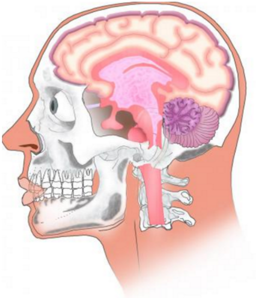
Funciones de varias variables

Facultad de Ingeniería

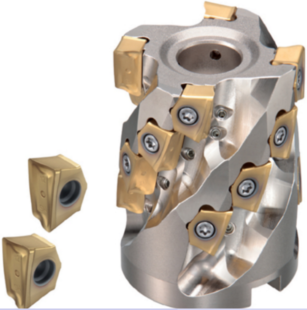
Recorrido

Recorrido

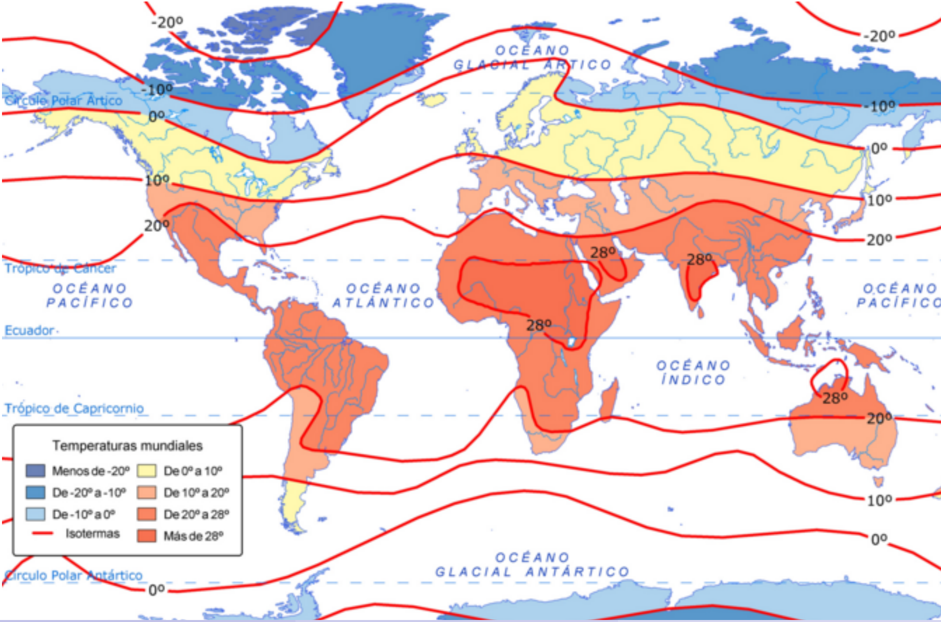
Ejemplos



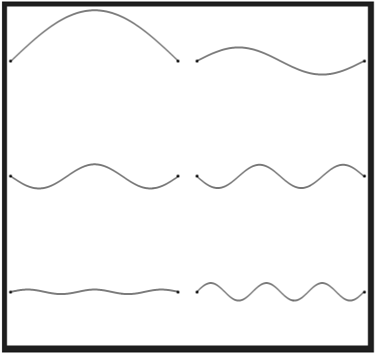

Densidad
Escaso
Fuerte
Alcoholes
Agua
Zumo de frutas
Bebidas muy
azucaradas



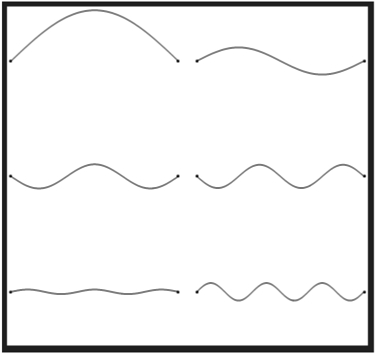
Ejemplos

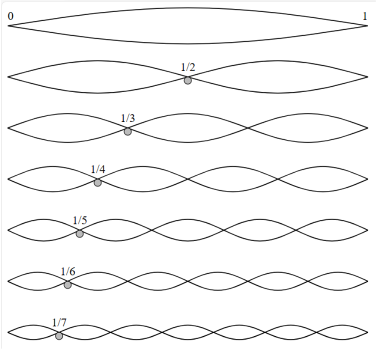

-20º
-10º
0º
10º
20º
28º
OCÉANO GLACIAL ÁRTICO
Círculo Polar Ártico
Trópico de Cáncer
OCÉANO PACÍFICO
OCÉANO ATLÁNTICO
Ecuador
OCÉANO ÍNDICO
Trópico de Capricornio
Temperaturas mundiales
Menos de -20º
De -20º a -10º
De -10º a 0º
Isotermas
De 0º a 10º
De 10º a 20º
De 20º a 28º
Más de 28º
Círculo Polar Antártico
OCÉANO GLACIAL ANTÁRTICO

Ejemplo: cuerda vibrante, armónicos

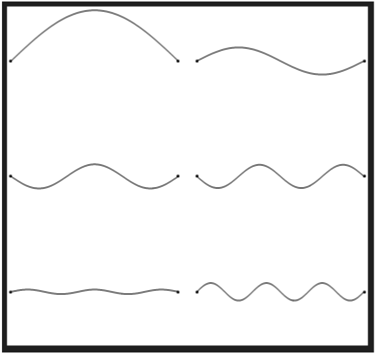


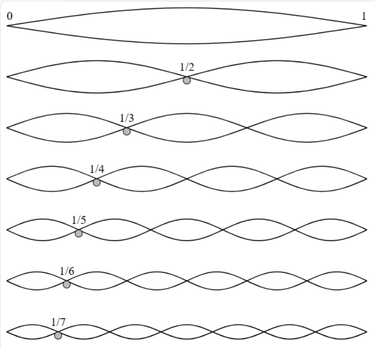
Ejemplo: cuerda vibrante, armónicos





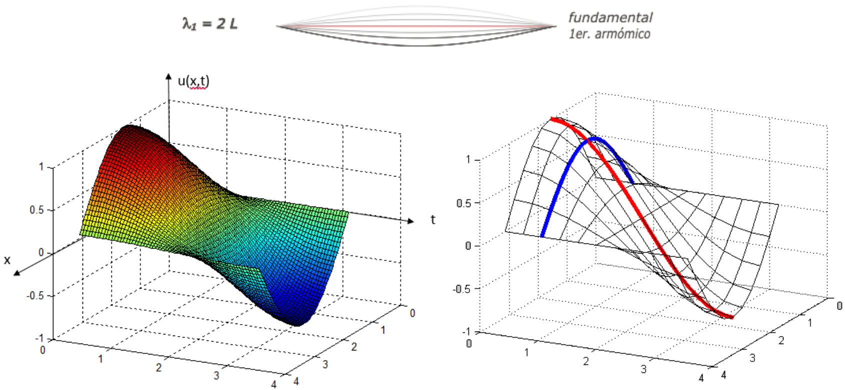
Ejemplo: cuerda vibrante, armónicos





Ondas estacionarias o modos normales de vibración; sus frecuencias se llaman armónicos.

Ejemplo: cuerda vibrante, primer armónico



Recorrido

1. Funciones de varias variables
   - Definiciones
   - Representaciones
2. Límites y continuidad en dimensiones superiores
3. Derivadas parciales
   - Introducción
   - Derivadas parciales de orden superior
4. Diferenciabilidad
5. Regla de la cadena
6. Derivada direccional y vector gradiente
   - Derivada direccional
   - Vector gradiente
   - Estimación del cambio en una dirección específica

Algunas definiciones

Definición

Una función de varias variables tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Algunas definiciones

Definición

Una función de varias variables tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el rango de la función.

Algunas definiciones

Definición

Una función de varias variables tiene su dominio D contenido en $\mathbb{R}^n$ y sus imágenes son números reales:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad / \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

El conjunto de valores reales w asignados por f es el rango de la función. Cada x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ es una variable independiente, mientras que w es variable dependiente.

