



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE  
**INGENIERÍA**

**MECÁNICA DE SUELOS Y ROCAS II**

# MÉTODOS NUMÉRICOS EN GEOTECNIA

Introducción a los métodos de análisis

JUAN PABLO IBAÑEZ

JUNIO 2020

- Métodos de resolución de problemas
- Tipos de problemas numéricos
- Condiciones de contorno
- Metodología implícita y explícita
- Convergencia y Estabilidad
- Errores numéricos
- Métodos de resolución numérica
- MEF: Elementos y nodos
- MEF: Método de los desplazamientos
- Consideraciones finales

- **MÉTODOS EMPÍRICOS:**

- Experiencia acumulada en casos similares.
- Basado en hipótesis simplificadoras.
- Requiere margen de seguridad elevado.

- **MÉTODOS ANALÍTICOS:**

- Basado en ecuaciones que resumen los principales aspectos del problema.
- Sirve para geometrías simples.
- Se incluyen varias simplificaciones para llegar a la solución.

- **MÉTODOS NUMÉRICOS:**

- Incluye mayor número de características singulares del problema.
- Para geometrías complejas.
- Resultados más precisos.
- Marca la tendencia general del avance científico.

## ECUACIONES GOBERNANTES

- El comportamiento de muchos procesos físicos puede representarse por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias EDO (problemas de 1 dimensión) o mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales EDP (2 y 3 dimensiones).
- Según sea la forma final de la ecuación diferencial, los problemas se clasifican en:

- **Elípticos** (Ej. Flujo permanente en medio poroso)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- **Parabólicos** (Ej. Consolidación unidimensional)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

- **Hiperbólicos** (Ej. Propagación de una onda en una dimensión)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

## CONDICIONES INICIALES y de BORDE

- Una condición de contorno se define como el valor de la variable de la ED, o su derivada, en el espacio o tiempo del dominio de análisis.
- La condición de contorno torna única la solución de la ecuación diferencial.
- Una ED de orden “n” necesita “n” condiciones de contorno, que pueden ser:
- Valores INICIALES (variable de tiempo).
- Valores de BORDE (variable espacial).

## CONDICIÓN de NEUMANN:

- Se impone el valor de la derivada de la variable normal al borde (Ej. Borde impermeable).

## CONDICIÓN de DIRICHLET:

- Se impone el valor de la variable (Ej. Apoyo).

## CONDICIÓN MIXTA:

- Combina las condiciones de Neumann y Dirichlet.

## ALGORITMOS EXPLÍCITOS

- Para obtener la solución en “ $t+1$ ”, las derivadas son evaluadas como cocientes incrementales en “ $t$ ”.
- Son convergentes y estables para pasos de tiempo acotados por valor máximo estimable.
- Son directos y no precisan resolver sistemas de ecuaciones (son *desacoplados*).

## ALGORITMOS IMPLÍCITOS

- Para obtener la solución en “ $t+1$ ”, las derivadas son evaluadas como cocientes incrementales en “ $t+1$ ”.
- Son convergentes y estables incondicionales.
- Requieren de resolver sistemas de ecuaciones (son *acoplados*).
- Por ejemplo, método de Gauss y Gauss Seidel.

## ALGORITMOS MIXTOS

- El método de Crank-Nicholson combina los dos métodos anteriores.
- Es convergente y estable incondicional.

## CONVERGENCIA

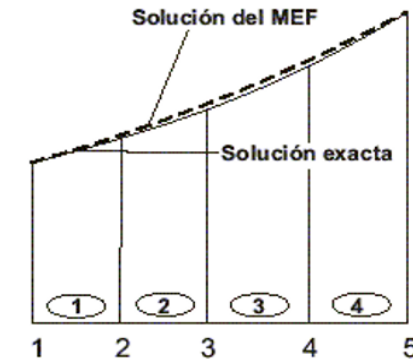
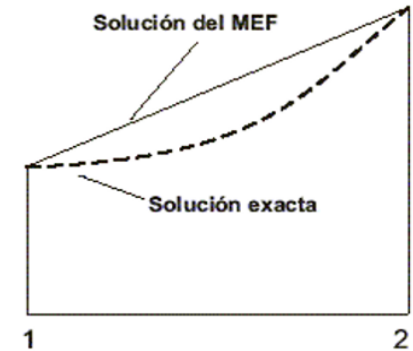
- La convergencia de un algoritmo es su capacidad de aproximarse a la solución exacta al disminuir el tamaño de la malla de discretización ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ ).

