Funciones vectoriales

Facultad de Ingeniería

Recorrido

Recorrido

Definición

Una **función con valores vectoriales** es una función del tipo

$$\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)).$$

Definición

Una **función con valores vectoriales** es una función del tipo

$$\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)).$$

Las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son las funciones componentes de la función $\mathbf{r}$ y cada una es una función escalar.

Definición

Una **función con valores vectoriales** es una función del tipo

$$\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)).$$

Las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son las funciones componentes de la función $\mathbf{r}$ y cada una es una función escalar. El dominio de $\mathbf{r}$ es la intersección de los dominios de las funciones componentes.

Definición

Una **función con valores vectoriales** es una función del tipo

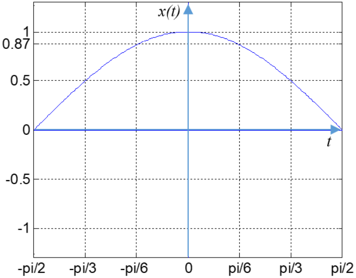
$$\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)).$$

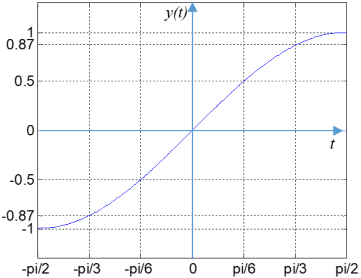
Las funciones $f_1, f_2, \cdots, f_n$ son las funciones componentes de la función $\mathbf{r}$ y cada una es una función escalar. El dominio de $\mathbf{r}$ es la intersección de los dominios de las funciones componentes.
Se llama curva al conjunto de puntos del plano o del espacio que son las imágenes de una función vectorial $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\operatorname{sen}(t)}_{y(t)}).$$

$$\mathbf{r} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{\operatorname{sen}(t)}_{y(t)}).$$

t	cos(t)	sen(t)
-pi/2	0,00	-1,00
-pi/3	0,50	-0,87
-pi/6	0,87	-0,50
0	1,00	0,00
pi/6	0,87	0,50
pi/3	0,50	0,87
pi/2	0,00	1,00



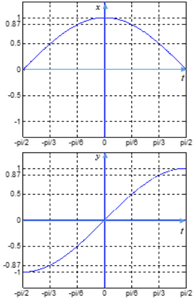


Funciones con valores vectoriales

Ejemplos

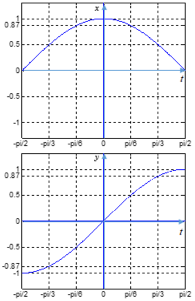
$$\mathbf{r} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

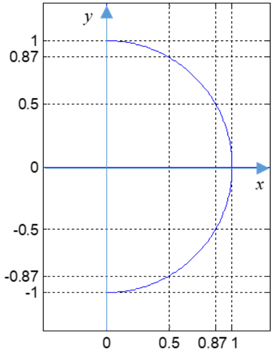
t	cos(t)	sen(t)
-pi/2	0,00	-1,00
-pi/3	0,50	-0,87
-pi/6	0,87	-0,50
0	1,00	0,00
pi/6	0,87	0,50
pi/3	0,50	0,87
pi/2	0,00	1,00

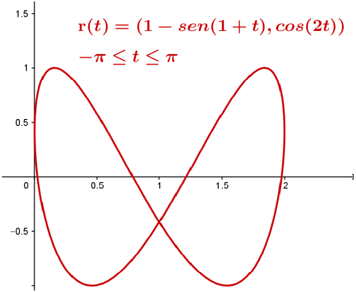


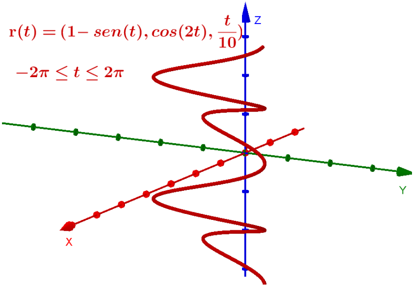
$$\mathbf{r} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \quad / \quad t \to \mathbf{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

t	cos(t)	sen(t)
-pi/2	0,00	-1,00
-pi/3	0,50	-0,87
-pi/6	0,87	-0,50
0	1,00	0,00
pi/6	0,87	0,50
pi/3	0,50	0,87
pi/2	0,00	1,00






$\mathbf{r}(t) = (1 - sen(1+t), cos(2t))$
$-\pi \leq t \leq \pi$
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


$\mathbf{r}(t) = (1 - sen(t), cos(2t), \frac{t}{10})$
$-2\pi \leq t \leq 2\pi$
Z
Y
X

Ejemplos de funciones vectoriales

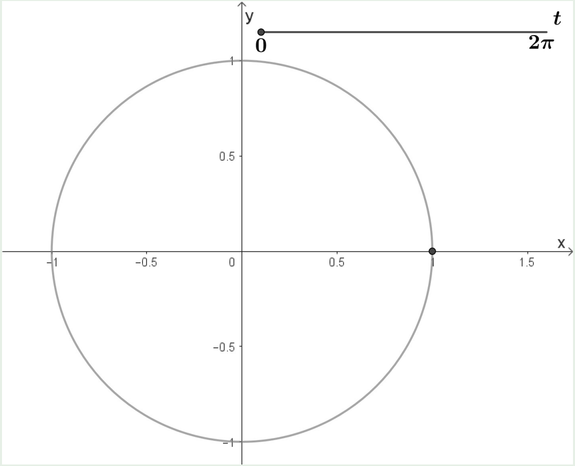
Ejemplo

1. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ejemplos de funciones vectoriales

