



Capítulo 6B – Movimiento de proyectiles

Presentación PowerPoint de

Paul E. Tippens, Profesor de Física

Southern Polytechnic State University

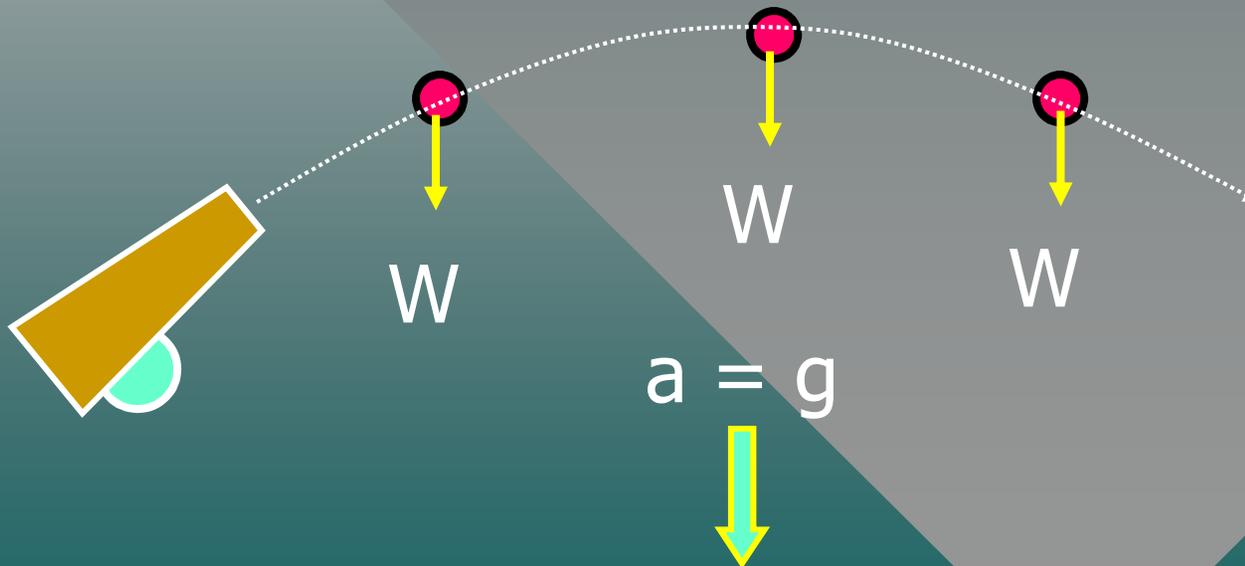
© 2007

Objetivos: Después de completar este módulo, deberá:

- Describir el movimiento de un proyectil al tratar los componentes horizontal y vertical de su posición y velocidad.
- Resolver para posición, velocidad o tiempo cuando se dan velocidad inicial y ángulo de lanzamiento.

Movimiento de proyectiles

Un **proyectil** es una partícula que se mueve cerca de la superficie de la Tierra sólo bajo la influencia de su peso (dirigido hacia abajo).



Movimiento vertical y horizontal

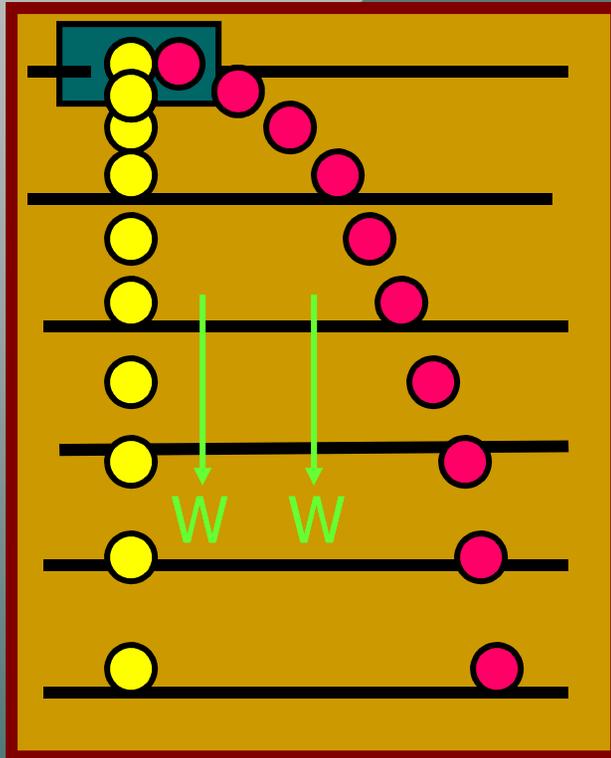
*Simultáneamente suelte la bola **amarilla** y proyecte la bola **roja** horizontalmente.*



Dé clic a la derecha para observar el movimiento de cada bola.



Movimiento vertical y horizontal



*Simultáneamente suelte una bola **amarilla** y proyecte la bola **roja** horizontalmente.*

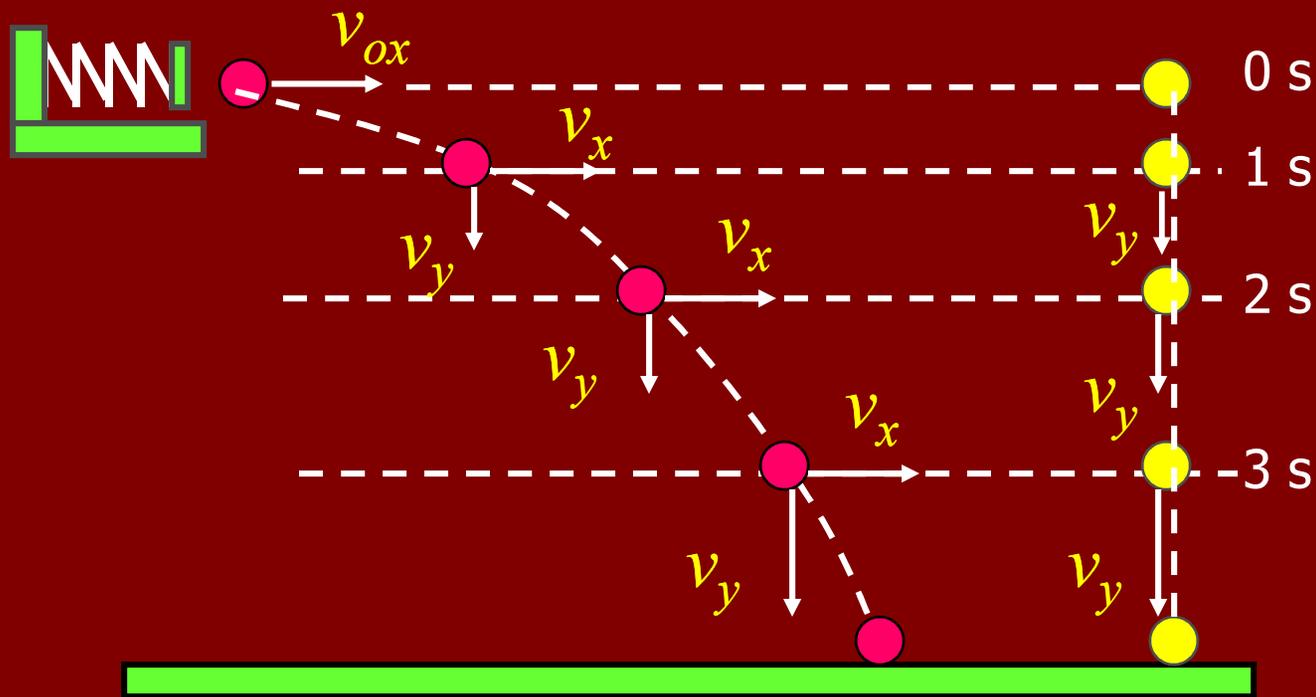


¿Por qué golpean el suelo al mismo tiempo?

Una vez comienza el movimiento, el peso hacia abajo es la única fuerza sobre cada bola.

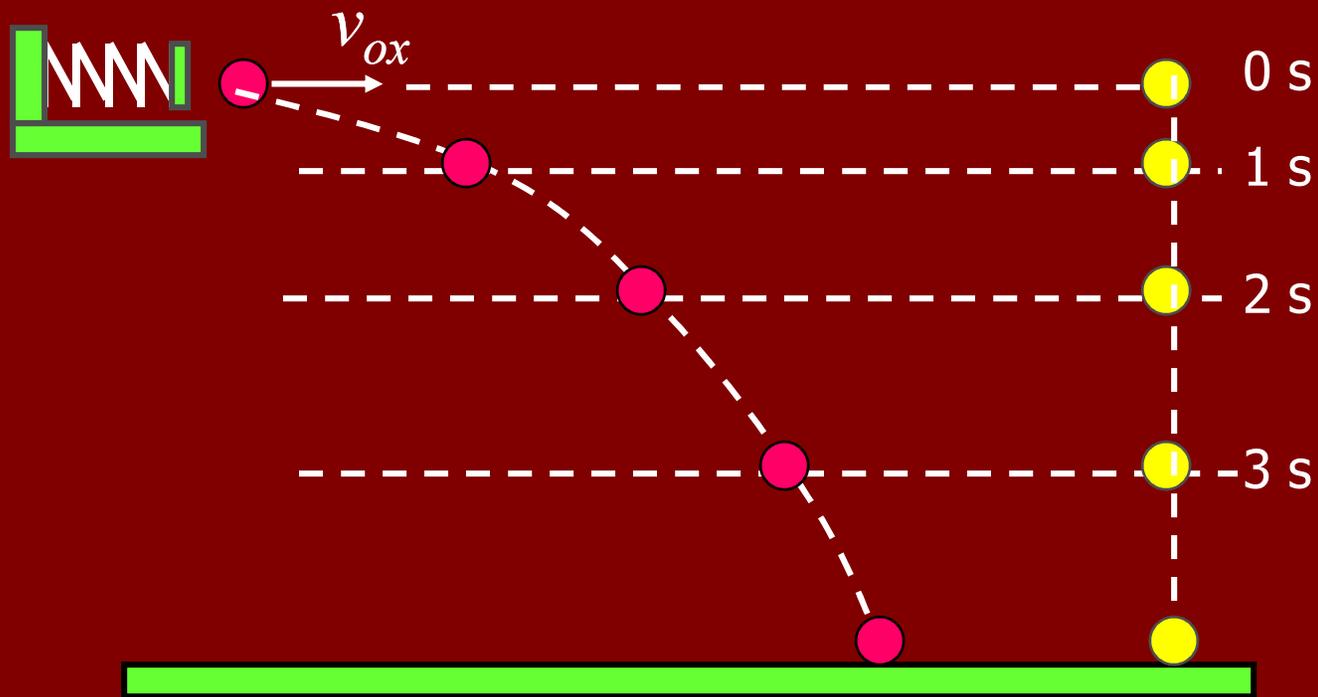
Bola proyectada horizontalmente y otra soltada al mismo tiempo:

