



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Cuyo

MEDICIONES ANGULARES

Asignatura:	TOPOGRAFÍA		
Profesor Titular:	Guillermo L. Reta		
Equipo de cátedra	María Virginia Mackern		
Carrera:	Arquitectura		
Año: 2015	Semestre: 5to.	Horas Semestre: 45	Horas Semana: 3



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

seccionar dicho diedro con un plano normal π . Este plano, al ser normal a la vertical del lugar que pasa por O, resultará horizontal. Las proyecciones horizontales de las direcciones consideradas quedarán contenidas en las rectas intersecciones del diedro con el plano normal, y se ve, que también, forman el ángulo δ mencionado. También se puede ver que cada una de las direcciones dadas forma, con el plano horizontal, los ángulos α_1 ; α_2 ; α_3 , respectivamente.

En topografía mediremos o nos tocará replantear ángulos de dos tipos: horizontales y/o verticales. En el caso de la primer figura δ y θ resultan ser ángulos horizontales y α_1 ; α_2 ; α_3 ángulos verticales.

UNIDAD DE MEDICIÓN ANGULAR:

a.- Sistema Sexagesimal:

Si divido la circunferencia en 360 partes iguales, cada una de ellas valdrá un grado sexagesimal. Un grado sexagesimal tiene 60 minutos sexagesimales y un minuto sexagesimal 60 segundos sexagesimales.

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

b.- Sistema Centesimal:

En este sistema la circunferencia se divide en 400 partes iguales, resultando valer cada una de ellas un grado centesimal (1^g). Cada grado centesimal contiene 100^m (minutos) centesimales y cada minuto centesimal 100^s (segundos) centesimales. Al grado centesimal se lo denomina "gon".

c.- Sistema Radián:

En este sistema el giro completo corresponde a 2π radianes. No tiene submúltiplos y las partes quedan expresadas como fracción de π .

De manera que podemos decir:

$360^\circ (\text{sexagesimales}) = 400^g (\text{centesimales}) = 2\pi \text{radianes}$

Ejercitación:

1. Convertir 90° sexagesimales en grados centesimales y en radianes.



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

2. Expresar 3,23 radianes en grados sexagesimales y centesimales.
3. Expresar 100^g (gon) en grados sexagesimales y en radianes.

Ángulos Horizontales:

Si observamos un teodolito vemos que para medir un ángulo horizontal, como hemos mencionado, debemos estacionar el aparato en el vértice del ángulo “O” (que podrá estar materializado por una estaca con un clavo en la parte superior o por una varilla de hierro empotrada en hormigón) y proceder a su correcta centración y nivelación. Si el instrumento tiene error de verticalidad (recordar que esto sucede cuando VV no es perpendicular a NN) no será necesario corregir el mismo, pero si proceder a verticalizar correctamente el eje vertical VV.

También es muy importante que no haya error de paralaje en la imagen (recordar que esto sucedía cuando la imagen del punto bisectado no se formaba en el plano de los hilos del retículo), para ello debemos focuzar correctamente los hilos del retículo. Respecto de los otros errores instrumentales: colimación e inclinación, no hace falta corregirlos (a no ser que estos sean muy grandes); y el error de excentricidad de alidada no se puede corregir por ser un error constructivo. Existe un método de medición que elimina principalmente la influencia de estos tres últimos errores mencionados en la medición angular.

Una vez que el teodolito ha sido centrado y nivelado, para efectuar la medición procedo del siguiente modo: suelto el tornillo de movimientos de la *alidada* (el *limbo* queda fijo) y bisecto el punto A. Hago lectura en el limbo horizontal L_A . Luego suelto nuevamente la alidada y bisecto el punto B y procedo a leer, en el limbo horizontal, L_B .

Se debe tener cuidado en l siguiente: el punto A el principio del ángulo y B el final, para que al barrer el dicho ángulo los índices de lectura se muevan en sentido de las agujas del reloj sobre el limbo que está graduado en sentido horario. En los apratos modernos existe un dispositivo que permite invertir el sentido de graduación.