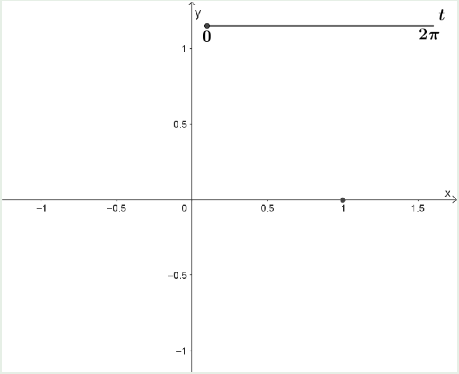
Ejemplo

1. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Ejemplo

1. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi]$.



Ejemplos de funciones vectoriales

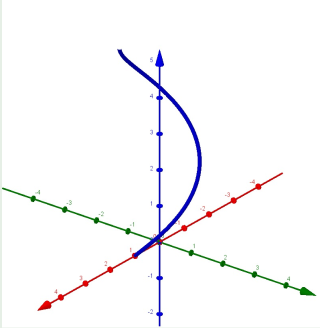
Ejemplo

2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ejemplos de funciones vectoriales

Ejemplo

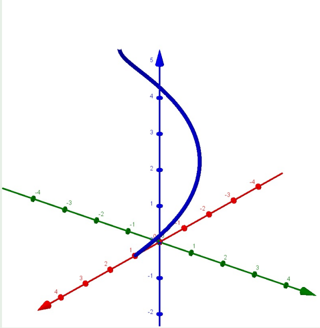
2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Ejemplos de funciones vectoriales

Ejemplo

2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

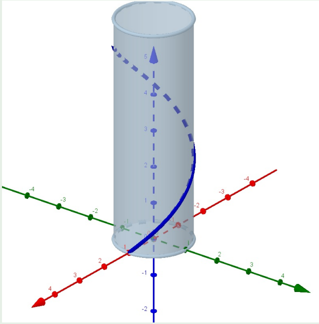


$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

Ejemplos de funciones vectoriales

Ejemplo

2. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),\ t \in [0, 2\pi]$.



$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

Ejemplos de funciones vectoriales

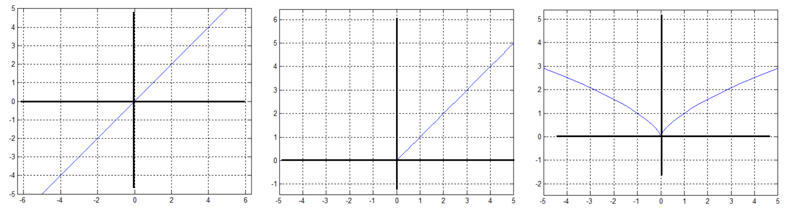
Ejemplo

3. $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de funciones vectoriales

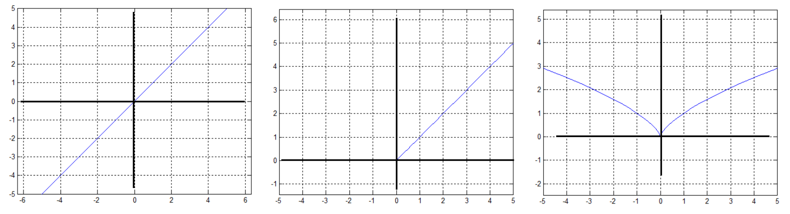
Ejemplo

3. $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.



Ejemplo

3. $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

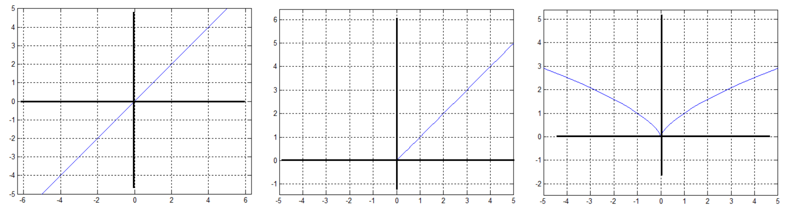


Observación: un mismo lugar geométrico puede corresponder a dos curvas distintas, provenientes de parametrizaciones distintas, $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$.

Ejemplos de funciones vectoriales

Ejemplo

3. $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.



Observación: un mismo lugar geométrico puede corresponder a dos curvas distintas, provenientes de parametrizaciones distintas, $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$.

TP 1 EJERCICIOS 1a(1-2-3) y 2ab.

Recorrido

Límite y continuidad

Definición

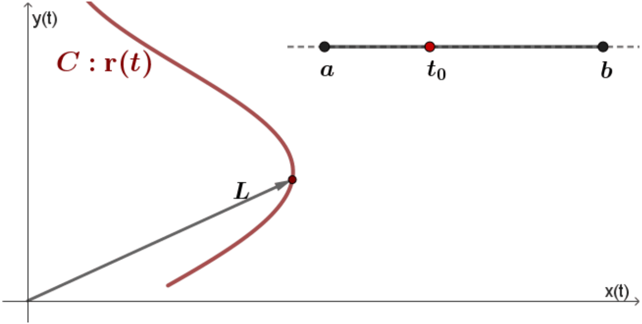
Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si los valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$ se aproximan al vector $\mathbf{L}$ cuando t tiende a t_0.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si los valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$ se aproximan al vector $\mathbf{L}$ cuando t tiende a t_0.



Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si los valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$ se aproximan al vector $\mathbf{L}$ cuando t tiende a t_0.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ *y* $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a, b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si los valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$ se aproximan al vector $\mathbf{L}$ cuando t tiende a t_0.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$, $t_0 \in [a, b]$ *y* $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$. *Entonces* $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ *si y solo si* $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, ..., n$.

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $t_0 \in [a,b]$ y $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$.
Entonces $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ si los valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$ se aproximan al vector $\mathbf{L}$ cuando t tiende a t_0.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$, $t_0 \in [a,b]$ *y* $\mathbf{L} = (L_1, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$. *Entonces* $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ *si y solo si* $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, ..., n$.

SIN DEMOSTRAR

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in [a, b]$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si y solo si f_i es continua en t_0, $i = 1, ..., n$.

Límite y continuidad

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in [a, b]$. Entonces $\mathbf{r}$ es continua en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in [a, b]$*. Entonces* $\mathbf{r}$ *es continua en* t_0 *si y solo si* f_i *es continua en* t_0*,* $i = 1, ..., n$*.*

DEMOSTRAR

Se debe demostrar dos implicaciones.

Límite y continuidad

DEMOSTRACIÓN (de una implicación):

Supongamos primero que $\mathbf{r} = (f_1, \cdots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0.

DEMOSTRACIÓN (de una implicación):
Supongamos primero que $\mathbf{r} = (f_1, \cdots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0.
Según la definición de continuidad, $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$, es decir que $\lim_{t \to t_0} (f_1(t), \cdots, f_n(t)) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$.

DEMOSTRACIÓN (de una implicación):

Supongamos primero que $\mathbf{r} = (f_1, \cdots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0.

Según la definición de continuidad, $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$, es decir que $\lim\limits_{t \to t_0} (f_1(t), \cdots, f_n(t)) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$. Por el teorema anterior, tenemos que $\lim\limits_{t \to t_0} (f_1(t), \cdots, f_n(t)) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim\limits_{t \to t_0} f_n(t) \right)$, de manera que $\left(\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim\limits_{t \to t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$.

DEMOSTRACIÓN (de una implicación):
Supongamos primero que $\mathbf{r} = (f_1, \cdots, f_n)$ es continua en $t_0 \in [a, b]$. Sea i un índice entre 1 y n y veamos que f_i es continua en t_0.
Según la definición de continuidad, $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$, es decir que $\lim\limits_{t \to t_0} (f_1(t), \cdots, f_n(t)) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$. Por el teorema anterior, tenemos que $\lim\limits_{t \to t_0} (f_1(t), \cdots, f_n(t)) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim\limits_{t \to t_0} f_n(t) \right)$, de manera que $\left(\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim\limits_{t \to t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$.
En particular, por igualdad de vectores, $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$, con lo cual f_i es continua en t_0.

DEMOSTRACIÓN (de la otra implicación):
Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes $f_1, \cdots, f_n$, son continuas en $t_0 \in [a, b]$. Debemos probar que $\mathbf{r}$ es continua en t_0, es decir que $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = r(t_0)$.

DEMOSTRACIÓN (de la otra implicación):
Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes $f_1, \cdots, f_n$, son continuas en $t_0 \in [a, b]$. Debemos probar que $\mathbf{r}$ es continua en t_0, es decir que $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = r(t_0)$.
Ahora bien, $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim\limits_{t \to t_0} f_n(t) \right)$ de acuerdo a la propiedad anterior; así

DEMOSTRACIÓN (de la otra implicación):
Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes $f_1, \cdots, f_n$, son continuas en $t_0 \in [a, b]$. Debemos probar que $\mathbf{r}$ es continua en t_0, es decir que $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = r(t_0)$.

Ahora bien, $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right)$ de acuerdo a la propiedad anterior; así

$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$, ya que cada una de las funciones f_i son continuas en t_0 por hipótesis;

DEMOSTRACIÓN (de la otra implicación):
Supongamos ahora que cada una de las funciones componentes $f_1, \cdots, f_n$, son continuas en $t_0 \in [a,b]$. Debemos probar que $\mathbf{r}$ es continua en t_0, es decir que $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = r(t_0)$.

Ahora bien, $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right)$ de acuerdo a la propiedad anterior; así
$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) = (f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0))$, ya que cada una de las funciones f_i son continuas en t_0 por hipótesis; pero $(f_1(t_0), \cdots, f_n(t_0)) = \mathbf{r}(t_0)$ y la prueba ha concluido.