Algunas definiciones

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

Algunas definiciones

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

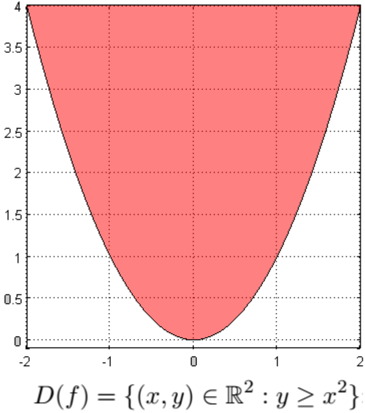
$$I(f) = [0, +\infty)$$

Algunas definiciones

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

$$I(f) = [0, +\infty)$$

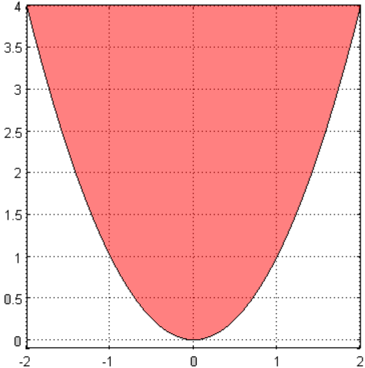


Algunas definiciones

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\};$$

$$I(f) = [0, +\infty)$$



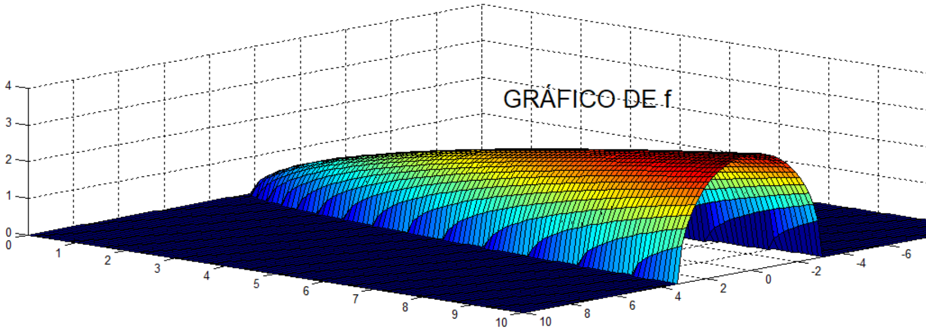
$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

$$g(x,y,z) = z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$D(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x \neq y\}$$

Ejemplo

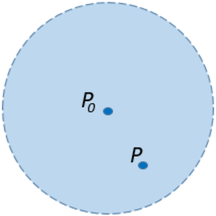
$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

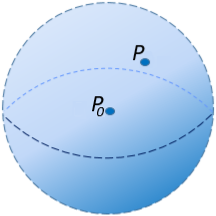


Llamamos bola (abierta) de centro $P_0(x_0, y_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$.

Llamamos bola (abierta) de centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y radio $r > 0$ al conjunto $\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$.

Un entorno abierto de P es una bola abierta de $\mathbb{R}^n$ que contiene a P.

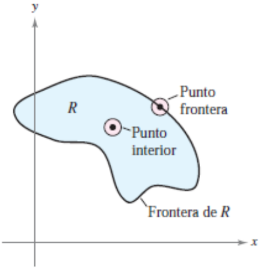




Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea P_0 un punto de $\mathbb{R}^n$ ($P_0(x_0, y_0)$ o $P_0(x_0, y_0, z_0)$).

P_0 es un punto interior de D si existe un entorno abierto (bola) de P_0 incluido en D.

P_0 es un punto frontera de D si para todo entorno abierto (bola) de P_0 hay puntos del entorno que pertenecen a D y hay puntos del entorno que no pertenecen a D. (No la definición del libro.)



La frontera y los puntos interiores de una región R

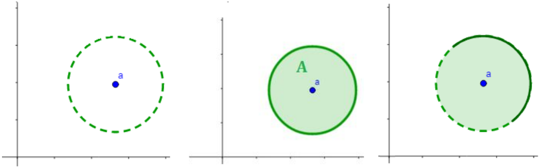
Conceptos topológicos

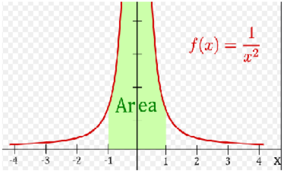
D es una región abierta si todo punto de D es un punto interior de D.

D es una región cerrada si todos los puntos frontera de D pertenecen a D.

D es una región acotada si existe una bola B tal que $D \subset B$.

D es una región no acotada si ninguna bola la incluye. (No la definición del libro.)





Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$;

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto,

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - x^2}}$ es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$)

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$)

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, no es cerrado y es acotado.

Un disco plano abierto incluido en el plano xy (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$)

Ejemplos

El dominio de la función dada por $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ es $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$; D no es abierto, es cerrado y no es acotado.

El dominio de la función dada por $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}$ es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$ y es abierto, no es cerrado y no es acotado.

El conjunto $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, es cerrado y no acotado.

Una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es abierto, no es cerrado y es acotado.

Un disco plano abierto incluido en el plano xy (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) no es abierto, no es cerrado y es acotado.

Recorrido

Definiciones de gráfica, conjuntos (curvas y superficies) de nivel y curvas de contorno

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

- **Gráfico de** f al conjunto
  $G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

Definiciones de gráfica, conjuntos (curvas y superficies) de nivel y curvas de contorno

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

- **Gráfico de** f al conjunto
  $G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

- **Conjunto de nivel** (k) de f al conjunto
  $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$. Si$D \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel suelen ser curvas; si $D \subset \mathbb{R}^3$, superficies.

Definiciones de gráfica, conjuntos (curvas y superficies) de nivel y curvas de contorno

Definición

Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, $(D \subset \mathbb{R}^n)$, se llama

- **Gráfico de** f al conjunto
  $G_f = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in D\}$.

- **Conjunto de nivel** (k) de f al conjunto
  $\{(x_1, ..., x_n) \in D : f(x_1, ..., x_n) = k\}$, para $k \in Im(f)$. Si$D \subset \mathbb{R}^2$, los conjuntos de nivel suelen ser curvas; si $D \subset \mathbb{R}^3$, superficies.

- **Curva de contorno** de f (definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$) al conjunto $\{(x_1, x_2, k) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2) = k\}$, para $k \in Im(f)$.

Representación de funciones de dos variables

$$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$$

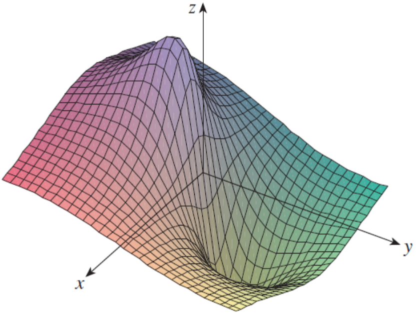
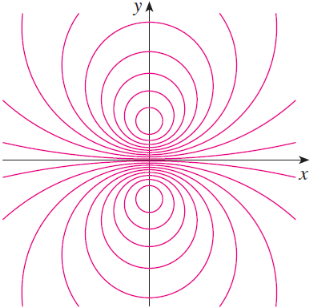


