Cap. 11B – Rotación de cuerpo rígido

Presentación PowerPoint de

Paul E. Tippens, Profesor de Física

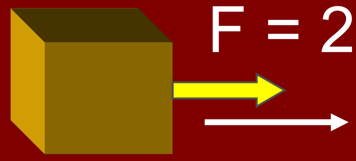
Southern Polytechnic State University

Objetivos: Después de completar este módulo, deberá:

- Definir y calcular el momento de inercia para sistemas simples.
- Definir y aplicar los conceptos de segunda ley de Newton, energía cinética rotacional, trabajo rotacional, potencia rotacional y cantidad de movimiento rotacional a la solución de problemas físicos.
- Aplicar principios de conservación de energía y cantidad de movimiento a problemas que involucran rotación de cuerpos rígidos.

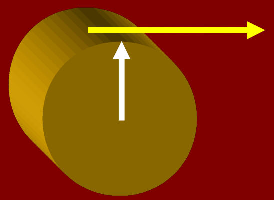
Inercia de rotación

Considere la segunda ley de Newton para que la inercia de rotación se modele a partir de la ley de traslación.



F = 20 N

$a = 4\ \mathrm{m/s^2}$



F = 20 N

R = 0.5 m

$\alpha = 2\ \mathrm{rad/s^2}$

Inercia lineal, *m*

$$m = \frac{24\ \mathrm{N}}{4\ \mathrm{m/s^2}} = 5\ \mathrm{kg}$$

Inercia rotacional, *I*

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{(20\ \mathrm{N})(0.5\ \mathrm{m})}{4\ \mathrm{m/s^2}} = 2.5\ \mathrm{kg\ m^2}$$

La fuerza hace para la traslación lo que el momento de torsión hace para la rotación:

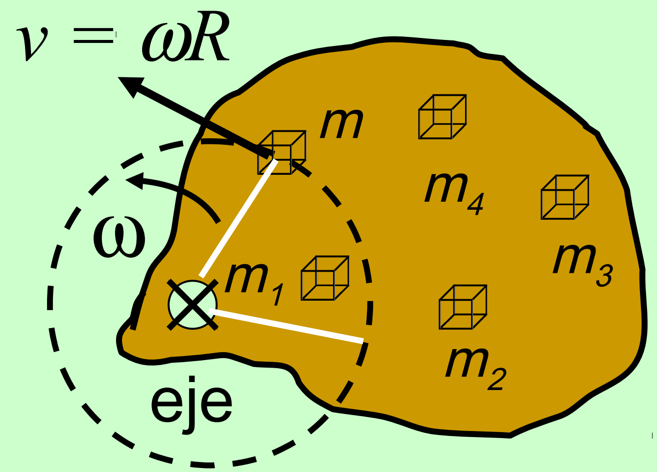
Energía cinética rotacional

Considere masa pequeña *m:*

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{1}{2}m(\omega R)^2$$

$$K = \frac{1}{2}(mR^2)\omega^2$$



Objeto que rota a ω constante.

Suma para encontrar K total:

$$K = \frac{1}{2}(\Sigma mR^2)\omega^2$$

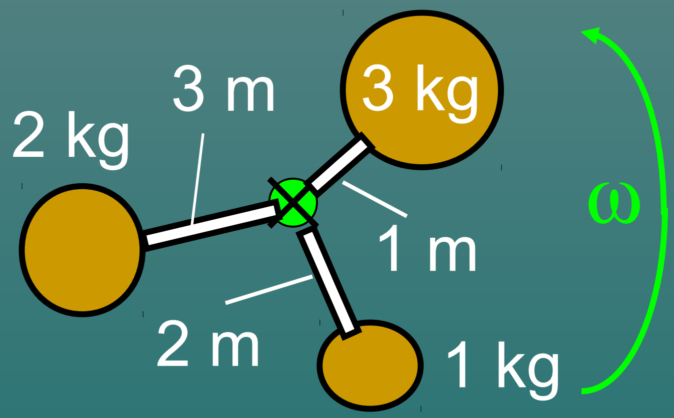
($\frac{1}{2}\omega^2$ igual para toda *m*)

Definición de inercia rotacional:

$$\boxed{I = \Sigma mR^2}$$

Ejemplo 1: ¿Cuál es la energía cinética rotacional del dispositivo que se muestra si rota con rapidez constante de 600 rpm?