El ángulo horizontal quedará determinado por:

$$AOB = L_B - L_A$$

Ejemplo: $L_A = 16^\circ 26' 54''$; $L_B = 187^\circ 54' 31''$; luego: $AOB = 171^\circ 27' 37''$

Ejercicio: $L_A = 340^\circ 10' 30''$; $L_B = 60^\circ 20' 40''$; decir si es correcto que el ángulo medido, como se ha indicado, vale $80^\circ 10' 10''$. Fundamentar la respuesta.



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Ángulos Verticales:

Los ángulos verticales se miden tomando como referencia una línea horizontal que es la determinada por los índices de lectura del limbo vertical. Recordemos que el limbo vertical del teodolito se mueve solidario con el anteojo y el índice de lectura permanece fijo.

Para asegurar la horizontalidad de ésta línea de referencia (línea de los índices), hay un nivel de índices el cual es un nivel tubular por coincidencia por cuartos de burbuja y que necesariamente deberá ser calado antes de efectuar las lecturas en el limbo vertical. Existen aparatos llamados auto-nivelantes, en los cuales esta horizontalidad de los índices se consigue en forma automática, siempre que el instrumento tenga su eje principal correctamente verticalizado.

Antes de efectuar una medición de ángulo vertical resulta conveniente saber si el instrumento está afectado o no de **Error de Índices** (recordar que esto sucede cuando el eje de nivel de índices no es paralelo a la línea que determinan los índices de lectura). Se podrá trabajar corrigiendo las lecturas efectuadas o adoptando un método de trabajo que elimine la influencia de este error. Dicho método consiste en leer en primera y en segunda posición y adoptar como valor de esa dirección el *promedio* (recordar que no es un promedio aritmético) que estará libre de la influencia del error de índice.

Otro tema a tener en cuenta es la graduación del limbo vertical, que podrá ser:

- a. Corrida de 0° a 360° , leyendo 0° cuando el anteojo apunte al cenit o cuando el anteojo apunte al nadir, según sea el equipo cenital o nadiral, respectivamente. En el primer caso medirá direcciones cenitales y en el segundo nadirales.
- b. Corridas de 0° a 360° leyendo 0° cuando el anteojo apunta al horizonte. En este caso para los ángulos de elevación tendremos valores mayores que el 0° y menores que 180° y para los ángulos de depresión valores mayores que 180° y menores que 360° .
- c. También pueden ser, pero menos frecuentes, por cuarto de cuadrantes.

Medición de un ángulo Vertical:

Sea nuestro teodolito 0° cenital (o sea que cuando el anteojo apunta al cenit leemos 0°) y que tenga graduación corrida de 0° a 360° , en sentido horario, y sea P un punto en altura. Para medir el ángulo vertical, apuntamos al punto con el anteojo en primera posición, es decir con el círculo vertical a la izquierda (CVI), calamos la burbuja del nivel de índices (o sea horizontalizamos el nivel de referencia respecto al cual se mide el ángulo), si el aparato es autonivelante no haremos esta operación, y efectuamos la lectura sobre el círculo vertical.



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Luego apuntamos nuevamente al punto en segunda posición, es decir con el círculo vertical a la derecha (CVD), calamos nuevamente la burbuja del nivel de índice y procedemos a leer nuevamente el círculo vertical.

En este caso la graduación del limbo, si la suma de las lecturas da 360° , podemos afirmar que el instrumento está libre de error de índices. Si dicha suma diera más de 360° , la discrepancia con 360° es el doble del error y se deben corregir ambas lecturas restándoles dicho valor. Si la suma de ambas lecturas diera menor que 360° , se deben corregir las lecturas sumándoles a ambas la mitad del valor de esa discrepancia. En la siguiente planilla se dan ejemplos de ambos casos (corresponde a cuatro mediciones efectuadas con aparatos distintos)

P.E.	P.V.	Ángulo Vertical Leído		Promedio	Ángulo Vertical p/ Calculo
		CVI	CVD		
A	1	60° 10' 10"	299° 51' 20"	60° 09' 25"	+29° 50' 35"
M	24	110° 01' 20"	249° 59' 10"	110° 01' 05"	-29° 01' 05"
R	31	45° 40' 30"	314° 18' 30"		
T	17	93° 30' 30"	266° 28' 00"		

Para el punto 1 se observa que la suma de la primera posición más la segunda posición da $360^\circ 01' 30''$; luego: el doble del error será $1' 30''$, es decir que la mitad del error vale $45''$, valor que habrá que restarle a ambas posiciones para tener valores libres de influencia de error de índices. Como en los promedios trabajamos con las lecturas corregidas de la primera posición, ésta resultará: $60^\circ 09' 25''$.