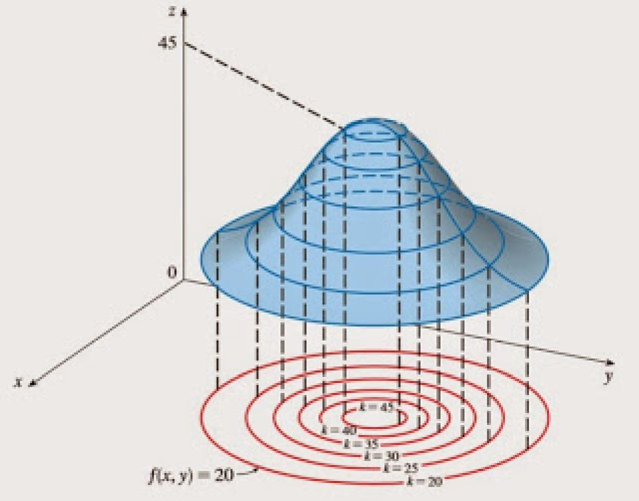
Gráfico de f



Curvas de nivel de f

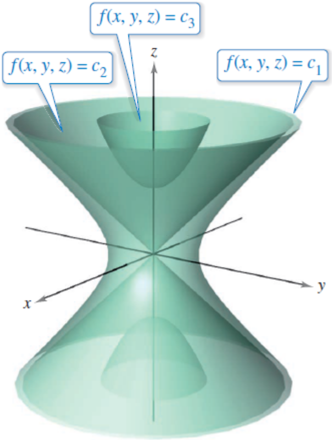
(Ejemplo de Stewart)

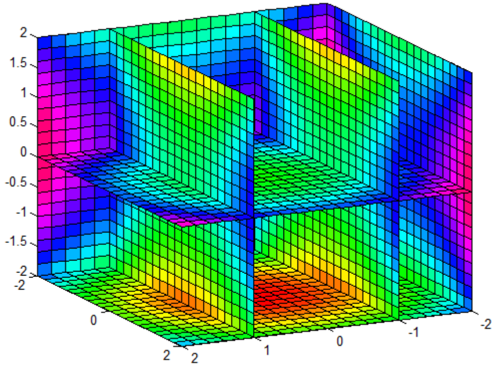
Curvas de contorno y curvas de nivel



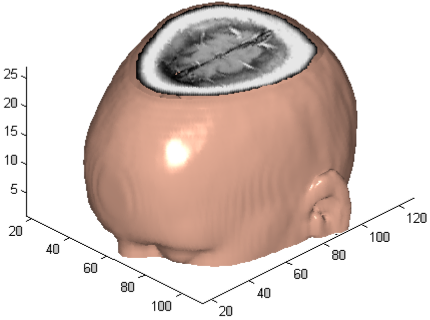
Representación de funciones de tres variables: superficies de nivel

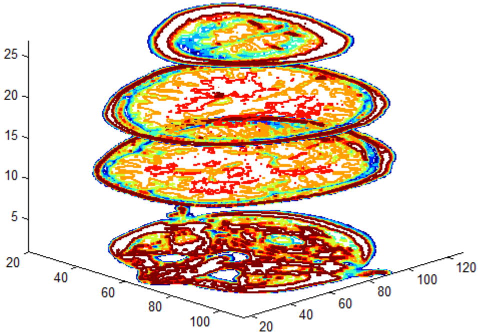
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$





Ejemplo: cerebro





Recorrido

Definición de límite

Definición

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^n$. Sean $P_0(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiende al límite L cuando P tiende a P_0, y escribimos

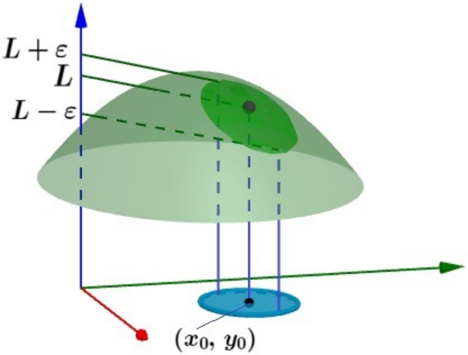
$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L,$$

si los valores $f(P)$ se acercan arbitrariamente a L cuando P se acerca suficientemente a P_0.

En $\mathbb{R}^2$: $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x, y)$;

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

si $f(x, y)$ toma valores arbitrariamente cercanos a L cuando consideramos todos los puntos (x, y) en un entorno de (x_0, y_0) de radio positivo, suficientemente pequeño.



Propiedades de límites de funciones de dos variables

Propiedad

Si L y M son números reales y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

entonces:

Propiedades de límites de funciones de dos variables

Propiedad

Si L y M son números reales y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M,$$

entonces:

1. *Suma y resta* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \pm g)(x,y) = L \pm M$
2. *Producto* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (fg)(x,y) = LM$
3. *Cociente* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{L}{M}$, *si* $M \neq 0$
4. *Potencia* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y))^n = L^n$, *si* $n \in \mathbb{N}$
5. *Raíz* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$, *si* $n \in \mathbb{N}$; *si* n, *par*, $L > 0$.

SIN DEMOSTRAR

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

Ejemplos: límites que existen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = -3$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} z\frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = 0
\end{aligned}$$

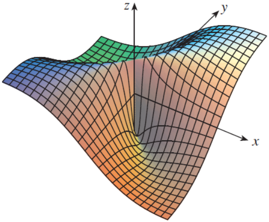
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0$$

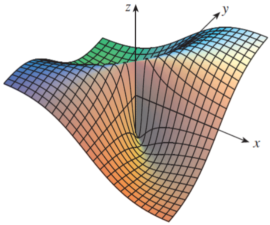


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

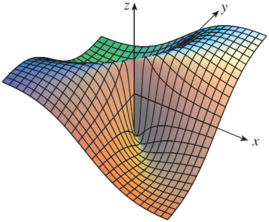


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ **no existe**

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



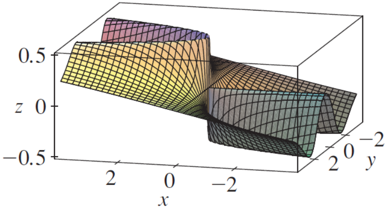
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;$$

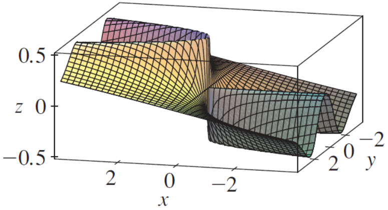


Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0) = 0;\ f(0,y) = 0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0;$$



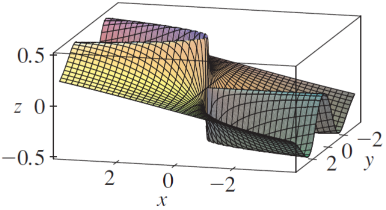
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;$$

$$f(x,mx)=\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4}=\frac{mx}{1+m^4x^2}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0;$$

$$f(y^2,y)=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$



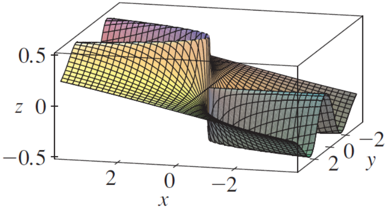
Ejemplos: criterio de dos trayectorias.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ **no existe**}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4};\ f(x,0)=0;\ f(0,y)=0;$$

$$f(x,mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{mx}{1+m^4x^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0;$$

$$f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}.$$



Continuidad

Definición

Una función f es continua en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0;
- existe $\lim_{P \to P_0} f(P)$ y
- $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D.

Continuidad

Definición

Una función f es continua en un punto P_0 si:

- f está definida en P_0;
- existe $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ y
- $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

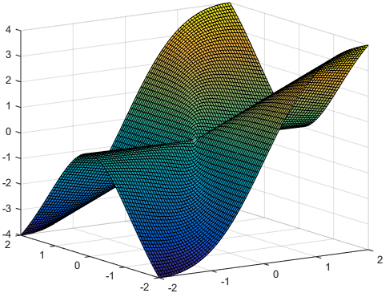
Una función f es continua en un conjunto D si es continua en todos los puntos de D.

Observación

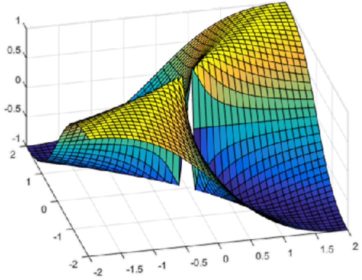
Los polinomios y las funciones racionales son continuos en los puntos de sus respectivos dominios.