Primero: $I = \Sigma mR^2$



$$I = (3 \text{ kg})(1 \text{ m})^2 + (2 \text{ kg})(3 \text{ m})^2 + (1 \text{ kg})(2 \text{ m})^2$$

$$I = 25 \text{ kg m}^2$$

$$\omega = 600 \text{ rpm} = 62.8 \text{ rad/s}$$

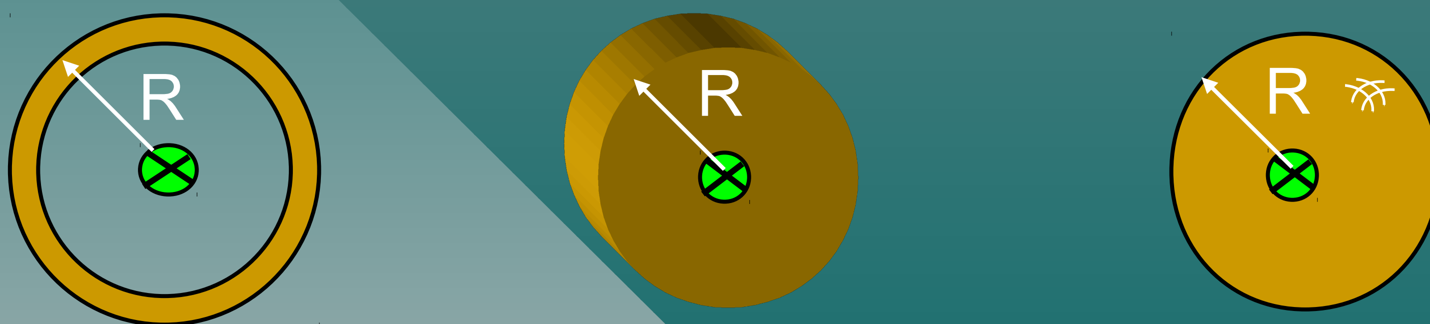
$$K = \tfrac{1}{2} I w^2 = \tfrac{1}{2}(25 \text{ kg m}^2)(62.8 \text{ rad/s})^2$$

$$\boxed{K = 49{,}300 \text{ J}}$$

Inercias rotacionales comunes

$$I = \tfrac{1}{3}\, mL^2$$

$$I = \tfrac{1}{12}\, mL^2$$



$$I = mR^2$$

Aro

$$I = \tfrac{1}{2} mR^2$$

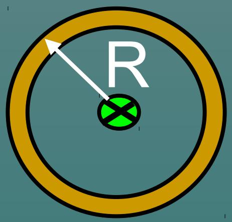
Disco o cilindro

$$I = \tfrac{2}{5}\, mR^2$$

Esfera sólida

Ejemplo 2: Un aro circular y un disco tienen cada uno una masa de 3 kg y un radio de 30 cm. Compare sus inercias rotacionales.

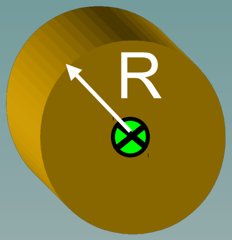
$$I = mR^2 = (3\ \text{kg})(0.2\ \text{m})^2$$



$$\boxed{I = 0.120\ \text{kg m}^2}$$

$$\boxed{I = mR^2}$$

Aro



$$\boxed{I = \tfrac{1}{2}mR^2}$$

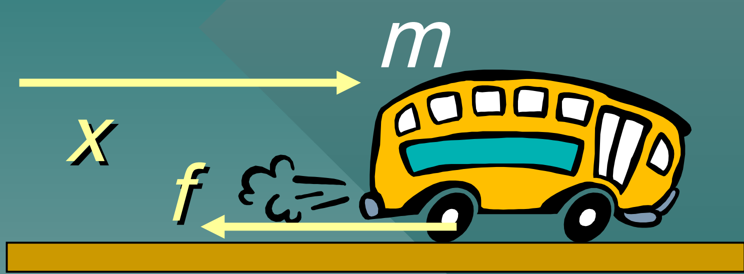
Disco

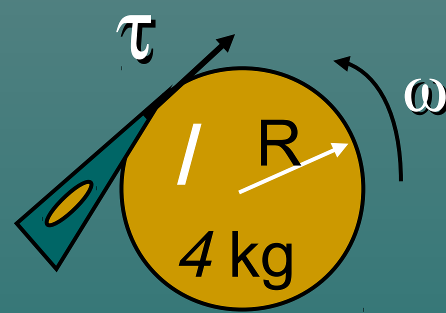
$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(3\ \text{kg})(0.2\ \text{m})^2$$

$$\boxed{I = 0.0600\ \text{kg m}^2}$$

Analogías importantes

Para muchos problemas que involucran rotación, hay una analogía extraída del movimiento lineal.





