Estas aproximaciones se denominan de *campo parcial o incompleto* y dentro de este marco se encuentran las *formulaciones híbridas*.

Dentro de las formulaciones híbridas distinguimos dos tipos. El primero se basa en una modificación del principio de mínima energía potencial complementaria. Se suponen campos de tensiones en equilibrio sobre cada elemento y solo campos de desplazamientos compatibles en los contornos de los elementos. Las variables básicas son los desplazamientos nodales. El segundo utiliza un principio de energía potencial total modificado. Se suponen desplazamientos continuos en cada elemento y tensiones equivalentes en los contornos de los mismos. Las variables básicas son estas tensiones.

APLICACIÓN DE LA FORMA MIXTA u-ε:

Considerando el elemento de barra de dos nodos de la figura 2, asumiendo una variación lineal para el campo u (w,θ) y una variación constante para la deformación de corte γ, se obtiene la matriz de rigidez del elemento.

Sección = 1xh
Mod Young = E
Mod Corte = G

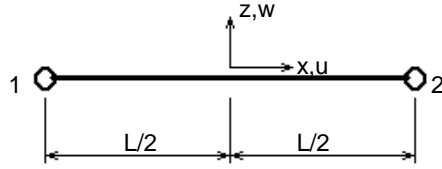


Figura 2

El principio variacional de Hu-Washizu toma la forma del funcional de Hellinger - Reissner:

$$\begin{aligned}\pi_{HR} &= \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} dV - \int_{St} \mathbf{u}_{st}^T \cdot \mathbf{t}_{st} dS \\ &= - \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} dV + BT\end{aligned}$$

donde:

BT: Términos de contorno (sin interés para determinar la matriz de rigidez del elemento).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} & \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} + \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \mathbf{L} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} & \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xz}^u \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} + \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^u$$

donde:

$\boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon$: deformación del campo ε asumido como constante

$\boldsymbol{\gamma}_{xz}^u$: deformación correspondiente al campo de u asumido como lineal

$$\pi_{HR} = \int_V \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon + \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} + \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^u - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} \right] dV + BT$$

$$\pi_{HR} = \int_V \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon + \boldsymbol{\gamma}_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^u - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} \right] dV + BT$$

Invocando la estacionalidad de π_{HR} :

$$\int_V [\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} + \gamma_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} \delta \gamma_{xz}^u] dV = \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F} dV \quad (a)$$

$$\int_V \delta \gamma_{xz}^\varepsilon \mathbf{G} [\gamma_{xz}^u - \gamma_{xz}^\varepsilon] dV = 0 \quad (b)$$

Aproximando independientemente las variables independientes:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \approx \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\gamma_{xz}^\varepsilon] \approx \mathbf{B}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}_\varepsilon \gamma_{xz}^\varepsilon$$

donde:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{z}{L} \left[\frac{L}{2} - x \right] & 0 & -\frac{z}{L} \left[\frac{L}{2} + x \right] \\ \frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} - x \right] & 0 & \frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} + x \right] & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{L} \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{L} & 0 & -\frac{z}{L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} - x \right] & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} + x \right] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\varepsilon = [1]$$

La matriz \mathbf{B}_u se descompone en la parte de flexión (bending) y la parte de corte (shear):

$$\mathbf{B}_u^b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{z}{L} & 0 & -\frac{z}{L} \end{bmatrix}$$

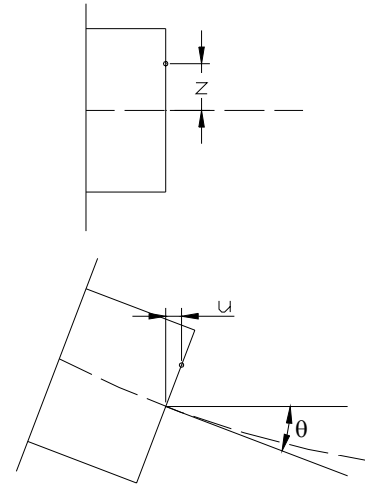
$$\mathbf{B}_u^s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} - x \right] & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left[\frac{L}{2} + x \right] \end{bmatrix}$$

reemplazando en (a) y (b):

$$\left[\int_V \left[\mathbf{B}_u^{bT} \mathbf{E} \mathbf{B}_u^b \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_u^{sT} \mathbf{G} \mathbf{B}_u^s \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dV \right] \cdot \delta \hat{\mathbf{u}}^T = \left[\int_V \mathbf{N}_u^T \cdot \mathbf{F} dV \right] \cdot \delta \hat{\mathbf{u}}^T$$

$$\left[\int_V \left[\mathbf{B}_\varepsilon^T \mathbf{G} \mathbf{B}_u^s \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{B}_\varepsilon^T \mathbf{G} \mathbf{B}_\varepsilon \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dV \right] \cdot \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = 0$$

Relación entre u y θ :
 $u = -z \theta$



llamando:

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_u^{bT} \mathbf{E} \mathbf{B}_u^b \cdot dV$$

$$\mathbf{K}_{u\varepsilon} = \int_V \mathbf{B}_u^{sT} \mathbf{G} \mathbf{B}_\varepsilon \cdot dV$$