Analizar ejemplos.

Continuidad: ejemplos



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Recorrido

Recorrido

Definición de derivada parcial ($D(f) \subset \mathbb{R}^2$)

Definición

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial ($D(f) \subset \mathbb{R}^2$)

Definición

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

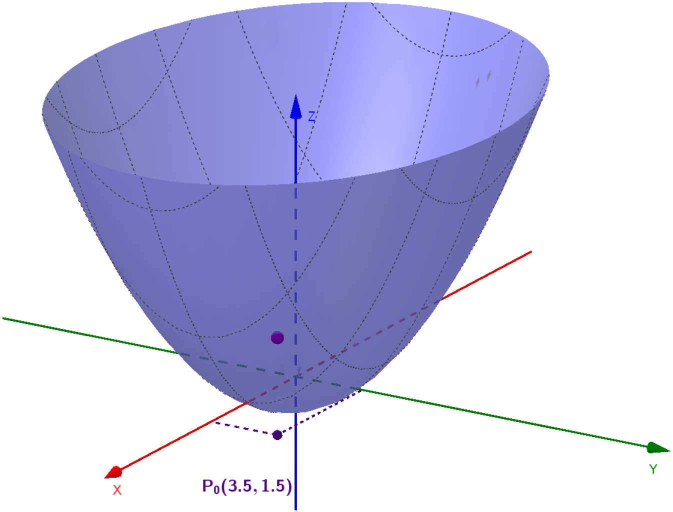
Definición

La derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es

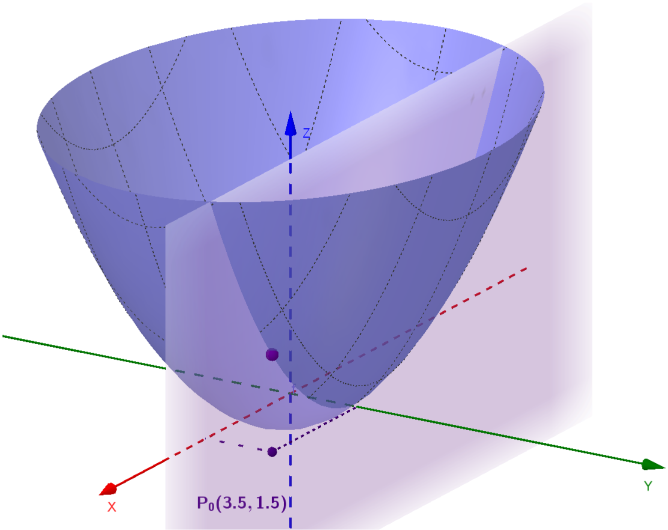
$$f_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

si tal límite existe.

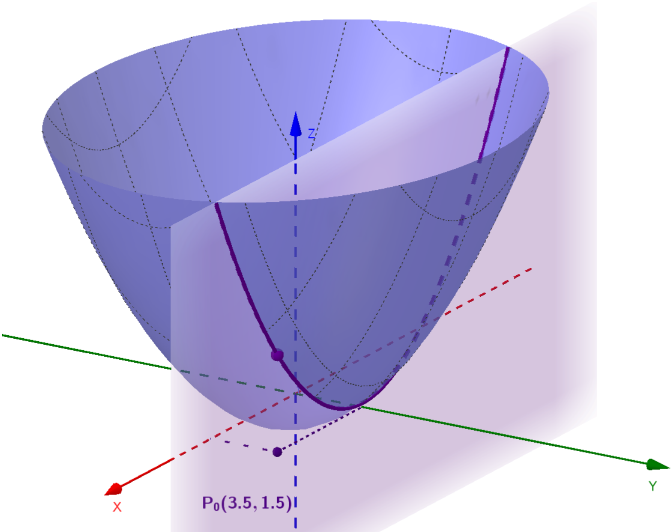
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



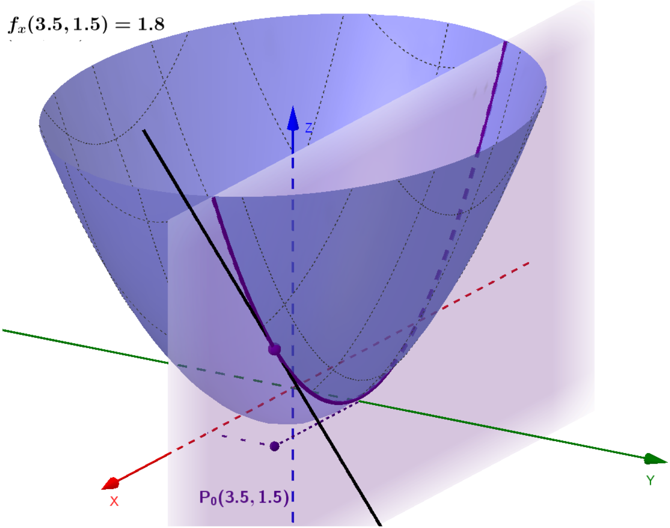
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



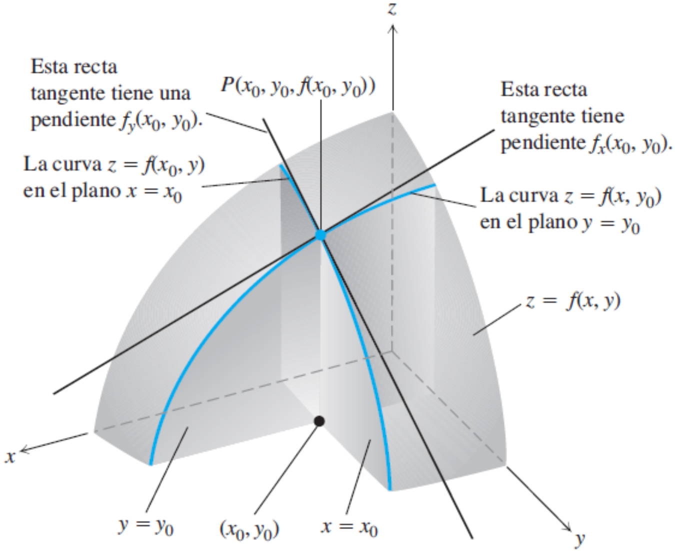
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



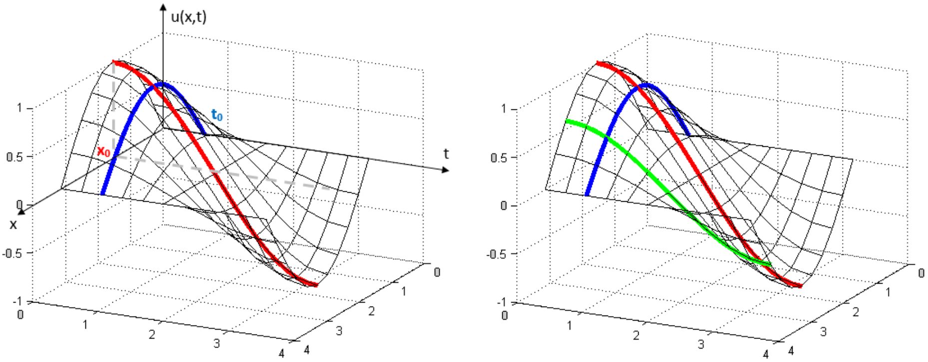
Interpretación geométrica de la derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Interpretación geométrica derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^2$)



Aplicación al caso de las ondas



¿Cómo se interpretan en este ejemplo las derivadas parciales de la función posición $u(x,t)$ de la partícula en la ubicación seleccionada, x_0, y en el instante elegido, t_0, con respecto a x y con respecto a t, respectivamente?

Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z.

Definición de derivada parcial ($D \subset \mathbb{R}^3$)

Definición

La derivada parcial de $f(x, y, z)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

si tal límite existe.