El movimiento vertical es el mismo para cada bola



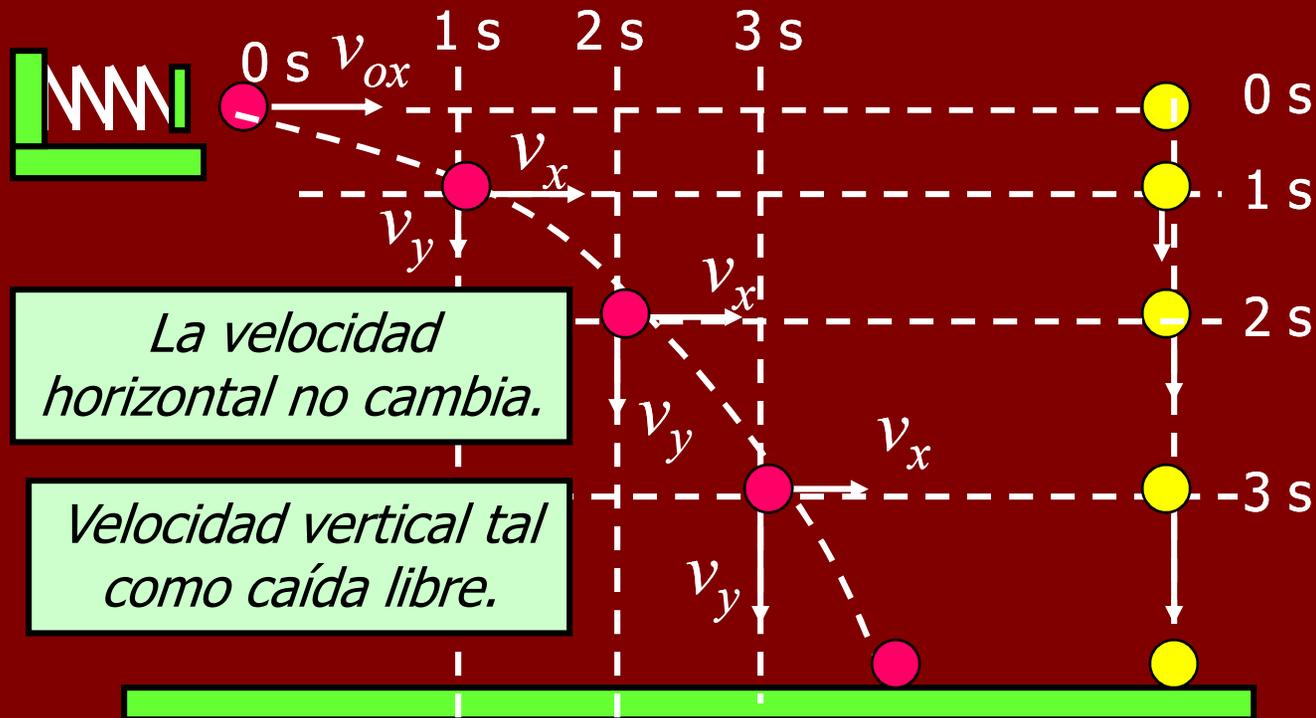
Observe el movimiento de cada bola

El movimiento vertical es el mismo para cada bola



Considere por separado los movimientos horizontal y vertical:

Compare desplazamientos y velocidades



Cálculo de desplazamiento para proyección horizontal:

Para cualquier aceleración constante: $x = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$

Para el caso especial de proyección horizontal:

$$a_x = 0; \quad a_y = g \quad v_{oy} = 0; \quad v_{ox} = v_o$$

Desplazamiento horizontal : $x = v_{ox} t$

Desplazamiento vertical: $y = \frac{1}{2} g t^2$

Cálculo de velocidad para proyección horizontal (Cont.):

Para cualquier aceleración constante: $v_f = v_o + at$

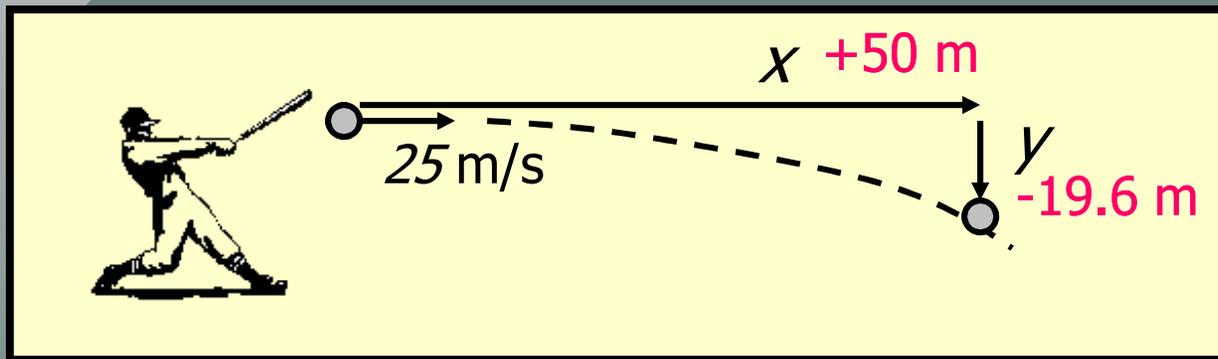
Para el caso especial de un proyectil:

$$a_x = 0; \quad a_y = g \quad v_{oy} = 0; \quad v_{ox} = v_o$$

Velocidad horizontal: $v_x = v_{ox}$

Velocidad vertical: $v_y = v_o + gt$

Ejemplo 1: Una bola de béisbol se golpea con una rapidez horizontal de **25 m/s**. ¿Cuál es su posición y velocidad después de **2 s**?



Primero encuentre los desplazamientos horizontal y vertical :

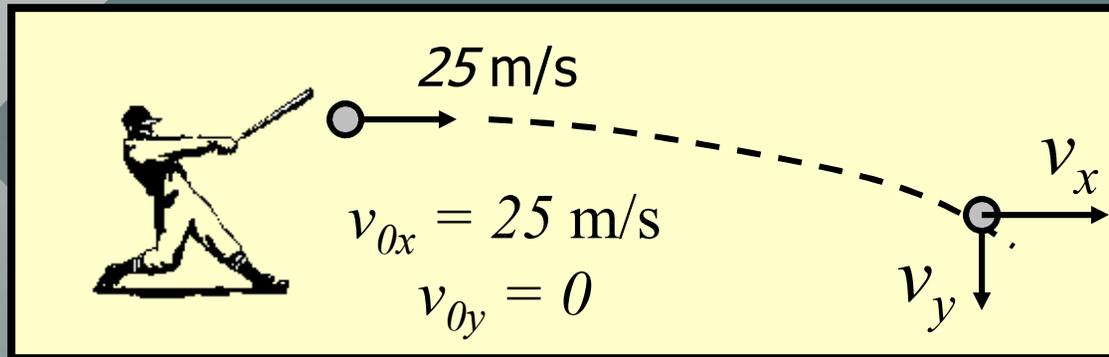
$$x = v_{ox} t = (25 \text{ m/s})(2 \text{ s})$$

$$x = 50.0 \text{ m}$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} (-9.8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})^2$$

$$y = -19.6 \text{ m}$$

Ejemplo 1 (Cont.): ¿Cuáles son los componentes de la velocidad después de 2



Encuentre la velocidad horizontal y vertical después de 2 s:

$$v_x = v_{0x} = (25 \text{ m/s})$$

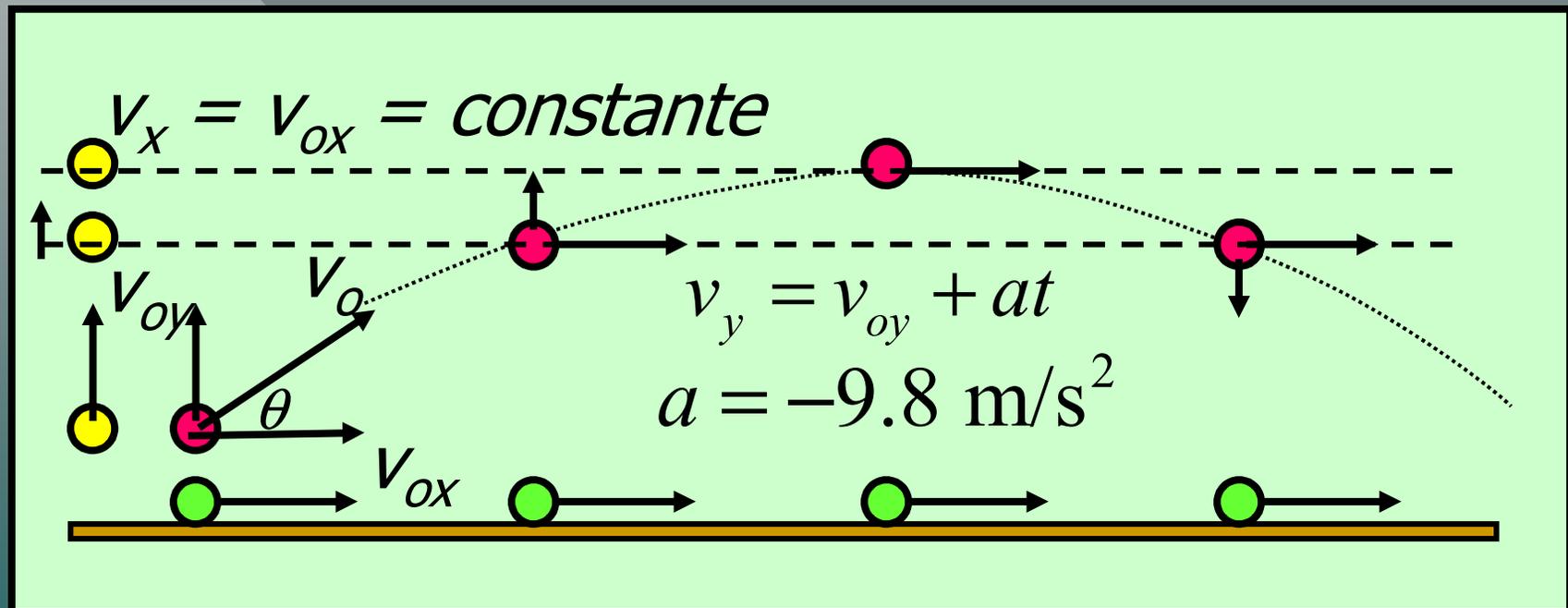
$$v_x = 25.0 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} + at = 0 + (-9.8 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})$$

$$v_y = -19.6 \text{ m/s}$$

Considere proyectil a un ángulo:

Una bola roja se proyecta a un ángulo θ . Al mismo tiempo, una bola amarilla se lanza verticalmente hacia arriba y una bola verde rueda horizontalmente (sin fricción).



Note los movimientos vertical y horizontal de las bolas

Cálculos de desplazamiento para proyección general:

Los componentes del desplazamiento en el tiempo t son:

$$x = v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Para proyectiles: $a_x = 0$; $a_y = g$; $v_{oy} = 0$; $v_{ox} = v_o$

Por tanto, los componentes x y y para proyectiles son:

$$x = v_{ox}t$$

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Cálculos de velocidad para proyección general:

Los componentes de la velocidad en el tiempo t son:

$$v_x = v_{ox} + a_x t$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t$$

Para proyectiles: $a_x = 0$; $a_y = g$; $v_{oy} = 0$; $v_{ox} = v_o$

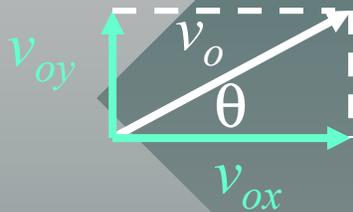
Por tanto, los componentes de velocidad v_x y v_y para proyectiles son:

$$v_x = v_{0x} \text{ constante}$$

$$v_y = v_{0y} + gt$$

Estrategia para resolución de problema

1. Descomponer la velocidad inicial v_o en componentes:



$$v_{ox} = v_o \cos \theta; \quad v_{oy} = v_o \sin \theta$$

2. Encuentre componentes de posición y velocidad final:

Desplazamiento:

$$x = v_{ox} t$$

$$y = v_{oy} t + \frac{1}{2} g t^2$$

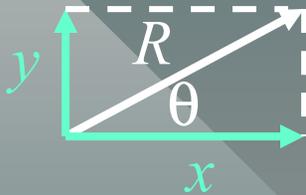
Velocidad:

$$v_x = v_{0x}$$

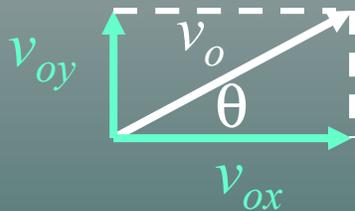
$$v_y = v_{0y} + g t$$

Estrategia para el problema (Cont.):

3. *La posición y velocidad finales se pueden encontrar a partir de los componentes.*



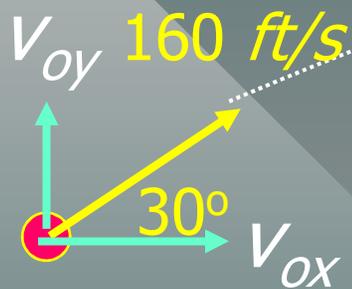
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

4. *Use los signos correctos. Recuerde: g es negativo o positivo dependiendo de su elección inicial.*

Ejemplo 2: Una bola tiene una velocidad inicial de **160 ft/s** a un ángulo de **30°** con la horizontal. Encuentre su posición y velocidad después de **2 s** y de **4 s**.



$$v_{ox} = (160 \text{ ft/s}) \cos 30^{\circ} = 139 \text{ ft/s}$$

$$v_{oy} = (160 \text{ ft/s}) \sin 30^{\circ} = 80.0 \text{ ft/s}$$

Dado que v_x es constante, los desplazamientos horizontales después de 2 y 4 segundos son:

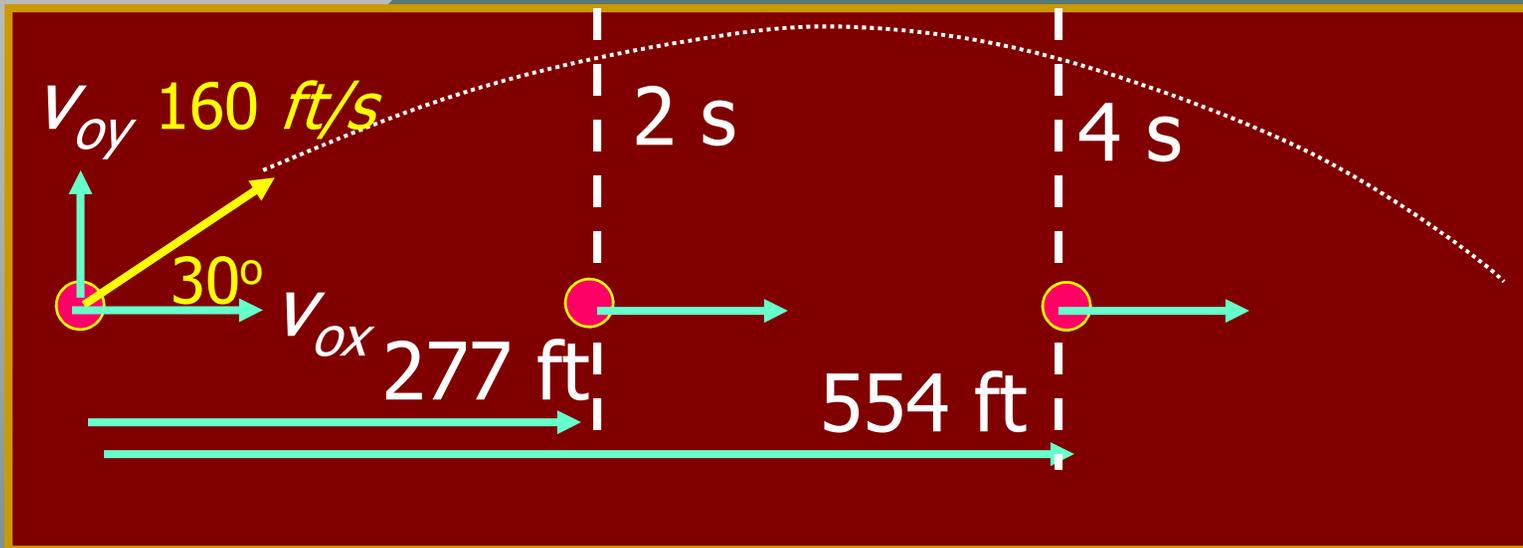
$$x = v_{ox} t = (139 \text{ ft/s})(2 \text{ s})$$

$$x = 277 \text{ ft}$$

$$x = v_{ox} t = (139 \text{ ft/s})(4 \text{ s})$$

$$x = 554 \text{ ft}$$

Ejemplo 2: (continuación)

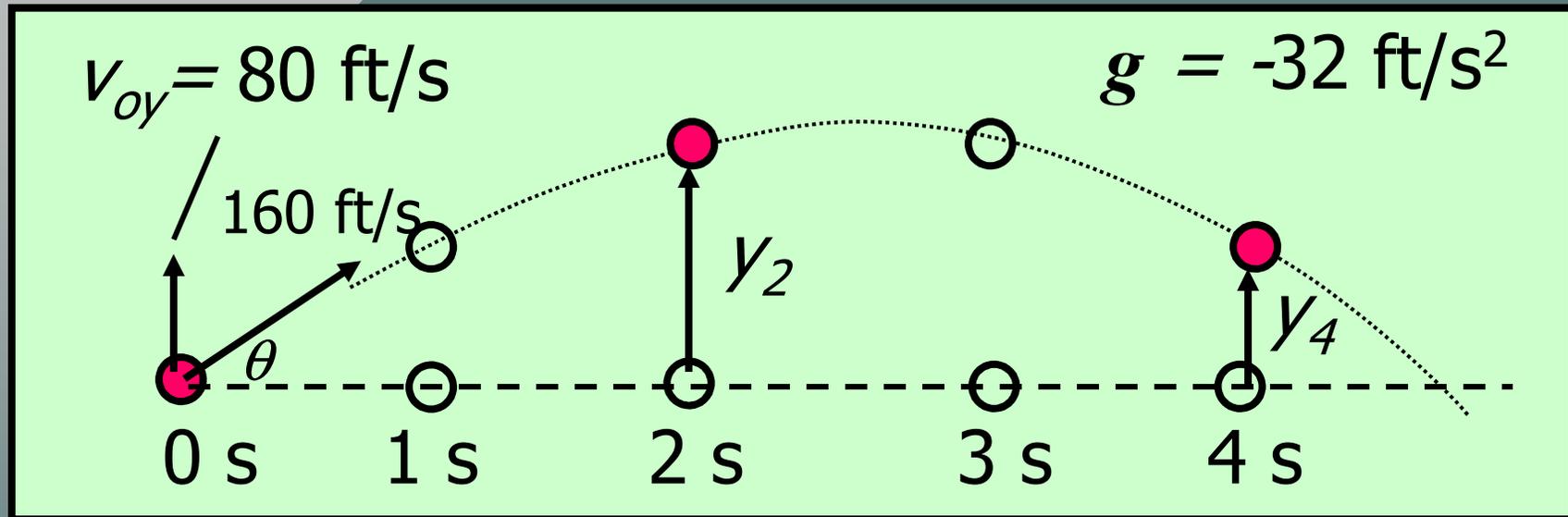


Nota: SÓLO se conoce la **ubicación horizontal** después de **2 y 4 s**. No se sabe si va hacia arriba o hacia abajo.

$$x_2 = 277 \text{ ft}$$

$$x_4 = 554 \text{ ft}$$

Ejemplo 2 (Cont.): A continuación encuentre los componentes verticales de la posición después de 2 s y 4 s.