$\omega_o = 50$ rad/s

$\tau = 40$ N m

Una fuerza resultante *F* produce aceleración negativa a para una masa *m*.

$$F = ma$$

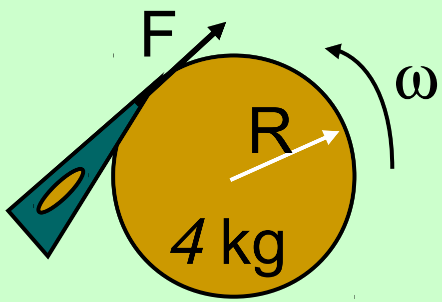
Un momento de torsión resultante τ produce aceleración angular α de disco con inercia rotacional *I*.

$$\tau = I\alpha$$

Segunda ley de rotación de Newton

¿Cuántas revoluciones requiere para detenerse?

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$



$\omega_o = 50$ rad/s

R = 0.20 m

F = 40 N

$$F\cancel{R} = (\tfrac{1}{2}mR^{\cancel{2}})\alpha$$

$$\alpha = \frac{2F}{mR} = \frac{2(40\text{N})}{(4\text{ kg})(0.2\text{ m})}$$

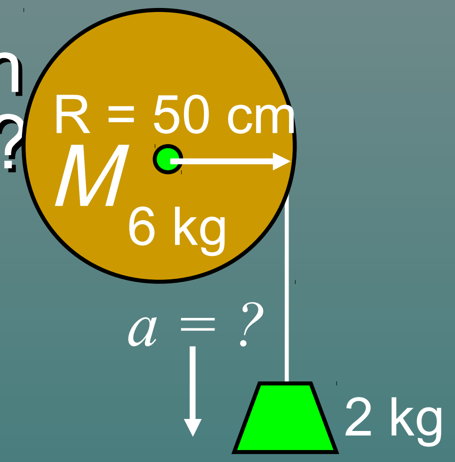
$$\boxed{\alpha = 100\text{ rad/s}^2}$$

$$2\alpha\theta = \cancel{\omega_f^2}^{\,0} - \omega_o^2$$

$$\theta = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(50\text{ rad/s})^2}{2(100\text{ rad/s}^2)}$$

$$\boxed{\theta = 12.5\text{ rad} = 1.99\text{ rev}}$$

Ejemplo 3: ¿Cuál es la aceleración lineal de la masa de 2-kg que cae?



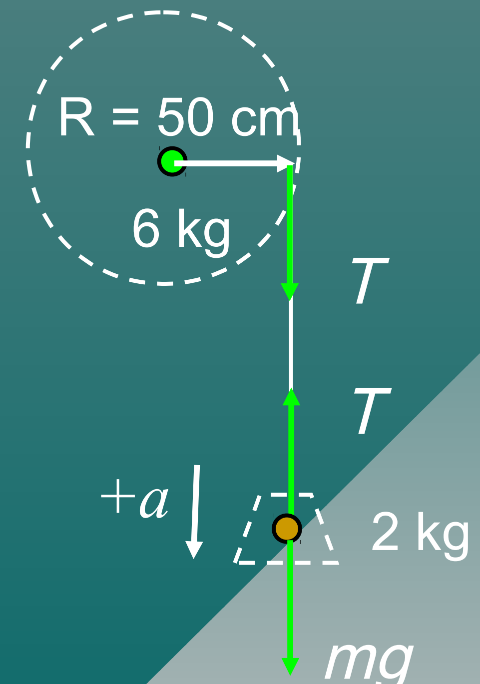
Aplique 2a ley de Newton al disco rotatorio:

$\tau = I\alpha \Rightarrow T\cancel{R} = (\frac{1}{2}MR^{\cancel{2}})\alpha$

$T = \frac{1}{2}MR\alpha$ pero $a = \alpha R; \quad \alpha = \frac{a}{R}$

$T = \frac{1}{2}M\cancel{R}\left(\frac{a}{\cancel{R}}\right);$ y $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}Ma}$

Aplique 2a ley de Newton a la masa que cae:



$mg - T = ma \qquad mg - \frac{1}{2}Ma = ma$

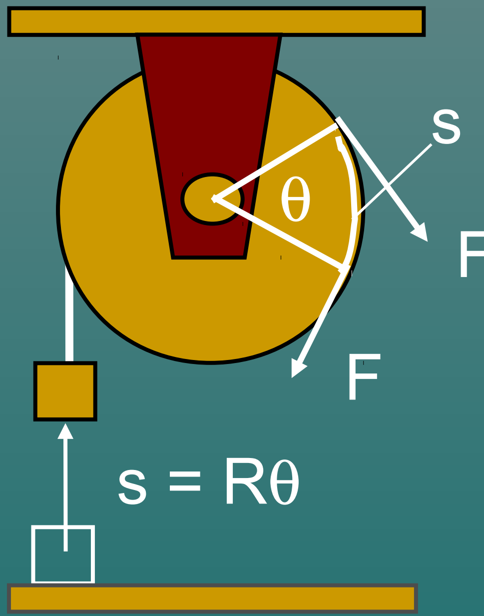
$(2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) - \frac{1}{2}(6\text{ kg})\,\boldsymbol{a} = (2\text{ kg})\,\boldsymbol{a}$

$19.6\text{ N} - (3\text{ kg})\,\boldsymbol{a} = (2\text{ kg})\,\boldsymbol{a}$

$$\boxed{a = 3.92\text{ m/s}^2}$$

Trabajo y potencia para rotación

Trabajo = Fs = FRθ $\tau = FR$



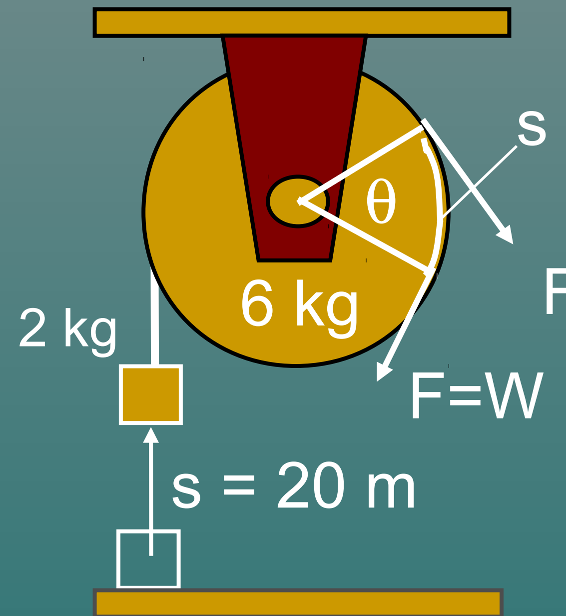
$$\boxed{\text{Trabajo} = \tau\theta}$$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{\tau\theta}{t} \qquad \bar{\omega} = \frac{\theta}{t}$$

$$\boxed{\text{Potencia} = \tau\,\bar{\omega}}$$

Potencia = Momento de torsión x velocidad angular promedio

Ejemplo 4: El disco rotatorio tiene un radio de 40 cm y una masa de 6 kg. Encuentre el trabajo y la potencia si la masa de 2 kg se eleva 20 m en 4 s.



$$\text{Trabajo} = \tau\theta = FR\,\theta$$

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{20\text{ m}}{0.4\text{ m}} = 50\text{ rad}$$

$$F = mg = (2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2);\quad F = 19.6\text{ N}$$

$$\text{Trabajo} = (19.6\text{ N})(0.4\text{ m})(50\text{ rad})$$

$$\boxed{\text{Trabajo} = 392\text{ J}}$$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{t} = \frac{392\text{ J}}{4\text{s}}$$

$$\boxed{\text{Potencia} = 98\text{ W}}$$

El teorema trabajo-energía

Recuerde para movimiento lineal que el trabajo realizado es igual al cambio en energía cinética lineal:

$$\boxed{Fx = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2}$$

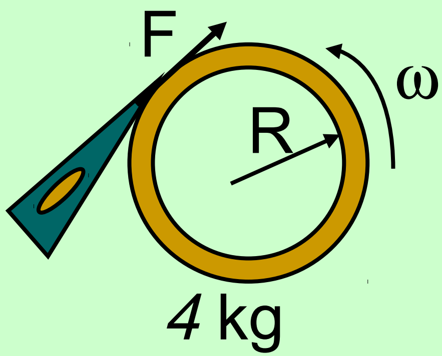
Al usar analogías angulares, se encuentra que el trabajo rotacional es igual al cambio en energía cinética rotacional:

$$\boxed{\tau\theta = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2}$$

Aplicación del teorema trabajo-energía:

¿Qué trabajo se necesita para detener la rueda que rota?