Similarmente se definen las derivadas parciales de una función de tres variables con respecto a y y a z.
En este caso la derivada se interpreta como la razón instantánea de cambio de la función en la dirección que corresponda (x, y o z).

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

Cálculo de derivadas parciales ($D \subset \mathbb{R}^n$)

Forma de calcular derivadas parciales

Para calcular la derivada parcial de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con respecto a una de sus variables, x_i, derivamos aplicando las reglas de derivación usuales, considerando a las otras variables como constantes.

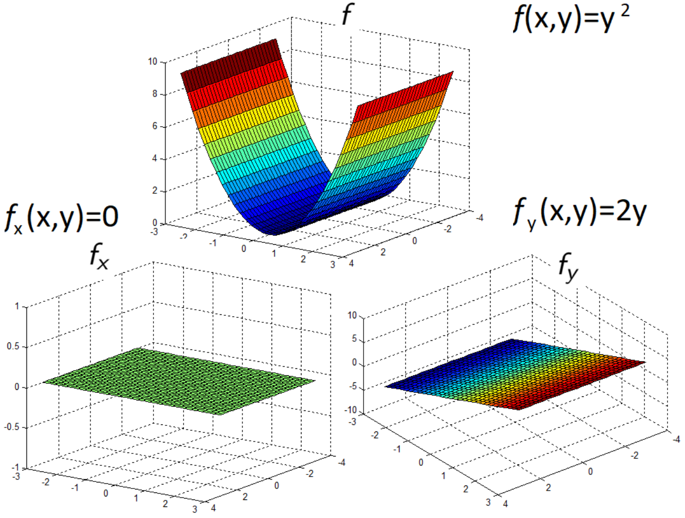
Ejemplo

Dada $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)y^2$, se tiene que

$$f_x(x, y) = \cos(x)y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \operatorname{sen}(x)2y.$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = y^2$. Halle $f_x(0,1)$. Halle f_x y f_y como funciones. Interprete los gráficos.

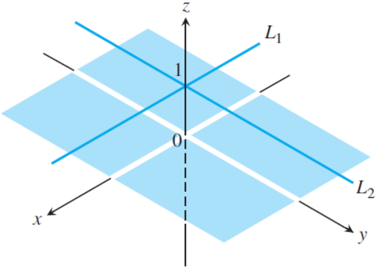


Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

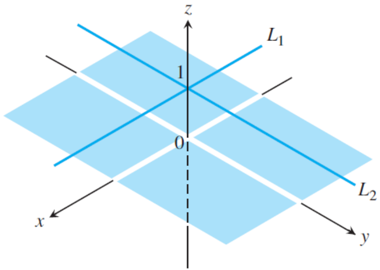


Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,

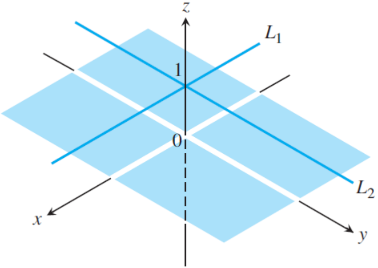


Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

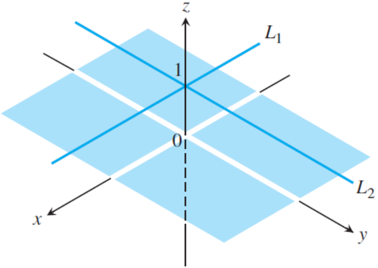
- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,



Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

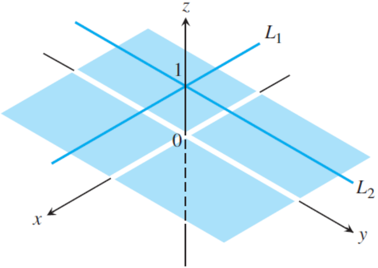


- No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

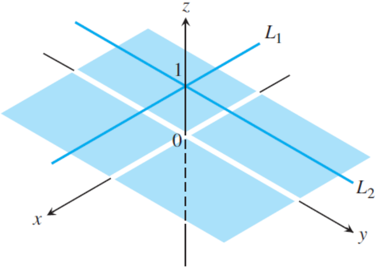
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$f_y(0,0) = 0.$$

Derivadas parciales y continuidad

Ejemplo (de Thomas): sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } xy \neq 0; \\ 1, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$



- No existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$,
- f no es continua en $(0,0)$,
- PERO existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0;$$

$$f_y(0,0) = 0.$$

Observación: la existencia de derivadas parciales en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto.

Recorrido

Notación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0) \quad = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f_{xy}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} \\
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 = f_y(0,0) \\
f_x(0,k) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2} - \frac{0}{k^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2k-k^3}{h^2+k^2} = -k
\end{aligned}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 = f_y(0,0)$$

$$\begin{aligned} f_x(0,k) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2} - \frac{0}{k^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2k-k^3}{h^2+k^2} = -k \end{aligned}$$

Ejemplos

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas de una función f no necesariamente coinciden: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ para la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

$$\begin{aligned} f_y(h,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2} - \frac{0}{h^2}}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2}\right) = \lim_{k\to 0} \frac{h^3-hk^2}{h^2+k^2} = h \end{aligned}$$

Teorema de Clairaut o de la derivada mixta

Teorema

Si f y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a, b) y todas son continuas en (a, b), entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

SIN DEMOSTRACIÓN.

Laplaciano

Definición

El Laplaciano de un campo escalar f es el campo escalar definido por

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \qquad \text{o} \qquad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Pierre-Simon Laplace

1749-1827

La **ecuación de Laplace** es $\Delta f = 0$; sus soluciones son las llamadas **funciones armónicas**. El Laplaciano aparece en ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos (como la ecuación del calor).

Ejemplo: si $f(x, y) = x^2 + y^3$, se tiene $\Delta f(x, y) = 2 + 6y$.

Recorrido

Diferenciabilidad

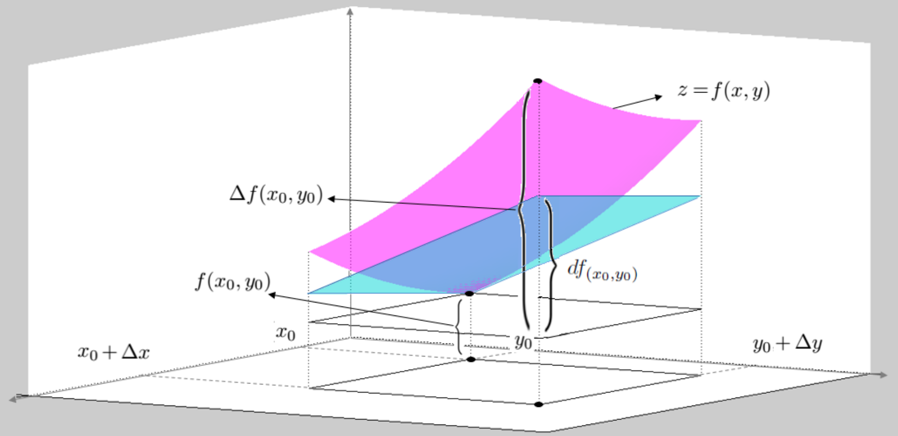
Definición

Una función f es diferenciable en un punto $P_0(x_0, y_0)$ (de su dominio) si existen $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ y si se cumple que el incremento $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ verifica:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ y $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Función diferenciable en (x_0, y_0).



Función diferenciable: definición

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y, para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio.

Función diferenciable: definición

La función $f(x,y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y, para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ un punto próximo a (x_0, y_0).

Función diferenciable: definición

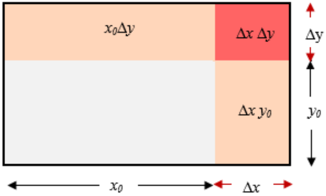
La función $f(x,y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y, para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ un punto próximo a (x_0, y_0).