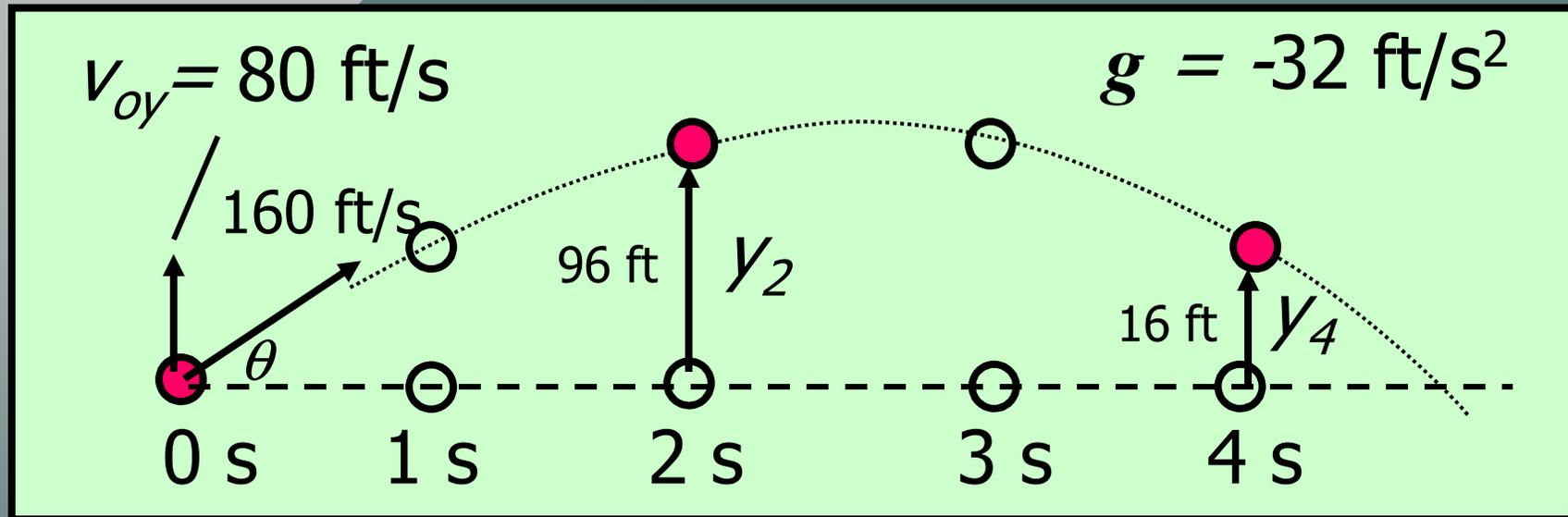
Desplazamiento vertical como función del tiempo:

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 = (80 \text{ ft/s})t + \frac{1}{2}(-32 \text{ ft/s}^2)t^2$$

$$y = 80t - 16t^2$$

Observe unidades consistentes.

(Cont.) Los **signos** de y indicarán la **ubicación** del desplazamiento (arriba + o abajo - del origen).



Posición vertical:

$$y = 80t - 16t^2$$

$$y_2 = 80(2 \text{ s}) - 16(2 \text{ s})^2$$

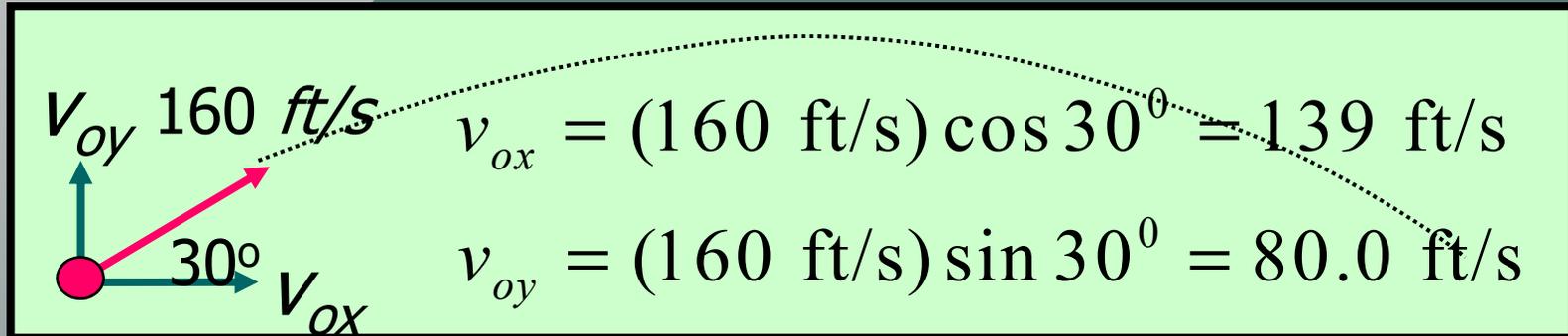
$$y_2 = 96 \text{ ft}$$

$$y_4 = 16 \text{ ft}$$

$$y_4 = 80(4 \text{ s}) - 16(4 \text{ s})^2$$

Cada una arriba del origen (+)

(Cont.): A continuación encuentre los componentes horizontal y vertical de la **velocidad** después de 2 y



Dado que v_x es constante, $v_x = 139 \text{ ft/s}$ en todos los tiempos.

La velocidad vertical es la misma que si se proyectara verticalmente:

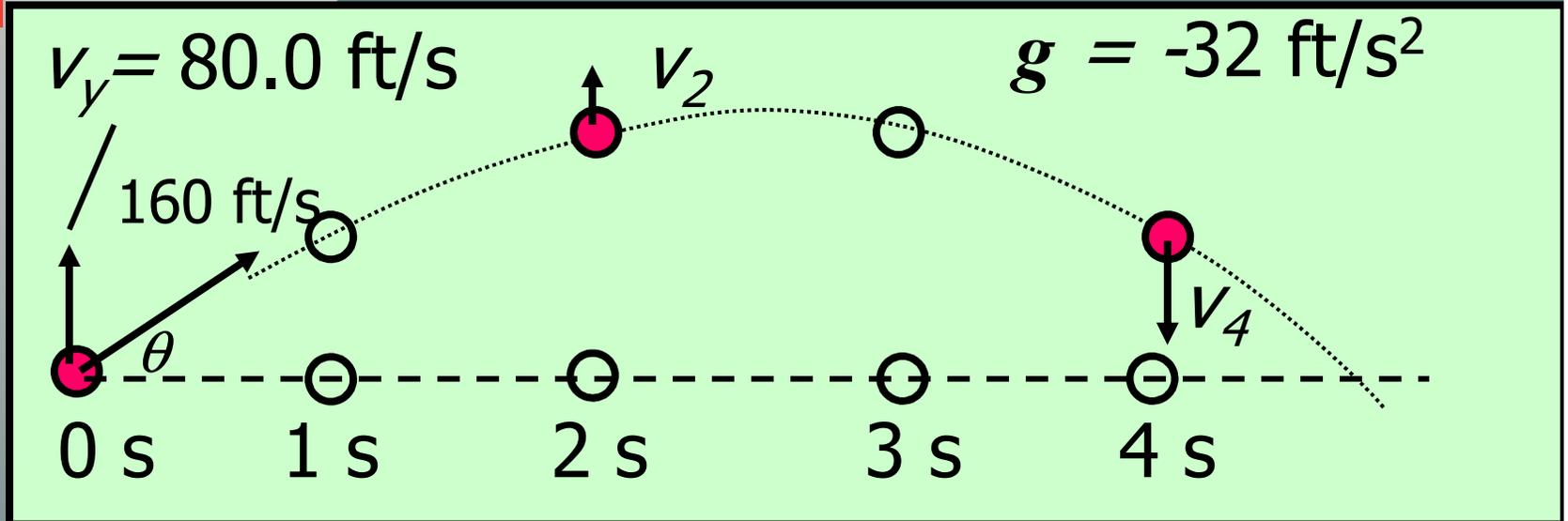
$$v_y = v_{0y} + gt; \quad \text{donde} \quad g = -32 \text{ ft/s}^2$$

En cualquier tiempo t :

$$v_x = 139 \text{ ft/s}$$

$$v_y = v_{oy} - (32 \text{ ft/s})t$$

Ejemplo 2: (continuación)