## ESTABILIDAD

- La solución es “inestable” si los errores introducidos en el cálculo en un momento determinado se propagan en los cálculos subsiguientes sin que exista una cota máxima de su valor.
- La solución es “estable” cuando los errores tienen una cota máxima y tienden a disminuir con los pasos de cálculo.

## ERROR DE DISCRETIZACIÓN O TRUNCAMIENTO

- Se produce al reemplazar la solución analítica, muchas veces imposible de obtener, por una solución numérica aproximada.
- Este tipo de error depende sólo del método numérico empleado.
- Al discretizar más el modelo (mallas más refinadas) se reduce este tipo de error, aunque se incrementa el gasto computacional.



## ERROR DE REDONDEO

- Error que se produce por el redondeo de los números al ser guardados en memoria por el programa de cálculo.
- La memoria computacional es finita, por lo que los números con mayor cantidad de dígitos significativos que los que puede almacenar la memoria designada son “redondeados”.



## DIFERENCIAS FINITAS:

- Inicialmente el método mas usado en geotecnia.
- El proceso de discretización consiste en reemplazar las derivadas por cocientes incrementales, con incrementos pequeños pero finitos, en la ecuaciones gobernantes.
- Se usa, por ejemplo, series de Taylor y polinomios de interpolación.

## ELEMENTOS DE CONTORNO:

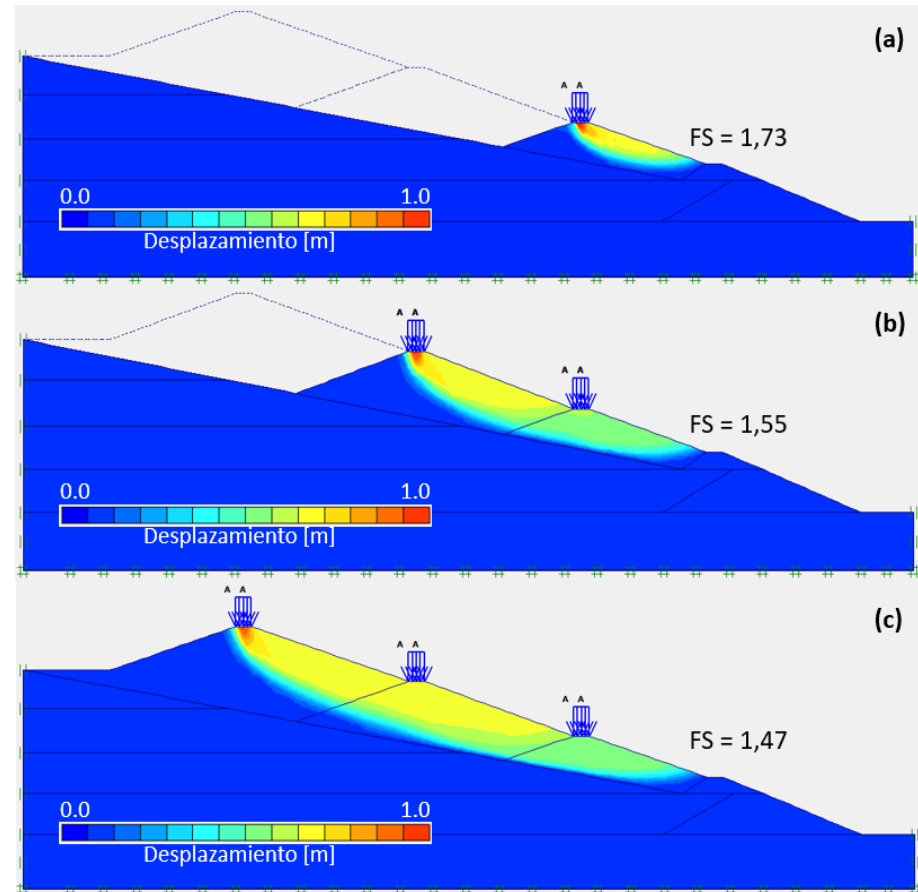
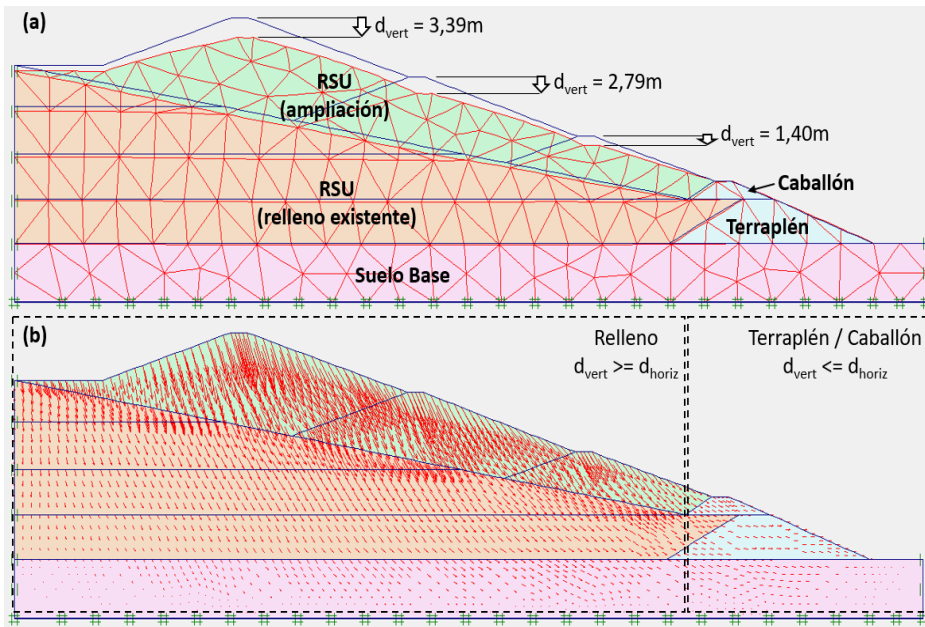
- Integración directa de las ecuaciones en el contorno del dominio.
- La solución numérica se obtiene primeramente en el contorno, y a partir de ella se obtienen soluciones para el interior.