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
f(x_0, y_0) &= x_0 y_0 \\
f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\
&= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

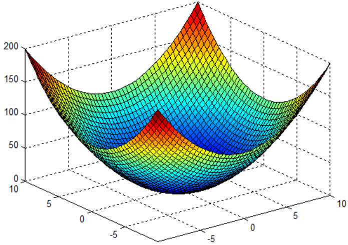
Función diferenciable: definición

La función $f(x, y) = xy$ da el área de un rectángulo de base x y altura y, para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Verifique que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) arbitrario de su dominio. Sea $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ un punto próximo a (x_0, y_0).

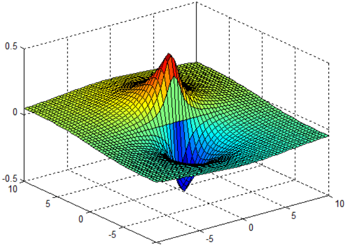
$$
\begin{aligned}
\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
f(x_0, y_0) &= x_0 y_0 \\
f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \\
&= x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \\
\Delta f(x_0, y_0) &= x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \underbrace{\Delta x \Delta y}_{¿\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y?}
\end{aligned}
$$



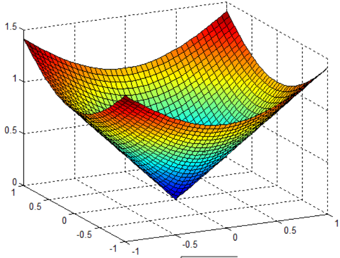
Ejemplos



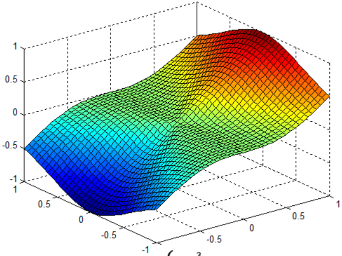
$f(x,y) = x^2 + y^2$



$$f(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$$



$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Teorema

Si una función f es diferenciable en un punto P_0 de su dominio, entonces es continua en P_0.

DEMOSTRAR (Idea incompleta de la demostración).

Diferenciabilidad implica continuidad

Teorema

Si una función f es diferenciable en un punto P_0 de su dominio, entonces es continua en P_0.

DEMOSTRAR (Idea incompleta de la demostración). Sea f diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$; basta probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = 0$ (¿Por qué?).

Si $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ y $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f(x_0,y_0)$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y)$$

Diferenciabilidad implica continuidad

Teorema

Si una función f es diferenciable en un punto P_0 de su dominio, entonces es continua en P_0.

DEMOSTRAR (Idea incompleta de la demostración). Sea f diferenciable en $P_0(x_0, y_0)$; basta probar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = 0$ (¿Por qué?).

Si $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ y $\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f(x_0,y_0)$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y)$$

Luego f es continua en (x_0, y_0).

Teorema del incremento: DEMOSTRAR

Teorema (Teorema del incremento)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Teorema del incremento: DEMOSTRAR

Teorema (Teorema del incremento)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Teorema (El mismo Teorema del incremento)

Suponga que las derivadas parciales de primer orden de f están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces el incremento en el valor de f, $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, en R, satisface una ecuación de la forma

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

en la cual las funciones $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ y $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ cumplen $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$ *y* $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0.$

Teorema del incremento: DEMOSTRAR

Cuenta con un video que contiene la demostración de este teorema:
https://youtu.be/tIDDeZxrB1s

Teorema del incremento: idea incompleta de la demostración

$$
\begin{aligned}
&\Delta f(x_0, y_0) = \\
&= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}_{\big\downarrow \text{TVM}} + \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}_{\big\downarrow \text{TVM}} \\
&= f_y(x_0 + \Delta x, d)\, \Delta y + f_x(c, y_0)\, \Delta x \\
&= f_x(c, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\, \Delta y \\
&= (f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1)\, \Delta x + (f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2)\, \Delta y
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0)$$

$$¿\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \underset{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0?$$

Ejemplos

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplos

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. $$g(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

   g es diferenciable en $(0,0)$ pero

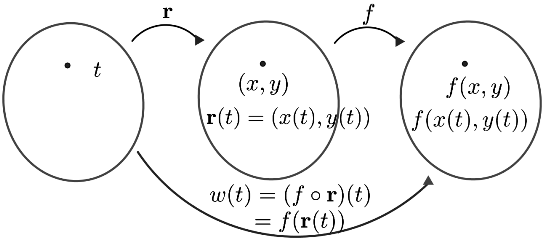
Ejemplos

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
   f_x y f_y existen y son continuas en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
   f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; f no es diferenciable en $(0,0)$.
2. $$g(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin(\frac{\pi}{x+y}) & \text{si } x+y\neq 0;\\ 0 & \text{si } x+y=0.\end{cases}$$

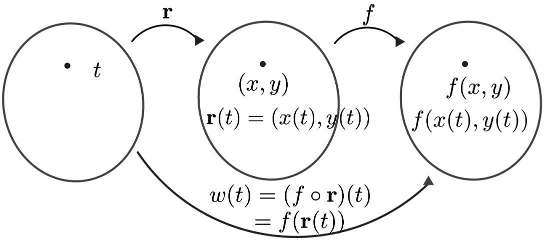
   g es diferenciable en $(0,0)$ pero g_x y g_y no son continuas en $(0,0)$. Ejemplifica que la recíproca de la implicación del Teorema del incremento puede ser falsa: no es necesario que las derivadas parciales de una función sean continuas en un punto para que la función sea diferenciable en dicho punto.

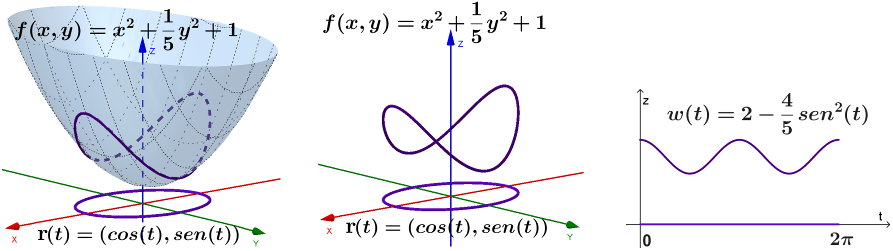
Recorrido

Regla de la cadena: Interpretación



Regla de la cadena: Interpretación





Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Este es el enunciado 2024)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función definida en $[a, b]$ tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en todo $t \in [a, b]$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable y

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Este es el enunciado 2024)

Sea f *una función definida y diferenciable en* $D \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *una función definida en* $[a, b]$ *tal que la imagen de* $\mathbf{r}$ *está incluida en* D *y tal que las funciones componentes* $x(t)$ *y* $y(t)$ *son derivables en todo* $t \in [a, b]$*. Entonces* $f \circ \mathbf{r}$ *es derivable y*

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in [a, b].$$

DEMOSTRAR (ver https://youtu.be/gmvvsiN9M2M)

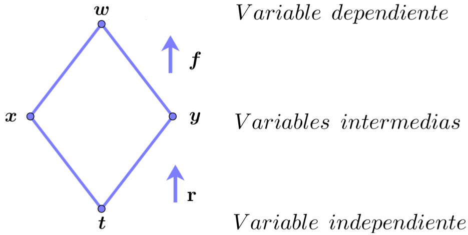
Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Este es el enunciado 2024)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ una función definida en $[a, b]$ tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$ son derivables en todo $t \in [a, b]$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable y

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in [a, b].$$

DEMOSTRAR (ver https://youtu.be/gmvvsiN9M2M)



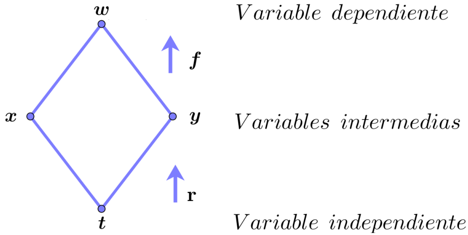
Regla de la cadena: Enunciado

Teorema (Este es el enunciado 2024)