$$Trabajo = \Delta K_r$$



$\omega_o = 60$ rad/s

R = 0.30 m

F = 40 N

Primero encuentre *I* para rueda: $I = mR^2 = (4 \text{ kg})(0.3 \text{ m})^2 =$ 0.36 kg m²

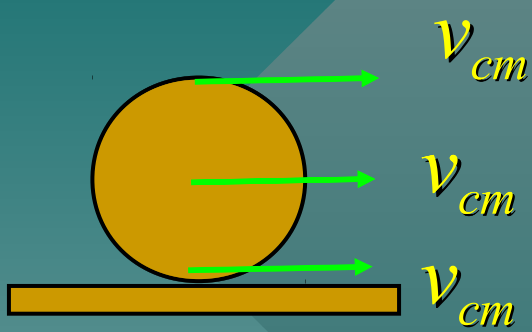
$$\tau\theta = \cancel{\tfrac{1}{2}I\omega_f^2}^{\,0} - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$Trabajo = -\tfrac{1}{2}I\omega_o^2$$

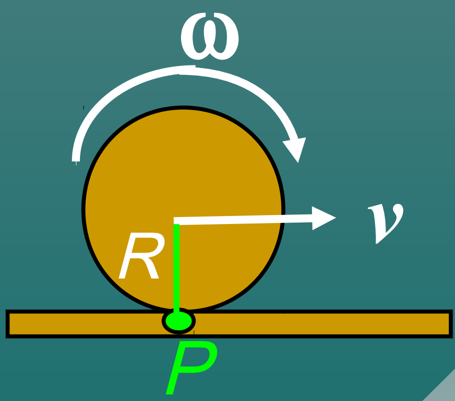
Trabajo = -½(0.36 kg m²)(60 rad/s)²

Trabajo = -648 J

Rotación y traslación combinadas



Primero considere un disco que se desliza sin fricción. La velocidad de cualquier parte es igual a la velocidad v_{cm} del centro de masa.



Ahora considere una bola que rueda sin deslizar. La velocidad angular ω en torno al punto P es igual que ω para el disco, así que se escribe:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

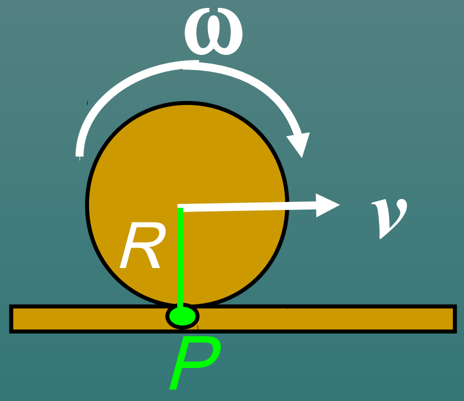
O

$$v = \omega R$$

Dos tipos de energía cinética

Energía cinética de traslación: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Energía cinética de rotación: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$



Energía cinética total de un objeto que rueda:

$$K_T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Conversiones angular/lineal

En muchas aplicaciones, debe resolver una ecuación con parámetros angulares y lineales. Es necesario recordar los puentes:

Desplazamiento:	$s = \theta R$	$\theta = \dfrac{s}{R}$
Velocidad:	$v = \omega R$	$\omega = \dfrac{v}{R}$
Aceleración:	$v = \alpha R$	$a = \dfrac{\alpha}{R}$

¿Traslación o rotación?

Si debe resolver un parámetro lineal, debe convertir todos los términos angulares a términos lineales:

$$\theta = \frac{s}{R} \qquad \omega = \frac{v}{R} \qquad a = \frac{\alpha}{R} \qquad I = (?)mR^2$$

Si debe resolver un parámetro angular, debe convertir todos los términos lineales a términos angulares:

$$s = \theta R \qquad v = \omega R \qquad v = \alpha R$$

Ejemplo (a): Encuentre la velocidad *v* de un disco dada su energía cinética total *E*.

$$\boxed{\text{Energía total: } E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2}$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2; \quad I = \tfrac{1}{2}mR^2; \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}m\cancel{R^2}\right)\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right); \qquad E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{4}mv^2$$

$$E = \frac{3mv^2}{4} \qquad \text{or} \qquad v = \sqrt{\frac{4E}{3m}}$$

McGraw Hill

Ejemplo (b) Encuentre la velocidad angular ω de un disco dada su energía cinética total *E*.