## ELEMENTOS FINITOS:

- El más usado actualmente en geotecnia.
- Aproxima el comportamiento de un “continuo” mediante un conjunto de elementos finitos, discretos, vinculados entre sí en puntos específicos (nodos), y sobre estos puntos se plantean las ecuaciones de comportamiento y compatibilidad.

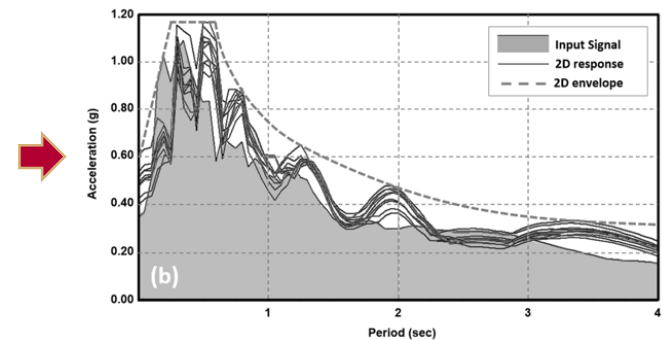
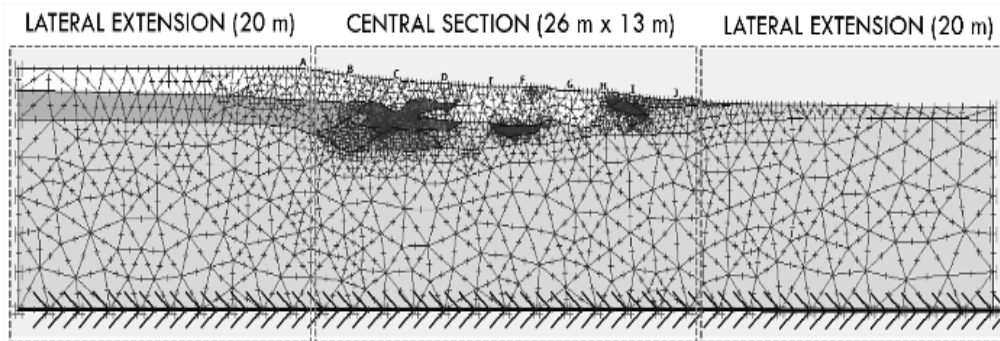
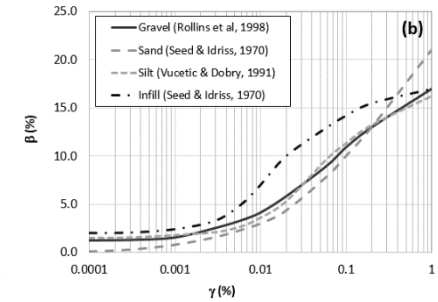
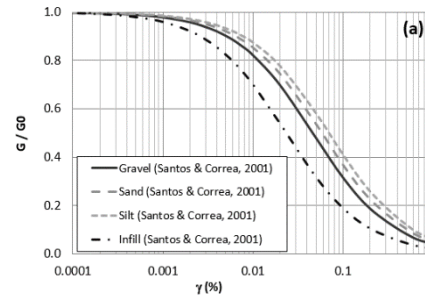
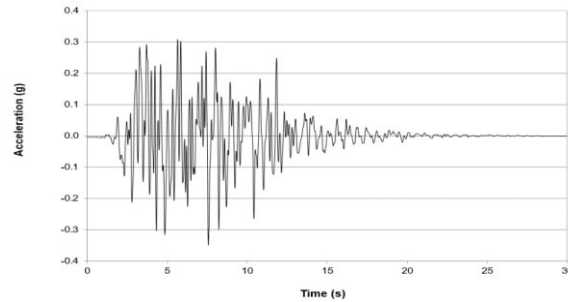
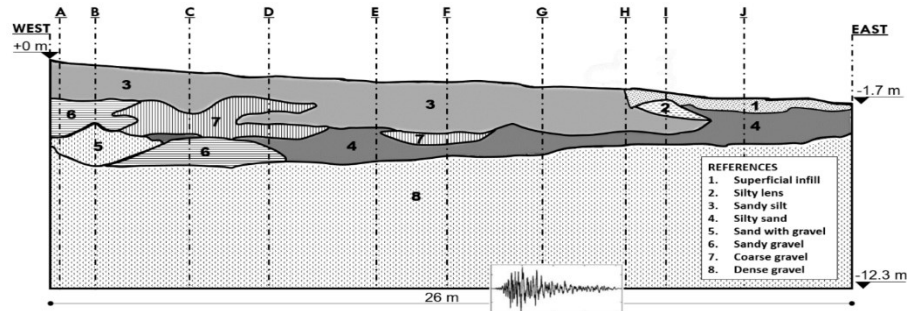
## ELEMENTOS FINITOS:

- Análisis estático tensión – deformación.
- Análisis de plastificación y asientos.
- Análisis de estabilidad de taludes.