Como el aparato es 0° cenital, este valor es distancia cenital, luego para convertirlo en ángulo de elevación o depresión, lo restamos de 90° y obtenemos el ángulo vertical para el cálculo con signo + o -, según sea de elevación o depresión, respectivamente. Se propone como ejercicio completar los valores que faltan en la planilla precedente.

Más adelante cuando veamos temas como taquimetría volveremos a hablar de ángulos verticales.

Medición de ángulos Horizontales:



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



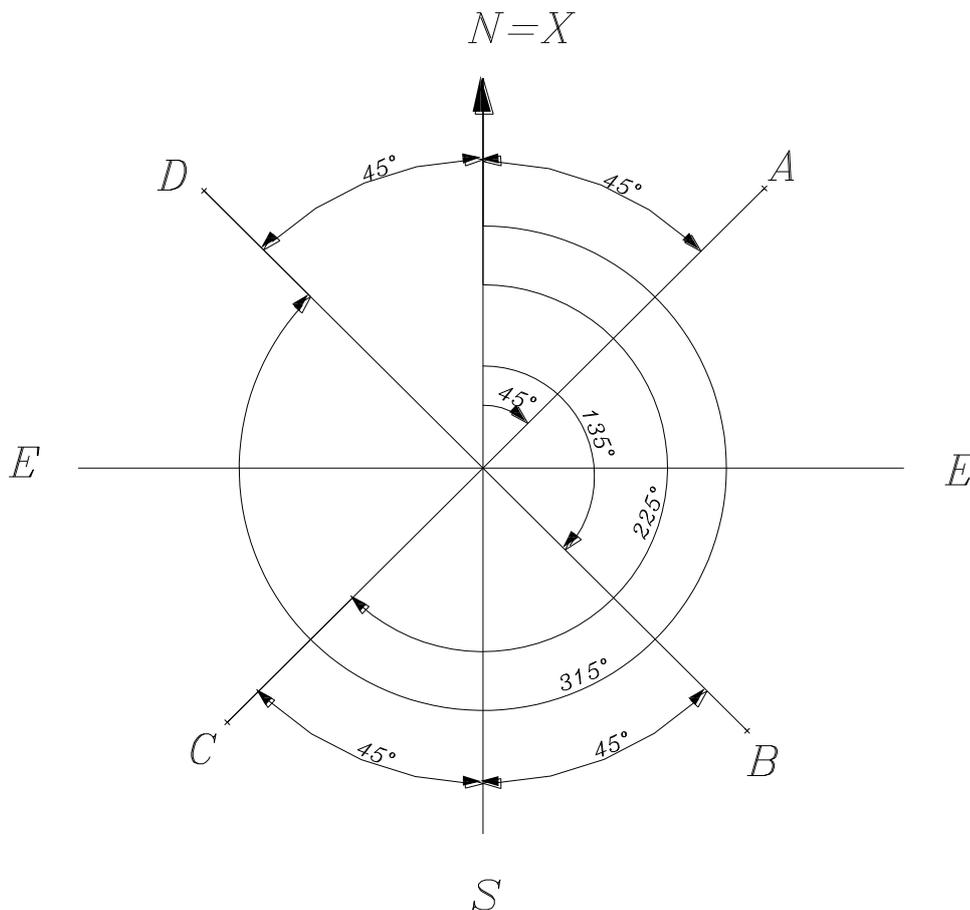
FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

En diferentes obras profesionales es habitual medir ángulos. El profesional antes de proyectar una obra, deberá medir o controlar valores angulares aunque estos hayan sido medidos previamente por otro profesional. Veremos algunos de los tipos ángulos horizontales que se pueden medir:

a.- *Orientaciones:*

Pueden ser Azimut y Rumbo. Recordemos que azimut de una dirección es el ángulo que forma el semieje positivo de las X (dirección norte en nuestro caso) con la dirección dada. Rumbo de una dirección, es el menor ángulo que la dirección forma con la línea norte-sur, debiéndose indicar además del valor angular el cuadrante al que pertenece.