Energía total: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2; \quad I = \tfrac{1}{2}mR^2; \quad v = \omega R$$

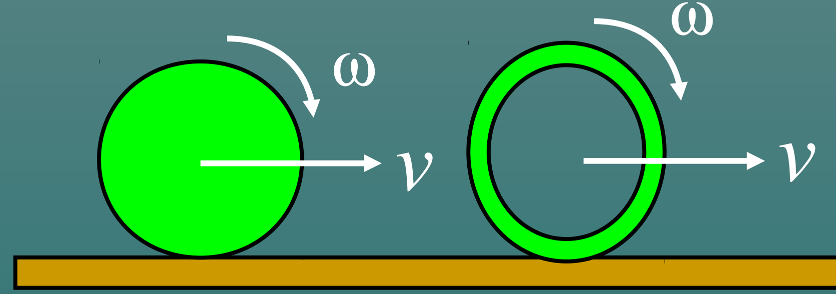
$$E = \tfrac{1}{2}m(\omega R)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}mR^2\right)\omega^2; \; E = \tfrac{1}{2}mR^2\omega^2 + \tfrac{1}{4}mR^2\omega^2$$

$$E = \frac{3mR^2\omega^2}{4} \qquad \text{or} \qquad \omega = \sqrt{\frac{4E}{3mR^2}}$$

Estrategia para problemas

- Dibuje y etiquete un bosquejo del problema.
- Mencione lo dado y establezca lo que debe encontrar.
- Escriba fórmulas para encontrar los momentos de inercia de cada cuerpo que rota.
- Recuerde conceptos involucrados (potencia, energía, trabajo, conservación, etc.) y escriba una ecuación que involucre la cantidad desconocida.
- Resuelva para la cantidad desconocida.

Ejemplo 5: Un aro y un disco circulares, cada uno con la misma masa y radio, ruedan con rapidez lineal v. Compare sus energías cinéticas.



Dos tipos de energía:

$K_T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$

$$\boxed{\text{Energía total: } E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

Disco: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\cancel{R^2}\right)\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$ $\boxed{E = \frac{3}{4}mv^2}$

Aro: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(m\cancel{R^2}\right)\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$ $\boxed{E = mv^2}$

Conservación de energía

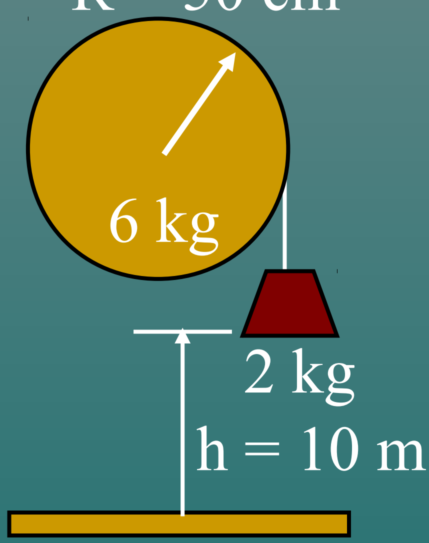
La energía total todavía se conserva para sistemas en rotación y traslación.

Sin embargo, ahora debe considerar la rotación.

Inicio: $(U + K_t + K_R)_o$ = Fin: $(U + K_t + K_R)_f$

¿Altura?	mgh_o		mgh_f	¿Altura?
¿Rotación?	$\frac{1}{2}I\omega_o^2$	=	$\frac{1}{2}I\omega_f^2$	¿Rotación?
¿Velocidad?	$\frac{1}{2}mv_o^2$		$\frac{1}{2}mv_f^2$	¿Velocidad?

Ejemplo 6: Encuentre la velocidad de la masa de 2 kg justo antes de golpear el suelo.



mgh_o		$\cancel{mgh_f}$
$\cancel{\tfrac{1}{2}I\omega_o^2}$	=	$\tfrac{1}{2}I\omega_f^2$
$\cancel{\tfrac{1}{2}mv_o^2}$		$\tfrac{1}{2}mv_f^2$

$$mgh_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad I = \tfrac{1}{2}MR^2$$

$$mgh_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}M\cancel{R^2})\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$$

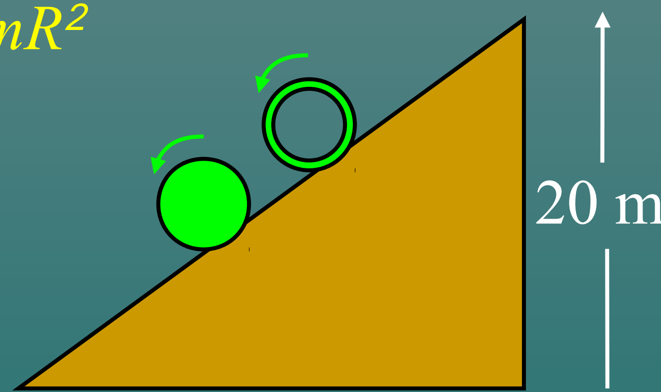
$$(2)(9.8)(10) = \tfrac{1}{2}(2)v^2 + \tfrac{1}{4}(6)v^2$$

$$2.5v^2 = 196 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\boxed{v = 8.85 \text{ m/s}}$$

Ejemplo 7: Un aro y un disco ruedan desde lo alto de un plano inclinado. ¿Cuáles son sus rapideces en el fondo si la altura inicial es 20 m?