Recorrido

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.
Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a,b)$.
Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

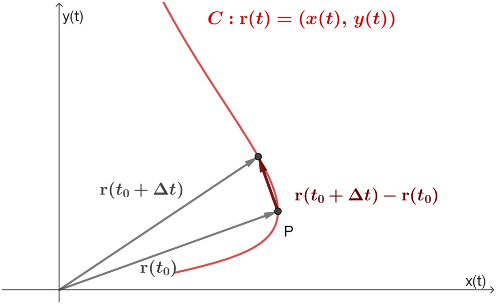
Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



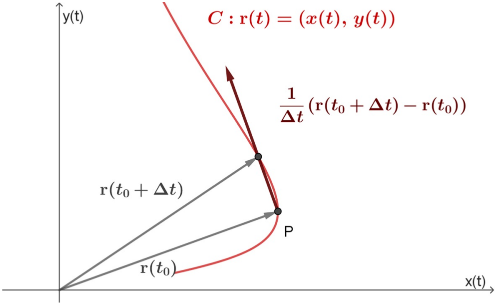
Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.
Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

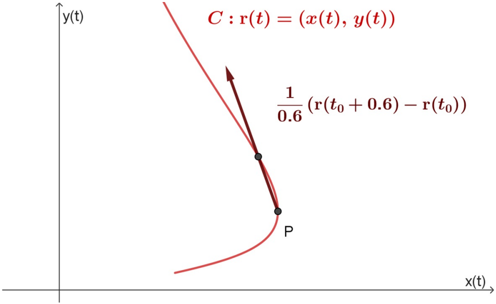


Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

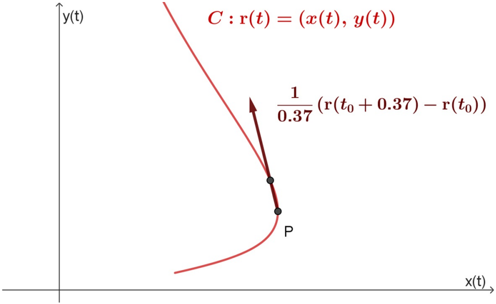


Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a,b)$. Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

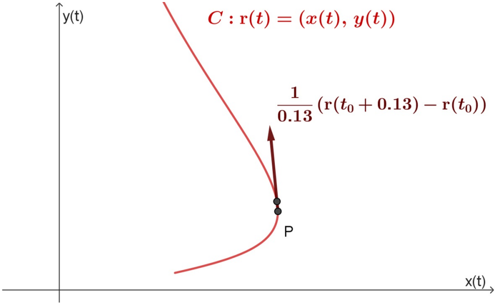


Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



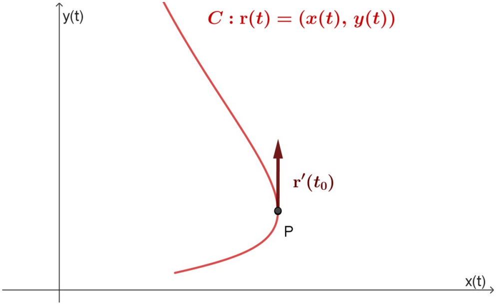
Derivación de funciones vectoriales

Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$. Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.

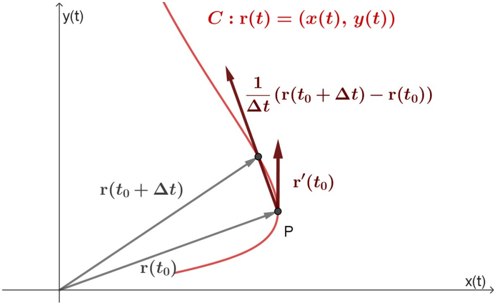


Definición

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial y $t_0 \in (a, b)$.
Se define la derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a t en t_0 por

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t},$$

si el límite existe.



Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{r}$ *es derivable en* t_0 *si y solo si cada una de las funciones componentes es derivable en* t_0 *y, en caso de serlo,* $\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{r}$ *es derivable en* t_0 *si y solo si cada una de las funciones componentes es derivable en* t_0 *y, en caso de serlo,* $\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

Observación: se puede definir $\mathbf{r}'(a)$ y $\mathbf{r}'(b)$ usando derivadas laterales, igual que en AM1.

Derivación de funciones vectoriales

Teorema

Supongamos que $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $\mathbf{r} = (f_1, ..., f_n)$ *y* $t_0 \in (a, b)$.
Entonces $\mathbf{r}$ *es derivable en* t_0 *si y solo si cada una de las funciones componentes es derivable en* t_0 *y, en caso de serlo,* $\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0))$.

Observación: se puede definir $\mathbf{r}'(a)$ y $\mathbf{r}'(b)$ usando derivadas laterales, igual que en AM1.
DEMOSTRACIÓN DEJADA COMO TAREA

DEMOSTRACIÓN (para controlar su tarea):

Primero veamos esta igualdad, que se obtiene aplicando propiedades ya vistas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f_1(t_0+\Delta t),\cdots,f_n(t_0+\Delta t))-(f_1(t_0),\cdots,f_n(t_0))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t},\cdots,\frac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t}\right) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t},\cdots,\lim_{\Delta t \to 0}\frac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN (para controlar su tarea):
Recordemos la igualdad anterior:

$$\mathbf{r}'(t_0) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t_0 + \Delta t) - f_1(t_0)}{\Delta t}, \cdots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_n(t_0 + \Delta t) - f_n(t_0)}{\Delta t} \right) \tag{1}$$

Probemos la primera implicación:
$\Rightarrow$) Si $\mathbf{r}$ es derivable en t_0, significa que $\mathbf{r}'(t_0)$ existe. Así, por (1), el vector

$$\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t_0 + \Delta t) - f_1(t_0)}{\Delta t}, \cdots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_n(t_0 + \Delta t) - f_n(t_0)}{\Delta t} \right)$$

existe, es decir que existe cada uno de los límites que son sus componentes. Por lo tanto, existe cada una de las derivadas $f_1'(t_0), \cdots, f_n'(t_0)$ y

$$\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), \cdots, f_n'(t_0)).$$

DEMOSTRACIÓN (para controlar su tarea):
Nuevamente nos apoyamos en la igualdad:

$$\mathbf{r}'(t_0) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t_0 + \Delta t) - f_1(t_0)}{\Delta t}, \cdots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_n(t_0 + \Delta t) - f_n(t_0)}{\Delta t} \right) \tag{1}$$