Ejemplo: A partir de un punto P indicar los siguientes azimutes: A:45°; B: 135°; C:225° y D: 315°.



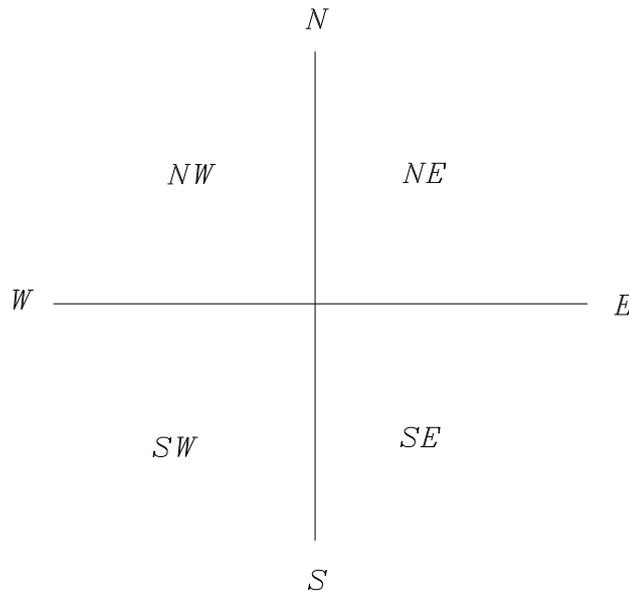


UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

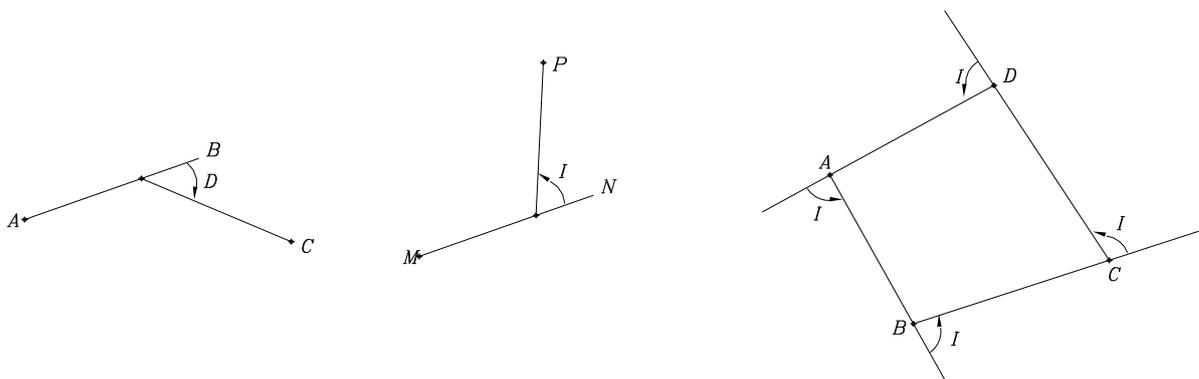
CUADRANTES



Se ve que los rumbos correspondientes a esas direcciones valen: 45° NE al punto A, 45° SE al punto B, 45° SW al punto C, 45° NW al punto D.

b.- *Desviaciones o deflexiones:*

Se mide cuando se aparta una dirección de la anterior. Se debe indicar si la deflexión es a la derecha o a la izquierda.





UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

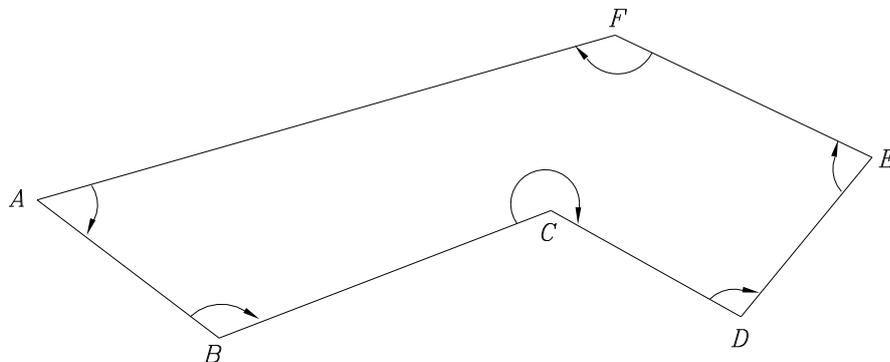


FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

En una poligonal cerrada la sumatoria de las desviaciones debe ser igual a 360° (se suman con signo + o - según sean a la derecha o a la izquierda).