$mgh_o = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$ *Aro:* $I = mR^2$



$$mgh_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(m\cancel{R^2})\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$$

$$mgh_o = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv^2; \quad \cancel{m}gh_o = \cancel{m}v^2$$

$$v = \sqrt{gh_0} = \sqrt{(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})}$$

Aro: $\boxed{v = 14\text{ m/s}}$

Disco: $I = \tfrac{1}{2}mR^2$; $mgh_o = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$

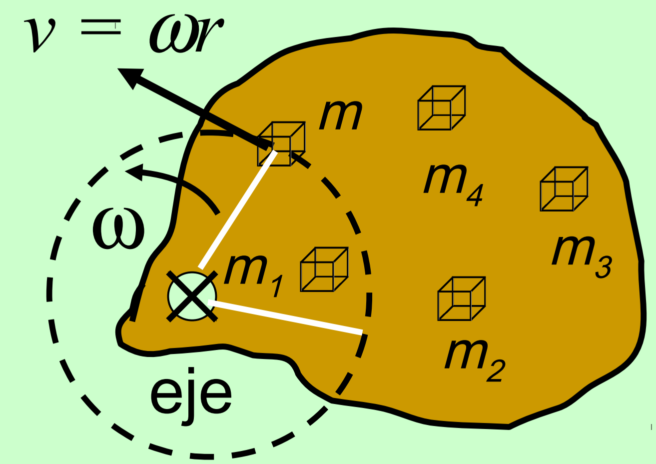
$$\cancel{m}gh_0 = \tfrac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\cancel{m}\cancel{R^2})\left(\frac{v^2}{\cancel{R^2}}\right)$$

$$v = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh_0}$$

$\boxed{v = 16.2\text{ m/s}}$

Definición de cantidad de movimiento angular

Considere una partícula *m* que se mueve con velocidad *v* en un círculo de radio *r*.



Objeto que rota con ω constante.

Defina cantidad de movimiento angular L:

$$\boxed{L = mvr}$$

Al sustituir $v = \omega r$, da:

$$L = m(\omega r)\, r = mr^2\omega$$

Para cuerpo extendido en rotación:

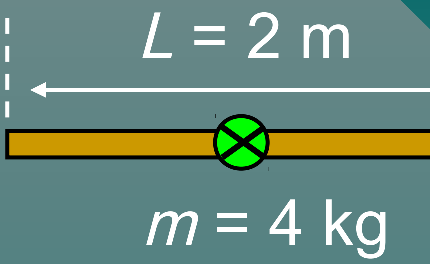
$$L = (\Sigma mr^2)\,\omega$$

Dado que $I = \Sigma mr^2$, se tiene:

$$\boxed{L = I\omega}$$

Cantidad de movimiento angular

Ejemplo 8: Encuentre la cantidad de movimiento angular de una barra delgada de 4 kg y 2 m de longitud si rota en torno a su punto medio con una rapidez de 300 rpm.



$$\text{Para barra}: I = \frac{1}{12} mL^2 = \frac{1}{12}(4\,\text{kg})(2\,\text{m})^2$$

$$\boxed{I = 1.33\ \text{kg m}^2}$$

$$\omega = \left(300\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right)\left(\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 31.4\ \text{rad/s}$$

$$L = I\omega = (1.33\ \text{kg m}^2)(31.4\ \text{rad/s})^2$$

$$\boxed{L = 1315\ \text{kg m}^2/\text{s}}$$

Impulso y cantidad de movimiento

Recuerde que, para movimiento lineal, el impulso lineal es igual al cambio en cantidad de movimiento lineal:

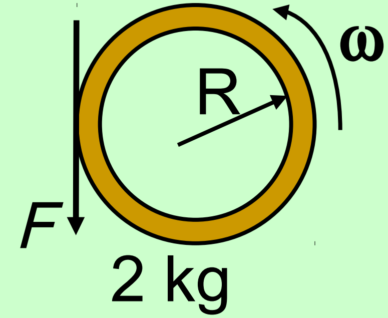
$$\boxed{F\,\Delta t = mv_f - mv_0}$$

Al usar analogías angulares, se encuentra que el impulso angular es igual al cambio en cantidad de movimiento angular :

$$\boxed{\tau\,\Delta t = I\omega_f - I\omega_0}$$

Ejemplo 9: Una fuerza de 200 N se aplica al borde de una rueda libre para girar. La fuerza actúa durante 0.002 s. ¿Cuál es la velocidad angular final?