Probemos la segunda implicación:
$\Leftarrow$) Si cada una de las funciones componentes, $f_1, \cdots, f_n$, es derivable en t_0, entonces existe cada uno de los límites

$$f_1'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t_0 + \Delta t) - f_1(t_0)}{\Delta t}, \cdots, f_n'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_n(t_0 + \Delta t) - f_n(t_0)}{\Delta t}.$$

Luego, existe el vector

$$\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t_0 + \Delta t) - f_1(t_0)}{\Delta t}, \cdots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_n(t_0 + \Delta t) - f_n(t_0)}{\Delta t} \right)$$

y, según (1), existe $\mathbf{r}'(t_0)$ y es $\mathbf{r}'(t_0) = (f_1'(t_0), \cdots, f_n'(t_0))$.

Curva suave

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.

Curva suave

Definición

Una función vectorial $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$ es una curva suave si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a, b]$.
Por otra parte, se dice que $\mathbf{r}$ define una curva suave por partes si es la unión de un número finito de curvas suaves unidas de manera continua (por sus extremos).

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$;

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$;

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 3t^2)$;

Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 3t^2)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;

Curva suave

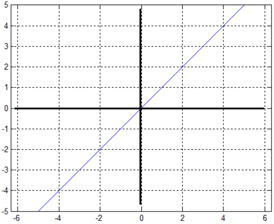
Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

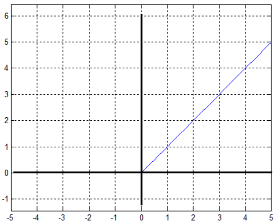
- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 3t^2)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 2t)$.

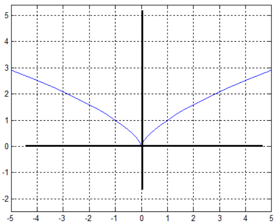
Curva suave

Ejemplos (analice si es suave cada una de las siguientes curvas)

- $\mathbf{r}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (1, 1)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 3t^2)$;
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$; $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 2t)$.







Vector tangente unitario

Definición

Dada $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$, se define

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

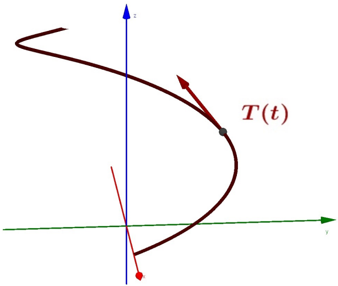
Vector tangente unitario

Definición

Dada $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$, se define

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.



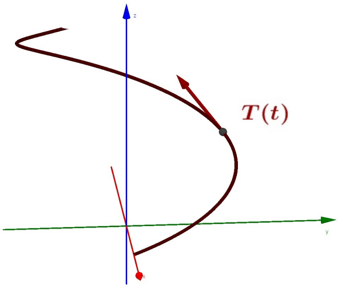
Vector tangente unitario

Definición

Dada $\mathbf{r}$ definida en $[a, b]$, se define

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.



Observación: ¿Qué pasaría si $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ para algún valor de t?

Interpretación física

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez$=\|\mathbf{v}\|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.
4. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, el vector unitario $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es la dirección del movimiento en el instante t. Este es el vector tangente unitario y se representa con

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Interpretación física

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez$=\|\mathbf{v}\|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.
4. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, el vector unitario $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es la dirección del movimiento en el instante t. Este es el vector tangente unitario y se representa con

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

TP 1 EJERCICIOS 3abc, para 1a(1-2-3).

Interpretación física

Si $\mathbf{r}$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez$=\|\mathbf{v}\|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.
4. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, el vector unitario $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es la dirección del movimiento en el instante t. Este es el vector tangente unitario y se representa con

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

TP 1 EJERCICIOS 3abc, para 1a(1-2-3).
ACTIVIDAD GRUPAL 1.

Reglas de derivación de funciones vectoriales

Reglas de derivación de funciones vectoriales: demostrar alguna en clase, todas en casa. La del producto vectorial está incompleta en el libro.

Reglas de derivación de funciones vectoriales

Reglas de derivación de funciones vectoriales: demostrar alguna en clase, todas en casa. La del producto vectorial está incompleta en el libro.

Teorema

Sean $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *funciones vectoriales derivables de* t, $\mathbf{C}$ *un vector constante,* c *un escalar y* f *una función escalar de una variable real derivable.*

Función constante	$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{0}$
Múltiplos escalares	$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$
	$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$
Suma y resta	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t)$
Producto punto	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$
Producto vectorial	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$
Regla de la cadena	$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t)] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

Demostración de la fórmula para derivada del producto vectorial

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ funciones vectoriales y probemos que $\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$.