c.- *Ángulos positivos o ángulos a la derecha:*

Es el ángulo formado por una línea con su precedente, medido siempre en sentido positivo u horario.



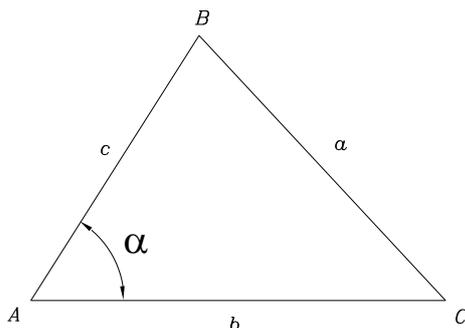
Si el itinerario es cerrado, cada uno de estos ángulos se denominan: *ángulos interiores*. Se debe cumplir que la suma de estos ángulos interiores sea igual a:

$$\sum \alpha_i = 2R (n - 2) = 180^\circ(n - 2)$$

Donde n es igual al número de vértices.

No siempre mediremos un ángulo con teodolito. Puede bastar en algunos casos, si queremos tener una idea bastante aproximada del mismo, que lo midamos con cinta. Para ello uso de las siguientes expresiones:

Teorema del Coseno:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \alpha$$

$$\alpha = \text{arc cos} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Seno, Coseno u Tangente del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b \times c}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b \times c}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Si queremos medir ángulos con teodolito podemos emplear los siguientes métodos:

1. Método Simple: consiste en leer las direcciones en una sola posición del anteojo. No se elimina la influencia de ninguno de los errores instrumentales.
2. Método de Compensación o de Bessel: Es uno de los métodos más utilizados. Consiste en leer las distintas direcciones en 1ª posición (CVI), y luego invirtiendo el anteojo (Vuelta de campana), es decir en segunda posición (CVD) leemos las direcciones nuevamente, pero empezando por la última y en sentido contrario al utilizado en la 1ª posición. Luego se calculan los *promedios* de las direcciones (que no son promedios aritméticos), y finalmente por diferencia entre direcciones se calculan los valores angulares. Utilizando este método se eliminan totalmente la influencia de los errores de excentricidad, colimación e inclinación, y algo de la falta de uniformidad de la graduación del limbo. Vale decir que los valores llamados promedios, están libres de la influencia de los errores mencionados.



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

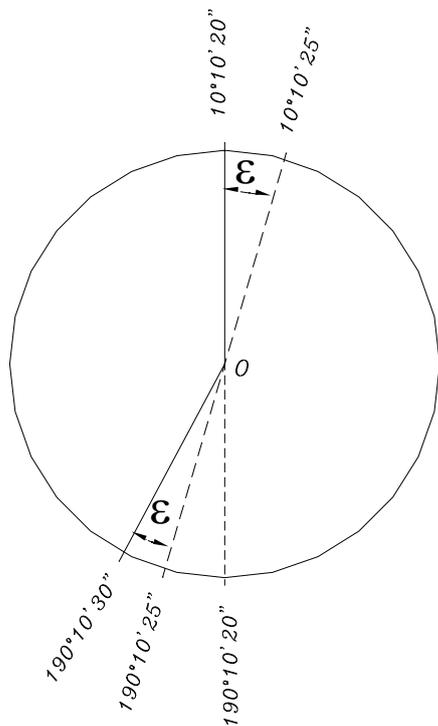


FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Veremos a continuación un ejemplo sencillo:

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
A	1	10°10'20"	190°10'30"	10°10'25"	1A2
	2	40°00'50"	220°01'10"	40°01'00"	29°50'35"

Si no existieran los errores mencionados, se debería cumplir que la lectura efectuada con CVD debiera diferir de la efectuada en 180°, si así no sucediera, la diferencia con 180° es el doble del error. En la planilla anterior se observa para el punto 1:



$$CVD-CVI=180^{\circ}00'10''$$

$$180^{\circ}00'10''-180^{\circ}=10''$$

Luego el doble del error será:

$$2\varepsilon = 10''$$

$$Y \quad \varepsilon = 5''$$

Como se ve, este valor de 5'' es el que sumamos a la lectura en 1ª posición para hallar el promedio.