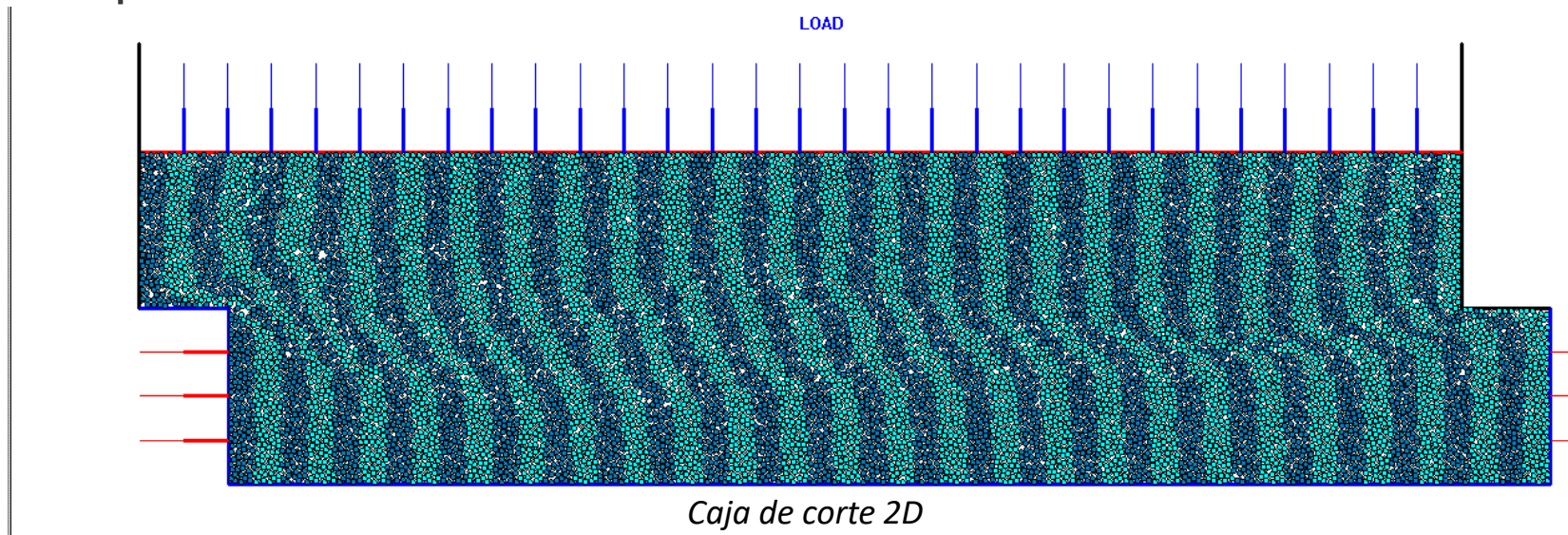
# ELEMENTOS FINITOS:

- Análisis dinámico.
- Análisis de efecto de sitio.



## ELEMENTOS DISCRETOS de PARTÍCULAS:

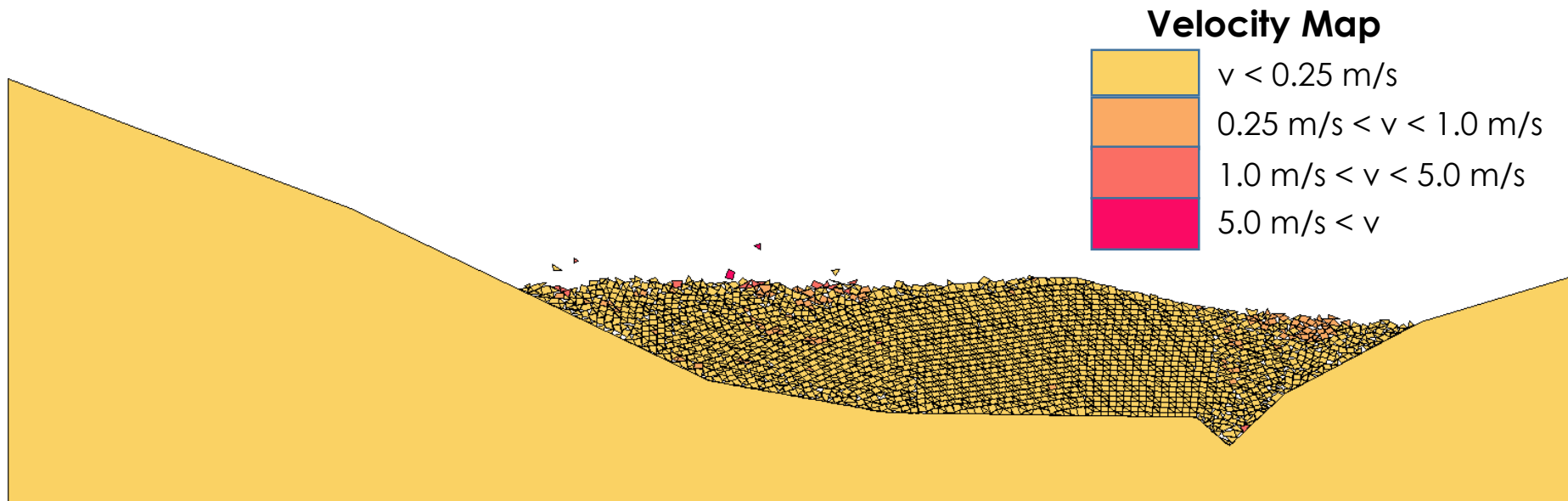
- Es una forma alternativa de modelado, aplicable a medios granulares especialmente.
- Abandona la idea de continuo y asume el concepto de partícula discreta.
- La compatibilidad de desplazamiento del continuo es reemplazada por leyes de interacción entre partículas.