Sea f *una función definida y diferenciable en* $D \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *una función definida en* $[a,b]$ *tal que la imagen de* $\mathbf{r}$ *está incluida en* D *y tal que las funciones componentes* $x(t)$ *y* $y(t)$ *son derivables en todo* $t \in [a,b]$*. Entonces* $f \circ \mathbf{r}$ *es derivable y*

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \text{ para todo } t \in [a,b].$$

DEMOSTRAR (ver https://youtu.be/gmvvsiN9M2M)



Usos y costumbres:

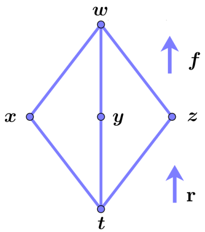
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Regla de la cadena: otros casos

Teorema (Este es el enunciado, no el del libro)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, una función de t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que $\mathbf{r}$ es derivable en $[a, b]$. Entonces $f \circ \mathbf{r}$ es derivable en $[a, b]$ y

$$\frac{d(f \circ \mathbf{r})}{dt}(t) = f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t).$$



SIN DEMOSTRAR

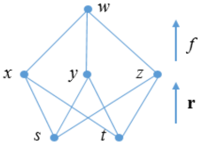
Regla de la cadena: otros casos

Teorema (Este es el enunciado, no el del libro)

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ una función de s y t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(s,t)$, $y(s,t)$ y $z(s,t)$ son diferenciables en (s,t). Si $w = f \circ \mathbf{r}$, entonces w es una función derivable con respecto a t y con respecto a s en (s,t) y

$$w_s(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))x_s(s,t)$$
$$+ f_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))y_s(s,t) + f_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))z_s(s,t);$$

$$w_t(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))x_t(s,t)$$
$$+ f_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))y_t(s,t) + f_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))z_t(s,t).$$



SIN DEMOSTRAR

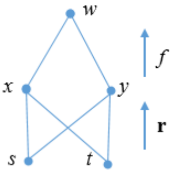
Regla de la cadena: otros casos

Teorema

Sea f una función definida y diferenciable en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$ una función de s y t tal que la imagen de $\mathbf{r}$ está incluida en D y tal que las funciones componentes $x(s,t)$ y $y(s,t)$ son diferenciables en (s,t). Si $w = f \circ \mathbf{r}$, entonces w es una función derivable con respecto a s y con respecto a t en (s,t) y

$$w_s(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t))x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t))y_s(s,t);$$

$$w_t(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t))x_t(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t))y_t(s,t);$$



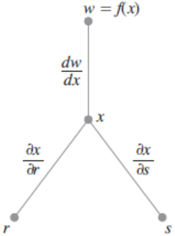
SIN DEMOSTRAR

Teorema

Sea f *una función definida y diferenciable en* $D \subset \mathbb{R}$ *y sea* $\mathbf{r}(s,t) = x(s,t)$ *una función de* s *y* t *tal que la imagen de* $\mathbf{r}$ *está incluida en* D *y tal que la función* $x(s,t)$ *es diferenciable en* (s,t). *Si* $w = f \circ \mathbf{r}$, *entonces* w *es una función derivable con respecto a* s *y con respecto a* t *en* (s,t) *y*

$$w_s(s,t) = f'(x(s,t))x_s(s,t); \qquad w_t(s,t) = f'(x(s,t))x_t(s,t).$$

SIN DEMOSTRAR



Derivación implícita

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Derivación implícita

Nota:

La derivación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias.

Ejemplo: (resistencias conectadas en paralelo). La resistencia total w, si se conectan en paralelo tres resistores de resistencias x, y y z, es

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Hallar $\partial w/\partial y$ cuando $x = 30\Omega$, $y = 45\Omega$ y $z = 90\Omega$.

$$-\frac{1}{w^2}\frac{\partial w}{\partial y} = 0 - \frac{1}{y^2} + 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(30, 45, 90) = \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}}\right)^2}{45^2}.$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y como función de x implícitamente por

$$\operatorname{sen} y = x^2 + y$$

podemos derivar implícitamente y obtener

$$y' = \frac{2x}{\cos y - 1}$$

Ejemplo para derivación implícita

Dada y como función de x implícitamente por

$$\operatorname{sen} y = x^2 + y$$

podemos derivar implícitamente y obtener

$$y' = \frac{2x}{\cos y - 1}$$

Si la función $y(x)$ se puede expresar implícitamente como $F(x, y) = 0$, podemos derivar parcialmente para obtener

$$0 = F_x(x, y) + F_y(x, y)y'(x)$$

de donde $y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ si $F_y \neq 0$.

Derivación implícita

Teorema

Supongamos que F *es una función de* x *y de* y*, y que las derivadas parciales* F_x *y* F_y *son continuas en una región abierta* $R \subset \mathbb{R}^2$ *que contiene al punto* (x_0, y_0)*, que* $F(x_0, y_0) = c$*, para alguna constante* c *y que* $F_y(x_0, y_0) \neq 0$*. Entonces la ecuación* $F(x, y) = c$ *define a* y *implícitamente como una función derivable de* x *en un entorno de* x_0 *y la derivada de esta función* y *está dada por*

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

SIN DEMOSTRACION COMPLETA. SOLO PROBAMOS LA FORMULA, BAJO SUPUESTOS.

Teorema

Si F es una función de tres variables y las derivadas parciales F_x, F_y y F_z son continuas en una región abierta $R \subset \mathbb{R}^3$ que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y si $F(x_0, y_0, z_0) = c$, para alguna constante c, y si $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función derivable de x y de y en un entorno de (x_0, y_0) y las derivadas parciales de esta función z están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}; \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

SIN DEMOSTRACION COMPLETA. SOLO PROBAMOS LA FORMULA, BAJO SUPUESTOS.

Si F es una función de tres variables y $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como función de x y de y, derivando impícitamente, $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$. Así, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$. Similarmente, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$.

Recorrido

Recorrido

Derivada direccional

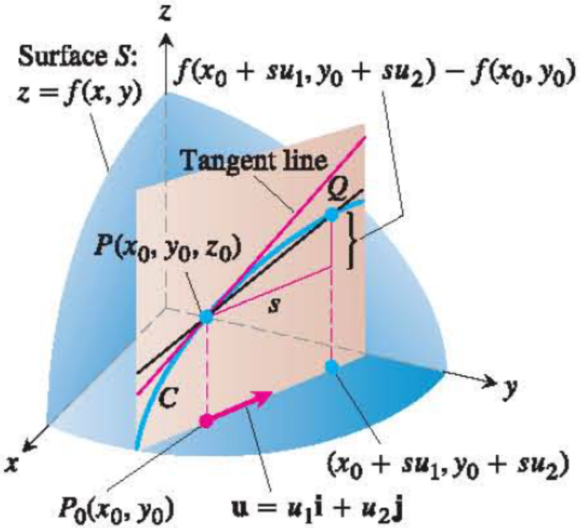
Definición

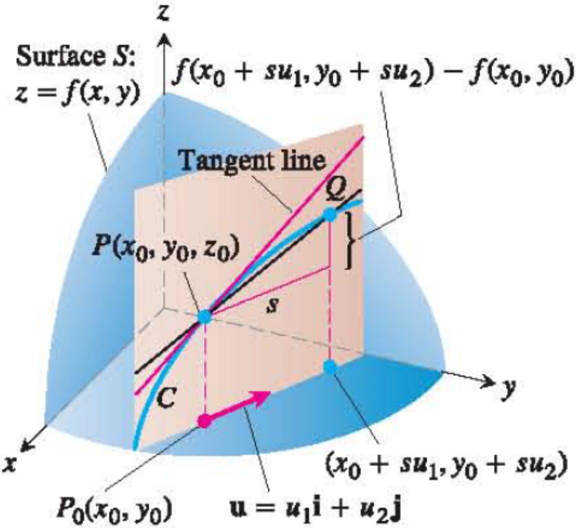
La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, en un punto $P(x_1, x_2) \in \operatorname{int} D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(P) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2) - f(x_1, x_2)}{h},$$

si el límite existe.