Como regla general se puede decir que cuando el valor de los grados en 1ª y 2ª posición difiere en 180°, se colocan los grados de la primera posición, más la semisuma de los minutos y segundos de ambas lecturas.

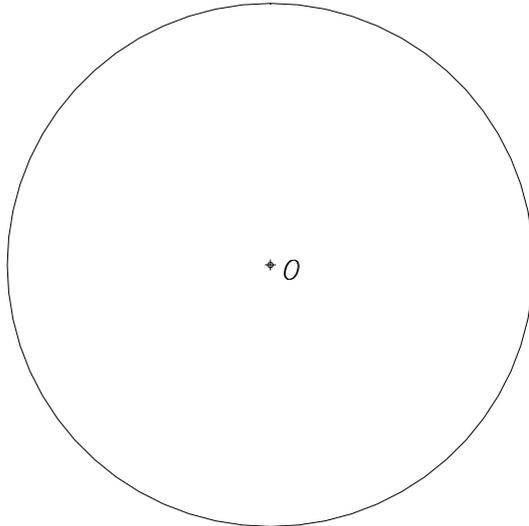


UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

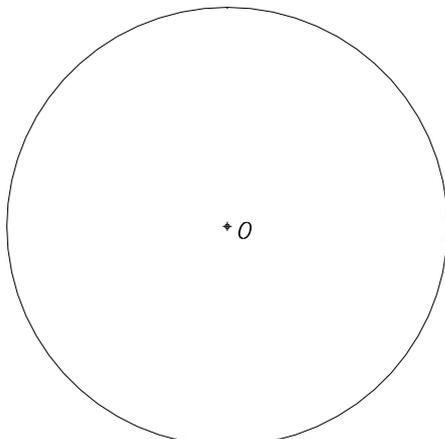
Para el punto 2 es un caso análogo al anterior, que el alumno deberá esquematizar y explicar:



Otro caso que se puede presentar es que las dos lecturas difieran en menos de 180° . En este caso la diferencia con 180° será el doble del error, luego, la mitad de este error será el valor que habrá que restar a la primera posición para obtener el promedio.

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
A	1	$110^\circ 20' 10''$	$290^\circ 19' 40''$		
	2	$200^\circ 40' 30''$	$20^\circ 39' 50''$		

Se sugiere que el alumno resuelva, grafique y explique este ejercicio.





UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Plantearemos a continuación dos ejercicios particulares cuyas lecturas tienen valores muy especiales:

1.-

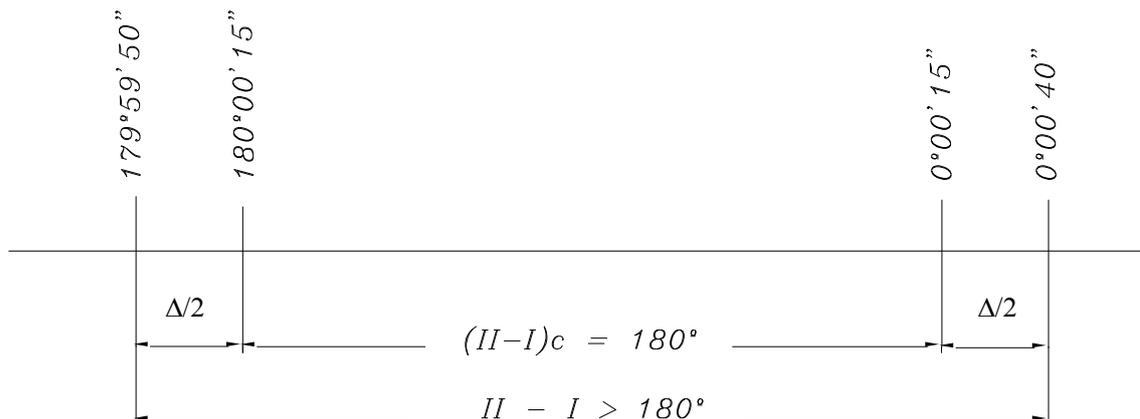
P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
A	1	179°59'50"	0°00'40"	180°00'15"	1A2
	2	359°59'30"	180°00'50"	0°00'10"	179°59'55"