En cualquier tiempo t :

$$v_x = 139 \text{ ft/s}$$

$$v_y = v_{oy} - (32 \text{ ft/s})t$$

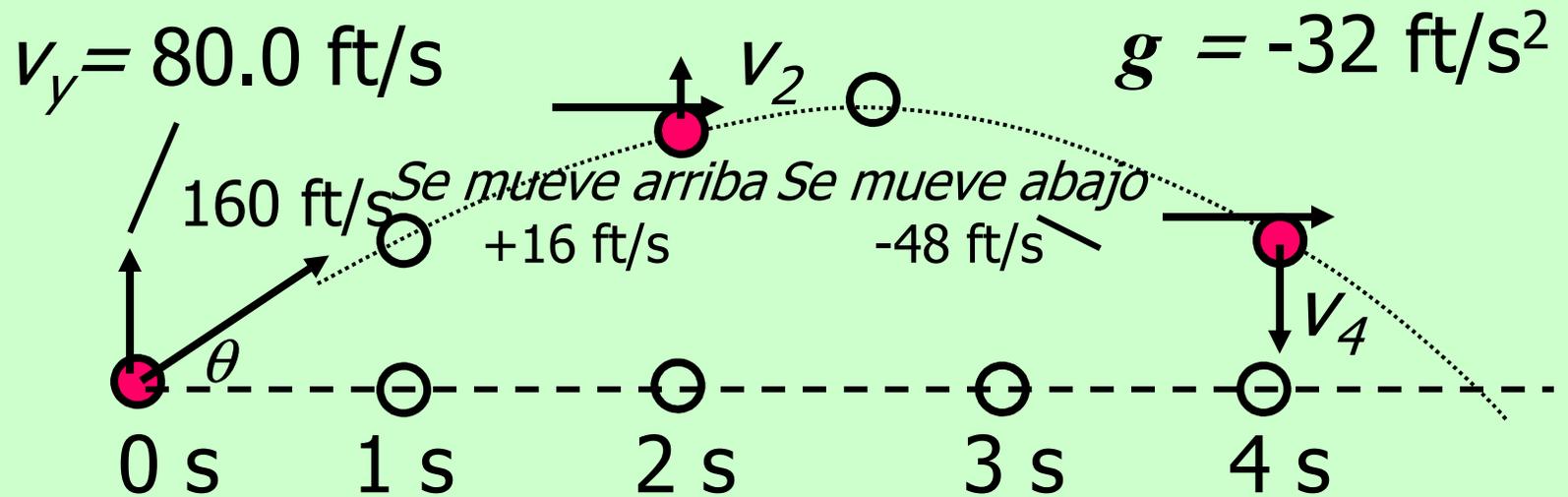
$$v_y = 80 \text{ ft/s} - (32 \text{ ft/s})(2 \text{ s})$$

$$v_{2y} = 16.0 \text{ ft/s}$$

$$v_y = 80 \text{ ft/s} - (32 \text{ ft/s})(4 \text{ s})$$

$$v_{4y} = -48.0 \text{ ft/s}$$

Ejemplo 2: (continuación)

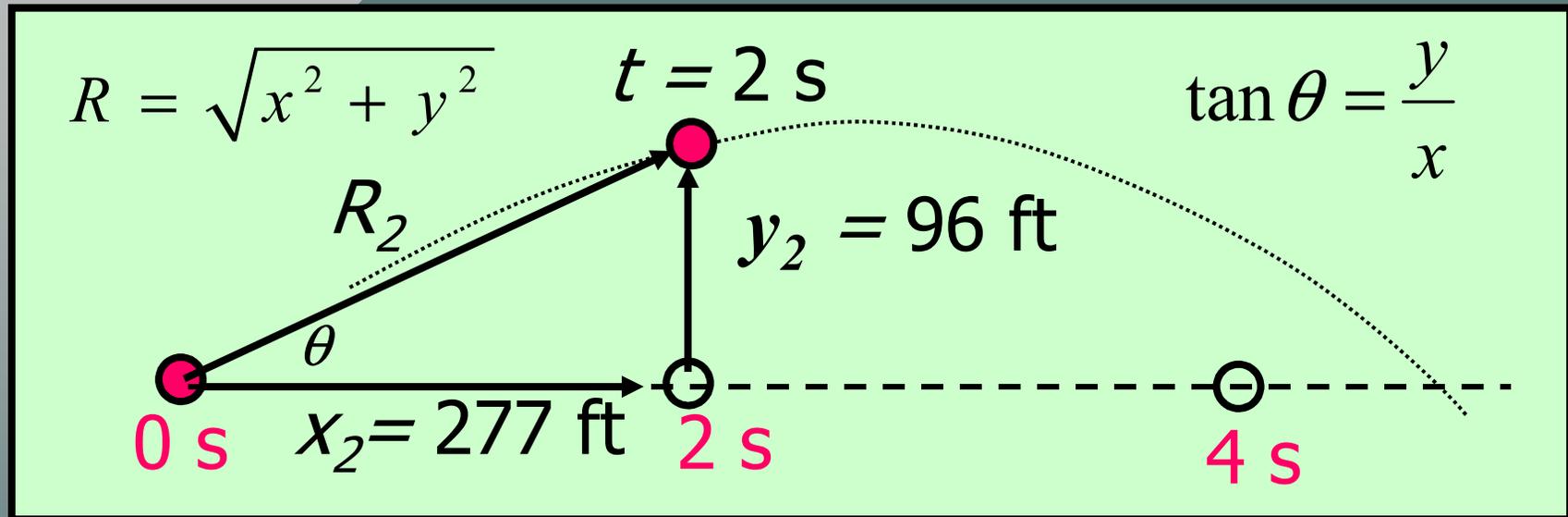


Los **signos** de v_y indican si el movimiento es **arriba** (+) o **abajo** (-) en cualquier tiempo t .

A 2 s: $v_{2x} = 139$ ft/s; $v_{2y} = + 16.0$ ft/s

A 4 s: $v_{4x} = 139$ ft/s; $v_{4y} = - 48.0$ ft/s

(Cont.): El desplazamiento R_2, θ se encuentra a partir de los desplazamientos componentes x_2 y y_2



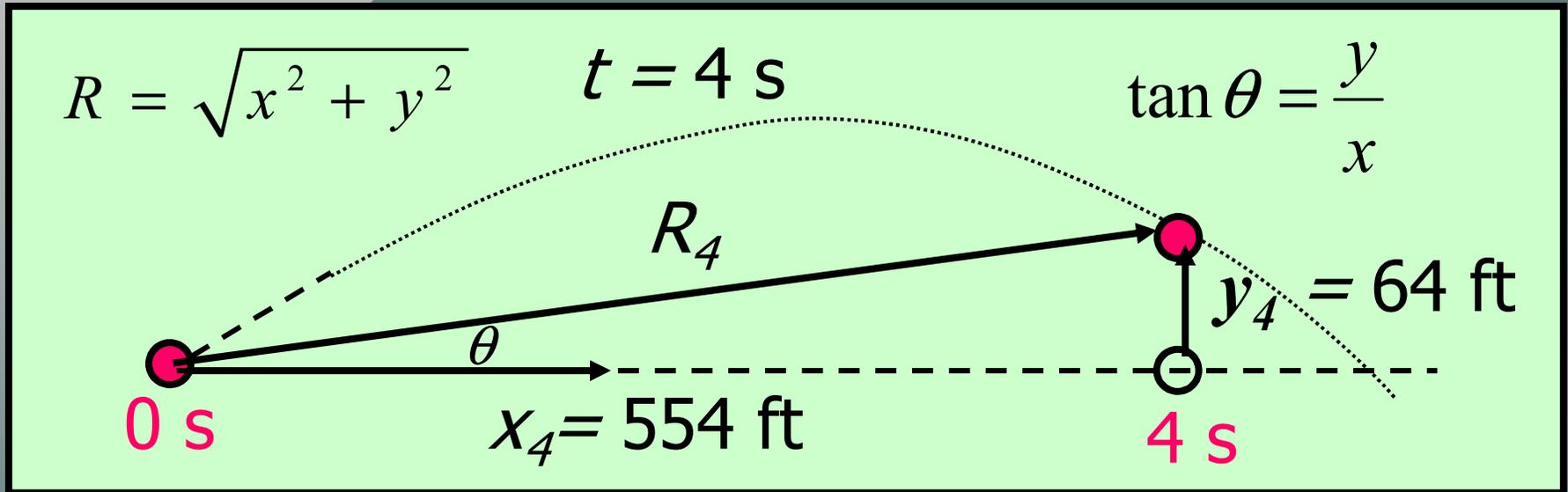
$$R = \sqrt{(277 \text{ ft})^2 + (96 \text{ ft})^2}$$

$$R_2 = 293 \text{ ft}$$

$$\tan \theta = \frac{96 \text{ ft}}{277 \text{ ft}}$$

$$\theta_2 = 19.1^\circ$$

(Cont.): De igual modo, el desplazamiento R_4, θ se encuentra a partir de los desplazamientos componentes x_4 y y_4 .