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = \int_V \mathbf{B}_\varepsilon^T \mathbf{G} \mathbf{B}_\varepsilon \cdot dV$$

$$\mathbf{F}_b = \int_V \mathbf{N}_u^T \cdot \mathbf{F} \cdot dV$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varepsilon} \\ \mathbf{K}_{u\varepsilon}^T & \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{z}{L} \\ 0 \\ -\frac{z}{L} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{L} & 0 & -\frac{z}{L} \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{E}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & -\frac{h^3}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^3}{12} & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{u\varepsilon} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ -\left(\frac{L}{2} - x\right) \\ 1 \\ -\left(\frac{L}{2} + x\right) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{G} \cdot h \cdot dx = \frac{\mathbf{G}h}{L} \begin{bmatrix} -L \\ -\frac{L^2}{2} \\ L \\ -\frac{L^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{G} \cdot h \cdot dx = \mathbf{G}hL$$

Aplicando la condensación estática sobre ε obtenemos \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{u\varepsilon} \cdot \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varepsilon}^T$$

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{E} \cdot h^3}{12 \cdot L} & 0 & \left(\frac{-\mathbf{E} \cdot h^3}{12 \cdot L}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-\mathbf{E} \cdot h^3}{12 \cdot L}\right) & 0 & \frac{\mathbf{E} \cdot h^3}{12 \cdot L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G} \cdot h \\ \mathbf{G} \cdot h \cdot L \\ 2 \\ -\mathbf{G} \cdot h \\ \mathbf{G} \cdot h \cdot L \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\mathbf{G} \cdot h \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{G} \cdot h & \mathbf{G} \cdot h \cdot L \\ -\mathbf{G} \cdot h & \mathbf{G} \cdot h \cdot L \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \cdot G \cdot h & \frac{1}{2} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{L} \cdot G \cdot h & \frac{1}{2} \cdot G \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot G \cdot h & \frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{4} \cdot G \cdot h \cdot L & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{4} \cdot G \cdot h \cdot L \\ -\frac{1}{L} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h & \frac{1}{L} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{4} \cdot G \cdot h \cdot L & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h & \frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{4} \cdot G \cdot h \cdot L \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez que hubiésemos obtenido con MEFBD es:

$$K := \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \cdot G \cdot h & \frac{1}{2} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{L} \cdot G \cdot h & \frac{1}{2} \cdot G \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot G \cdot h & \frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \cdot L & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{6} \cdot G \cdot h \cdot L \\ -\frac{1}{L} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h & \frac{1}{L} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot G \cdot h & -\frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{6} \cdot G \cdot h \cdot L & -\frac{1}{2} \cdot G \cdot h & \frac{1}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3}{L} + \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \cdot L \end{bmatrix}$$

Resulta interesante comparar esta matriz con la que la que hemos obtenido con la formulación mixta. Se observa que la diferencia entre ambas es mínima, sin embargo la ultima matriz tiene un comportamiento que es gradualmente mas rígido a medida que la barra se vuelve mas esbelta.

Es fácil observar que si imponemos desplazamientos de rotación pura de la sección:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

la matriz K correspondiente a MEFBD, presenta una contribución anómala de la rigidez de corte a la de flexión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] Bathe, K. J.
“*Finite Element Procedures*”, ©1996 by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [2] Zienkiewicz, O. C.
“*El Método de los Elementos Finitos*”, ©1980 Editorial Reverté, S.A., España.
- [3] Kardenstuncer, H. and Norrie, D.H.
“*Finite Element Handbook*”, ©1987 Mc. Graw Hill, New York.
- [4] Brezzi, F. and Fortin, M.
“*Mixed and Hybrid Finite Element Methods*”, ©1991 Springer-Verlag, New York.
- [5] Hu, H. C.
“*On Some Variational Principles in the Theory of Elasticity and the Theory of Plasticity*”, *Scientia Sinica*, Vol. 4, p.33-54, 1955.
- [6] Washizu, K.
“*On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity*”, Aeroelastic and Structures Research Laboratory Technical Report No. 25-18, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, March 1955.

“*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*”, ©1975, Pergamon Press, Elmsford, NY.
- [7] Hellinger, E.
“*Die Allgemeiner der Mechanik der Kontinua*”, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, F. Klein and C. Müller eds, Vol. 4, Pt , pp. 601-694, Teubner Verlag, Leipzig, 1914
- [8] Reissner, E.
“*On Variational Theorem in Elasticity*”, *Journal of Mathematics and Physics*, Vol 29, pp. 90-95, 1950
- [9] Pian, T. H. H. and Tong, P.
“*Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 1, pp 3-28, 1969.
- [10] Zienkiewicz, O. C. y Taylor
“*El Método de los Elementos Finitos*”, Volumen 1, 4^o Edición, ©1989, Mac Graw Hill Book Company.
- [11] Irons, B. and Sohrab, Ahmad
“*Techniques of Finite Elements*”, ©1980 Ellis Horwood Limited, England.