Demostración de la fórmula para derivada del producto vectorial

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ funciones vectoriales y probemos que $\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] =& \frac{d}{dt}\left(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1\right) \\
=& \left(\frac{d}{dt}(u_2v_3 - u_3v_2), \frac{d}{dt}(u_3v_1 - u_1v_3), \frac{d}{dt}(u_1v_2 - u_2v_1)\right) \\
=& \big(u_2'v_3 + u_2v_3' - u_3'v_2 - u_3v_2', u_3'v_1 + u_3v_1' - u_1'v_3 - u_1v_3', \\
& \qquad u_1'v_2 + u_1v_2' - u_2'v_1 - u_2v_1'\big) \\
=& \big(u_2'v_3 - u_3'v_2, u_3'v_1 - u_1'v_3, u_1'v_2 - u_2'v_1\big) \\
& \qquad + \big(u_2v_3' - u_3v_2', u_3v_1' - u_1v_3', u_1v_2' - u_2v_1'\big) \\
=& \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'.
\end{aligned}$$

Funciones vectoriales de magnitud constante

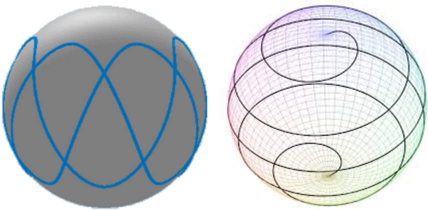
Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:
Si $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función de magnitud constante (i.e.* $|\mathbf{r}(t)| = cte$ *en* $[a,b]$*), entonces* $\mathbf{r}(t)$ *es ortogonal a* $\mathbf{r}'(t)$ *en todo* $t \in [a,b]$.

Funciones vectoriales de magnitud constante

Teorema

Funciones vectoriales de magnitud constante:
Si $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *es una función de magnitud constante (i.e.* $|\mathbf{r}(t)| = cte$ *en* $[a, b]$*), entonces* $\mathbf{r}(t)$ *es ortogonal a* $\mathbf{r}'(t)$ *en todo* $t \in [a, b]$.



DEMOSTRAR

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$.

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$.

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$.

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0 \\ 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0, \end{aligned}$$

Demostración:

Supongamos que la curva en cuestión está parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ y que $|\mathbf{r}(t)| = c$. Entonces, para cualquier $t \in [a, b]$, $|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$. Luego $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$. Así, aplicando la propiedad de derivada del producto escalar, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0 \\ 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son ortogonales para todo $t \in [a, b]$.

Recorrido

1. Funciones vectoriales
   - Funciones con valores vectoriales
   - Límite y continuidad
   - Derivación de funciones vectoriales
     - Curva suave
     - Vector tangente unitario
     - Propiedades
   - Integración de funciones vectoriales
   - Longitud de arco

Integración de funciones vectoriales

Definición

Una función vectorial derivable $\mathbf{R}$ es una **antiderivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ en un intervalo I si $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ para todo $t \in I$.

Integración de funciones vectoriales

Definición

Una función vectorial derivable $\mathbf{R}$ es una **antiderivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ en un intervalo I si $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ para todo $t \in I$.
La **integral indefinida** de $\mathbf{r}$ con respecto a t en I es el conjunto de todas las antiderivadas de $\mathbf{r}$ en I y se denota por $\displaystyle\int \mathbf{r}(t)dt$. Si $\mathbf{R}$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}$, entonces

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector constante arbitrario.

Integración de funciones vectoriales

Definición

Una función vectorial derivable $\mathbf{R}$ es una **antiderivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ en un intervalo I si $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ para todo $t \in I$.
La **integral indefinida** de $\mathbf{r}$ con respecto a t en I es el conjunto de todas las antiderivadas de $\mathbf{r}$ en I y se denota por $\int \mathbf{r}(t)dt$. Si $\mathbf{R}$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}$, entonces

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C},$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector constante arbitrario.
Si las funciones componentes de $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ son integrables en $[a, b]$, entonces $\mathbf{r}$ es **integrable** en $[a, b]$ y la **integral definida** de $\mathbf{r}$ en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt\right).$$

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = (\operatorname{sen} t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = (\operatorname{sen} t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\int_0^{\pi} \mathbf{r}(t) dt$.

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = (\operatorname{sen} t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathbf{r}(t) dt$.

$$\int_0^{\pi} (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = \left(\int_0^{\pi} \cos t\, dt, \int_0^{\pi} t^2\, dt, \int_0^{\pi} (e^t + 1)\, dt \right)$$

Integración de funciones vectoriales

Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = (\operatorname{sen} t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\displaystyle\int_0^\pi \mathbf{r}(t)dt$.

$$\int_0^\pi (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = \left(\int_0^\pi \cos t\, dt, \int_0^\pi t^2\, dt, \int_0^\pi (e^t + 1)\, dt \right)$$

$$= \left. (\operatorname{sen} t, \tfrac{t^3}{3}, e^t + t) \right|_0^\pi$$

Ejemplo: antiderivar $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t^2, e^t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\int (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = (\operatorname{sen} t, \frac{t^3}{3}, e^t + t) + (c_1, c_2, c_3).$$

Ejemplo: calcule $\displaystyle\int_0^\pi \mathbf{r}(t) dt$.