- El dominio del problema se obtiene por elementos discretos de borde o *paredes*.
- Es un método dinámico, desacoplado y explícito en el tiempo.

## ELEMENTOS DISCRETOS de BLOQUES:

- Discontinuous Deformation Analysis (DDA) modela sistemas de bloques.
- Permite modelar macizos rocosos incluyendo diaclasado, taludes y excavación de túneles.

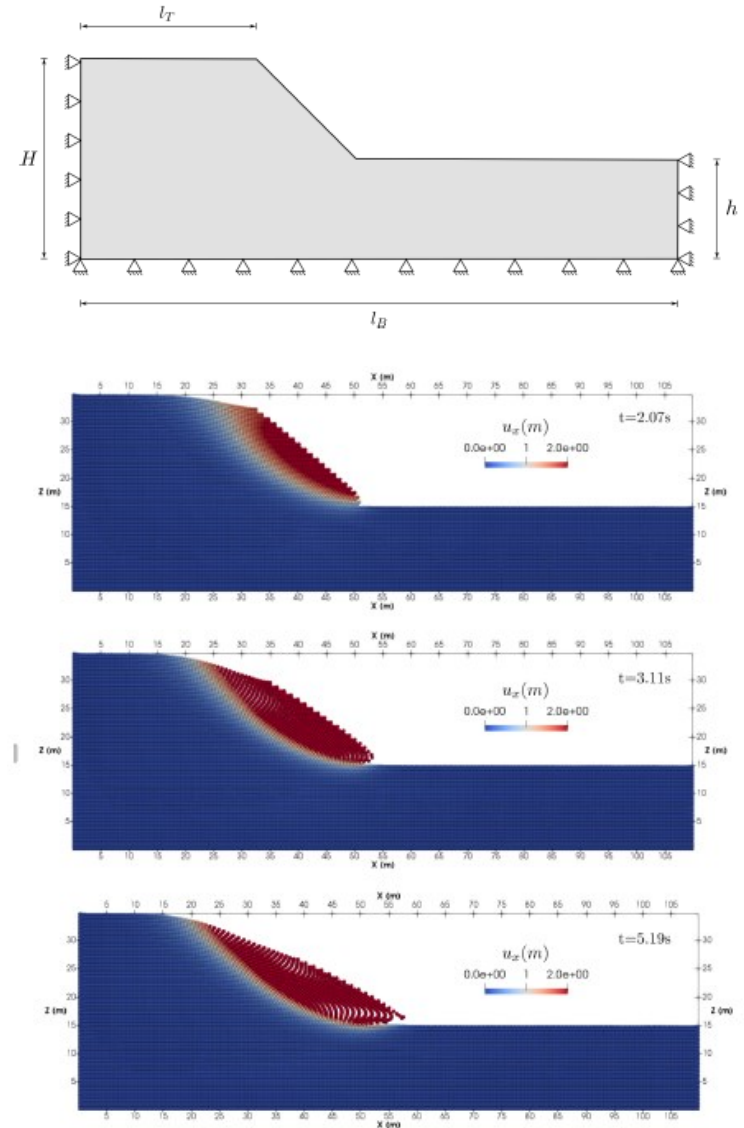
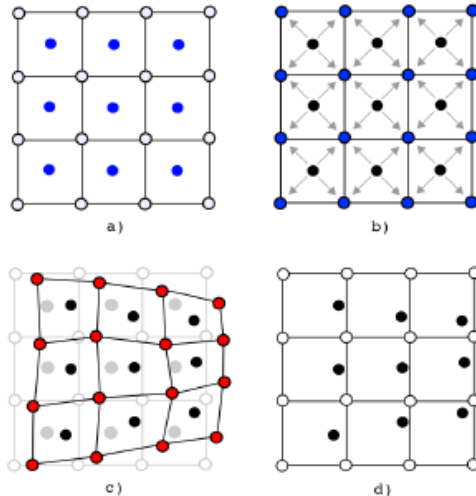


*Modelo 2D del deslizamiento de Vajont, Italia*

- Permite incluir cargas estáticas y dinámicas.
- La interacción entre bloques se controla por leyes de contacto con resistencia al corte.