Derivada direccional





Interpretación como pendiente y como razón de cambio.

Derivada direccional

Definición

La derivada direccional de un campo escalar f con dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, en un punto $P(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{int} D$, viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(P) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, x_2 + hu_2, x_3 + hu_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h},$$

si el límite existe.

Interpretación como razón de cambio.

Recorrido

Vector gradiente

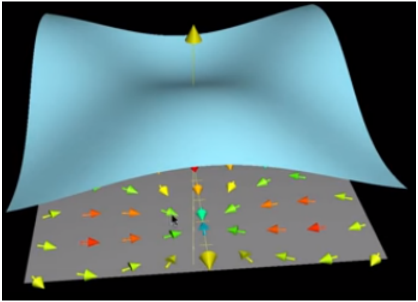
Definición

El gradiente de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0, si existen. Se denota por ∇f.

Vector gradiente

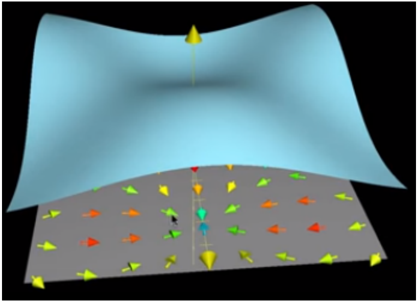
Definición

El gradiente de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0, si existen. Se denota por ∇f.



Definición

El gradiente de una función f en un punto P_0 de su dominio es el vector formado por las derivadas parciales de f en P_0, si existen. Se denota por ∇f.



Otro ejemplo:
$f(x, y) = x^2 + y^3$,
$\nabla f(x, y) = (2x, 3y^2)$.

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Sean f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en un punto P, y $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

Derivada direccional: fórmula de cálculo

Teorema (La derivada direccional como producto escalar)

Sean f un campo escalar definido en $D \subset \mathbb{R}^n$, diferenciable en un punto P, y $\mathbf{u}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}.$$

DEMOSTRAR

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(P) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\mathbf{u}) - f(P)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{r}(h)) - f(\mathbf{r}(0))}{h} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \mathbf{r})\Big|_{t=0} \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) \\ &= \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}(t) = P + t\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R};\ \mathbf{r}'(t) = \mathbf{u}$$

Propiedad

La derivada direccional de una función f *en un punto* P*, en que* f *es diferenciable, es máxima cuando* $\mathbf{u}$ *es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.*

DEMOSTRAR

Propiedad

La derivada direccional de una función f en un punto P, en que f es diferenciable, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Vector gradiente y derivada direccional

Propiedad

La derivada direccional de una función f en un punto P, en que f es diferenciable, es máxima cuando $\mathbf{u}$ es un múltiplo positivo del gradiente en el punto.

DEMOSTRAR

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \|\nabla f(P)\| \|\mathbf{u}\| \cos(\alpha) = \|\nabla f(P)\| \cos(\alpha),$$

máxima cuando $\alpha = 0$.

Conclusión

El vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función.

Gradiente y dirección de máximo crecimiento

Ver gif.

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRAR:

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRAR:

Digamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, parametriza una curva de nivel de f que pasa por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t)$$

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

DEMOSTRAR:

Digamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, parametriza una curva de nivel de f que pasa por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

El vector gradiente es normal a la superficie o curva de nivel en cada punto

Teorema

Si f es una función diferenciable de dos variables, el gradiente de f en un punto $P \in D(f)$ es normal a la curva de nivel de f que pasa por P.

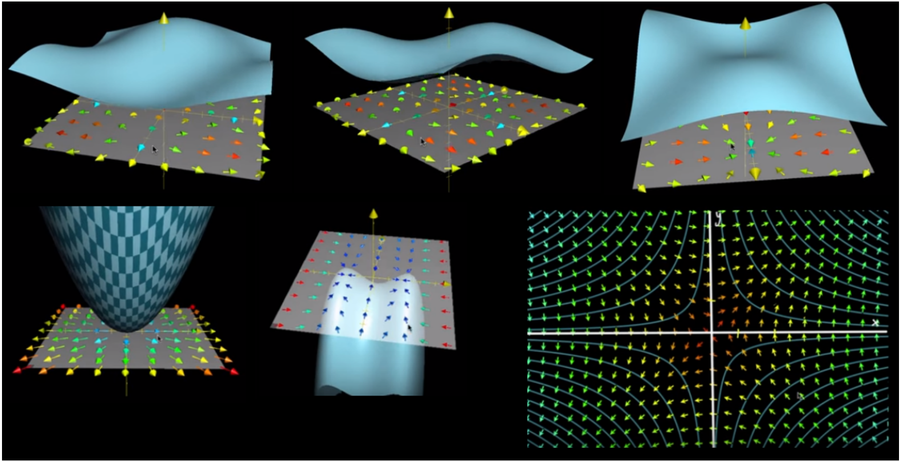
DEMOSTRAR:

Digamos que $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, parametriza una curva de nivel de f que pasa por un punto P_0 del dominio de f. Supongamos que $\mathbf{r}(t_0) = P_0$. Por tratarse de una curva de nivel, para todo $t \in I$, $f(\mathbf{r}(t)) = c$ (c es un valor constante). Derivando,

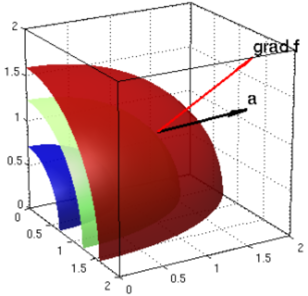
$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{r})(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

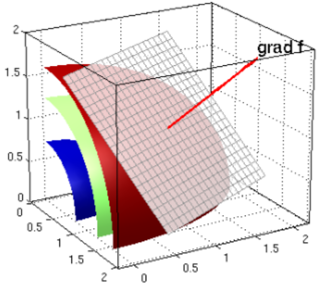
En particular, $\nabla f(P_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, que es tangente a la curva de nivel; luego, $\nabla f(P_0)$ es normal a la curva de nivel en P_0.

Vector gradiente, algunos gráficos de funciones de dos variables



Vector gradiente, función de tres variables





Superficies de nivel.

Propiedades algebraicas del vector gradiente

Propiedad (Propiedades algebraicas del vector gradiente)

Dadas dos funciones f y g cuyos vectores gradientes estén definidos en un punto $P \in D(f) \cap D(g)$, entonces en P se tiene

1. *Suma y resta* $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$
2. *Producto* $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
3. *Cociente* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$, *si* $g(P) \neq 0$.

DEMOSTRAR: TAREA

Recorrido

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f diferenciable en (a, b). Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h} = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u}$$

Si $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h} \approx \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u}$$

$$f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b) \approx (\nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a,b) \approx (\nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u})h.$$

Estimación del cambio en una dirección específica

Sea f diferenciable en (a,b). Entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b)}{h} = \nabla f(a,b)\cdot\mathbf{u}$$

Si $h\neq 0$:

$$\frac{f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b)}{h} \approx \nabla f(a,b)\cdot\mathbf{u}$$

$$f(a+hu_1,b+hu_2)-f(a,b) \approx (\nabla f(a,b)\cdot\mathbf{u})h$$

$$\Delta f(a,b) \approx (\nabla f(a,b)\cdot\mathbf{u})h.$$

Ejemplo:
Aproxime el cambio en el valor de $f(x,y) = 6x^2-2x^3+6xy+3y^2$ cuando se mueve del punto $(1,0)$ una distancia de $0,1$ en la dirección de $\mathbf{u} = (\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
Rta: $\Delta f(1,0) \simeq 0,84$.