Para obtener el valor del ángulo 1A2 debo restarle al promedio de la dirección 2 el promedio de la dirección 1. Como la dirección 2 es menor que la dirección 1, le sumo 360° y luego le resto la dirección 1:

$$0^{\circ}00'10'' + 360^{\circ} - 180^{\circ}00'15'' = 179^{\circ}59'55'' = 1A2$$

Si queremos analizar gráficamente lo realizado, lo haremos suponiendo que hemos rectificad el limbo, o sea que lo representamos como una recta en lugar de una circunferencia. En este ejercicio, para la dirección 1, se ve que las diferencias entre las lecturas en 1ª posición y 2ª posición son mayores que 180°.

o



$$II - I = 180^{\circ}00'50''$$

$$\Delta = 50''$$

$$\Delta/2 = 25''$$



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



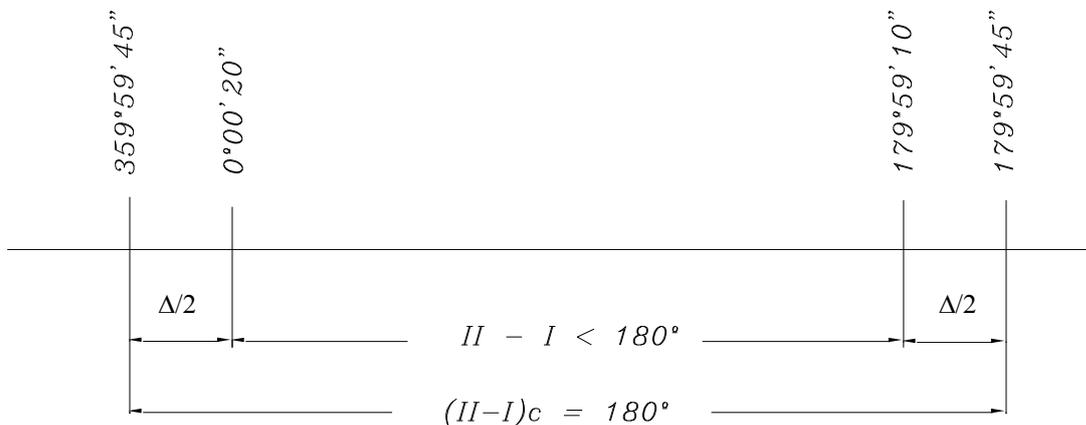
FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Como ya habíamos expresado, el intervalo entre la 1ª y 2ª posición es mayor que 180°, luego debemos achicar el intervalo y esto lo haremos sumándole el valor de la corrección a la 1ª posición y restándoselo a la 2ª posición. Para la dirección 2 sucede algo similar, se sugiere al alumno que grafique, calcule y explique cómo se obtiene el valor del promedio de dicha dirección.

2.-

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
A	1	0°00'20"	179°50'10"	359°59'45"	1A2
	2	43°00'30"	222°59'40"	43°00'05"	43°00'20"

En este ejercicio para ambas direcciones se verifica que su diferencia es menor de 180°. Esto significa que el intervalo entre la 1ª y 2ª posición es menor que 180°, luego debemos agrandar dicho intervalo. Para ello restaremos el valor de la corrección a la 1ª posición y se lo sumaremos a la 2ª posición. Gráficamente se ve (utilizando el limbo rectificado) para la dirección 1:





UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Con la dirección 2 sucede algo similar. Se sugiere que el alumno grafique, calcule y explique cómo se obtiene el promedio del valor de dicha dirección.