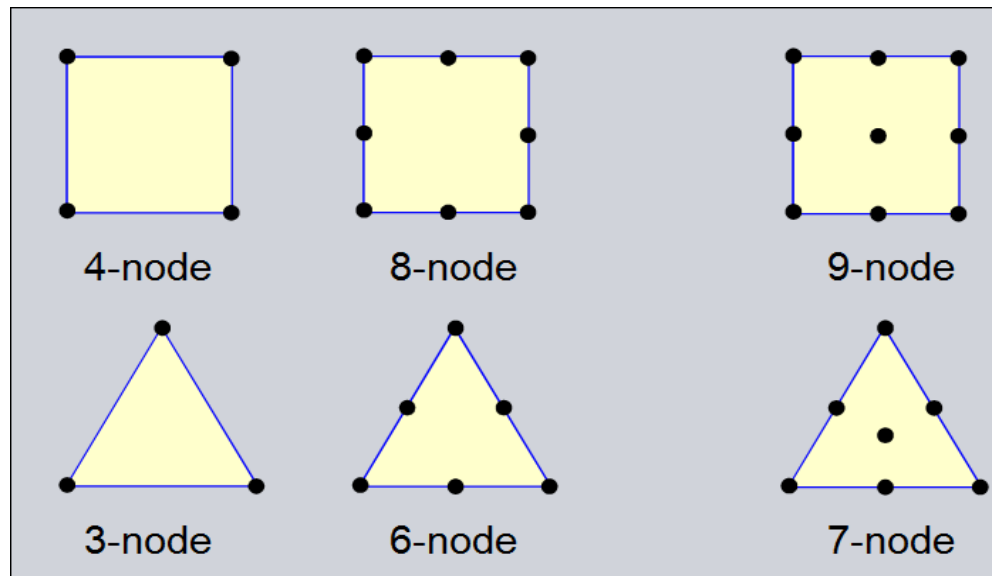
## MPM: MATERIAL POINT METHOD

- Este método combina Elementos Finitos (continuo) con elementos discretos (puntos materiales).
- En la malla de EF se realiza el paso de cálculo y luego vuelve a su geometría original.
- Los puntos materiales mapeados en esa malla son deformados sucesivamente en cada paso y reproducen las grandes deformaciones del material.



## MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS:

- El dominio de análisis es subdividido en ELEMENTOS triangulares o cuadriláteros (2D).
- Cada elemento posee puntos significativos, llamados NODOS.
- Los nodos participan en el cálculo general: el desplazamiento nodal es la variable independiente (método de los desplazamientos).
- A partir de los resultados nodales, los resultados en el interior del elemento son interpolados.



## DESPLAZAMIENTOS

- Los desplazamientos nodales (de cada nodo de los elementos finitos) constituyen las variables principales del problema.

## DEFORMACIONES

- Las deformaciones en cada elemento finito se obtienen por integración discreta de los desplazamientos nodales, mediante ecuaciones de compatibilidad.

## MODELO CONSTITUTIVO

- Las leyes constitutivas, basadas en la elasticidad y plasticidad, relacionan deformaciones con tensiones, incorporando las características del material.

## TENSIONES

- Se obtienen para cada elemento finito a partir de la matriz constitutiva.

## FUERZAS

- Las fuerzas nodales se obtienen como integración de las tensiones en los elementos.



## Resumen

- Los métodos numéricos constituyen una herramienta potente para abordar los problemas que la Geotecnia nos plantea.
- Los métodos numéricos son una variedad de formulaciones basadas en diferentes hipótesis, cada una de ellas con sus potencialidades y deficiencias.
- Los métodos numéricos modelan simplificadamente el problema real mediante:
  - Dominio geométrico del problema.
  - Leyes de comportamiento.
  - Parámetros de los materiales.
- Los métodos numéricos complementan el estudio teórico-conceptual, de campo y laboratorio.
- Los métodos numéricos no reemplazan el análisis crítico del ingeniero, sino que pueden ayudarlos en ese análisis.
- Los métodos numéricos deben ser “conducidos” por el ingeniero, y no a la inversa.