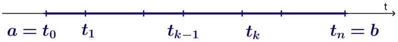
$$\int_0^\pi (\cos t, t^2, e^t + 1)\, dt = \left(\int_0^\pi \cos t\, dt, \int_0^\pi t^2\, dt, \int_0^\pi (e^t + 1)\, dt \right)$$

$$= (\operatorname{sen} t, \tfrac{t^3}{3}, e^t + t)\Big|_0^\pi = (0, \tfrac{\pi^3}{3}, e^\pi + \pi - 1).$$

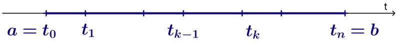
Recorrido

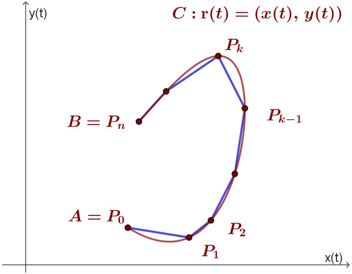
Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva suave C.



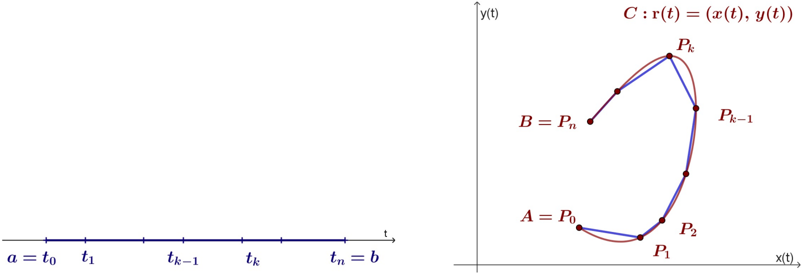
Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, parametriza la curva suave C.





Longitud de arco

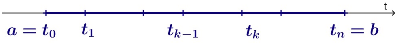
Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva suave C.

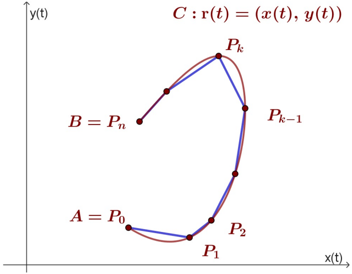


Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, induce una partición en C.

Longitud de arco

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva suave C.

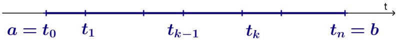


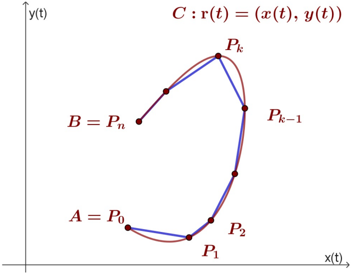


Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, induce una partición en C.

Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k.

Supongamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, parametriza la curva suave C.

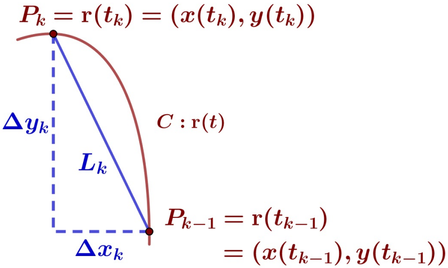




Una partición de $[a, b]$, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, induce una partición en C.
Asumiendo que el camino desde A hasta B se recorre una sola vez cuando t varía desde $t = a$ hasta $t = b$, sin volverse sobre sí mismo o retroceder, una aproximación a la longitud del arco AB es la suma de las longitudes L_k. Sumaremos las longitudes de los segmentos L_k, con extremos en los puntos $P_{k-1} = \mathbf{r}(t_{k-1})$ y $P_k = \mathbf{r}(t_k)$, para $k = 1, ..., n$.

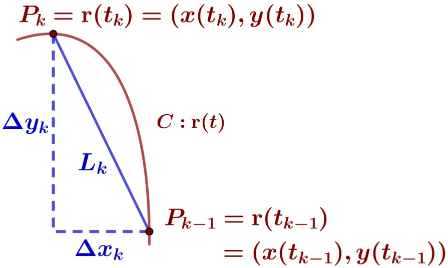
Longitud de arco

Se aproxima la longitud de cada subarco con la longitud del segmento L_k:



$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Se aproxima la longitud de cada subarco con la longitud del segmento L_k:



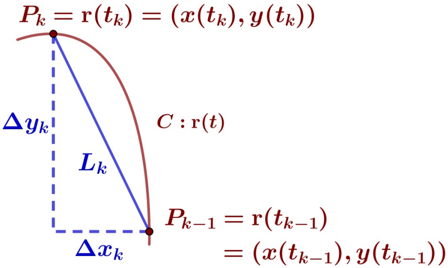
$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Si las funciones componentes de $\mathbf{r}$, $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen (cada) hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, entonces existen puntos t_k^* y t_k^{**} en (t_{k-1}, t_k) tales que

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = x'(t_k^*)\Delta t_k$$

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k^{**})(t_k - t_{k-1}) = y'(t_k^{**})\Delta t_k$$

Se aproxima la longitud de cada subarco con la longitud del segmento L_k:



$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Si las funciones componentes de $\mathbf{r}$, $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen (cada) hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, entonces existen puntos t_k^* y t_k^{**} en (t_{k-1}, t_k) tales que

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = x'(t_k^*)\Delta t_k$$

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k^{**})(t_k - t_{k-1}) = y'(t_k^{**})\Delta t_k$$

Así $\quad L_k = \sqrt{(x'(t_k^*)\Delta t_k)^2 + (y'(t_k^{**})\Delta t_k)^2}$

o sea $\quad L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\,\Delta t_k.$

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** L se aproxima por

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k.$$

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** L se aproxima por

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k.$$

Aunque esta no es una suma de Riemann, si las funciones x' y y' son continuas en $[a, b]$ (hipótesis: curva suave), el límite para $n \to \infty$ es la integral.