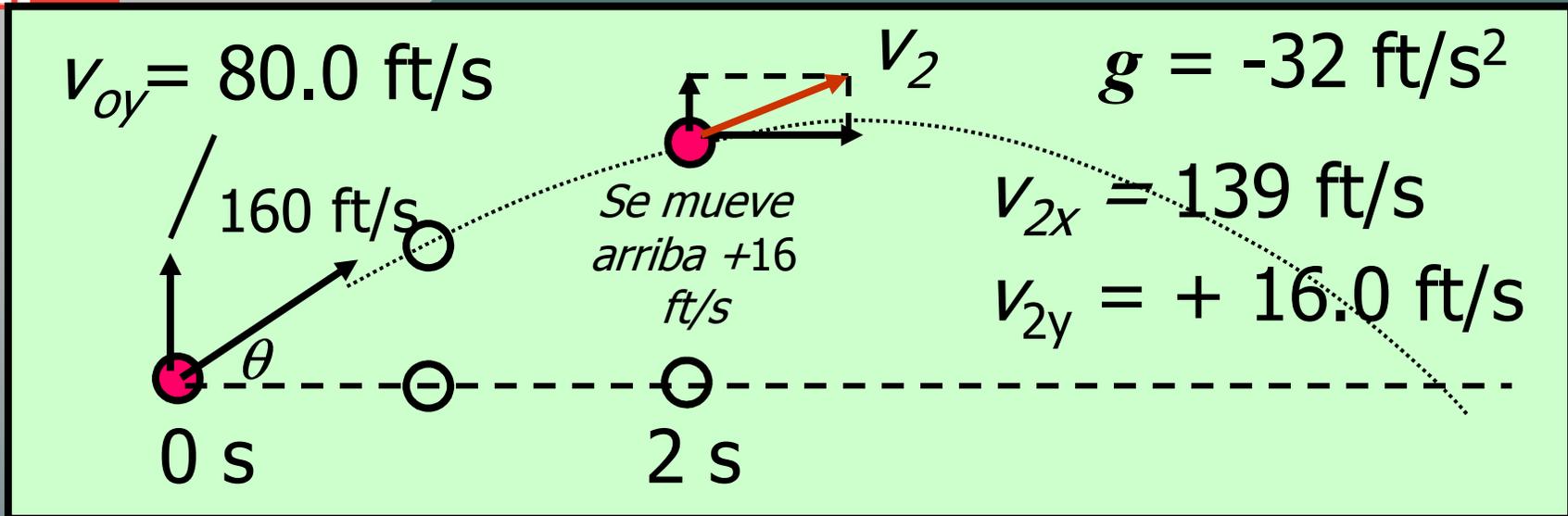
$$R = \sqrt{(554 \text{ ft})^2 + (64 \text{ ft})^2}$$

$$R_4 = 558 \text{ ft}$$

$$\tan \theta = \frac{64 \text{ ft}}{554 \text{ ft}}$$

$$\theta_4 = 6.59^\circ$$

(Cont.): Ahora se encuentra la velocidad desp
de 2 s a partir de los componentes v_x y v_y .



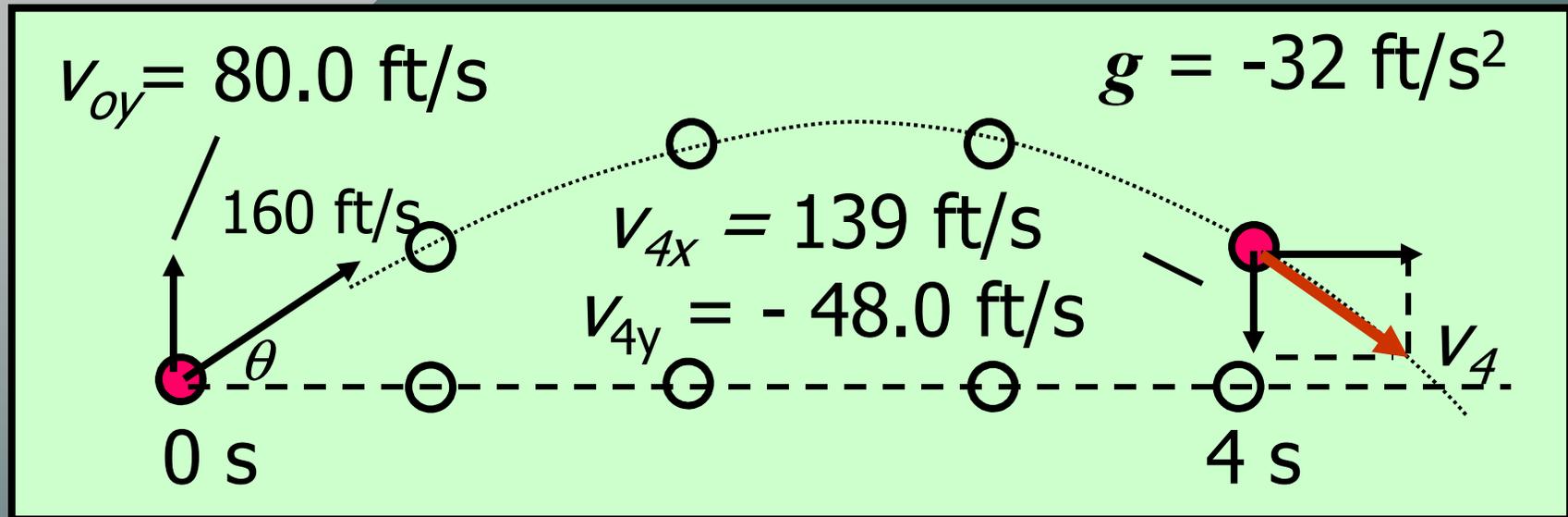
$$v_2 = \sqrt{(139 \text{ ft/s})^2 + (16 \text{ ft/s})^2}$$

$$v_2 = 140 \text{ ft/s}$$

$$\tan \theta = \frac{16 \text{ ft}}{139 \text{ ft}}$$

$$\theta_2 = 6.56^\circ$$

(Cont.) A continuación, encuentre la velocidad después de **4 s** a partir de los componentes v_{4x} y



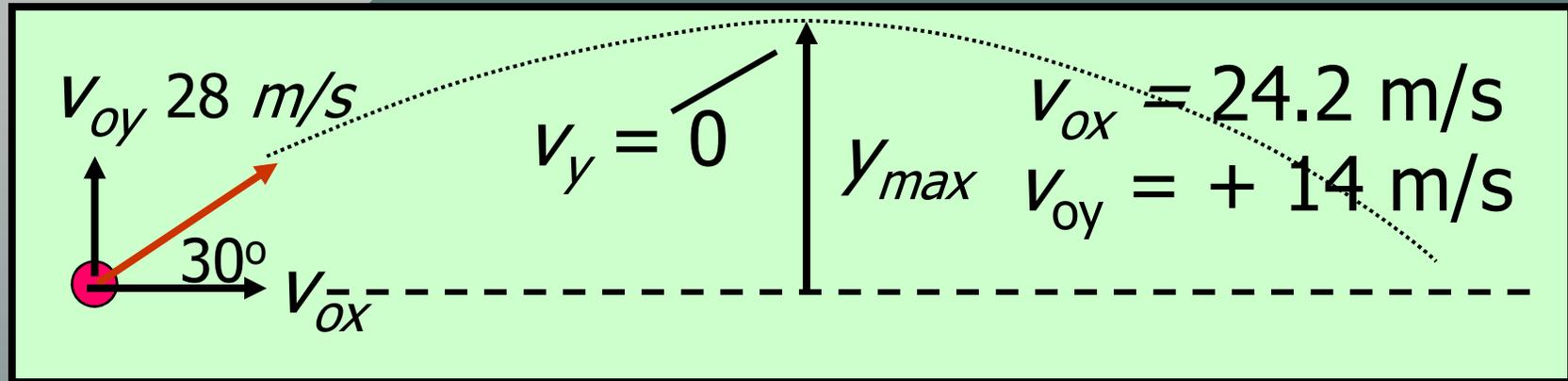
$$v_4 = \sqrt{(139 \text{ ft/s})^2 + (-46 \text{ ft/s})^2}$$

$$v_4 = 146 \text{ ft/s}$$

$$\tan \theta = \frac{16 \text{ ft}}{139 \text{ ft}}$$

$$\theta_2 = 341.7^\circ$$

Ejemplo 3: ¿Cuáles son la **altura máxima** y el **rango** de un proyectil si $v_o = 28 \text{ m/s}$ a 30° ?



$$v_{ox} = (28 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = 24.2 \text{ m/s}$$

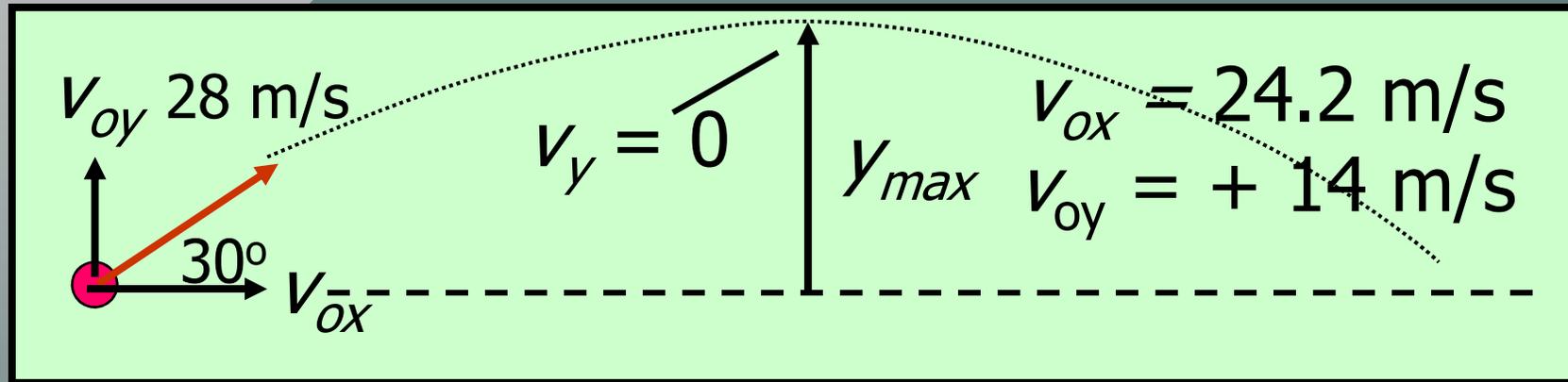
$$v_{oy} = (28 \text{ m/s}) \sin 30^\circ = 14 \text{ m/s}$$

La máxima coordenada y ocurre cuando $v_y = 0$:

$$v_y = v_{oy} + gt = 14 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2)t = 0$$

$$y_{max} \text{ ocurre cuando } 14 - 9.8t = 0 \text{ o } t = 1.43 \text{ s}$$

Ejemplo 3(Cont.): ¿Cuál es la **altura máxima** del proyectil si $v = 28 \text{ m/s}$ a 30° ?