3. Medición del ángulo horizontal por el método de repetición: este es un método para medir un ángulo aislado. Se obtienen precisiones mayores que las que se obtienen por otros métodos, basándose en el principio de que se comete menos error en la bisección de un punto, que en la lectura del valor angular. Se debe utilizar un teodolito repetidor y el método consiste en sumar o adicionar n veces el ángulo en el limbo en 1ª posición y luego volver a adicionar n veces, el ángulo, en el limbo en 2ª posición.

Se hacen solamente las siguientes lecturas:

Valor inicial en 1ª posición, una vez apuntada la 1ª dirección. Luego se suelta la alidada y se apunta a la 2ª dirección, y se lee este valor para tener una idea aproximada del valor angular que se está midiendo. Luego con la alidada sujeta al limbo se suelta el conjunto limbo alidada y se bisecta nuevamente el primer punto. Se ajusta el tornillo del conjunto limbo alidada y se suelta el tornillo de alidada. Se bisecta el punto 2 y sin leer se vuelve a repetir la secuencia, tantas veces como repeticiones se vayan a hacer. Luego con el tornillo de alidada apretado y soltando el conjunto limbo alidada se procede a apuntar al primer punto pero en segunda posición (CVD). Se ajusta el tornillo del conjunto, se afloja alidada y se repite la medición del ángulo n veces en 2ª posición, leyendo el último valor.

El ángulo vendrá dado por:

(Última lectura – Primera lectura) dividido por el número total de repeticiones en primera y segunda posición.

Ejemplo:

Lectura a la 1ª dirección = $0^{\circ}00'00''$

Lectura a la 2ª dirección = $33^{\circ}20' \dots$



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

Lectura final luego de 3
Repeticiones en 1ª pos.
3 repeticiones en 2ª pos= 200°00'40"

$$\alpha = \frac{200^{\circ}00'40'' - 0^{\circ}00'30''}{6} \rightarrow \alpha = 33^{\circ}20'02''$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

(Ángulos horizontales)

1.-

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Calcular
		CVI	CVD		
E ₁	1	123°15' 23"	303° 14' 45"		1E ₁ 2
	2	136°50'15"	316°49'50"		3E ₁ 4
	3	220°36'18"	300°35'35"		3E ₁ 1
	4	330°30'30"	150°29'40"		

2.-

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Calcular
		CVI	CVD		
E ₁₄	31	36°00'25"	216°01'35"		43E ₁₄ 31
	33	78°10'30"	258°11'20"		33E ₁₄ 40
	40	115°30'50"	295°31'50"		40E ₁₄ 33
	43	250°40'20"	70°41'10"		



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

3.-

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Calcular
		CVI	CVD		
E ₆	A	0°00'20"	179°59'00"		ME ₆ N
	M	75°00'30"	255°00'20"		NE ₆ P
	N	180°00'40"	179°00'40"		PE ₆ A
	P	250°00'10"	69°59'10"		NE ₆ M

4.-

P.E.	P.V.	Ángulo Horizontal Leído		Promedio	Calcular
		CVI	CVD		
U	L	269°59'20"	70°01'10"		SUL
	S	359°59'30"	180°00'40"		TUL
	T	89°59'10"	270°00'20"		

Calcular los siguientes ángulos verticales:

5.-

(Teodolito 0° cenital 0° a 360° horario)

P.E.	P.V.	Ángulo Vertical Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
A	1	60°20'30"	299°40'20"		1A2
	2	120°10'40"	239°50'10"		



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE INGENIERIA
en acción continua...

6.-
(Teodolito 0° Nadiral 0° a 360° anti-horario)

P.E.	P.V.	Ángulo Vertical Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
M	A	80°10'30"	299°40'20"		AMB
	B	130°30'40"	229°28'40"		

7.-
(Teodolito 0° Nadiral 0° a 360° anti-horario)

P.E.	P.V.	Ángulo Vertical Leído		Promedio	Ángulo
		CVI	CVD		
A	1	69°59'50"	289°59'10"		AMB
	B	100°05'10"	259°56'20"		

8.-
Calcular el valor del ángulo A1B medido por el método de repetición. Se han efectuado 3 repeticiones en 1ª posición y 3 en 2ª posición; con los siguientes datos de campaña.

Lectura inicial Pto A = 0°00'30"
Lectura al pto B = 40°
Lectura final en 2ª posición = 241° 02'20"