Longitud de arco

Ya que en cada subarco tenemos

$$L_k = \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k,$$

la longitud de arco de la curva **suave** L se aproxima por

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(t_k^*))^2 + (y'(t_k^{**}))^2}\ \Delta t_k.$$

Aunque esta no es una suma de Riemann, si las funciones x' y y' son continuas en $[a, b]$ (hipótesis: curva suave), el límite para $n \to \infty$ es la integral. Por esto:

Longitud de arco de una curva suave

La longitud de arco de una curva suave (plana o en el espacio) dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, que se recorre una vez cuando t crece de a a b, es

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Función longitud de arco

Definición

Dada una curva suave por $\mathbf{r}$, $a \leq t \leq b$, se define la función longitud de arco (con punto base $\mathbf{r}(a)$) para cada $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau.$$

Función longitud de arco

Definición

Dada una curva suave por $\mathbf{r}$, $a \leq t \leq b$, se define la función longitud de arco (con punto base $\mathbf{r}(a)$) para cada $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau.$$

Observación: debe notarse que por ser suave la curva se satisfacen las hipótesis del T.F. del cálculo. Luego se tiene que s es derivable en cada $t \in [a, b]$ y

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Además, $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$.
Por esto se anota (en la Unidad 4): $L = \int_C ds$.

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave?

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1),$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)| dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1),\ 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)|dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |\mathbf{r}'(\tau)|d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1),\ 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$

c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Longitud de arco y parametrización natural

Dada $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $1 \leq t \leq 3$, ¿es suave? $\mathbf{r}'(t) = (2t, 2t)$; $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2}t$.

a) hallar la longitud de arco desde $t = 1$ hasta $t = 3$:

$$L = \int_1^3 |\mathbf{r}'(t)|dt = 8\sqrt{2}.$$

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = 1$:

$$s(t) = \int_1^t |\mathbf{r}'(\tau)|d\tau = \sqrt{2}(t^2 - 1),\ 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$

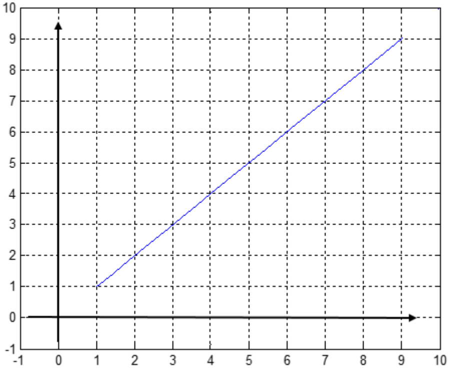
c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Despejando t en $s = \sqrt{2}(t^2 - 1)$ (lo cual es posible si $s(t)$ es biyectiva), la nueva parametrización es

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t(s)) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right),\ 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}$$

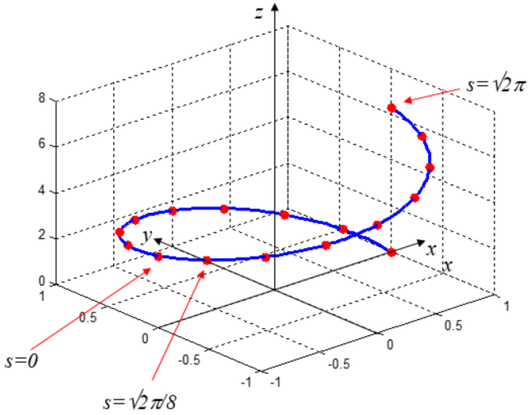
¿En qué difieren $\mathbf{r}$ y $\mathbf{u}$?

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2),\ 1 \leq t \leq 3,\ \text{y}\ \mathbf{u}(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1, \frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right),\ 0 \leq s \leq 8\sqrt{2}.$$



$$\begin{array}{lr} \mathbf{r}(1) = (1,1) & \mathbf{u}(0) = (1,1) \\ \mathbf{r}(2) = (4,4) & \mathbf{u}(\sqrt{2}) = (2,2) \\ \mathbf{r}(3) = (9,9) & \mathbf{u}(2\sqrt{2}) = (3,3) \end{array}$$

Parámetro longitud de arco: s



Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$:

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:

$$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau$$

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \displaystyle\int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \displaystyle\int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \displaystyle\int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right),$$

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \displaystyle\int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi), \operatorname{sen}(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi),$$

$$-\sqrt{2}\pi \leq s \leq \sqrt{2}\pi.$$

Parámetro longitud de arco: s

Dada $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

a) hallar la longitud de arco desde $t = \pi$ hasta $t = 2\pi$: $L = \sqrt{2}\pi$.

b) definir la función longitud de arco con punto inicial $t = \pi$:
$s(t) = \displaystyle\int_{\pi}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{2}(t - \pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) reparametrizar la curva dada por $\mathbf{r}$, usando como parámetro la longitud de arco; verificar.
Despejando en $s(t) = \sqrt{2}(t - \pi)$, tenemos $t = \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi$ y así:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right), \frac{s}{\sqrt{2}} + \pi\right),$$

$$-\sqrt{2}\pi \leq s \leq \sqrt{2}\pi.$$

Observación: el punto de la curva, $(-1, 0, \pi)$, corresponde a $\mathbf{r}(\pi)$ y a $\mathbf{u}(0)$.