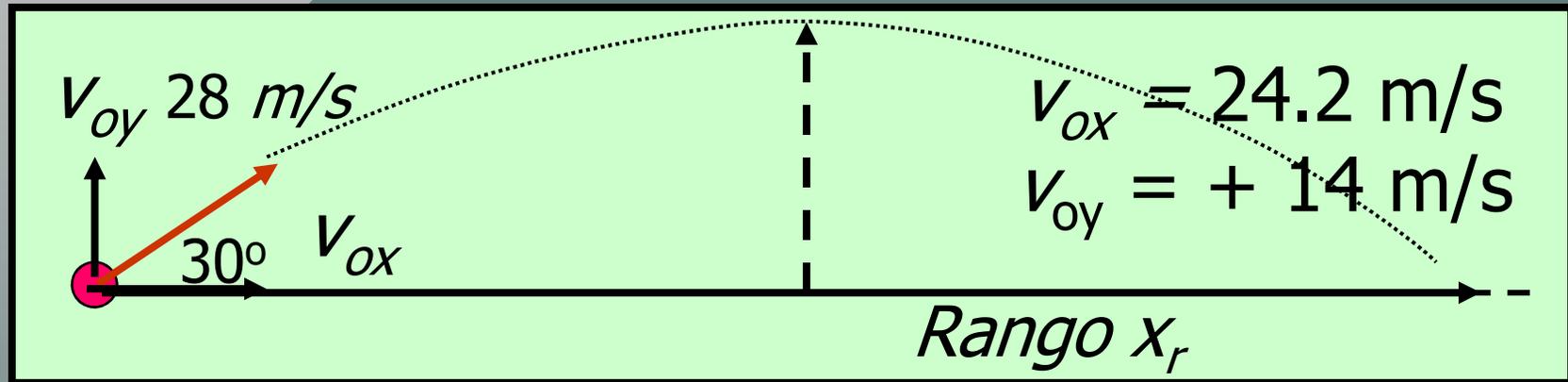
La máxima coordenada y ocurre cuando $t = 1.43 \text{ s}$:

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 = 14(1.43) + \frac{1}{2}(-9.8)(1.43)^2$$

$$y = 20 \text{ m} - 10 \text{ m}$$

$$y_{max} = 10.0 \text{ m}$$

Ejemplo 3(Cont.): A continuación, encuentre el **rango** del proyectil si $v = 28 \text{ m/s}$ a 30° .

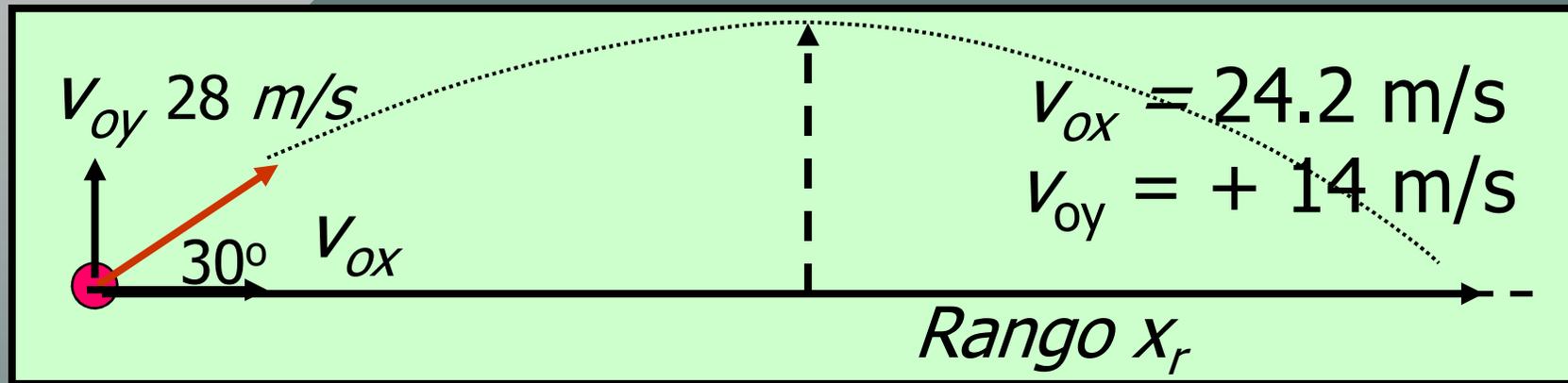


El **rango x_r** se define como la distancia horizontal que coincide con el tiempo para el regreso vertical.

El tiempo de vuelo se encuentra al hacer $y = 0$:

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (\text{continúa})$$

Ejemplo 3(Cont.): Primero se encuentra el tiempo de vuelo t_r luego el rango x_r .



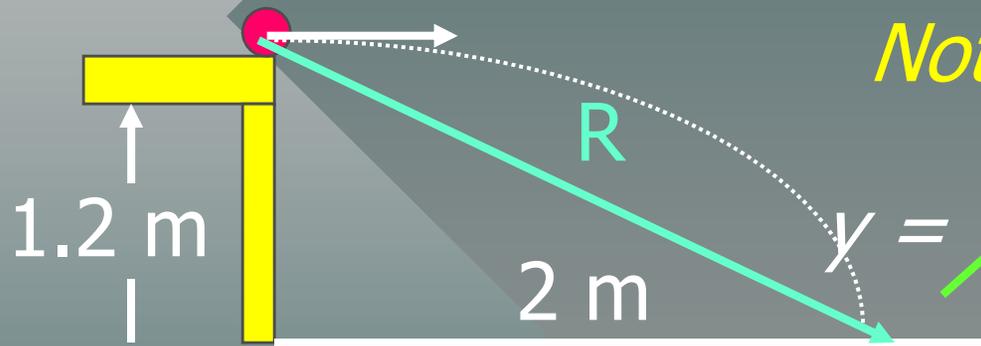
$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (\text{Divida por } t)$$

$$v_{oy} + \frac{1}{2}gt = 0; \quad t = \frac{v_{oy}}{-g} = \frac{2(14 \text{ m/s})}{-(-9.8 \text{ m/s}^2)}; \quad t = 2.86 \text{ s}$$

$$x_r = v_{ox}t = (24.2 \text{ m/s})(2.86 \text{ s});$$

$$x_r = 69.2 \text{ m}$$

Ejemplo 4: Una bola rueda desde lo alto de una mesa a **1.2 m** de altura y aterriza en el suelo a una distancia horizontal de **2 m**.
¿Cuál fue la velocidad cuando dejó la mesa?



Nota: $x = v_{ox}t = 2 \text{ m}$

$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = -1.2 \text{ m}$

Primero encuentre t a partir de la ecuación y :

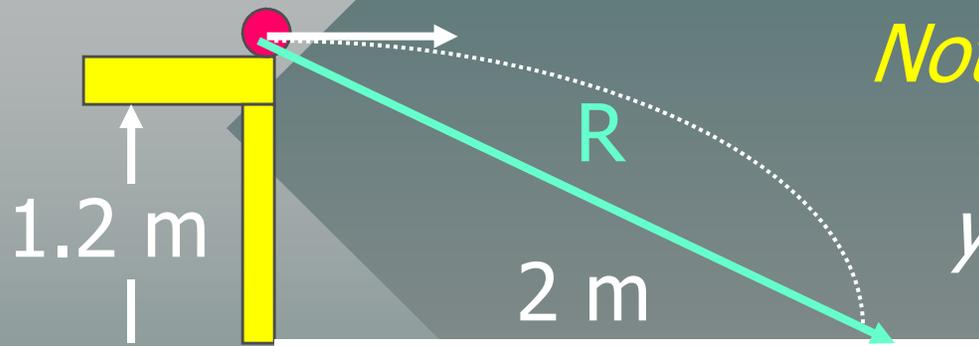
$$\frac{1}{2}(-9.8)t^2 = -(1.2)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = -1.2 \text{ m}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(-1.2)}{-9.8}}$$

$t = 0.495 \text{ s}$

Ejemplo 4 (Cont.): Ahora use la ecuación horizontal para encontrar v_{ox} al salir de lo alto de la mesa.



Nota: $x = v_{ox}t = 2 \text{ m}$

$y = \frac{1}{2}gt^2 = -1.2 \text{ m}$

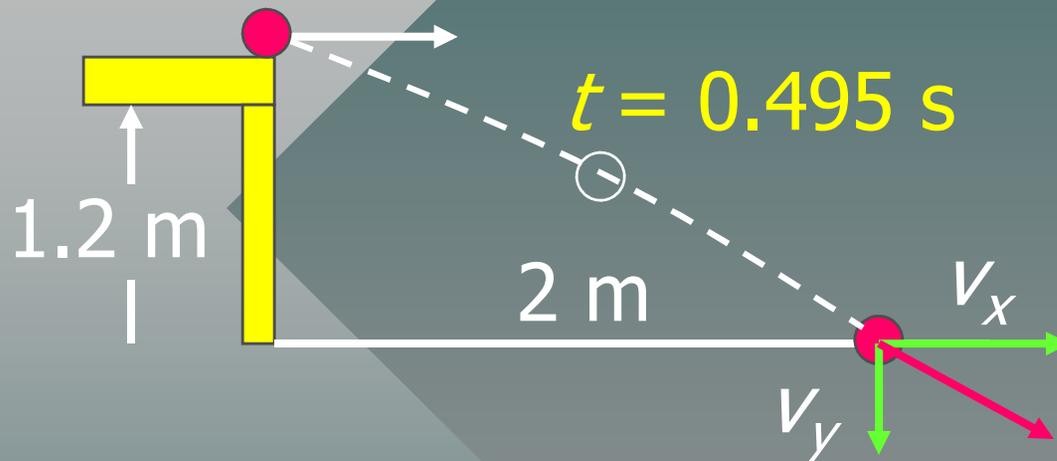
Use $t = 0.495 \text{ s}$ en la ecuación x : $v_{ox}t = 2 \text{ m}$

$$v_{ox}(0.495 \text{ s}) = 2 \text{ m}; \quad v_{ox} = \frac{2 \text{ m}}{0.495 \text{ s}}$$

La bola deja la mesa con una rapidez:

$v = 4.04 \text{ m/s}$

Ejemplo 4 (Cont.): ¿Cuál será su rapidez cuando golpee el suelo?



