FACULTAD DE INGENIERÍA UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Análisis Matemático II

TP2: Ejercicio 30

Sabemos que

$$f(x,y,z) = 2ye^{x} - \ln z$$

$$x(t) = \ln(t^2 + 1)$$

$$y(t) = \arctan(t)$$

$$z(t) = e^{t}$$

$$w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

Para encontrar ***dw/dt*** aplicando regla de la cadena planteamos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (1)$$

Calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ye^{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{z}$$

Las reescribimos en función de t:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\arctan(t)e^{\ln(t^2+1)} = 2(t^2+1)\arctan(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(t^2+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{e^{t}} = -e^{-t}$$

Ahora calculamos las derivadas totales de las variables intermedias x(t), y(t), z(t):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\frac{dz}{dt} = e^t$$

Reemplazamos todas las derivadas en la expresión (1):

$$\frac{dw}{dt} = 4t.\arctan(t) + 2(t^2 + 1).\frac{1}{(t^2 + 1)} - e^{-t}e^t = 2t\arctan(t) + 2 - 1$$

$$\frac{dw}{dt} = 4t\arctan(t) + 1$$

Evaluamos en t=1

$$\frac{dw}{dt} = 4\frac{\pi}{2} + 1 = 2\pi + 1$$

Ahora expresemos w en términos de t y derivemos directamente respecto a t:

$$w(t) = 2(t^2 + 1)\arctan(t) - \ln e^t$$

$$w(t) = 2(t^2 + 1)\arctan(t) - t$$

Para derivar aplicamos regla del producto y de la suma de derivadas:

$$\frac{dw}{dt} = 4t\arctan(t) + 2(t^2 + 1).\frac{1}{(t^2 + 1)} - 1$$

Finalmente:

$$\frac{dw}{dt} = 4t\arctan(t) + 1$$

Vemos que el resultado coincide con la expresión obtenida mediante la regla de la cadena.