$\Delta t = 0.002$ s



$\omega_o = 0$ rad/s

$R = 0.40$ m

$F = 200$ N

$I = mR^2 = (2 \text{ kg})(0.4 \text{ m})^2$

$I = 0.32 \text{ kg m}^2$

Momento de torsión aplicado $\tau = FR$

Impulso = cambio en cantidad de movimiento angular

$$\tau \, \Delta t = I\omega_f - \cancel{I\omega_o}^{\,0} \quad \Longrightarrow \quad FR\,\Delta t = I\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{FR\Delta t}{I} = \frac{(200 \text{ N})(0.4 \text{ m})(0.002 \text{ s})}{0.32 \text{ m}^2}$$

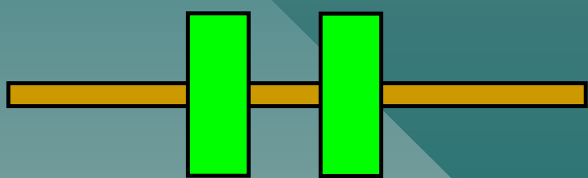
$\boxed{\omega_f = 0.5 \text{ rad/s}}$

Conservación de cantidad de movimiento

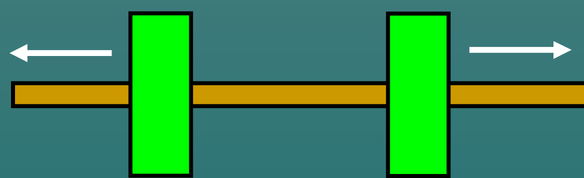
En ausencia de momento de torsión externo, se conserva la cantidad de movimiento rotacional de un sistema (es constante).

$$I_f\omega_f - I_o\omega_o = \cancelto{0}{\tau}\,\Delta t$$

$$\boxed{I_f\omega_f = I_o\omega_o}$$



$I_o = 2\ \text{kg m}^2$; $\boldsymbol{\omega}_o = 600$ rpm



$I_f = 6\ \text{kg m}^2$; $\boldsymbol{\omega}_o = ?$

$$\omega_f = \frac{I_0\omega_0}{I_f} = \frac{(2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(600\ \text{rpm})}{6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$\boxed{\omega_f = 200\ \text{rpm}}$$

Resumen – Analogías rotacionales

Cantidad	Lineal	Rotacional
Desplazamiento	Desplazamiento x	Radianes θ
Inercia	Masa (kg)	I (kg·m^2)
Fuerza	Newtons N	Momento de torsión N·m
Velocidad	$\vec{v}$ “m/s ”	$\vec{\omega}$ Rad/s
Aceleración	$\vec{a}$ “m/s^2 ”	$\vec{\alpha}$ Rad/s^2
Cantidad de movimiento	mv (kg m/s)	$I\omega$ (kg·m^2·rad/s)

Fórmulas análogas

Movimiento lineal	Movimiento rotacional
$F = ma$	$\tau = I\alpha$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$Trabajo = Fx$	$Trabajo = \tau\theta$
$Potencia = Fv$	$Potencia = I\omega$
$Fx = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$	$\tau\theta = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_o^2$

Resumen de fórmulas:

$$I = \Sigma mR^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

$$\text{Trabajo} = \tau\theta$$

$$I_o\omega_o = I_f\omega_f$$

$$\tau\theta = \tfrac{1}{2} I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_0^2$$

$$\text{Potencia} = \frac{\tau\theta}{t} = \tau\omega$$

¿Altura?	mgh_o		mgh_f	¿Altura?
¿Rotación?	$\tfrac{1}{2} I\omega_o^2$	=	$\tfrac{1}{2} I\omega_f^2$	¿Rotación?
¿Velocidad?	$\tfrac{1}{2} mv_o^2$		$\tfrac{1}{2} mv_f^2$	¿Velocidad?

CONCLUSIÓN: Capítulo 11B
Rotación de cuerpo rígido