Nota:

$$v_x = v_{ox} = 4.04 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_y + gt$$

$$v_y = 0 + (-9.8 \text{ m/s}^2)(0.495 \text{ s})$$

$$v_y = -4.85 \text{ m/s}$$

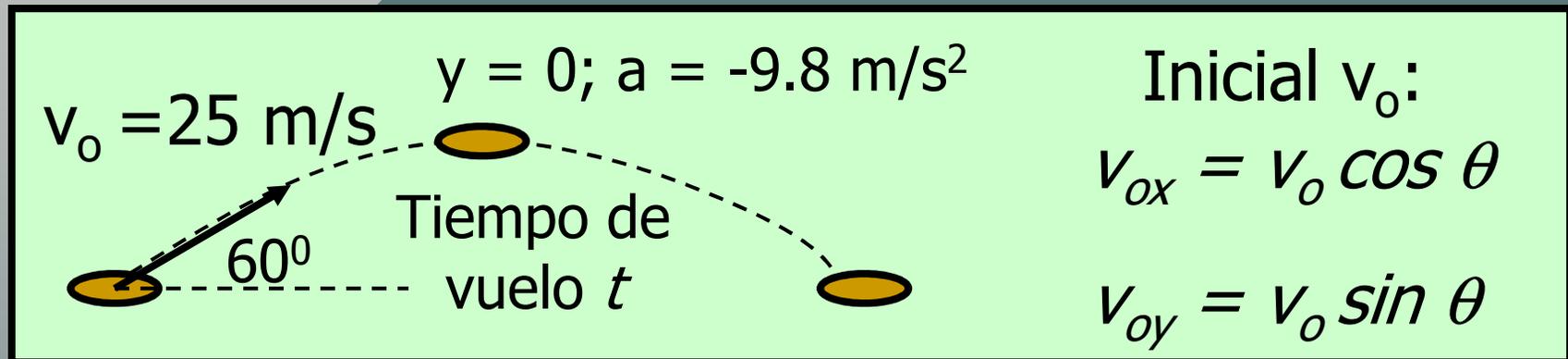
$$v = \sqrt{(4.04 \text{ m/s})^2 + (-4.85 \text{ m/s})^2}$$

$$\tan \theta = \frac{-4.85 \text{ m}}{4.04 \text{ m}}$$

$$v_4 = 146 \text{ ft/s}$$

$$\theta_2 = 309.8^\circ$$

Ejemplo 5. Encuentre el “tiempo colgado” para el balón cuya velocidad inicial es 25 m/s, 60° .



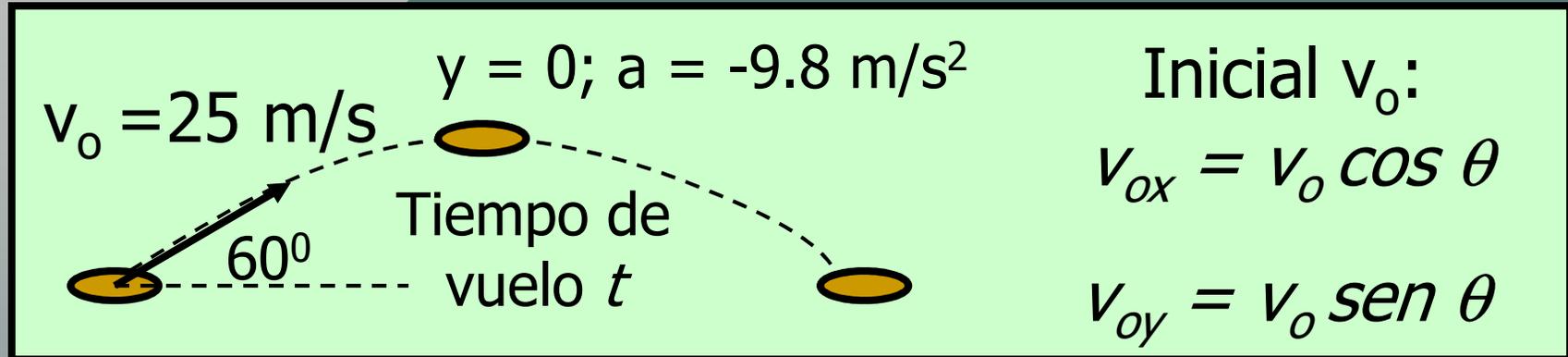
$$V_{0x} = (25 \text{ m/s}) \cos 60^\circ; \quad v_{0x} = 12.5 \text{ m/s}$$

$$V_{0y} = (25 \text{ m/s}) \text{ sen } 60^\circ; \quad v_{0y} = 21.7 \text{ m/s}$$

Sólo los parámetros verticales afectan al tiempo de vuelo.

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2; \quad 0 = (21.7)t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

Ejemplo 5 (Cont.) Encuentre el "tiempo de vuelo" para el balón cuya velocidad inicial es 25 m/s, 60°



$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}at^2; \quad 0 = (21.7)t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$4.9 t^2 = 21.7 t \quad 4.9 t = 21.7$$

$$t = \frac{21.7 \text{ m/s}}{4.9 \text{ m/s}^2}$$

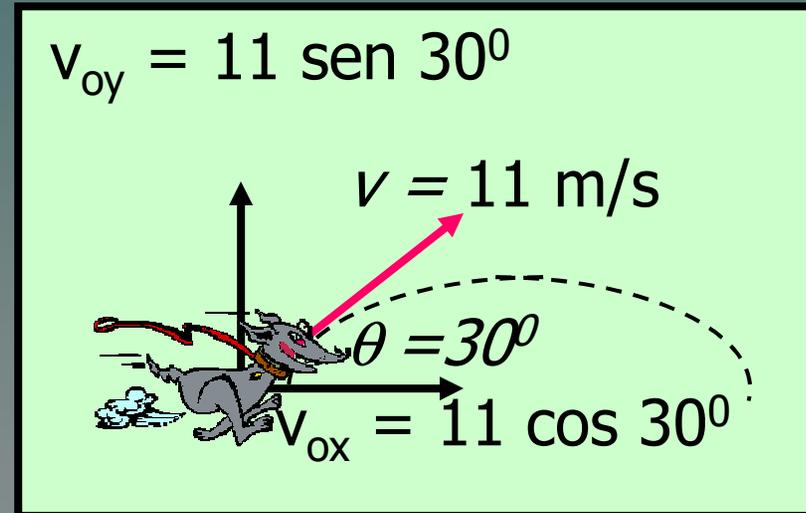
$$t = 4.42 \text{ s}$$

Ejemplo 6. Un perro que corre salta con velocidad inicial de 11 m/s a 30° . ¿Cuál es el rango?

Dibuje figura y encuentre componentes:

$$v_{ox} = 9.53 \text{ m/s}$$

$$v_{oy} = 5.50 \text{ m/s}$$



Para encontrar el rango, primero encuentre t cuando $y = 0$; $a = -9.8 \text{ m/s}^2$

$$y = v_{oy}t + \frac{1}{2}at^2; \quad 0 = (5.50)t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$4.9 t^2 = 5.50 t$$

$$4.9 t = 5.50$$

$$t = \frac{5.50 \text{ m/s}}{4.9 \text{ m/s}^2}$$

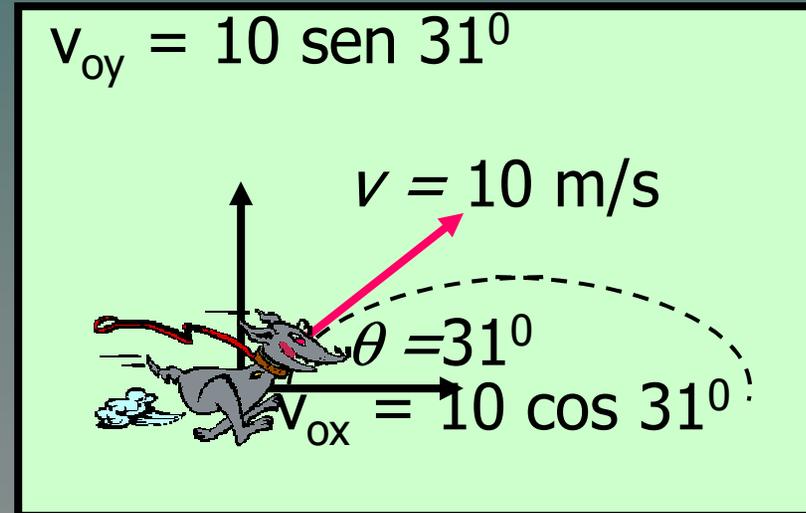
$$t = 1.12 \text{ s}$$

Ejemplo 6 (Cont.) Un perro salta con velocidad inicial de 11 m/s a 30° . ¿Cuál es el rango?

El rango se encuentra a partir del componente x :

$$v_x = v_{ox} = 9.53 \text{ m/s}$$

$$x = v_x t; \quad t = 1.12 \text{ s}$$



La velocidad horizontal es constante: $v_x = 9.53 \text{ m/s}$

$$x = (9.53 \text{ m/s})(1.12 \text{ s}) = 10.7 \text{ m}$$

Rango: $x = 10.7 \text{ m}$

Resumen de proyectiles:

1. *Determine los componentes x y y de v_0*

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad \text{y} \quad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta$$

2. *Los componentes horizontal y vertical del desplazamiento en cualquier tiempo t están dados por:*

$$x = v_{0x} t \quad y = v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2$$

Resumen (continuación):

3. *Los componentes horizontal y vertical de la velocidad en cualquier tiempo t están dados por:*

$$v_x = v_{ox}; \quad v_y = v_{oy} + gt$$

4. *Luego, si se desea, se pueden encontrar el desplazamiento vectorial o la velocidad a partir de los componentes:*

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

CONCLUSIÓN: Capítulo 6B

Movimiento de proyectiles

